11 ルートの性質

11.1 定理. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス Tを *1* つとる。$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ をそれぞれ G と Tの *Lie* 環とする。

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{t}$ に関するルート空間分解とする。$\beta \in \Delta(G) \cup \{0\}$ と$\alpha \in \Delta(G)$ に対して

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha | p \leq n \leq q\}$$

を満たす整数 p, qが存在し、

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$$

が成り立つ。特に$\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$は整数になる。ただし H_αは G に両側不変 *Riemann* 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をいれ定理 *10.3* と同様に定める。$\alpha \in \Delta(G)$ に対して

$$(\mathbb{R}\alpha) \cap \Delta(G) = \{\alpha, -\alpha\}.$$

$\alpha + \beta \neq 0$ を満たす$\alpha \in \Delta(G),\ \beta \in \Delta(G) \cup \{0\}$ に対して

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つ。

証明. 各$\alpha \in \Delta(G)$ に対して定理 10.3 の証明中に示したことと同様にして

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

を満たす $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$と $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$をとることができる。
　整数 r, s を

$$\begin{aligned}
&\{\beta + n\alpha | r \leq n \leq s\} \subset \Delta(G) \cup \{0\}, \\
&\beta + (r-1)\alpha \notin \Delta(G) \cup \{0\}, \quad \beta + (s+1)\alpha \notin \Delta(G) \cup \{0\}
\end{aligned}$$

となるようにとり

$$\mathfrak{g}^* = \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

とおく。$\mathfrak{g}^*$は$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)$, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{-\alpha})$, $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ の作用に関して不変になる。

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{g}^*}) = \mathrm{tr}([\mathrm{ad}(E_\alpha), E_{-\alpha}]|_{\mathfrak{g}^*}) = 0.$$

他方 $X \in \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$に対して

$$(\mathrm{ad}(H_\alpha))(X) = \sqrt{-1}(\beta + n\alpha)(H_\alpha)X$$

だから

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{g}^*}) = \sum_{n=r}^{s} \sqrt{-1}(\beta + n\alpha)(H_\alpha).$$

したがって

$$(s-r+1)\beta(H_\alpha) + \frac{(s+r)(s-r+1)}{2}\alpha(H_\alpha) = 0.$$

これより

$$\beta(H_\alpha) + \frac{s+r}{2}\alpha(H_\alpha) = 0$$

となり、

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = s + r$$

が成り立つ。他の整数 r', s'で

$$\begin{aligned}
&\{\beta + n\alpha | r' \le n \le s'\} \subset \Delta(G) \cup \{0\}, \\
&\beta + (r'-1)\alpha \notin \Delta(G) \cup \{0\}, \quad \beta + (s'+1)\alpha \notin \Delta(G) \cup \{0\}
\end{aligned}$$

を満たすものがあるとすると、これらも

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = s' + r'$$

を満たすことになり、矛盾がおこる。したがってこのような rと s はαとβに対して一意的に定まるそれを p と qで表せば、

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha | p \le n \le q\}$$

が成り立つ。

すでに示したことを$\beta = 0$ と$\alpha \in \Delta(G)$ に適用する。

$$(\mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha | p \le n \le q\}$$

を満たす整数 p, qが存在し、$p + q = 0$ が成り立つ。$\alpha \in \Delta(G)$ だから $p \le -1$ と $1 \le q$ が成り立っている。

$$\mathfrak{s} = \sum_{n=-1}^{q} \mathfrak{g}_{n\alpha}$$

とおくと、$\mathfrak{s}$ は$\mathrm{ad}\, H_\alpha$と$\mathrm{ad}\, E_\alpha$の作用に関して不変になる。定理 10.3 より$\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ で$\mathrm{ad}\, E_{-\alpha}(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\}$ となるので、$\mathfrak{s}$ は$\mathrm{ad}\, E_{-\alpha}$の作用に関しても不変になる。したがって

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{s}}) = \mathrm{tr}([\mathrm{ad}(E_\alpha), E_{-\alpha}]|_{\mathfrak{s}}) = 0.$$

他方

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{s}}) = \sum_{n=r}^{s} \sqrt{-1} n\alpha(H_\alpha) = \sqrt{-1}\frac{(q+2)(q-1)}{2}\alpha(H_\alpha).$$

$\alpha(H_\alpha) \neq 0$ だから $q=1$ となり $p=-1$。したがって

$$(\mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{-\alpha, 0, \alpha\}$$

がわかった。次に整数ではない $c \in \mathbb{R}$ に対して $c\alpha \in \Delta(G)$ となると仮定して矛盾を導こう。すでに示したことより

$$\mathbb{Z} \ni \frac{2c\alpha(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = 2c$$

となるので、$c = m + \frac{1}{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$ と書き表すことができる。

$$-\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha, \left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha \in \left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha + \mathbb{Z}\alpha\right) \cap (\Delta(G) \cup \{0\})$$

だから$-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha \in \Delta(G)$ となる。ところが、上で示したことを$\frac{1}{2}\alpha \in \Delta(G)$ に適用すると

$$(\mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{-\frac{1}{2}\alpha, 0, \frac{1}{2}\alpha\}$$

となり$\alpha \in \Delta(G)$ に矛盾する。したがって

$$(\mathbb{R}\alpha) \cap \Delta(G) = \{\alpha, -\alpha\}$$

となる。

最後に$\alpha + \beta \neq 0$ を満たす$\alpha \in \Delta(G),\ \beta \in \Delta(G) \cup \{0\}$ に対して

