12 コンパクト半単純 Lie 群

12.1 復習 (昨年度微分幾何学講義ノート第 13 節自己同型群より抜粋). *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の線形変換 p が

$$p([X,Y]) = [p(X),Y] + [X,p(Y)] \quad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき p を $\mathfrak{g}$ の微分と呼ぶ。$\mathfrak{g}$ の微分の全体を $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ で表す。$\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})$ の *Lie* 部分環である。$p \in \mathfrak{d}\,(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ に対して $[p, \mathrm{ad}(X)] = \mathrm{ad}(p(X))$ が成り立つので、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。以下では $\mathfrak{g}$ は有限次元であるとする。$\mathfrak{g}$ の自己同型の全体$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 *Lie* 群になり、その *Lie* 環は $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ である。$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の自己同型群と呼ぶ。$\mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})$ の *Lie* 部分環$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 *Lie* 部分群を $\mathfrak{g}$ の随伴群と呼び$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で表す。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規 *Lie* 部分群である。

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)) \quad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

とおくと Bは $\mathfrak{g}$ 上の対称 *2* 次形式になる。Bを $\mathfrak{g}$ の *Killing* 形式と呼ぶ。

$$H = \{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid B(g(X), g(Y) = B(X,Y)\ (X,Y \in \mathfrak{g})\}$$

とおくと Hは線形 *Lie* 群になり、その *Lie* 環 $\mathfrak{h}$ は

$$\mathfrak{h} = \{T \in \mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g}) \mid B(T(X),Y) + B(X,T(Y)) = 0\ (X,Y \in \mathfrak{g})\}$$

で与えられる。さらに $\mathfrak{g}$ の自己同型群$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は Hの *Lie* 部分群になる。

12.2 定義. 有限次元 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の *Killing* 形式が非退化のとき、$\mathfrak{g}$ を半単純という。半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ が $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルを持たないとき、$\mathfrak{g}$ を単純という。*Lie* 群 G の *Lie* 環が半単純のとき、G を半単純という。

12.3 定理 (E. Cartan). 半単純 *Lie* 環は単純イデアルの直和に分解される。

証明. $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 環とし、Bで $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を表す。

　まず $\mathfrak{g}$ の可換イデアルは $\{0\}$ しかないことを示しておく。$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の可換イデアルとする。$X \in \mathfrak{h}$ と $Y \in \mathfrak{g}$ に対して、$\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$。さらに、$Z \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}\,Y(Z) \in \mathfrak{h}$ だから$\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y(Z) = 0$。よって

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y) = 0.$$

Bは非退化だから $X = 0$ となり $\mathfrak{h} = \{0\}$。

　$\mathfrak{g}_1$を $\mathfrak{g}$ のイデアルとし、

$$\mathfrak{g}_1^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, \mathfrak{g}_1) = \{0\}\}$$

とおく。$X \in \mathfrak{g}_1^{\perp},\ Y \in \mathfrak{g},\ Z \in \mathfrak{g}_1$に対して、$[Y,Z] \in \mathfrak{g}_1$だから

$$B([Y,X],Z) = -B(X,[Y,Z]) = 0.$$

したがって $[Y,Z] \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$となり $\mathfrak{g}_1^{\perp}$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。これより $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1^{\perp}$もまた $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。そこで $X, Y \in \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1^{\perp}$をとると、$Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z]) = 0.$$

Bは非退化だから $[X,Y] = 0$ となり、$\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1^{\perp}$は可換イデアルになる。先に示したことより、$\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1^{\perp} = \{0\}$。よって、$\mathfrak{g}$ はイデアルの直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^{\perp}$に分解される。$B$ のイデアルへの制限はそのイデアルの Killing 形式に一致するので、この操作を繰り返せば、$\mathfrak{g}$ を単純イデアルの直和に分解することができる。

12.4 命題. 半単純 *Lie* 環の単純イデアルによる直和分解は順序を除いて一意的である。

証明. $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 環とすると、定理 12.3 より $\mathfrak{g}$ の単純イデアルによる直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

が存在する。$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の単純イデアルとする。もしすべての i について $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$ とすると、$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \{0\}$ となり特に $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$。これは $\mathfrak{h}$ が単純であることに矛盾する。したがってある i について $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] \neq \{0\}$。$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}_i$はともに $\mathfrak{g}$ のイデアルだから $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i]$ は $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}_i$のイデアルになる。$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}_i$は単純だから $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$となる。つまり、$\mathfrak{g}$ の単純イデアルの全体は $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$になり、分解の一意性がわかる。

12.5 定理. $\mathfrak{g}$ を半単純 *Lie* 環とすると $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ が成り立つ。特に $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の単位元の連結成分に一致し、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は線形 *Lie* 群になる。

