微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/11/13

16 コンパクト等質空間における Peter-Weyl の定理

16.1 注意. この節は第 *1* 部のコンパクト位相群の表現に属し、第 *7* 節 *Peter-Weyl* の定理に続くものである。

16.2 補題. コンパクト位相群 G に対して命題 *6.2* で定めた表現 $(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty))$ を使うことにする。Kを G の閉部分群とし

$$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K = \{f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) | \tau(e,k)f = f \ (k \in K)\}$$

とおくと、$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$は$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の閉部分ベクトル空間になり $(\tau(*,e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \|\ \|_\infty))$ は G の表現になる。自然な射影$\pi : G \longrightarrow G/K$によって G/Kに商位相をいれ、$a \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K)$ に対して

$$(\alpha(g)a)(\pi(x)) = a \circ \pi(g^{-1}x) \qquad (x, g \in G)$$

とすると$\alpha(g)a \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K)$ となる。これによって $(\alpha, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K), \|\ \|_\infty))$ は G の表現になり、上で定めた表現 $(\tau(*,e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \|\ \|_\infty))$ と同値になる。

証明. 各 $k \in K$について写像

$$C_k : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G); f \longmapsto \tau(e,k)f - f$$

は命題 6.2 より連続線形写像になる。したがって

$$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K = \bigcap_{k \in K} C_k^{-1}(0)$$

は閉部分ベクトル空間になる。$f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$と $g \in G, k \in K$に対して

$$\tau(e,k)\tau(g,e)f = \tau(g,e)\tau(e,k)f = \tau(g,e)f$$

だから$\tau(g,e)f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$となり、$(\tau(*,e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \|\ \|_\infty))$ は G の表現になる。

$g \in G$ に対して

$$g : G/K \longrightarrow G/K; \pi(x) \longmapsto \pi(gx)$$

とみなすと、gは商位相の定め方より G/Kの位相同型写像になる。$\alpha(g)a = a \circ g^{-1}$だから$\alpha(g)a \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K)$ となる。命題 6.2 と同様にすると $(\alpha, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K), \|\ \|_\infty))$ が G の表現になることがわかる。

$$A : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K; f \longmapsto f \circ \pi$$

とおくと$\pi \circ \tau(e,k) = \pi$だから A の像は$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$に含まれる。さらに A は線形同型写像になる。また

$$\|A(f)\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K))$$

が成り立つので、A は Banach 空間の同型写像になる。さらに $g \in G$ と $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G/K)$ に対して

$$A(\alpha(g)f) = \alpha(g)f \circ \pi = f \circ g^{-1} \circ \pi = f \circ \pi L_g^{-1} = \tau(g,e)(f \circ \pi) = \tau(g,e)(A(f))$$

となるので、A は表現の間の同型写像になる。

16.3 補題. Kをコンパクト位相群 G の閉部分群とし

$$L^2(G)_K = \{f \in L^2(G) | \tau(e,k)f = f \ (k \in K)\}$$

とおくと、$L^2(G)_K$は $L^2(G)$ の閉部分ベクトル空間になり、$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$は $L^2(G)_K$内で稠密になる。さらに $(\tau(*,e), (L^2(G)_K, \| \ \|_\infty))$ は G の表現になる。

証明. 各 $k \in K$について写像

$$C_k : L^2(G) \longrightarrow L^2(G); f \longmapsto \tau(e,k)f - f$$

は命題 6.2 より連続線形写像になる。したがって

$$L^2(G)_K = \bigcap_{k \in K} C_k^{-1}(0)$$

は閉部分ベクトル空間になる。

$f \in L^2(G)_K$と $g \in G, k \in K$に対して

$$\tau(e,k)\tau(g,e)f = \tau(g,e)\tau(e,k)f = \tau(g,e)f$$

だから$\tau(g,e)f \in L^2(G)_K$となり、$(\tau(*,e), L^2(G)_K)$ は G の表現になる。

最後に$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$が $L^2(G)_K$内で稠密になることを示そう。νを Kの Haar 測度とし、

$$(P_K f)(x) = \int_K f(xk) d\nu k \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), x \in G)$$

