15 既約ルート系と Dynkin 図形

15.1 命題. ΔとΔ'をそれぞれ有限次元ベクトル空間 Vと V'のルート系とする。補題 *13.9* と同様に、$\alpha, \beta \in \Delta$に対して $n_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Z}$、$\alpha', \beta' \in \Delta'$に対して $n_{\beta',\alpha'} \in \mathbb{Z}$ を定める。ΠとΠ'をそれぞれΔとΔ'の基本ルート系とする。ΠからΠ'への全単射ϕで

$$n_{\beta,\alpha} = n_{\phi(\beta),\phi(\alpha)} \quad (\alpha, \beta \in \Pi)$$

を満たすものが存在すれば、ϕは一意的に線形同型写像$\phi : V \longrightarrow V'$に拡張され、$\phi(\Delta) = \Delta'$と

$$n_{\beta,\alpha} = n_{\phi(\beta),\phi(\alpha)} \quad (\alpha, \beta \in \Delta)$$

を満たす。

証明. ルート系の Weyl 群に関する準備が必要になるので、ここでは証明しない。詳しくは、たとえば参考文献の [**B-D**] 第 5 章 5.2 Dynkin diagrams を参照のこと

15.2 定義. Δを有限次元ベクトル空間 Vのルート系とし、ΠをΔの基本ルート系とする。補題 *13.9* と同様に、$\alpha, \beta \in \Delta$に対して $n_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Z}$ を定めておく。各$\alpha \in \Pi$を頂点$\circ$で表し、αと$\beta \in \Pi$に対応する頂点を $n_{\beta,\alpha}n_{\alpha,\beta}$本の線分で結んだグラフを$\Delta$の *Coxeter* グラフと呼ぶ。

15.3 例. 例 *10.5* と *12.14* と同じ設定条件のもとで $SU(n)$ のルート系について考える。

$$\Delta(SU(n)) = \{f_i - f_j | 1 \le i, j \le n,\ i \ne j\}$$

となっているので、$\alpha_i = f_i - f_{i+1}$とおいて

$$\Pi = \{\alpha_i | 1 \le i \le n-1\}$$

とするとΠは$\Delta(SU(n))$ の基本ルート系になる。

$$\langle f_i - f_j, f_k - f_l \rangle = \delta_{i,k} + \delta_{j,l} - \delta_{i,l} - \delta_{j,k}$$

となる内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{t}^*$にいれると、これは不変内積になる。したがって補題 *13.9* より $i < j$のとき

$$\begin{aligned} n_{j,i} &= n_{\alpha_j,\alpha_i} = \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -\delta_{j,i+1} \\ n_{i,j} &= -\delta_{j,i+1} \end{aligned}$$

となるので、$SU(n)$ のルート系の *Coxeter* グラフは

となる。

15.4 例. 回転群 $SO(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}\,(n)$ とすると

$$\mathfrak{o}\,(n) = \{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R}) |\ {}^tX + X = 0\}$$

となるので、

$$\mathfrak{o}\,(n)^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{C}) |\ {}^tX + X = 0\}$$

となる。$SO(n)$ の極大トーラスは n が偶数の場合と奇数の場合で事情が異なるので、以下の議論は場合わけをして行う。まず n が偶数の場合は $n = 2k$とし、

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 & & & \\ \sin t_1 & \cos t_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos t_k & -\sin t_k \\ & & & \sin t_k & \cos t_k \end{bmatrix} \middle|\ t_i \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq k) \right\}$$

とおくと Tは $SO(2k)$ の極大トーラスになる。1 から n までの i, jに対して (i, j) 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような n 次正方行列を $E_{i,j}$で表し、$H_i = E_{2i,2i-1} - E_{2i-1,2i}$とおく。すると Tの Lie 環 $\mathfrak{t}$ は

$$\mathfrak{t} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{R}H_i$$

となる。$F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$とおき

$$G^+_{i,j} = F_{2i-1,2j-1} + F_{2i,2j} + \sqrt{-1}(F_{2i-1,2j} - F_{2i,2j-1})$$
$$G^-_{i,j} = F_{2i-1,2j-1} - F_{2i,2j} + \sqrt{-1}(F_{2i-1,2j} + F_{2i,2j-1})$$

