13 ルート系

13.1 定義. Vを有限次元ベクトル空間とし、vをVの 0 ではない元とする。Vの自己同型写像sが次の条件を満たすとき、sをvに関する鏡像と呼ぶ。Sは$s(v) = -v$を満たし、さらに$\dim H = \dim V - 1$となるVのベクトル部分空間Hが存在し各$h \in H$に対して$s(h) = h$。

13.2 補題. Vを有限次元ベクトル空間とし、ΔをVの有限生成系とする。Vの 0 ではない元vに対してΔをΔに写すvに関する鏡像は高々一つしかない。

証明. ΔをΔに写すVの自己同型写像の全体をSで表す。ΔはVの有限生成系だからSは有限群になる。そこでSのVへの作用が等長変換になるようなVの内積$\langle\ ,\ \rangle$をとる。ΔをΔに写すvに関する鏡像sが存在すれば$s \in S$となる。特にsは等長変換になる。鏡像の定義よりsは重複度 1 の固有値-1と重複度$\dim -1$の固有値 1 を持つ。これら二つの固有値の固有空間は互いに直交するのでsはvから一意的に決まる。

13.3 定義. 有限次元ベクトル空間Vの有限部分集合Δが次の条件を満たすとき、ΔをVのルート系と呼ぶ。

(1) ΔはVを生成し、0 を含まない。
(2) $\alpha \in \Delta$に対して$(\mathbb{R}\alpha) \cap \Delta = \{\alpha, -\alpha\}$。
(3) Δの各元αに対してΔをΔに写すαに関する鏡像s_αが存在する。*(*補題 *13.2* よりこの鏡像はαから一意的に定まる。*)*
(4) $\alpha, \beta \in \Delta$に対して$\beta - s_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$が成り立つ。

Vの次元をΔの階数と呼び、Δの元をルートと呼ぶ。

13.4 補題. Gをコンパクト連結 *Lie* 群としGの極大トーラスTを *1* つとる。定理 *10.1* と同じ設定条件のもとで各$\alpha \in \Delta(G)$に対して$(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$の基底$E_\alpha, F_\alpha$が存在し

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)F_\alpha, \quad [H, F_\alpha] = -\alpha(H)E_\alpha, \qquad (H \in \mathfrak{t})$$

が成り立つ。このときGに両側不変 *Riemann* 計量$\langle\ ,\ \rangle$を入れると、

$$\langle E_\alpha, E_\alpha \rangle = \langle F_\alpha, F_\alpha \rangle$$

となる。そこでE_αとF_αを定数倍して単位ベクトルになるようにすると、

$$[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$$

が成り立つ。

証明. $\mathfrak{g}_\alpha$の 0 ではない元X_αをとると、定理 10.3 より$\overline{X}_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$となる。したがって

$$X_\alpha + \overline{X}_\alpha \in (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$$

となる。$H \in \mathfrak{t}$に対して

$$\begin{aligned}[H, X_\alpha + \overline{X}_\alpha] &= \sqrt{-1}\alpha(H)X_\alpha - \sqrt{-1}\alpha(H)\overline{X}_\alpha \\ &= \alpha(H)\sqrt{-1}(X_\alpha - \overline{X}_\alpha).\end{aligned}$$

よって

$$\sqrt{-1}(X_\alpha - \overline{X}_\alpha) \in (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$$

となり

$$\begin{aligned}[H, \sqrt{-1}(X_\alpha - \overline{X}_\alpha)] &= \sqrt{-1}(\sqrt{-1}\alpha(H)X_\alpha + \sqrt{-1}\alpha(H)\overline{X}_\alpha) \\ &= -\alpha(H)(X_\alpha + \overline{X}_\alpha).\end{aligned}$$

そこで

$$E_\alpha = X_\alpha + \overline{X}_\alpha, \quad F_\alpha = \sqrt{-1}(X_\alpha - \overline{X}_\alpha)$$

とおくと E_α, F_αは $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$ の基底になり

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)F_\alpha, \quad [H, F_\alpha] = -\alpha(H)E_\alpha \qquad (H \in \mathfrak{t})$$

