微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/10/2,16

14 コンパクト単純 Lie 群と既約ルート系

14.1 定理. コンパクト半単純連結 *Lie* 群 G が単純であるための必要十分条件は G のルート系$\Delta(G)$ が既約になることである。さらに G の *Lie* 環の単純イデアルによる直和分解が$\Delta(G)$ の既約ルート系による分解に対応する。

証明. G に両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をいれておく。G の極大トーラス Tを一つとりその Lie 環を $\mathfrak{t}$ とする。

G が単純ではないとすると、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は自明でないイデアル $\mathfrak{g}_1$と $\mathfrak{g}_2$の直和に分解される。$\mathfrak{g}_i$に対応する G の連結 Lie 部分群を G_iで表しておく。$X, Y \in \mathfrak{g}_1$と $Z \in \mathfrak{g}_2$に対して

$$\langle [X, Y], Z\rangle = -\langle Y, [X, Z]\rangle = 0$$

となるので、$\langle[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1], \mathfrak{g}_2\rangle = \{0\}$。ところが $\mathfrak{g}_1$は半単純だから $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$となり、$\mathfrak{g}_1$と $\mathfrak{g}_2$は直交する。$X \in \mathfrak{t}$ に対して $X = X_1 + X_2$ $(X_i \in \mathfrak{g}_i)$ と分解すると、任意の $Y \in \mathfrak{t}$ について

$$0 = [X, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y], \quad [X_i, Y] \in \mathfrak{g}_i$$

となるので、$[X_i, Y] = 0$。したがって定理 8.10 より $X_i \in \mathfrak{t}$ となり

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_2)$$

が成り立つ。この直和は直交直和になっている。$T \cap G_i$の単位元の連結成分を T_iで表すと、T_iは G_iの極大トーラスになる。G_iの T_iに関するルート系を$\Delta(G_i)$ で表し、$\Delta(G_i)$ の元を補空間では 0 になるように拡張して $\mathfrak{t}^*$の元とみなすと$\Delta(G_i) \subset \Delta(G)$が成り立つ。さらに$\Delta(G) = \Delta(G_1) \cup \Delta(G_2)$ となるので、$\Delta(G)$ は既約ではない。

逆に$\Delta(G)$ は既約ではないと仮定する。命題 13.11 を使うと $\mathfrak{t}$ の直交直和分解 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$と$\Delta(G)$ の自明ではない分解$\Delta(G) = \Delta_1 \cup \Delta_2$が存在し、$\alpha \in \Delta_1$に対して $\alpha|_{\mathfrak{t}_2} = 0$ となり$\beta \in \Delta_2$に対して$\beta|_{\mathfrak{t}_1} = 0$ となる。特に$\alpha \pm \beta \notin \Delta$が成り立つ。そこで

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{t}_i + \mathfrak{g} \cap \sum_{\alpha\in\Delta_i} \mathfrak{g}_\alpha$$

とおくと、Δ_iの性質と定理 10.3 より $\mathfrak{g}_i$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになり、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$は直和分解になる。したがって $\mathfrak{g}$ は単純ではない。

さらに上で示した分解を繰り返すことによって、G の Lie 環の単純イデアルによる直和分解が$\Delta(G)$ の既約ルート系による分解に対応することがわかる。

14.2 定義. 有限次元ベクトル空間 Vのルート系Δの部分集合Πが次の条件を満たすとき、ΠをΔの基本ルート系と呼ぶ。

(1) Πは Vの基底になる。

(2) 任意の$\beta \in \Delta$は

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$$

と表され、すべての n_αは 0 以上の整数になるか、または、すべての n_αは 0 以下の整数になる。

14.3 命題. コンパクト連結 *Lie* 群のルート系は基本ルート系を持つ。

証明. 定理 11.4 よりコンパクト連結 Lie 群のルート系内の単純ルートの全体は基本ルート系になる。

14.4 補題. 定理 *11.4* と同じ設定条件のもとで単純ルートの全体をΠとおくと、Πに属さない$\Delta(G)$ の正の元βに対してある$\alpha \in \Pi$が存在し$\beta - \alpha \in \Delta(G)$ が成り立つ。

