微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/5/15　改訂 1991/11/6

## 6 関数空間上の表現

**6.1 補題.** $G$ をコンパクト位相群とする。$G$ の単位元 $e$ の任意の近傍 $U$に対して

$$xVx^{-1} \subset U \qquad (x \in G)$$

を満たす $e$ の近傍 $V$が存在する。

証明. 連続写像 $F$を

$$F : G \times G \longrightarrow G; (x, y) \longmapsto xyx^{-1}$$

によって定める。$F(G \times \{e\}) = \{e\}$ で $G$ はコンパクトだから、$e$ の近傍 $V$が存在し $F(G \times V) \subset U$となる。$F$の定義より任意の $x \in G$ に対して $xVx^{-1} \subset U$が成り立つ。

**6.2 命題.** $G$ をコンパクト位相群とし

$$(\tau(g,h)f)(x) = f(g^{-1}xh) \qquad (g, h \in G,\ f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ x \in G)$$

とすると$\tau(g,h)f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ となる。これによって $(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty))$ は $G \times G$ の表現になり、$(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \langle\ ,\ \rangle))$ は $G \times G$ のユニタリ表現になる。さらに各 $g, h \in G$ に対して

$$\tau(g,h) : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$$

は一意的に連続線形同型写像

$$\tau(g,h) : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

に拡張することができ、$(\tau, L^2(G))$ も $G \times G$ のユニタリ表現になる。

証明. $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ g, h \in G$ に対して $G$ は位相群だから$\tau(g,h)f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ となる。また $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ g, h \in G$ に対して

$$\|\tau(g,h)f_1\|_\infty = \|f_1\|_\infty, \qquad \langle \tau(g,h)f_1, \tau(g,h)f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

が成り立つので、$\tau(g,h)$ は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$ と $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \langle\ ,\ \rangle)$ の連続線形同型写像になる。さらに

$$\tau(g_1g_2, h_1h_2)f = \tau(g_1, h_1)\tau(g_2, h_2)f \qquad (g_1, g_2, h_1, h_2 \in G,\ f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$$

が成り立つ。

$$G \times G \times (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty); (g, h, f) \longmapsto \tau(g,h)f$$

が連続になることを示そう。$(g_1, h_1, f_1) \in G \times G \times \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ をとる。$f_1$は一様連続だから任意の$\varepsilon > 0$ に対して $G$ の単位元の近傍 $U$が存在して

$$yx^{-1} \in U \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす。補題 6.1 と群演算の連続性より $e$ の近傍 $V$が存在し、

$$u, v \in V,\ w \in G \Longrightarrow uwvw^{-1} \in U.$$

そこで $g_2 \in g_1 V^{-1}, h_2 \in V h_1, f_2 \in B_{\varepsilon/2}(f_1)$ とすると $g_2^{-1} g_1 \in V, h_2 h_1^{-1} \in V$となり、

$$\begin{aligned} & g_2^{-1} x h_2 (g_1^{-1} x h_1)^{-1} = g_2^{-1} x h_2 h_1^{-1} x^{-1} g_1 \\ =& g_2^{-1} g_1 (g_1^{-1} x) h_2 h_1^{-1} (g_1^{-1} x)^{-1} \in U. \end{aligned}$$

各 $x \in G$ について

$$\begin{aligned} & |(\tau(g_1, h_1) f_1)(x) - (\tau(g_2, h_2) f_2)(x)| \\ =& |f_1(g_1^{-1} x h_1) - f_2(g_2^{-1} x h_2)| \\ \leq& |f_1(g_1^{-1} x h_1) - f_1(g_2^{-1} x h_2)| + |f_1(g_2^{-1} x h_2) - f_2(g_2^{-1} x h_2)| \\ \leq& \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって $\|\tau(g_1, h_1) f_1 - \tau(g_2, h_2) f_2\|_\infty < \varepsilon$となり $(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty))$ は $G \times G$ の表現になる。

次に各 $g, h \in G$ に対して

$$\tau(g, h) : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$$

は連続線形同型写像であり、定理 5.9 より $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $L^2(G)$ 内で稠密だから一意的に連続線形同型写像

$$\tau(g, h) : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

に拡張することができる。さらに

$$\langle \tau(g, h) f_1, \tau(g, h) f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \qquad (f_1, f_2 \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ g, h \in G)$$

だから

$$\langle \tau(g, h) f_1, \tau(g, h) f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \qquad (f_1, f_2 \in L^2(G),\ g, h \in G)$$

が成り立つ。後は

$$G \times G \times L^2(G) \longrightarrow L^2; (g, h, f) \longmapsto \tau(g, h) f$$