とする。

$$H = \sum_{i=1}^{k} t_i H_i \in \mathfrak{t}$$

に対して

$$[H, G^+_{i,j}] = \sqrt{-1}(t_i - t_j)G^+_{i,j} \qquad (i \neq j)$$
$$[H, G^-_{i,j}] = -\sqrt{-1}(t_i + t_j)G^+_{i,j} \qquad (i < j)$$
$$[H, G^-_{i,j}] = \sqrt{-1}(t_i + t_j)G^+_{i,j} \qquad (i > j).$$

そこで

$$e_i : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{R}; H = \sum_{i=1}^{k} t_i H_i \longmapsto t_i$$

とおくと $e_i \in \mathfrak{t}^*$となり

$$\Delta(SO(2k)) = \{\pm(e_i \pm e_j) | 1 \leq < j \leq k\}$$

がわかる。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= e_i - e_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq k-1) \\ \alpha_k &= e_{k-1} + e_k \end{aligned}$$

とおいて

$$\Pi = \{\alpha_i | 1 \leq i \leq k\}$$

とするとΠは$\Delta(SO(2k))$ の基本ルート系になる。$\{e_i\}$ が正規直交基底になる内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{t}^*$ にいれると、これは不変内積になる。したがって補題 *13.9* より $i < j \leq k-1$ のとき

$$\begin{aligned} n_{j,i} &= n_{\alpha_j,\alpha_i} = \frac{2\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = -\delta_{j,i+1} \\ n_{i,j} &= -\delta_{j,i+1} \end{aligned}$$

となり、$i \leq k-1$ のとき

$$\begin{aligned} n_{i,k} &= n_{\alpha_i,\alpha_k} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k, \alpha_k\rangle} = -\delta_{k,i+2} \\ n_{k,i} &= -\delta_{k,i+2} \end{aligned}$$

となるので、$SO(2k)$ のルート系の *Coxeter* グラフは

となる。次に n が奇数の場合は $n = 2k+1$ とし、

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 & & & & \\ \sin t_1 & \cos t_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos t_k & -\sin t_k & \\ & & & \sin t_k & \cos t_k & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \middle| \ t_i \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq k) \right\}$$

とおくと Tは $SO(2k+1)$ の極大トーラスになる。$SO(2k)$ で使った記号をそのまま使うと Tの *Lie* 環 $\mathfrak{t}$ は

$$\mathfrak{t} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{R}H_i$$

となる。

$$H = \sum_{i=1}^{k} t_i H_i \in \mathfrak{t}$$

に対して

$$[H, G_{i,j}^+] = \sqrt{-1}(t_i - t_j)G_{i,j}^+ \qquad (i \neq j)$$

$$[H, G^-_{i,j}] = -\sqrt{-1}(t_i + t_j)G^+_{i,j} \qquad (i < j)$$
$$[H, G^-_{i,j}] = \sqrt{-1}(t_i + t_j)G^+_{i,j} \qquad (i > j)$$

が成り立つのは $SO(2k)$ の場合と同じである。さらに

$$D^{\pm}_i = F_{2i-1,2k+1} \pm \sqrt{-1}F_{2i,2k+1}$$

とすると

$$[H, D^{\pm}_i] = \sqrt{-1}t_i D^{\pm}_i \qquad (1 \leq i \leq k).$$

したがって

$$\Delta(SO(2k+1)) = \{\pm(e_i \pm e_j) | 1 \leq < j \leq k\} \cup \{\pm e_i | 1 \leq < j \leq k\}$$

がわかる。

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq k-1)$$
$$\alpha_k = e_k$$

とおいて

$$\Pi = \{\alpha_i | 1 \leq i \leq k\}$$

とするとΠは$\Delta(SO(2k+1))$ の基本ルート系になる。$\{e_i\}$ が正規直交基底になる内積 $\langle\, ,\, \rangle$ を $\mathfrak{t}^*$ にいれると、これは不変内積になる。したがって補題 *13.9* より $i < j \leq k-1$ のとき

$$n_{j,i} = n_{\alpha_j,\alpha_i} = \frac{2\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = -\delta_{j,i+1}$$
$$n_{i,j} = -\delta_{j,i+1}$$

となり、$i \leq k-1$ のとき

$$n_{i,k} = n_{\alpha_i,\alpha_k} = \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k, \alpha_k\rangle} = -2\delta_{k,i+1}$$
$$n_{k,i} = -\delta_{k,i+1}$$

となるので、$SO(2k+1)$ のルート系の *Coxeter* グラフは

となる。