第 3 部 コンパクト Lie 群の表現

17 ウェイト空間分解

17.1 定理. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス T を *1* つとる。$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ をそれぞれ G と T の *Lie* 環とする。(ρ, V) を G の有限次元複素表現とし、

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \rho_*(H)v = \sqrt{-1}\lambda(H)v \ (H \in \mathfrak{t}\,)\} \qquad (\lambda \in \mathfrak{t}^*)$$
$$W(\rho, V) = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* | V_\lambda \neq \{0\}\}$$

とおくと、

$$V = \sum_{\lambda \in W(\rho,V)} V_\lambda$$

が成り立ち、右辺の和は直和になる。

証明. 表現$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ を Tに制限した表現$\rho : T \longrightarrow GL(V)$ を定理 2.10 により既約分解し

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \oplus_{i=1}^n V_i$$

とする。命題 4.2 より各 V_iは 1 次元になる。$T \cong T^k$とし Tと T^kを同一視すると定理 4.6 より各 V_iについて $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ が存在し

$$\mathrm{Ad}(t_1, \ldots, t_k)|_{V_i} = t^{m_1} \cdots t^{m_k} \qquad (t = (t_1, \ldots, t_k) \in T)$$

となる。Tの指数写像は

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{t}\, = \mathbb{R}^k &\longrightarrow T = T^k \\ ; (x_1, \ldots, x_k) &\longmapsto (e^{\sqrt{-1}x_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}x_k})\end{aligned}$$

だから

$$\lambda_i(x_1, \ldots, x_k) = m_1 x_1 + \cdots + m_k x_k \qquad ((x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{t}\,)$$

とおくと、$\lambda_i \in \mathfrak{t}^*$で

$$\rho_*(H)v = \sqrt{-1}\lambda_i(H)v \qquad (v \in V_i)$$

が成り立つ。これより $V_i \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$となり$\lambda_i \in W(\rho, V)$。よって

$$V = \sum_{\lambda \in W(\rho,V)} V_\lambda$$

は直和分解になる。

17.2 定義. 定理 *17.1* において $V_\lambda \neq \{0\}$ となる$\lambda \in \mathfrak{t}^*$を (ρ, V) の $\mathfrak{t}$ に関するウェイトと呼び、V_λをλのウェイト空間と呼ぶ。また、直和分解

$$V = \sum_{\lambda \in W(\rho,V)} V_\lambda$$

を (ρ, V) の $\mathfrak{t}$ に関するウェイト空間分解と呼ぶ。ウェイトλに対して $m_\lambda = \dim V_\lambda$を$\lambda$の重複度と呼ぶ。

17.3 注意. 第 *10* 節で定義したルートは随伴表現のウェイトということになる。ルートの場合は 0 を除いて重複度は必ず 1 であったが *(*定理 *10.3)*、一般のウェイトの重複度は 1 になるとは限らない。

17.4 例. ユニタリ群 $U(n)$ について例 *10.4* と同じ設定条件のもとで $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$への自然な作用$\iota : U(n) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ について考えよう。i 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような n 次元縦ベクトルを E_iで表す。すると $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\iota_* \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} E_i = \sqrt{-1}x_i E_i.$$

そこで例 *10.4* で定めた e_iを使うと

$$W(\iota, \mathbb{C}^n) = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$$

がわかる。さらに上の計算より

$$\mathbb{C}^n_{e_i} = \mathbb{C}E_i$$

となり

$$\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}E_i$$

が $(\iota, \mathbb{C}^n)$ の $\mathfrak{t}$ に関するウェイト空間分解になる。

17.5 命題. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス Tを *1* つとる。$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ をそれぞれ G と Tの *Lie* 環とする。(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) を G の有限次元複素表現とすると

$$W(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2) = W(\rho_1, V_1) \cup W(\rho_2, V_2)$$
$$W(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2) = \{\lambda_1 + \lambda_2 | \lambda_1 \in W(\rho_1, V_1),\ \lambda_2 \in W(\rho_2, V_2)\}$$

が成り立つ。また (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) が同値ならば $W(\rho_1, V_1) = W(\rho_2, V_2)$ となる。