が連続になることを示せば、$(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \langle\ ,\ \rangle))$ と $(\tau, L^2(G))$ が $G \times G$ のユニタリ表現になることがわかる。$(g_1, h_1, f_1) \in G \times G \times L^2(G)$ をとる。$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $L^2(G)$ 内で稠密だから任意の$\varepsilon > 0$ に対して $\|f_1 - \tilde{f}_1\| < \varepsilon/4$ を満たす$\tilde{f}_1 \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ が存在する。上で示したことより $G$ の単位元の近傍 $V$が存在して

$$g_2 \in g_1 V^{-1},\ h_2 \in V h_1,\ x \in G \Longrightarrow |\tilde{f}_1(g_1^{-1} x h_1) - \tilde{f}_1(g_2^{-1} x h_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

を満たす。そこで $g_2 \in g_1 V^{-1},\ h_2 \in V h_1,\ f_2 \in B_{\varepsilon/4}(f_1)$ とすると

$$\|\tau(g_1, h_1) f_1 - \tau(g_2, h_2) f_2\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\tau(g_1,h_1)f_1 - \tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1\| + \|\tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1\| \\
&\quad + \|\tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)f_2\| \\
&\leq \|f_1 - \tilde{f}_1\| + \|\tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1\| + \|\tilde{f}_1 - f_2\| \\
&\leq 2\|f_1 - \tilde{f}_1\| + \|f_1 - f_2\| + \|\tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1\| \\
&\leq \frac{3}{4}\varepsilon + \|\tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1\|.
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&\|\tau(g_1,h_1)\tilde{f}_1 - \tau(g_2,h_2)\tilde{f}_1\|^2 \\
=&\int |\tilde{f}_1(g_1^{-1}xh_1) - \tilde{f}_1(g_2^{-1}xh_2)|^2 d\mu x < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2
\end{aligned}
$$

だから

$$
\|\tau(g_1,h_1)f_1 - \tau(g_2,h_2)f_2\| < \varepsilon.
$$

**6.3 命題.** コンパクト位相群 $G$ の有限次元複素表現 $(\rho, V)$ に対して $A_\rho : V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ を

$$
A_\rho(v \otimes v^*)(g) = v^*(\rho(g)^{-1}v) \qquad (g \in G, v \in V, v^* \in V^*)
$$

によって定めると、$A_\rho$は $(\rho\hat{\otimes}\rho^*, V \otimes V^*)$ から $(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty))$ への $G \times G$ 準同型写像になり、同時に $(\rho\hat{\otimes}\rho^*, V \otimes V^*)$ から $(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \langle\ ,\ \rangle))$ への $G \times G$ 準同型写像にもなる。また$\rho$の指標の共役$\overline{\chi}_\rho$は $A_\rho(V \otimes V^*)$ に含まれる。さらに $G$ の 2 つの有限次元複素表現 $(\rho, V)$ と $(\sigma, W)$ が同値ならば、$A_\rho(V \otimes V^*) = A_\sigma(W \otimes W^*)$ となる。

証明. $v \in V, v^* \in V^*$に対して $A_\rho(v \otimes v^*) \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は表現の定義からわかる。$V \otimes V^*$ は有限次元だから、線形写像 $A_\rho : V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $\|\ \|_\infty$で定まる $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の位相と $\langle\ ,\ \rangle$ で定まる $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の位相のどちらに関しても連続になる。$(g, h) \in G \times G, v \in V, v^* \in V^*, x \in G$ について

$$
\begin{aligned}
&A_\rho((\rho \otimes \rho^*)(g,h)(v \otimes v^*))(x) \\
=&A_\rho((\rho(g)v) \otimes (v^* \circ \rho(h)^{-1}))(x) \\
=&v^* \circ \rho(h)^{-1}(\rho(x)^{-1} \circ \rho(g)v) \\
=&v^*(\rho(g^{-1}xh)^{-1}v) \\
=&A_\rho(v \otimes v^*)(g^{-1}xh) \\
=&\tau(g,h)(A_\rho(v \otimes v^*))(x).
\end{aligned}
$$

よって $A_\rho : (\rho\hat{\otimes}\rho^*, V\hat{\otimes}V^*) \longrightarrow (\tau, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$ は $G \times G$ 準同型写像になる。

$(\rho, V)$ がユニタリ表現になるような $V$の内積 $(\ ,\ )$ をとる。$\{e_i\}$ を $V$のユニタリ基底とし $\{e_i^*\}$ をその双対基底とすると、各 $g \in G$ について

$$
\overline{\chi}_\rho(g) = \sum_i (e_i, \rho(g)e_i) = \sum_i (\rho(g)^{-1}e_i, e_i) = \sum_i e_i^*(\rho(g)^{-1}e_i) \sum_i A_\rho(e_i \otimes e_i^*)(g)
$$