証明. まずある$\alpha \in \Pi$について $\langle H_\beta, H_\alpha \rangle > 0$ が成り立つことを帰謬法で示す。すべての$\alpha \in \Pi$について $\langle H_\beta, H_\alpha \rangle \leq 0$ が成り立つと仮定しよう。補題 11.3 よりΠの互いに異なる元αとα'について $\langle H_\alpha, H_{\alpha'} \rangle \leq 0$ だから定理 11.4 の証明と同様にすると $\Pi \cup \{\beta\}$ は線形独立になり、Πが$\Delta(G)$ の基本ルート系であることに反する。したがってある$\alpha \in \Pi$について $\langle H_\beta, H_\alpha \rangle > 0$ が成り立つ。そこで

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap (\Delta(G) \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha | p \leq n \leq q\}$$

とすると $p \leq 0 \leq q$で、定理 11.1 より

$$-\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$$

が成り立つ。これより $p \leq -1$ となり$\beta \neq \alpha$だから$\beta - \alpha \in \Delta(G)$ が成り立つ。

14.5 補題. 補題 *14.4* と同じ設定条件のもとで$\Delta(G)$ の正の元βに対してΠの元の列$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$が存在し、$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$となり、さらに各 $1 \leq i \leq k$に対して$\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Delta(G)$ が成り立つ。

証明. Πは$\Delta(G)$ の基本ルート系だから$\Delta(G)$ の正の元βに対して

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha, \qquad n_\alpha \in \mathbb{Z}, n_\alpha \geq 0$$

となるので

$$\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha$$

とおく。$\mathrm{ht}(\beta)$ に関する帰納法で補題を証明しよう。$\mathrm{ht}(\beta) = 1$ のときは$\beta \in \Pi$に他ならないので、主張は成立する。$\mathrm{ht}(\beta) \leq k$を満たす正のルート$\beta$に対して主張が成立していると仮定する。$\mathrm{ht}(\beta) = k + 1$ を満たす正のルートβに対して補題 14.4 よりある$\alpha \in \Pi$が存在し$\beta - \alpha \in \Delta(G)$ が成り立つ。$\mathrm{ht}(\beta - \alpha) = k$だから$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Pi$が存在し、$\beta - \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$となり、さらに各 $1 \leq i \leq k$に対して$\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Delta(G)$ が成り立つ。したがって$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha$となり$\beta$に対しても主張が成立する。

14.6 補題. コンパクト連結半単純 *Lie* 群 G に対して定義 *14.4* と同じ設定条件のもとで、$\{\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} | \alpha \in \Pi\}$ は複素 *Lie* 環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$を生成する。

証明. $\{\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} | \alpha \in \Pi\}$ が生成する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の複素 Lie 部分環を $\mathfrak{g}'$で表す。各$\alpha \in \Pi$に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha$となり、系 12.13 より

$$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C}H_\alpha \subset \mathfrak{g}'.$$

補題 14.4 より$\Delta(G)$ の任意の正の元βに対して$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\Pi$が存在し、$\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$となり、さらに各$1\le i\le k$に対して$\alpha_1+\cdots+\alpha_i\in\Delta(G)$ が成り立つ。したがって定理 11.1 より

$$[[\cdots[\mathfrak{g}_{\alpha_1},\mathfrak{g}_{\alpha_2}],\cdots],\mathfrak{g}_{\alpha_k}]=\mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}=\mathfrak{g}_\beta.$$

これより $\mathfrak{g}_\beta\subset\mathfrak{g}'$となる。さらに

$$[[\cdots[\mathfrak{g}_{-\alpha_1},\mathfrak{g}_{-\alpha_2}],\cdots],\mathfrak{g}_{-\alpha_k}]=\mathfrak{g}_{-\beta}.$$

これより $\mathfrak{g}_{-\beta}\subset\mathfrak{g}'$となる。以上で $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$となり、$\{\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}|\alpha\in\Pi\}$ は複素 Lie 環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を生成する。

14.7 定理. G と G'をコンパクト連結単純 *Lie* 群とし、Tと T'をそれぞれ G と G'の極大トーラスとする。G, G', T, T'の *Lie* 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$で表す。このとき $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$が *Lie* 環として同型になるための必要十分条件は、線形同型写像$\phi:\mathfrak{t}'^*\longrightarrow\mathfrak{t}^*$が存在し$\phi(\Delta(G'))=\Delta(G)$ が成り立つことである。

