微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/12/25

19 ウェイトの性質

この節では以下の設定条件のもとで議論する。G を両側不変 Riemann 計量を持っているコンパクト連結 Lie 群とし Tを G の 1 つの極大トーラスとする。これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ で表す。$\mathfrak{t}^*$に定義 11.2 のように順序を入れておく。(ρ, V) を G の有限次元複素表現とする。

19.1 補題. $\alpha \in \Delta(G)$ と$\lambda \in W(\rho, V)$ に対して

$$\rho_*(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$$

が成り立つ。

証明. $X \in \mathfrak{g}_\alpha, v \in V_\lambda, H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned}
\rho_*(H)\rho_*(X)v &= \rho_*(X)\rho_*(H)v + \rho_*([H, X])v \\
&= \rho_*(X)\sqrt{-1}\lambda(H)v + \sqrt{-1}\alpha(H)\rho_*(X)v \\
&= \sqrt{-1}(\lambda + \alpha)(H)\rho_*(X)v
\end{aligned}$$

となるので$\rho_*(X)v \in V_{\lambda+\alpha}$となり、

$$\rho_*(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$$

が成り立つ。

19.2 補題. $\alpha \in \Delta(G)$ と$\lambda \in W(\rho, V)$ に対して

$$(\lambda + \mathbb{Z}\alpha) \cap W(\rho, V) = \{\lambda + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$$

を満たす整数 p, qが存在し、

$$-\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$$

が成り立つ。特に$\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$は整数になる。

証明. まず

$$H = -\frac{2\sqrt{-1}}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$$

とおく。次に定理 10.3 より $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha$だから、

$$[X, Y] = -\frac{2\sqrt{-1}}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha = H$$

が成り立つように、$X \in \mathfrak{g}_\alpha$と $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$をとることができる。すると

$$\begin{aligned}
[H, X] &= \sqrt{-1}\alpha(H)X = 2X \\
[H, Y] &= -\sqrt{-1}\alpha(H)Y = -2Y
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y + \mathbb{C}H$$

とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の複素 Lie 部分環になり、しかも $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型になる。

$$p' = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \lambda + n\alpha \in W(\rho, V)\}$$

$$q' = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid \lambda + n\alpha \in W(\rho, V)\}$$

とおく。$\lambda + q'\alpha \in W(\rho, V)$ だから $V_{\lambda+q'\alpha} \neq \{0\}$ となり、0 ではない v_0 を $V_{\lambda+q'\alpha}$ からとることができる。そこで

$$v_i = \rho_*(Y)^i v_0 \qquad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、補題 18.3 より各 v_i は 0 でない限り $\rho_*(H)$ の相異なる固有値の固有ベクトルになるので一次独立になる。V は有限次元だからある i_0 が存在して $v_{i_0} = 0$ と $v_{i_0-1} \neq 0$ を満たす。さらに補題 18.3 より各 i について

$$\rho_*(X)v_i = i(\sqrt{-1}(\lambda - q'\alpha)(H) - i + 1)v_{i-1}$$

となるので、

$$\sqrt{-1}(\lambda - q'\alpha)(H) = i_0 - 1.$$

ここで

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}(\lambda - q'\alpha)(H) &= \sqrt{-1}\lambda(H) + 2q' \\ &= \frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} + 2q' \end{aligned}$$

となるので、$0 \leq i \leq \frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} + 2q'$ に対して

$$0 \neq v_i \in V_{\lambda+(q'-i)\alpha}.$$

したがって $-\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} - q' \leq n \leq q'$ に対して

$$\lambda + n\alpha \in W(\rho, V)$$

となる。これより

$$p' \leq -\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} - q'$$

となり

$$p' + q' \leq -\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

$-\alpha \in \Delta(G)$ について同様の議論をすると

$$-p' - q' \leq -\frac{-2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$$

となり

$$p' + q' \geq -\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

したがって

$$p' + q' = -\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

が成り立つ。さらに上で示したことより

$$(\lambda + \mathbb{Z}\alpha) \cap W(\rho, V) = \{\lambda + n\alpha \mid p' \leq n \leq q'\}$$

となる。

19.3 定理. (ρ, V) を G の有限次元複素既約表現とし$\lambda \in W(\rho, V)$ の最高ウェイトとする。

(1) $\dim V_\lambda = 1$.

(2) 0 以上の整数全体を $\mathbb{Z}^+$で表し、$\Delta^+(G) = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ とする。V_λの 0 ではない元 vに対して

$$V = \{\rho_*(X_{-\beta_1})^{n_1} \cdots \rho_*(X_{-\beta_l})^{n_l} v \mid n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}^+\}_{\mathbb{C}}$$

が成り立つ。

(3) $\Delta(G)$ の単純ルート系を $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする。このとき各$\mu \in W(\rho, V)$ に対してある $m_i \in \mathbb{Z}^+$が存在し

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$$

となる。

証明. G は連結だから (ρ, V) が G の表現として既約であることと、(ρ_*, V) が $\mathfrak{g}$ の表現として既約であることは同値になる。さらにこれは (ρ_*, V) が $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の表現として既約であることと同値になる。$\mathfrak{t}$ の基底を $\{H_1, \ldots, H_r\}$ とすると、

$$W = \{\rho_*(X_1) \cdots \rho_*(X_k) v \mid X_i \text{は } X_{\pm\beta_a} \text{ または } H_b\}_{\mathbb{C}}$$

は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の作用で不変な複素部分空間になる。したがって既約性より Wは Vに一致する。Lie 環の普遍包絡環に関する Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より、Wの生成元の全体は

$$\rho_*(X_{-\beta_1})^{n_1} \cdots \rho_*(X_{-\beta_l})^{n_l} \rho_*(X_{\beta_1})^{m_1} \cdots \rho_*(X_{\beta_l})^{m_l} \rho_*(H_1)^{a_1} \cdots \rho_*(H_r)^{a_r} v$$

という形に変形できる。

$$\rho_*(H_i) v = \sqrt{-1} \lambda(H_i) v$$

だから、生成元の全体は

$$\rho_*(X_{-\beta_1})^{n_1} \cdots \rho_*(X_{-\beta_l})^{n_l} \rho_*(X_{\beta_1})^{m_1} \cdots \rho_*(X_{\beta_l})^{m_l} v$$

に一致する。さらに補題 19.1 とλが最高ウェイトであることから

$$\rho_*(X_{\beta_j}) v \in V_{\lambda + \beta_j} = \{0\}$$

となるので、生成元の全体は

$$\rho_*(X_{-\beta_1})^{n_1} \cdots \rho_*(X_{-\beta_l})^{n_l} v$$

に一致する。以上で (2) を示すことができた。

補題 19.1 より

$$\rho_*(X_{-\beta_1})^{n_1} \cdots \rho_*(X_{-\beta_l})^{n_l} v$$

は$\lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \beta_i$のウェイト空間に含まれる。定理 11.4 を使うと各$\mu \in W(\rho, V)$ に対してある $m_i \in \mathbb{Z}^+$が存在し

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$$

となることがわかる。

Vの生成元の形と補題 19.1 より V_λに含まれる元は vの定数倍のみになる。したがって$\dim V_\lambda = 1$ が成り立つ。