だから$\overline{\chi}_\rho \in A_\rho(V \otimes V^*)$。

$(\rho, V)$ と $(\sigma, W)$ を $G$ の 2 つの同値な有限次元複素表現とすると、$G$ 同型写像 $A : V \longrightarrow W$が存在する。$w^* \in W^*, v \in V, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} A_\sigma(Av \otimes w^*)(g) &= w^*(\sigma(g)^{-1}Av) \\ &= w^*(A\rho(g)^{-1}v) \\ &= (w^* \circ A)(\rho(g)^{-1}v) \\ &= A_\rho(v \otimes (w^* \circ A))(g) \end{aligned}$$

となるので、$A_\sigma(Av \otimes w^*) = A_\rho(v \otimes (w^* \circ A))$ となり、$A_\rho(V \otimes V^*) = A_\sigma(W \otimes W^*)$ がわかる。

**6.4 命題.** $G$ をコンパクト位相群とし $k \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G \times G)$ が

$$k(g^{-1}xh, g^{-1}yh) = k(x, y) \qquad (g, h, x, y \in G)$$

を満たすとする。このとき $k$から命題 *5.6* と命題 *5.10* で定めた積分作用素

$$\begin{aligned} &K : (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \|_\infty)) \longrightarrow (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \|_\infty)) \\ &K : (\tau, L^2(G)) \longrightarrow (\tau, L^2(G)) \end{aligned}$$

は $G \times G$ 準同型写像になる。

証明. $g, h, x \in G$ と $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ に対して、

$$\begin{aligned} (\tau(g,h)Kf)(x) &= \int k(g^{-1}xh, y) f(y) d\mu y \\ &= \int k(x, gyh^{-1}) f(y) d\mu y \\ &= \int k(x, z) f(g^{-1}zh) d\mu y \\ &= (K\tau(g,h)f)(x). \end{aligned}$$

したがって、$\tau(g,h)K = K\tau(g,h)$ となり、

$$K : (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \|_\infty)) \longrightarrow (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \|_\infty))$$

は $G \times G$ 準同型写像になる。また各 $g, h \in G$ について

$$\tau(g,h)Kf = K\tau(g,h)f \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$$

が成り立ち、定理 5.9 より $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $L^2(G)$ 内で稠密だから

$$\tau(g,h)Kf = K\tau(g,h)f \qquad (f \in L^2(G))$$

が成り立つ。よって

$$K : (\tau, L^2(G)) \longrightarrow (\tau, L^2(G))$$

も $G \times G$ 準同型写像になる。

**6.5 定義.** コンパクト位相群 $G$ に対して

$$Cl_{\mathbb{C}}(G) = \{f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) | f(yxy^{-1}) = f(x)\ (x, y \in G)\}$$

とおく。$Cl_{\mathbb{C}}(G)$ の元を $G$ 上の類関数と呼ぶ。

**6.6 例.** コンパクト位相群 $G$ に対して $Ch_{\mathbb{C}}(G) \subset Cl_{\mathbb{C}}(G)$ である。

**6.7 命題.** $G$ をコンパクト位相群とし

$$(Pf)(x) = \int f(yxy^{-1}) d\mu y \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), x \in G)$$

によって写像

$$P : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)$$

を定めると、これは連続線形写像になる。さらに $P(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)) \subset Cl_{\mathbb{C}}(G)$ が成り立つ。

証明. $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ に対して $Pf \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ となることをまず示しておく。$f$は一様連続だから任意の$\varepsilon > 0$ に対して $G$ の単位元 $e$ の近傍 $U$が存在し、

$$yx^{-1} \in U \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

を満たす。補題 6.1 より $e$ の近傍 $V$が存在し $xVx^{-1} \subset U$ $(x \in G)$ を満たす。そこで $yx^{-1} \in V$とすると、任意の $z \in G$ に対して

$$(zyz^{-1})(zxz^{-1})^{-1} = zyx^{-1}z^{-1} \in U.$$

したがって

$$\begin{aligned}|(Pf)(x) - (Pf)(y)| &= \left| \int (f(zxz^{-1}) - f(zyz^{-1})) d\mu z \right| \\ &\leq \int |f(zxz^{-1}) - f(zyz^{-1})| d\mu z \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

よって $Pf \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ となる。

　$P : \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ が線形写像になるのは Haar 積分の線形性からわかる。さらに $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ x \in G$ に対して

$$|(Pf)(x)| = \left| \int f(yzy^{-1}) d\mu y \right| \leq \int |f(yzy^{-1})| d\mu y \leq \|f\|_\infty$$

だから $\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$となり $P$は連続線形写像になる。

　$f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\ x, y \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(Pf)(yxy^{-1}) &= \int f(zyxy^{-1}z^{-1}) d\mu z \\ &= \int f((zy)x(zy)^{-1}) d\mu z \\ &= \int f(wxw^{-1}) d\mu z \\ &= (Pf)(x)\end{aligned}$$

となるので $Pf \in Cl_{\mathbb{C}}(G)$。したがって $P(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)) \subset Cl_{\mathbb{C}}(G)$。