微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1992/2/5,12

21 さらに知りたい人へ

この節では以下の設定条件のもとで議論する。G を両側不変 Riemann 計量を持っているコンパクト連結 Lie 群とし Tを G の 1 つの極大トーラスとする。これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ で表す。$\mathfrak{t}^*$に定義 11.2 のように順序を入れておく。

21.1. *Weyl* の指標公式 (定理 20.15) を証明するためには、次の *Weyl* の積分公式が必要になる。μとνをそれぞれ G と Tの *Haar* 測度とする。G 上の連続関数 fに対して

$$\int_G f d\mu = \frac{1}{|W(G)|}\int_T \left[\det(1_{G/T} - \mathrm{Ad}(t^{-1}))\int_G f(gtg^{-1})d\nu g\right] d\nu t$$

が成り立つ。fが類関数の場合は

$$\int_G f d\mu = \frac{1}{|W(G)|}\int_T \det(1_{G/T} - \mathrm{Ad}(t^{-1}))f(t)d\nu t$$

となる。定理 *20.15* において指標の単位元での値を調べることにより、

$$\dim V = \prod_{\alpha\in\Delta^+(G)} \frac{\langle\alpha, \lambda+\rho\rangle}{\langle\alpha,\rho\rangle}$$

が成り立つことがわかる。これを *Weyl* の次元公式という。

21.2. G の有限次元複素既約表現の全体を次のように記述することができる。

$$K = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* \mid \lambda(H_\alpha) > 0\ (\alpha \in \Delta^+(G))\}$$

とおくと、G の有限次元複素既約表現の最高ウェイトは$\bar{K}\cap\Lambda(G)$ に含まれる。逆に $\gamma\in\bar{K}\cap\Lambda(G)$ に対して$\bar{c}(\gamma+\rho)$ は G のある有限次元複素既約表現の指標になる。特にその表現の最高ウェイトはγになる。そこで

$$Ch_{\mathbb{C}}(G)_T = \{\chi|_T \mid \chi\in Ch_{\mathbb{C}}(G)\}$$

とおくと、写像

$$C : \bar{K}\cap\Lambda(G) \longrightarrow Ch_{\mathbb{C}}(G)_T; \gamma \longmapsto \bar{c}(\gamma+\rho)$$

が定まり、Cは$\bar{K}\cap\Lambda(G)$ と

$$\{\chi_\lambda|_T \mid [V,\lambda]\in D_{\mathbb{C}}(G)\}$$

の間の全単射を与える。この対応で$\bar{K}\cap\Lambda(G)$ と $D_{\mathbb{C}}(G)$ の間に一対一対応ができる。さらに G が単連結の場合には、ある$\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\bar{K}\cap\Lambda(G)$ が存在し、任意の $\lambda\in\bar{K}\cap\Lambda(G)$ に対して

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i\lambda_i \qquad (n_i\in\mathbb{Z}, n_i\geq 0)$$

と表示できる。$\lambda_1,\dots,\lambda_r$を基本ウェイトと呼び、対応する G の有限次元複素既約表現を基本既約表現と呼ぶ。多項式環 $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_r]$ の元 X_iに $Ch_{\mathbb{C}}(G)_T$の元$\bar{c}(\lambda_i+\rho)$ を対応させる対応を環の準同型写像$\bar{C}$に拡張すると

$$\bar{C} : \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_r] \longrightarrow Ch_{\mathbb{C}}(G)_T \cong Ch_{\mathbb{C}}(G) \cong R_{\mathbb{C}}(G)$$

は環の同型写像になる。

21.3. コンパクト単連結 *Lie* 群の有限次元複素表現については、*21.2* に書いた方法で全体を把握することができる。単連結でない場合を考えるためには、その群の局所同型類の中で同型類の全体を把握する必要がある。

$$\Gamma_u = \sum_{\alpha\in\Delta(G)} \mathbb{Z}\frac{4\pi}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$$
$$\Gamma_a = \{H \in \mathfrak{t} \mid \alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}\ (\alpha\in\Delta(G))\}$$

とおくと

$$\Gamma_u \subset \mathfrak{t}_e \subset \Gamma_a$$

が成り立つ。前半の包含関係は補題 *20.13* で示した。G の基本群を$\pi_1(G)$ で表し、中心を $Z(G)$ で表すと

$$\pi_1(G) \cong \mathfrak{t}_e/\Gamma_u, \qquad Z(G) \cong \Gamma_a/\mathfrak{t}_e$$

となる。$\mathfrak{g}$ が半単純の場合はΓ_aも $\mathfrak{t}$ の離散部分群になり、Γ_a/Γ_uは有限可換群になる。$\mathfrak{g}$ に対応する単連結コンパクト *Lie* 群を$\tilde{G}$で表す。

$$\Gamma_u \subset \Gamma \subset \Gamma_a$$

を満たす部分群Γに対して$\tilde{G}/\exp(\Gamma)$ は $\mathfrak{t}_e = \Gamma$を満たす。上の条件を満たすΓをすべて見つけることは、Γ_a/Γ_uの部分群をすべて見つけることと同値になる。Γ_uに対応する *Lie* 群は$\tilde{G}$になり、Γ_aに対応する *Lie* 群は$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ になる。次のような図式で以上の対応を考えることができる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma_u & \subset & \mathfrak{t}_e & \subset & \Gamma_a & & \\
| & & | & & | & & \\
\tilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) & = & \mathrm{Ad}(G)
\end{array}$$

ただし$\longrightarrow$は被覆写像を表している。

G の有限次元複素既約表現をすべて求めるためには、$\tilde{G}$の有限次元複素既約表現をすべて求め、その内で$\tilde{G}$の部分群 $\exp(\mathfrak{t}_e)$ に核が含まれる表現をすべて取り出せばよい。

21.4. G を *Lie* 群とし、Kをその閉 *Lie* 部分群とする。G が等質空間 $M = G/K$上のベクトル束 Eに *Lie* 変換群として作用し、$x \in M$に対して $g \in G$ は x での Eのファイバー E_xから gx でのファイバー E_{gx}への線形同型写像になっているとき、Eを M 上の等質ベクトル束と呼ぶ。

等質空間上の等質ベクトル束は次のようにして Kの有限次元表現から構成することができる。(E_0, τ) を Kの有限次元表現とする。Kは $G \times E_0$に

$$(g, v)k = (gk, \tau(k)^{-1}v) \qquad (g \in G, v \in E_0, k \in K)$$

によって右から作用する。この作用の商空間を $G \times_\tau E_0$で表し、

$$p : G \times_\tau E_0 \longrightarrow G/K; [g, v] \longmapsto gK$$

とすると、$G \times_\tau E_0$は p を射影とし E_0を標準ファイバーとする $M = G/K$上のベクトル束になる。さらに作用 $g[g', v] = [gg', v]$ によって $G \times_\tau E_0$は $M = G/K$上の等質ベクトル束になる。以上で Kの有限次元表現に対して M上の等質ベクトル束が対応する。逆に M上の等質ベクトル束 Eに対して、$k \in K$は Mの原点 o を動かさないので線形同型写像$\gamma(k) : E_o \longrightarrow E_o$を誘導し$\gamma(k) \in GL(E_o)$ となる。$\gamma : K \longrightarrow GL(E_o)$ は Kの表現になり (E_o, γ) から定まる等質ベクトル束 $G \times_\gamma E_o$は元の等質ベクトル束 Eと同型になる。これらのことから $M = G/K$上の等質ベクトル束が定める量を対応する表現に関する量で表すことが重要になる。