証明. 復習 12.1 より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ のイデアルになっている。$\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ の Killing 形式 Bに関する $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ で表すと、$\mathfrak{a}$ もまた $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。定理 12.3 より $\mathfrak{g}$ の中心は $\{0\}$ になるので $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})$ は単射になる。よって $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の同型写像になり、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ も半単純になる。Bの $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ への制限は $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の Killing 形式に一致し、それに関して $\mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の直交補空間になるので $\mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$。復習 12.1 より $p \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}\,(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{ad}(p(X)) = [p, \mathrm{ad}(X)] \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$$

だから $\mathrm{ad}(p(X)) = 0$。よって $p(X) = 0$ がすべての $X \in \mathfrak{g}$ について成り立ち $p = 0$。したがって $\mathfrak{a} = \{0\}$。

$$\begin{aligned} T\ &: \mathfrak{d}\,(\mathfrak{g}) \longrightarrow (\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))^* \\ &; X \longmapsto (Y \longmapsto B(X, Y)) \end{aligned}$$

として線形写像 Tを定めると、$\ker(T) = \mathfrak{a} = \{0\}$ より Tは単射になる。したがって

$$\dim \mathfrak{d}\,(\mathfrak{g}) \leq \dim(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))^* = \dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$$

となり $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ がわかる。

復習 12.1 より $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 Lie 群であり、その Lie 環は $\mathfrak{d}\,(\mathfrak{g})$ に一致するので、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の単位元の連結成分は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ になる。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 内で閉集合になり、線形 Lie 群になる。

12.6 補題. コンパクト半単純 *Lie* 群の *Lie* 環の *Killing* 形式は負定値になる。

証明. G をコンパクト半単純 Lie 群とし G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表し $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B で表す。

仮定より Bは非退化である。命題 2.9 より随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ が直交表現になるような $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する。各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, X$は $\mathfrak{g}$ の交代線形写像になるので、

$$B(X, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, X) \leq 0.$$

したがって Bは負定値になる。

12.7 補題. G を両側不変 *Riemann* 計量を持つ *Lie* 群とし G の *Lie* 環を $\mathfrak{g}$ で表し $\mathfrak{g}$ の *Killing* 形式を Bで表す。さらに G の曲率テンソルと *Ricci* テンソルをそれぞれ $R,\ Ric$ で表すと

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$$
$$Ric(X,Y) = -\frac{1}{4}B(X,Y) \qquad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。

証明. G の共変微分を ∇ で表すと補題 8.2 より $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

次に $e_1,\dots,e_n$を $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とすると

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i,X)Y, e_i\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\langle [[e_i,X],Y], e_i\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \operatorname{ad}X\operatorname{ad}Y(e_i)\rangle \\ &= -\frac{1}{4}B(X,Y). \end{aligned}$$

12.8 定理 (Myers). Mを完備で連結な *Riemann* 多様体とし Mの *Ricci* テンソルを Ric で表す。ある正の定数 c が存在して Mの任意の単位接ベクトル u に対して $Ric(u,u) \geq c$ が成り立つとすると、Mの普遍被覆空間はコンパクトになる。特に M の基本群は有限群になる。

証明. 参考文献の [**C-E**] 第 1 章 9. Ricci curvature and Myers' and Bonnet's Theorems を参照のこと

12.9 定理 (Weyl). コンパクト半単純 *Lie* 群の基本群は有限群になる。

証明. G をコンパクト半単純 Lie 群とし G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表し $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B で表す。補題 12.6 より$-B$は G の両側不変 Riemann 計量になる。$-B$に関する G の Ricci テンソルを Ric で表すと、補題 12.7 より長さ 1 の $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して

$$Ric(X,X) = -\frac{1}{4}B(X,X) = \frac{1}{4}$$

が成り立つ。したがって定理 12.8 より G の基本群は有限群になる。

12.10 系. 連結 *Lie* 群 G の *Lie* 環の *Killing* 形式が負定値ならば、G はコンパクト半単純になる。

証明. G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を Bで表す。Bは負定値だから特に非退化になり、$\mathfrak{g}$ は半単純である。$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の同型写像になるので、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の Lie 環$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ と同一視すると、仮定より$-B$は$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の両側不変 Riemann 計量になる。$-B$に関する$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の Ricci テンソルを Ric で表すと、補題 12.7 より長さ 1 の $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して

$$Ric(X, X) = -\frac{1}{4}B(X, X) = \frac{1}{4}$$

が成り立つ。したがって定理 12.8 より$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ はコンパクトになる。以上で$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ がコンパクト半単純 Lie 群になることがわかった。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の普遍被覆 Lie 群を$\tilde{G}$で表すと、定理 12.9 より$\tilde{G}$もコンパクトになる。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ と G はどちらも $\mathfrak{g}$ を Lie 環として持つ連結 Lie 群なので、$\tilde{G}$は G の普遍被覆 Lie 群にもなる。特に G はコンパクトになる。