が成り立つ。

次に $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha(H)\langle F_\alpha, F_\alpha\rangle &= \langle [H, E_\alpha], F_\alpha\rangle = -\langle E_\alpha, [H, F_\alpha]\rangle \\ &= \alpha(H)\langle E_\alpha, E_\alpha\rangle\end{aligned}$$

となるので、

$$\langle E_\alpha, E_\alpha\rangle = \langle F_\alpha, F_\alpha\rangle$$

が成り立つ。

E_αと F_αを定数倍して単位ベクトルになるようにすると、$H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle [E_\alpha, F_\alpha], H\rangle &= -\langle F_\alpha, [E_\alpha, H]\rangle = \langle F_\alpha, [H, E_\alpha]\rangle \\ &= \langle F_\alpha, \alpha(H)F_\alpha\rangle = \alpha(H)\langle F_\alpha, F_\alpha\rangle \\ &= \langle H_\alpha, H\rangle\end{aligned}$$

となるので、

$$[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$$

が成り立つ。

13.5 補題. *G をコンパクト連結 Lie 群とし G の極大トーラス Tを 1 つとる。定理 10.3 と同じ設定条件のもとで各$\alpha \in \Delta(G)$ に対して $\mathfrak{t}$ における H_αに関する等長的な鏡像を s_αで表すと*

$$s_\alpha(H) = H - \frac{2\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha \quad (H \in \mathfrak{t})$$

となる。さらに G の Weyl 群 $W(G)$(定義 8.11) を $GL(\mathfrak{t})$ の部分群とみなすと (定理 8.10 の証明を参照せよ)、各 s_αは $W(G)$ に含まれる。

証明. まず $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$s_\alpha(H) = H - \frac{2\langle H, H_\alpha\rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle}H_\alpha$$

となる。H_αの定め方より (定理 10.3)、$\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$ だから

$$s_\alpha(H) = H - \frac{2\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha \quad (H \in \mathfrak{t})$$

が成り立つ。

次に補題 13.4 にあるような E_αと F_αをとる。

$$[E_\alpha, H_\alpha] = -\alpha(H_\alpha) F_\alpha, \quad [E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$$

となるので

$$[F_\alpha, H_\alpha] = \alpha(H_\alpha) E_\alpha, \quad [F_\alpha, E_\alpha] = -H_\alpha$$

となるので

$$\left[F_\alpha, \frac{H_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} \right] = \sqrt{\alpha(H_\alpha)} E_\alpha, \quad [F_\alpha, E_\alpha] = -\sqrt{\alpha(H_\alpha)} \frac{H_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}}.$$

したがって

$$\mathrm{Ad}(\exp(tF_\alpha)) \frac{H_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} = \cos(t\sqrt{\alpha(H_\alpha)}) \frac{H_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} - \sin(t\sqrt{\alpha(H_\alpha)}) E_\alpha$$

となり

$$\mathrm{Ad}\left(\exp\left(\frac{\pi F_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} \right) \right) H_\alpha = -H_\alpha.$$

$\alpha(H) = 0$ となる $H \in \mathfrak{t}$ に対しては

$$\mathrm{Ad}\left(\exp\left(\frac{\pi F_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} \right) \right) H = H.$$

そこで

$$n_\alpha = \exp\left(\frac{\pi F_\alpha}{\sqrt{\alpha(H_\alpha)}} \right)$$

とおくと$\mathrm{Ad}(n_\alpha)\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}$ となるので、$n_\alpha \in N(T)$ となる。上で示したことより n_αの代表する $W(G)$ の元の $\mathfrak{t}$ への作用は s_αに一致する。つまり各 s_αは $W(G)$ に含まれることになる。

13.6 定理. *G をコンパクト連結 Lie 群とし G の極大トーラス Tを 1 つとる。定理 11.1 と同じ設定条件のもとで$\Delta(G)$ が生成する $\mathfrak{t}^*$のベクトル部分空間を Vとおくと、$\Delta(G)$ は Vのルート系になる。*