によって写像

$$P_K : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)$$

を定めると、命題 6.7 と同様にして P_Kは連続線形写像になる。$k \in K$に対して $\tau(e,k)P_K = P_K$だから、$P_K(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)) \subset \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$が成り立つことがわかる。$f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$に対して

$$\begin{aligned}
\|P_K f\|^2 &= \int_G |P_K f(x)|^2 d\mu x \\
&= \int_G \left| \int_K f(xk) d\nu k \right|^2 d\mu x \\
&\leq \int_G \left(\int_K |f(xk)| d\nu k \right)^2 d\mu x \\
&\leq \int_G \int_K |f(xk)|^2 d\nu k d\mu x \qquad (\text{Cauchy-Schwarz の不等式}) \\
&\leq \int_K \int_G |f(xk)|^2 d\mu x d\nu k \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

となるので

$$\|P_K f\| \leq \|f\| \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$$

が成り立ち、P_Kは一意的に連続線形写像

$$P_K : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

に拡張することができる。

$$P_K f(x) = \int_K f(xk) d\nu k \qquad (f \in L^2, x \in G)$$

となる。特に $L^2(G)_K$上 P_Kは恒等写像になる。任意の $f_1 \in L^2(G)_K$と$\varepsilon > 0$ に対してある $f_2 \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ が存在し

$$\|f_1 - f_2\| \leq \varepsilon$$

が成り立つので、

$$\|f_1 - P_K(f_2)\| = \|P_K(f_1 - f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\| \leq \varepsilon.$$

ここで $P_K(f_2) \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$だから、$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$は $L^2(G)_K$内で稠密になる。

16.4 定理 (Frobenius の相互律). Kをコンパクト位相群 G の閉部分群とし、(ρ, V) を G の有限次元複素表現とする。

$$V_K^* = \{\phi \in V^* | \rho^*(k)\phi = \phi \ (k \in K)\}$$

とおいて、写像 $B_\rho : \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K) \longrightarrow V_K^*$を

$$B_\rho(\Phi)(v) = \Phi(v)(e) \qquad (\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K), v \in V)$$

によって定めると、B_ρは$\mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K)$ から V_K^*への線形同型写像になる。

証明. まず B_ρの像が V_K^*に入ることを確かめる。$\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K), v \in V, k \in K$に対して

$$\begin{aligned} B_\rho(\Phi)(\rho(k)v) &= \Phi(\rho(k)v)(e) = (\tau(k,e)\Phi(v))(e) \\ &= \Phi(v)(k^{-1}) = \Phi(v)(e) \\ &= B_\rho(\Phi)(v) \end{aligned}$$

となるので $B_\rho(\Phi) \in V_K^*$。B_ρの定め方から B_ρが線形写像になることがわかる。

$B_\rho(\Phi) = 0$ とすると、$v \in V$と $x \in G$ に対して

$$\Phi(v)(x) = (\tau(x^{-1}, e)\Phi(v))(e) = \Phi(\rho(x)^{-1}v)(e) = B_\rho(\Phi)(\rho(x)^{-1}v) = 0$$

となり、$\Phi = 0$。したがって B_ρは単射である。

$\phi \in V_K^*$に対して

$$\Phi(v)(x) = \phi(\rho(x)^{-1}v) \qquad (v \in V, x \in G)$$

によって$\Phi \in \mathrm{Hom}(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$ を定める。$k \in K$に対して

$$\Phi(v)(xk) = \phi(\rho(xk)^{-1}v) = \phi(\rho(k)^{-1}\rho(x)^{-1}v)\phi(\rho(x)^{-1}v) = \Phi(v)(x)$$

だから$\Phi(v) \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$となり、$\Phi \in \mathrm{Hom}(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K)$。また $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \Phi(\rho(g)v)(x) &= \phi(\rho(x)^{-1}\rho(g)v) = \phi(\rho(g^{-1}x)^{-1}v) \\ &= \Phi(v)(g^{-1}x) = (\tau(g,e)\Phi(v))(x) \end{aligned}$$

となるので$\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K)$。$\Phi$の定め方より $B_\rho(\Phi) = \phi$となり B_ρは全射になる。

