## 18 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現

**18.1 補題.** $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の元 $H, X, Y$ を

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、これらは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底になり、

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H$$

を満たす。

証明. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は二次複素正方行列 $X$ で $\mathrm{tr}\, X = 0$ を満たすものの全体だから、$H, X, Y$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底になる。また直接計算することにより

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H$$

を確かめることができる。

**18.2 命題.** $\lambda_j = j(k-j+1)$ $(1 \leq j \leq k)$ とおき、線形写像 $\rho_k : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ を

$$\rho_k(H) = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -k \end{bmatrix} \quad (j,j) \text{ 成分は } k+2-j \qquad (1 \leq j \leq k+1)$$

$$\rho_k(X) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_{k-1} & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_k \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho_k(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

によって定めると、$\rho_k$ は *Lie* 環の準同型写像になり、$(\rho_k, \mathbb{C}^{k+1})$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の複素既約表現になる。

証明. まず

$$\begin{aligned} [\rho_k(H), \rho_k(X)] &= 2\rho_k(X) = \rho_k([H, X]) \\ [\rho_k(H), \rho_k(Y)] &= -2\rho_k(Y) = \rho_k([H, Y]) \end{aligned}$$

となる。次に

$$[\rho_k(X), \rho_k(Y)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k - \lambda_{k-1} & \\ & & & & -\lambda_k \end{bmatrix}$$

$$= \rho_k(H) = \rho_k([X, Y])$$

となるので$\rho_k$は Lie 環の準同型写像になる。

次に $i$ 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような $k+1$ 次元縦ベクトルを$E_i$で表す。すると

$$\begin{aligned}
&\rho_k(X)E_1 = 0 \\
&\rho_k(X)E_{i+1} = \lambda_i E_i \qquad (1 \leq i \leq k) \\
&\rho_k(Y)E_i = E_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq k) \\
&\rho_k(Y)E_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

そこで $V$を $\{0\}$ ではない $\mathbb{C}^{k+1}$の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 不変部分空間とする。$V$の 0 ではない元 $v$ をとる。

$$v = \sum_{i=1}^{k+1} a_i E_i$$

とおく。

$$i_0 = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$$

とすると上でみた$\rho_k(Y)$ の作用より

$$V \ni \rho_k(Y)^{k+1-i_0} v = a_{i_0} E_{k+1}$$

となるので $E_{k+1}$は $V$に含まれる。したがって上でみた$\rho_k(X)$ の作用を $E_{k+1}$に施すことによって $V = \mathbb{C}^{k+1}$となることがわかる。以上で $(\rho_k, \mathbb{C}^{k+1})$ が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の複素既約表現になることがわかった。

**18.3 補題.** $(\rho, V)$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の有限次元複素表現とし、$V$の 0 ではないある元 $v_0$が $\rho(H)$ の固有値$\lambda$の固有ベクトルになっているとする。

(1) 0 以上の整数 $k$に対して

$$\begin{aligned}
\rho(H)\rho(X)^k v_0 &= (\lambda + 2k)\rho(X)^k v_0 \\
\rho(H)\rho(Y)^k v_0 &= (\lambda - 2k)\rho(Y)^k v_0
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) $\rho(X)v_0 = 0$ が成り立つとき、0 以上の整数 $k$に対して $v_k = \rho(Y)^k v_0$とおくと

$$\rho(X)v_k = k(\lambda + 1 - k)v_{k-1}$$

が 1 以上の整数 $k$に対して成り立つ。

証明. (1) $k$に関する帰納法で

$$\rho(H)\rho(X)^k v_0 = (\lambda + 2k)\rho(X)^k v_0$$

を証明する。$k = 0$ のとき

$$\rho(H)v_0$$

は仮定より成り立つ。$k$のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(X)^{k+1}v_0 &= \rho(H)\rho(X)\rho(X)^k v_0\\ &= \rho([H,X])\rho(X)^k v_0 + \rho(X)\rho(H)\rho(X)^k v_0\\ &= 2\rho(X)^{k+1}v_0 + (\lambda+2k)\rho(X)^{k+1}v_0\\ &= (\lambda+2(k+1))\rho(X)^{k+1}v_0\end{aligned}$$

となるので、$k+1$ のときも成立する。

$$\rho(H)\rho(Y)^k v_0 = (\lambda-2k)\rho(Y)^k v_0$$

も同様に証明することができる。
(2) $k$に関する帰納法で証明する。$k=1$ のときは

$$\begin{aligned}\rho(X)v_1 &= \rho(X)\rho(Y)v_0\\ &= \rho([X,Y])v_0 + \rho(Y)\rho(X)v_0\\ &= \rho(H)v_0\\ &= \lambda v_0\end{aligned}$$

となり成立する。$k$のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}\rho(X)v_{k+1} &= \rho(X)\rho(Y)v_k\\ &= \rho([X,Y])v_k + \rho(Y)\rho(X)v_k\\ &= \rho(H)v_k + \rho(Y)k(\lambda+1-k)v_{k-1}\\ &= (\lambda-2k)v_k + k(\lambda+1-k)v_k\\ &= (k+1)(\lambda-k)v_k\end{aligned}$$

となるので、$k+1$ のときも成立する。

**18.4 定理.** $(\rho, V)$ を $\mathfrak{sl}\,(2,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現とし、$\dim V = k+1$ とおく。すると、$\rho$は$\rho_k$と同値になる。

証明. $V$は複素数体上のベクトル空間だから

$$\rho(H)v = \mu v$$

となる複素数$\mu$と $V$の 0 ではない元 $v$が存在する。すると補題 18.3 より

$$\rho(H)\rho(X)^k v = (\mu+2k)\rho(X)^k v.$$

したがって$\rho(X)^k v$は$\rho(H)$ の相異なる固有値の固有ベクトルになる。$V$は有限次元だからある $k_0$があり、

$$\rho(X)^{k_0}v \neq 0, \qquad \rho(X)k_0+1v = 0$$

となる。そこで

$$v_0 = \rho(X)^{k_0}v, \qquad \lambda = \mu + 2k_0$$

とおくと

$$\rho(H)v_0 = \lambda v_0, \qquad \rho(X)v_0 = 0$$

となる。自然数 $k$に対して

$$v_k = \rho(Y)^k v_0$$

とおくと補題 18.3 より $v_k$は$\rho(H)$ の相異なる固有値の固有ベクトルになる。$V$は有限次元だからある $l$があり、$v_l \neq 0,\ v_{l+1} = 0$ となる。

$$W = \sum_{k=0}^{l} \mathbb{C} v_k$$

とおくと $W$は$\rho(\mathfrak{sl}\ (2, \mathbb{C})$ 不変部分ベクトル空間になる。$(\rho, V)$ は $\mathfrak{sl}\ (2, \mathbb{C})$ の複素既約表現だから、$W = V$となる。したがって $l = k$で、$\{v_0, v_1, \ldots, v_l\}$ は $V$の基底になる。この基底に関する$\rho(H), \rho(X), \rho(Y)$ の表現行列は、命題 18.2 で定めた $rho_k(H), \rho_k(X), \rho_k(Y)$ と等しくなるので、対応 $v_i \longmapsto E_{i+1}$から定まる $V$と $\mathbb{C}^{k+1}$の間の線形同型は $(\rho, V)$ と $(\rho_k, \mathbb{C}^{k+1})$ の表現としての同型になる。