証明. 定義 13.3 の (1) は定め方よりわかる。(2) は定理 11.1 からわかる。

$\alpha \in \Delta(G)$ をとり、補題 13.5 で構成した H_αに関する鏡像 s_αは $W(G)$ の元になるので、ある $n_\alpha \in N(T)$ が存在して s_αは$\mathrm{Ad}(n_\alpha)$ の $\mathfrak{t}$ への作用に一致する。$H \in \mathfrak{t}$ と $X \in \mathfrak{g}_\beta$ ($\beta \in \Delta(G)$) に対して

$$[s_\alpha(H), \mathrm{Ad}(n_\alpha)X] = \mathrm{Ad}(n_\alpha)[H, X] = \sqrt{-1}\beta(H)\,\mathrm{Ad}(n_\alpha)X$$

となるので、$\beta \circ s_\alpha^{-1} = \beta \circ s_\alpha \in \Delta(G)$ となり $\mathrm{Ad}(n_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\beta\circ s_\alpha}$ が成り立つ。$v \in \mathfrak{t}^*$ と $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned} v \circ s_\alpha(H) &= v\left(H - \frac{2\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha\right) \\ &= v(H) - \frac{2\alpha(H)v(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \\ &= \left(v - \frac{2v(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\alpha\right)(H) \end{aligned}$$

となるので

$$s_\alpha^*(v) = v \circ s_\alpha = v - \frac{2v(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\alpha.$$

したがって s_α^* は α に関する鏡像になり、V のベクトル部分空間

$$H = \{v \in V | v(H_\alpha) = 0\}$$

を固定する。さらに s_α^* は $\Delta(G)$ を $\Delta(G)$ に写す。以上で $\Delta(G)$ が定義 13.3 の (3) を満たすことがわかった。

上で示したことより $\alpha, \beta \in \Delta(G)$ に対して

$$\beta - s_\alpha^*(\beta) = \frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\alpha$$

となり、α の係数は定理 11.1 より整数になる。したがって $\Delta(G)$ は定義 13.3 の (4) を満たす。

13.7 定義. *G をコンパクト連結 Lie 群とし G の極大トーラス T を 1 つとる。G の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の T の Lie 環 $\mathfrak{t}$ に関する 0 でないルートの全体 $\Delta(G)$ を G のルート系と呼ぶ。*

13.8 系. *G をコンパクト連結半単純 Lie 群とし G の極大トーラス T を 1 つとる。定理 11.1 と同じ設定条件のもとで $\Delta(G)$ は $\mathfrak{t}^*$ のルート系になる。*

証明. 系 12.13 と定理 13.4 よりわかる。

13.9 補題. *Δ を有限次元ベクトル空間 V のルート系とする。$\alpha, \beta \in \Delta$ に対して*

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\beta,\alpha}\alpha, \quad n_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Z}$$

とおく。Δ を Δ に写す V の自己同型写像の全体を $\mathrm{Aut}(\Delta)$ で表し、$\mathrm{Aut}(\Delta)$ の V への作用が等長変換になるような V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をとる。すると

$$n_{\beta,\alpha} = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

が成り立つ。特に $\langle\beta, \alpha\rangle$ の符号は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ のとり方によらない。

証明. $\alpha \in \Delta$ に対して $s_\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ となるので、s_α は $\langle\ ,\ \rangle$ に関して等長変換になる。したがって

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha \quad (v \in V)$$

となり$\beta \in \Delta$に対して

$$n_{\beta,\alpha} = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

が成り立つ。$n_{\beta,\alpha}$の符号は $\langle\ ,\ \rangle$ のとり方によらないので、$\langle \beta, \alpha \rangle$ の符号も $\langle\ ,\ \rangle$ のとり方によらない。

13.10 定義. Δを有限次元ベクトル空間 Vのルート系とし、$\mathrm{Aut}(\Delta)$ の Vへの作用が等長変換になるような Vの内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をとる。Δが

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = \{0\}$$

となる自明でない分解を持たないとき、Δを既約という。

13.11 命題. Δを有限次元ベクトル空間 Vのルート系とすると、Vの直交直和分解 $V = \oplus V_i$が存在しΔは V_iの既約ルート系Δ_iの合併になる。

証明. もしΔが既約でなければ、Δは

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = \{0\}$$

となる自明でない分解を持つ。そこでΔ_iの生成するベクトル部分空間を V_iとすると、Vは V_1と V_2の直交直和になり、Δ_iは V_iのルート系になる。この操作を繰り返せば結論を得る。