証明. $\psi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$を Lie 環の同型写像とする。系 9.7 より$\psi(\mathfrak{t})=\mathfrak{t}'$とすることができる。そこで${}^t\psi:\mathfrak{t}'^*\longrightarrow\mathfrak{t}^*$を考えると、$\psi$は Lie 環の同型だから${}^t\psi(\Delta(G'))=\Delta(G)$ となる。

逆に線形同型写像$\phi:\mathfrak{t}'^*\longrightarrow\mathfrak{t}^*$が存在し$\phi(\Delta(G'))=\Delta(G)$ が成り立つと仮定する。G と G'は半単純だから定理 14.1 より$\Delta(G)$ と$\Delta(G')$ は既約になる。各$\alpha'\in\Delta(G')$ に対して$\phi(\alpha')=\alpha\in\Delta(G)$ と書くことにする。

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$の Killing 形式の-1 倍を G と G'の両側不変 Riemann 計量としてとり、定理 10.3 と同様にして各$\alpha\in\Delta(G)$ と$\alpha'\in\Delta(G')$ について $H_\alpha\in\mathfrak{t}$ と $H_{\alpha'}\in\mathfrak{t}'$を定める。$\Delta(G)$ は既約だから補題 13.5 より$\mathrm{Aut}(\Delta(G))$ は $\mathfrak{t}$ に既約に作用している。G'についても同様だから補題 1.8 よりある正の定数 c が存在して

$$\beta(H_\alpha)=c\beta'(H_{\alpha'})\quad(\alpha,\beta\in\Delta(G))$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}\beta(H_\alpha)&=\langle H_\alpha,H_\beta\rangle\\&=-\sum_{\gamma\in\Delta(G)}\sqrt{-1}\gamma(H_\alpha)\sqrt{-1}\gamma(H_\beta)\\&=-c^2\sum\gamma'\in\Delta(G')\sqrt{-1}\gamma'(H_{\alpha'})\sqrt{-1}\gamma'(H_{\beta'})\\&=c^2\langle H_{\alpha'},H_{\beta'}\rangle\end{aligned}$$

となるので $c=c^2$となり $c=1$ である。結局

$$\beta(H_\alpha)=\beta'(H_{\alpha'})\quad(\alpha,\beta\in\Delta(G))$$

が成り立つことがわかった。

ϕによって連動するように $\mathfrak{t}'^*$と $\mathfrak{t}^*$に順序をいれ、$\Delta(G')$ の単純ルートの全体Π'が$\Delta(G)$ の単純ルートの全体Πに写るようにする。各$\alpha\in\Delta(G)$, $\alpha\in\Delta(G)$ について 0 ではない $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $X'_{\alpha'}\in\mathfrak{g}'_{\alpha'}$をとる。さらに定理 10.3 より $[X_\alpha,X_{-\alpha}]=$

H_α, $[X_{\alpha'}, X_{-\alpha'}] = H_{\alpha'}$となるように $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $X_{-\alpha'} \in \mathfrak{g}_{-\alpha'}$を選ぶことができる。これらを使って $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の元

$$\overline{X}_\alpha = (X_\alpha, X_{\alpha'}), \quad \overline{X}_{-\alpha} = (X_{-\alpha}, X_{-\alpha'}), \quad \overline{H}_\alpha = (H_\alpha, H_{\alpha'})$$

を定める。

$$\{\overline{X}_\alpha, \overline{X}_{-\alpha}, \overline{H}_\alpha | \alpha \in \Pi\}$$

が生成する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の複素 Lie 部分環を $\mathfrak{d}$ で表す。

次に$\Delta(G)$ と$\Delta(G')$ の最高ルートはϕによって対応するので、それぞれδとδ'としておく。$X \in \mathfrak{g}_\delta$と $X' \in \mathfrak{g}_{\delta'}$をとり、$\overline{X} = (X, X')$ とおく。

$$\{\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_k})\overline{X} | \alpha_i \in \Pi\}$$

が生成する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の複素 Lie 部分環を $\mathfrak{m}$ で表す。

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_k})\overline{X} \in \mathfrak{g}_{\delta - \Sigma\alpha_i} \oplus \mathfrak{g}_{\delta' - \Sigma\alpha'_i}$$