証明. $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ のウェイト空間分解は

$$V_1 \oplus V_2 = \sum_{\lambda_1 \in W(\rho_1, V_1)} V_{\lambda_1} \oplus \sum_{\lambda_2 \in W(\rho_2, V_2)} V_{\lambda_2}$$

となるので

$$W(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2) = W(\rho_1, V_1) \cup W(\rho_2, V_2)$$

が成り立つ。

テンソル積の定義より $H \in \mathfrak{t}$, $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$に対して

$$((\rho_1 \otimes \rho_2)_*(H))(v_1 \otimes v_2) = ((\rho_1)_*(H)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ((\rho_2)_*(H)v_2)$$

となるので、$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}^*$に対して

$$(V_1)_{\lambda_1} \otimes (V_2)_{\lambda_2} \subset (V_1 \otimes V_2)_{\lambda_1+\lambda_2}$$

が成り立つ。したがって

$$V_1 \otimes V_2 = \sum_{\substack{\lambda_1 \in W(\rho_1,V_1) \\ \lambda_1 \in W(\rho_1,V_1)}} (V_1)_{\lambda_1} \otimes (V_2)_{\lambda_2} \subset \sum_{\substack{\lambda_1 \in W(\rho_1,V_1) \\ \lambda_1 \in W(\rho_1,V_1)}} (V_1 \otimes V_2)_{\lambda_1+\lambda_2}$$

となるので

$$V_1 \otimes V_2 = \sum_{\substack{\lambda_1 \in W(\rho_1,V_1) \\ \lambda_1 \in W(\rho_1,V_1)}} (V_1 \otimes V_2)_{\lambda_1+\lambda_2}.$$

これより

$$W(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2) = \{\lambda_1 + \lambda_2 | \lambda_1 \in W(\rho_1, V_1),\ \lambda_2 \in W(\rho_2, V_2)\}$$

がわかる。

$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$を G 同型写像とする。$X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$に対して

$$((\rho_2)_* X)\varphi v = \varphi((\rho_1)_* X)v$$

となるので、$\lambda \in \mathfrak{t}^*$に対して

$$\varphi((V_1)_\lambda) = (V_2)_\lambda$$

となる。したがって $W(\rho_1, V_1) = W(\rho_2, V_2)$ となる。

17.6 定理. $G,\ T,\ \mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ については定理 *17.1* と同じ設定条件のもとで、

$$\mathfrak{t}_e = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$$
$$\Lambda(G) = \bigcup_{[\rho,V] \in D_{\mathbb{C}}(G)} W(\rho, V)$$

とおくと

$$\Lambda(G) = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* | \ \lambda(\mathfrak{t}_e) \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$
$$\mathfrak{t}_e = \{H \in \mathfrak{t} \mid \Lambda(G)H \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$

が成り立つ。

証明. $[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G),\ \lambda \in W(\rho, V),\ v \in V_\lambda$と $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\rho_*(H)v = \sqrt{-1}\lambda(H)v$$

となるので

$$\rho(\exp H)v = e^{\sqrt{-1}\lambda(H)}v$$

が成り立つ。

そこで $H \in \mathfrak{t}_e$とすると$\exp H = e$ だから $e^{\sqrt{-1}\lambda(H)} = 1$ となり$\lambda(H) \in 2\pi\mathbb{Z}$。したがって

$$\Lambda(G) \subset \{\lambda \in \mathfrak{t}^* | \ \lambda(\mathfrak{t}_e) \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$
$$\mathfrak{t}_e \subset \{H \in \mathfrak{t} \mid \Lambda(G)H \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$

となる。

以下でそれぞれの逆の包含関係を示す。$\lambda \in \mathfrak{t}^*$が$\lambda(\mathfrak{t}_e) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ を満たすとする。$\chi : T \longrightarrow \mathbb{C}$ を$\chi(\exp H) = e^{\sqrt{-1}\lambda(H)}$によって定めることができ、$\chi$は準同型写像になる。

$$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi = \{f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) | \ f(gt^{-1}) = f(g)\chi(t) \ (g \in G, t \in T)\}$$

とおく。$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi$は $(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty))$ の G 不変閉部分空間になる。したがって $(\tau(*, e), (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi, \| \ \|_\infty))$ も G の複素表現になる。Tの Haar 測度をνで表し、写像

$$\varphi : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi$$

を

$$(\varphi(f))(g) = \int_T f(gt)\chi(t)d\nu t \qquad (g \in G, \ f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$$