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つことを証明しよう。定理 10.3 より

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

はすでにわかっている。そこで$\alpha + \beta \in \Delta(G)$ の場合を考えれば十分である。

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha | p \leq n \leq q\}$$

とする。$p \leq 0$ で$\beta + \alpha \in \Delta(G)$ だから $1 \leq q$となる。ここで $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$ と仮定して矛盾を導こう。

$$\mathfrak{n} = \sum_{n=p}^{0} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

とおくと $\mathfrak{n}$ は$\mathrm{ad}\, H_\alpha$と$\mathrm{ad}\, E_{-\alpha}$の作用に関して不変になる。さらに仮定 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$ より $\mathfrak{n}$ は$\mathrm{ad}\, E_\alpha$の作用に関しても不変になる。

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{n}}) = \mathrm{tr}([\mathrm{ad}(E_\alpha), E_{-\alpha}]|_{\mathfrak{n}}) = 0.$$

他方

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{n}}) = \sum_{n=p}^{0} \sqrt{-1}(\beta + n\alpha)(H_\alpha) = (-p+1)\beta(H_\alpha) + \frac{(-p+1)p}{2}\alpha(H_\alpha).$$

$-p+1 \neq 0$ だから

$$2\beta(H_\alpha)+p\alpha(H_\alpha)=0$$

となり

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=p$$

が成り立つ。したがって $q=0$ となり矛盾。よって $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq \{0\}$ で、定理 10.3 より $\dim \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}=1$ だから

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つ。

11.2 定義. 定理 *11.1* と同じ設定条件のもとで $\mathfrak{t}$ の基底 $H_1, \ldots, H_r$を *1* つとって固定し $\mathfrak{t}^*$に次のように順序を入れる。$\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$に対してある i が存在し $j<i$ のとき $\alpha(H_j)=\beta(H_j)$ で$\alpha(H_i)=\beta(H_i)$ が成り立つとき$\alpha<\beta$と定める。

$$\Delta^+(G)=\{\alpha \in \Delta(G)|\alpha>0\}$$

とおいて$\Delta^+(G)$ の元を正のルートと呼ぶ。正のルートαに対して$\alpha=\beta+\gamma$となる正のルートβ, γが存在しないとき、αを単純ルートと呼ぶ。

11.3 補題. 定義 *11.2* と同じ設定条件のもとで互いに異なる *2* つの単純ルートαとβに対して$\beta-\alpha \notin \Delta(G)$ で $\langle H_\alpha, H_\beta\rangle \leq 0$ が成り立つ。

証明. もし$\gamma=\beta-\alpha \in \Delta(G)$ が成り立つとして矛盾を導こう。$\beta=\alpha+\gamma$だから$\gamma>0$ ならばβが単純ルートであることに反する。また$\alpha=\beta+(-\gamma)$ だから$\gamma<0$ ならばβが単純ルートであることに反する。したがって$\beta-\alpha \notin \Delta(G)$ が成り立つ。

定理 11.1 より

$$(\beta+\mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\})=\{\beta+n\alpha|p \leq n \leq q\}$$

とおくことができる。上の集合にβは含まれるが、$\beta-\alpha$は含まれない。したがって $p=0$ で $0 \leq q$となる。さらに

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=p+q=q \geq 0$$

となり

$$\langle H_\alpha, H_\beta\rangle=\beta(H_\alpha) \leq 0.$$

11.4 定理. 定義 *11.2* と同じ設定条件のもとで $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルートの全体とする。このとき$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$は線形独立になる。さらに任意の$\alpha \in \Delta(G)$ は

$$\alpha=\sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

と表され、$\alpha>0$ のときはすべての n_iは 0 以上の整数になり、$\alpha<0$ のときはすべての n_iは 0 以下の整数になる。

証明. まず実数 c_iに対して

$$\sum_{i=1}^r c_i \alpha_i=0$$

が成り立っているとする。

$$\begin{aligned}&\{1,\dots,r\} = I \cup J, \qquad I \cap J = \emptyset\\ &i \in I \Longrightarrow c_i \geq 0\\ &j \in J \Longrightarrow c_j \leq 0\end{aligned}$$

となるように Iと Jをとり、

$$\gamma = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{j \in J} (-c_j) \alpha_j$$

とおく。

$$\gamma(H) = \langle H, H_\gamma \rangle \qquad (H \in \mathfrak{t})$$

となるように H_γを定めると、補題 11.3 より

$$0 \leq \langle H_\gamma, H_\gamma \rangle = \sum_{\substack{i \in I\\ j \in J}} c_i(-c_j)\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle \leq 0.$$

したがって $H_\gamma = 0$ となり、$\gamma = 0$ となる。

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{j \in J} (-c_j) \alpha_j = 0$$

で $c_i \geq 0$, $-c_j \geq 0$ だからすべての c_kは 0 に等しくなる。したがって$\alpha_1, \dots, \alpha_r$は線形独立である。

　$\alpha \in \Delta(G)$ に対して$\alpha > 0$ のときはαを正のルートの和に分解していくことにより、

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i$$

と表され、すべての n_iは 0 以上の整数になる。$\alpha < 0$ のときはこの議論を$-\alpha$に適用すればよい。