だから $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$。

$[\mathfrak{d}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ となることを示そう。そのためには $\mathfrak{d}$ の生成元と $\mathfrak{m}$ のブラケットを考えればよい。$\alpha \in \Pi$に対して

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha})\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

となることは、$\mathfrak{m}$ の定義からわかる。

$$\mathrm{ad}(\overline{H}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_k})\overline{X} \in \mathfrak{m}$$

となることを kに関する帰納法で示そう。$k = 0$ のときは $\mathfrak{m}$ の定義からわかる。kのとき主張が成り立っていると仮定しよう。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}(\overline{H}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_{k+1}})\overline{X} \\
=&\,\mathrm{ad}([\overline{H}_\alpha, \overline{X}_{-\alpha_1}])\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_2}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_{k+1}})\overline{X} \\
&+ \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1})\,\mathrm{ad}(\overline{H}_\alpha) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_{k+1}})\overline{X}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
[\overline{H}_\alpha, \overline{X}_{-\alpha_1}] &= ([H_\alpha, X_{-\alpha_1}], [H'_\alpha, X_{-\alpha'_1}]) \\
&= (-\sqrt{-1}\alpha(H_\alpha)X_{-\alpha_1}, -\sqrt{-1}\alpha'(H_{\alpha'})X_{-\alpha'_1}) \\
&= -\sqrt{-1}\alpha(H_\alpha)\overline{X}_{-\alpha_1}
\end{aligned}$$

となることと帰納法の仮定を使うと、

$$\mathrm{ad}(\overline{H}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_{k+1}})\overline{X} \in \mathfrak{m}$$

となることがわかる。

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_k})\overline{X} = 0$$

となることを示そう。各α_iについて補題 11.3 より$\alpha - \alpha_i \notin \Delta(G)$ で$\alpha' - \alpha'_i \notin \Delta(G')$ だから

$$[\overline{X}_\alpha, \overline{X}_{-\alpha_i}] = 0$$

となり

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_i}) = \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_i})\,\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)$$

が成り立つ。さらにδとδ'はそれぞれ$\Delta(G)$ と$\Delta(G')$ の最高ルートだから$\delta+\alpha \notin \Delta(G)$ と$\delta' + \alpha' \notin \Delta(G')$ が成り立つ。したがって$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)\overline{X} = 0$ となり、

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)\,\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1})\cdots\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_k})\overline{X} = 0.$$

以上で $[\mathfrak{d}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ となることがわかった。

$\mathfrak{d} \neq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$となることを示す。もし $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$とすると、上で示したことより $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$のイデアルになる。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$と $\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の複素単純イデアルになっているので、命題 12.4 の証明と同様にすると $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$または $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$となるが、$\mathfrak{m}$ の定義のし方からこうなることはない。

$\mathfrak{d} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$から $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$への射影を f_1で表す。f_1は Lie 環の準同型写像になる。$\mathfrak{d}$ の定め方より $f_1(\mathfrak{d})$ は $\{\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} | \alpha \in \Pi\}$ を含むので、補題 14.6 より $f_1(\mathfrak{d}) = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$が成り立つ。$f_1 : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$が単射になることを示そう。もし単射ではないとすると、ある 0 ではない元 $(0, x') \in \mathfrak{d}$ が存在する。$[\mathfrak{d}, (0, x')]$ は $\mathfrak{d}$ に含まれ、$\mathfrak{d}$ の定め方と補題 14.6 より $[\mathfrak{d}, (0, x')]$ は $0 \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$のイデアルになる。したがって $[\mathfrak{d}, (0, x')] = 0 \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$が成り立つ。これより $0 \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{d}$。第一成分が 0 ではない元 $(x_1, x_2) \in \mathfrak{d}$ をとると $(0, x_2) \in \mathfrak{d}$ となり

$$(x_1, 0) = (x_1, x_2) - (0, x_2) \in \mathfrak{d}$$

となり、上の議論と同様にすると $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus 0 \subset \mathfrak{d}$ が成り立つ。よって $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$となりさきに示したことに矛盾する。以上で $f_1 : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$は Lie 環の同型写像になる。同様にすると $\mathfrak{d}$ から第二成分への射影 $f_2 : \mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$も Lie 環の同型写像になる。

$f_2 \circ f_1^{-1} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$は Lie 環の同型写像になり、$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}'$に写している。よって $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$は Lie 環として同型になる。