によって定める。すると $s \in T$に対して

$$\begin{aligned}
(\varphi(f))(gs^{-1}) &= \int_T f(gs^{-1}t)\chi(t)d\nu t \\
&= \int_T f(gs^{-1}t)\chi(s^{-1}t)\chi(s)d\nu t \\
&= \int_T f(gt)\chi(t)d\nu t\chi(s) \\
&= (\varphi(f))(g)\chi(s)
\end{aligned}$$

となるので$\varphi(f)$ は$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi$に含まれる。$T$上の連続関数$\overline{\chi}$を G 全体に連続に拡張した関数を$\overline{\chi}'$とすると、

$$(\varphi(\overline{\chi}'))(e) = \int_T \overline{\chi}'(t)\chi(t)d\nu t = \int_T |\chi|^2 d\nu = 1 \neq 0$$

となるので、$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi \ni \varphi(\overline{\chi}') \neq 0$ で $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi \neq \{0\}$。そこで Peter-Weyl の定理より $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi$内に G 不変既約部分空間 Vをとることができる。$V \neq \{0\}$ だから $f(e) \neq 0$ となる Vの元 fが存在する。この fに対して

$$f^\natural(g) = \int_T f(tg)\chi(t)d\nu t \qquad (g \in G)$$

とおく。ここで

$$f(tg)\chi(t) = \chi(t)(\tau(t^{-1}, e)f)(g) \qquad (g \in G)$$

で$\chi(t)\tau(t^{-1}, e)f \in V$だから $f^\natural \in V$となる。さらに $f \in V \subset \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)_\chi$だから

$$f^\natural(e) = \int_T f(t)\chi(t)d\nu t = \int_T f(e)d\nu f(e) \neq 0$$

となり $f^\natural \neq 0$。また $s \in T$に対して

$$\begin{aligned}(\tau(s,e)f^\natural)(g) &= f^\natural(s^{-1}g) \\ &= \int_T f(ts^{-1}g)\chi(t)d\nu t \\ &= \int_T f(ts^{-1}g)\chi(ts^{-1})\chi(s)d\nu t \\ &= \int_T f(tg)\chi(t)d\nu t\chi(s) \\ &= \chi(s)f^\natural(g)\end{aligned}$$

となるので

$$\tau(s,e)f^\natural = \chi(s)f^\natural$$

が成り立つ。χの定め方より

$$\tau(\exp H, e)f^\natural = e^{\sqrt{-1}\lambda(H)}f^\natural \qquad (H \in \mathfrak{t}\,)$$

となる。この式を微分すると $f^\natural \in V_\lambda$となり$\lambda \in \Lambda(G)$ がわかる。以上で

$$\Lambda(G) = \{\lambda \in \mathfrak{t}^{\,*} |\ \lambda(\mathfrak{t}_{\,e}) \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$

を示すことができた。

$H \in \mathfrak{t}$ が$\Lambda(G)H \subset 2\pi\mathbb{Z}$ を満たすとする。このとき任意の $[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G)$, $\lambda \in W(\rho, V)$ と $v \in V_\lambda$について

$$\rho(\exp H) = e^{\sqrt{-1}\rho_*(H)}v = e^{\sqrt{-1}\lambda(H)}v = v$$

となり、定理 17.1 より Vはウェイト空間の直和になるので

$$\rho(\exp H)w = w \qquad (w \in V)$$

が成り立つ。これが任意の $[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G)$ について成り立つのだから、Peter-Weyl の定理より

$$\tau(\exp H, e)f = f$$

が任意の $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ について成り立つ。特に

$$f(e) = (\tau(\exp H, e)f)(e) = f(\exp(-H))$$

となり$-H$は$\mathfrak{t}_{\,e}$に含まれる。したがって $H \in \mathfrak{t}_{\,e}$となる。以上で

$$\mathfrak{t}_{\,e} = \{H \in \mathfrak{t} \mid \Lambda(G)H \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$$

を示すことができた。

17.7 注意. 定理 *17.6* において

$$\Lambda(G) = \cup\{W(\rho, V)|\ (\rho, V) \text{ は } G \text{ の有限次元複素表現 }\}$$

となることが、定理 *2.10* と命題 *17.5* からわかる。