16.5 定義. Kをコンパクト位相群 G の閉部分群とし、(ρ, V) を G の有限次元複素既約表現とする。

$$V_K = \{v \in V | \rho(k)v = v \ (k \in K)\}$$

とおき、$V_K \neq \{0\}$ のとき表現 (ρ, V) を対 (G, K) の球表現と呼ぶ。$\dim V_K$を球表現 (ρ, V) の重複度と呼ぶ。

16.6 命題. Kをコンパクト位相群 G の閉部分群とし、(ρ, V) を (G, K) の球表現とする。G を V_K^*に自明に作用させ、$(\rho \otimes 1, V \otimes V_K^*)$ を G の表現とみなす。このとき写像 $A_\rho : V \otimes V_K^* \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$を

$$A_\rho(v \otimes v^*)(x) = v^*(\rho(x)^{-1}v) \qquad (x \in G, v \in V, v^* \in V_K^*)$$

によって定めると、A_ρは $(1 \otimes \rho, V \otimes V_K^*)$ から $(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \| \ \|_\infty))$ への単射 G 準同型写像になり、同時に $(1 \otimes \rho, V \otimes V_K^*)$ から $(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \langle \ , \ \rangle))$ への G 準同型写像にもなる。さらに G の *2* つの球表現 (ρ, V) と (σ, W) が同値ならば、$A_\rho(V \otimes V_K^*) = A_\sigma(W \otimes W_K^*)$ となる。

証明. この命題のほとんどの主張は既に命題 6.3 で証明されている。A_ρの像が$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$に含まれることを示そう。$x \in G, v \in V, v^* \in V_K^*, k \in K$に対して

$$\begin{aligned} A_\rho(v \otimes v^*)(xk) &= v^*(\rho(xk)^{-1}v) = v^*(\rho(k)^{-1}\rho(x)^{-1}v) \\ &= v^*(\rho(x)^{-1}v) = A_\rho(v \otimes v^*)(x). \end{aligned}$$

したがって $A_\rho(v \otimes v^*) \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$となる。

16.7 定理. Kをコンパクト位相群 G の閉部分群とする。(G, K) の球表現の同値類の全体を $D_{\mathbb{C}}(G, K)$ で表すと

$$(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \| \ \|_\infty)) \simeq \oplus_{[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G,K)} (\rho \otimes 1, V \otimes V_K^*)$$
$$(\tau(*, e), L^2(G)_K) \simeq \oplus_{[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G,K)} (\rho \otimes 1, V \otimes V_K^*) : \text{ユニタリ直和}$$

が成り立つ。

証明. 定理 7.2(Peter-Weyl) より $(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty))$ は G の複素既約表現の直和に分解されるので、単射 G 準同型写像 C_ρを

$$C_\rho : V \otimes \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K ; v \otimes \Phi \longmapsto \Phi(v)$$

によって定めると

$$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K \simeq \oplus_{[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G)} V \otimes \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K)$$

が成り立つ。定理 16.4 より

$$1 \otimes B_\rho : V \otimes \mathrm{Hom}_G(V, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K) \longrightarrow V \otimes V_K^*$$

は G 同型写像になる。$v \in V, v^* \in V_K^*, x \in G$ に対して

$$C_\rho((1 \otimes B_\rho^{-1})(v \otimes v^*))(x) = ((B_\rho^{-1}(v^*))(v))(x)$$

$$= v^*(\rho(x)^{-1}v) \quad (\text{定理 16.4 の証明の計算})$$
$$= A_\rho(v \otimes v^*)(x)$$

となるので $C_\rho((1 \otimes B_\rho^{-1})(V \otimes V_K^*)) = A_\rho(V \otimes V_K^*)$ が成り立ち、

$$(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K, \| \|_\infty)) \simeq \oplus_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G,K)}(\rho \otimes 1, V \otimes V_K^*)$$

となる。

補題 16.3 より $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_K$は $L^2(G)_K$内で稠密になるので、$L^2(G)_K$のユニタリ直和分解

$$(\tau(*, e), L^2(G)_K) \simeq \oplus_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G,K)}(\rho \otimes 1, V \otimes V_K^*)$$

も導かれる。