12.11 定理. G をコンパクト *Lie* 群とし G の *Lie* 環を $\mathfrak{g}$ で表す。$\mathfrak{g}$ の中心を $\mathfrak{z}$ で表すと、$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とイデアルの直和に分解される。さらに $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に対応する G の連結 *Lie* 部分群はコンパクト半単純 *Lie* 群になる。

証明. G はコンパクトだから命題 2.9 より随伴表現$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ が直交表現になるような $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する。$\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ の直交補空間を $\mathfrak{g}_s$で表す。$\mathfrak{z}$ は$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の作用で不変だから、$\mathfrak{g}_s$ も$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の作用で不変になる。したがって $\mathfrak{g}_s$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して$\mathrm{ad}\, X$は $\mathfrak{g}$ の交代線形写像になるので、

$$B(X, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, X) \leq 0.$$

さらに $B(X, X) = 0$ となる必要十分条件は$\mathrm{ad}\, X = 0$、つまり $X \in \mathfrak{z}$ になる。よって Bの $\mathfrak{g}_s$への制限は負定値になる。$\mathfrak{g}_s$は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから $\mathfrak{g}_s$の Killing 形式は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 Bの $\mathfrak{g}_s$への制限に一致する。したがって系 12.10 より $\mathfrak{g}_s$に対応する G の連結 Lie 部分群はコンパクト半単純 Lie 群になる。

最後に $\mathfrak{g}_s = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成り立つことを示そう。$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_s]$ となるが、定理 12.3 よりこれは $\mathfrak{g}_s$に一致する。

12.12 系. 連結コンパクト *Lie* 群の普遍被覆 *Lie* 群は加法群としての *Euclid* 空間と単連結連結コンパクト単純 *Lie* 群の有限個の積に同型になる。

証明. G を連結コンパクト Lie 群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。定理 12.11 より $\mathfrak{g}$ は中心 $\mathfrak{z}$ と半単純イデアル $\mathfrak{g}_s$の直和に分解される。定理 12.3 より $\mathfrak{g}_s$は単純イデアルの直和 $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$に分解される。$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{z}$ と各 $\mathfrak{g}_i$に対応する G の連結 Lie 部分群を G_z と G_iで表しそれらの普遍被覆 Lie 群を$\tilde{G}_z$と$\tilde{G}_i$で表す。すると$\tilde{G}_z$は加法群としての Euclid 空間に同型になり、各$\tilde{G}_i$は定理 12.11 より単連結連結コンパクト単純 Lie 群になる。

$$\pi_z : \tilde{G}_z \longrightarrow G_z, \qquad \pi_i : \tilde{G}_i \longrightarrow G_i$$

を被覆準同型写像とすると、

$$\pi_z \times \pi_1 \times \cdots \times \pi_k : \tilde{G}_z \times \tilde{G}_1 \times \cdots \times \tilde{G}_k \longrightarrow G$$

は核が離散部分群になる Lie 群の全射準同型写像になるので、$\tilde{G}_z \times \tilde{G}_1 \times \cdots \times \tilde{G}_k$は G の普遍被覆 Lie 群になる。

12.13 系. 定理 *11.4* と同じ設定条件のもとで

$$\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\sum_{\alpha\in\Delta(G)}\mathbb{R}H_\alpha=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}H_{\alpha_i}$$

が成り立つ。特に $H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_r}$ は $\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の基底になる。G が半単純になるための必要十分条件は H_α $(\alpha\in\Delta(G))$ 全体が $\mathfrak{t}$ を生成することである。

証明. 問題を複素化して考えてみる。

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^{\mathbb{C}}&=\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\cap[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]\\&=\sum_{\alpha\in\Delta(G)}\mathbb{C}H_\alpha\quad(\text{定理 }10.3)\\&=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{C}H_{\alpha_i}\quad(\text{定理 }11.4)\end{aligned}$$

となるので

$$\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\sum_{\alpha\in\Delta(G)}\mathbb{R}H_\alpha=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}H_{\alpha_i}$$

が成り立つ。

定理 11.4 より $H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_r}$ は $\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の基底になる。G が半単純になるための必要十分条件は、定理 12.11 より $\mathfrak{t}\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ となり、これは H_α $(\alpha\in\Delta(G))$ 全体が $\mathfrak{t}$ を生成することと同値である。

12.14 例. 例 *10.5* と同じ設定条件のもとで $\mathfrak{st}^*$ は $\Delta(SU(n))=\{f_i-f_j|1\leq i,j\leq n,\ i\neq j\}$ で生成されるので系 *12.13* より $SU(n)$ は半単純になる。