微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/5/22　改訂 1991/11/6

7 Peter-Weyl の定理

7.1 補題. コンパクト位相群 G の単位元の任意の近傍 U に対して次の条件を満たす G 上の実数値連続関数 δ が存在する。

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \delta(x) \geq 0 \qquad (x \in G)\\
&(2) \quad \operatorname{supp} \delta \subset U\\
&(3) \quad \int \delta d\mu = 1\\
&(4) \quad \delta(yxy^{-1}) = \delta(x) \qquad (x, y \in G)\\
&(5) \quad \delta(x^{-1}) = \delta(x) \qquad (x \in G)
\end{aligned}
$$

証明. G は位相空間として正規空間になるので、$\overline{U_1} \subset U$ を満たす e の近傍 U_1 をとることができる。補題 6.1 と群演算の連続性より e の近傍 V で

$$xVx^{-1} \subset U_1 \qquad (x \in G)$$

を満たすものをとる。Urysohn の補題より $[0,1]$ に値を持つ G 上の連続関数 a で

$$\operatorname{supp} a \subset V \cap V^{-1}, \quad a(e) = 1$$

を満たすものが存在する。

$$b(x) = (Pa)(x) + (Pa)(x^{-1}) \qquad (x \in G)$$

とおくと、b は $[0,2]$ に値を持つ G 上の連続関数になり、

$$
\begin{aligned}
b(x) > 0 &\Longrightarrow (Pa)(x) > 0 \text{ または } (Pa)(x^{-1}) > 0\\
&\Longrightarrow \ {}^{\exists}y_1 \in G\ a(y_1xy_1^{-1}) > 0 \text{ または } {}^{\exists}y_2 \in G\ a(y_2x^{-1}y_2^{-1}) > 0\\
&\Longrightarrow y_1xy_1^{-1} \in V \text{ または } y_2x^{-1}y_2^{-1} \in V^{-1}\\
&\Longrightarrow x \in U_1.
\end{aligned}
$$

したがって

$$\operatorname{supp} b \subset \overline{U_1} \subset U.$$

さらに b の定め方より

$$
\begin{aligned}
&b(yxy^{-1}) = b(x) \qquad (x, y \in G)\\
&b(x^{-1}) = b(x) \qquad (x \in G)
\end{aligned}
$$

もわかる。$b(e) = 2$ だから

$$C = \int \delta d\mu > 0$$

となり、$\delta = b/C$ とおくと δ は補題の条件 (1) から (5) までを満たす実数値連続関数になる。

7.2 定理 (Peter-Weyl). G をコンパクト位相群とする。G の各有限次元複素既約表現 (ρ, V) について $A_\rho : V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は単射 $G \times G$ 準同型写像になり、

$$(\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)) \simeq \oplus_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} (\rho \hat{\otimes} \rho^*, V \otimes V^*)$$
$$(\tau, L^2(G)) \simeq \oplus_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} (\rho \hat{\otimes} \rho^*, V \otimes V^*) : \text{ユニタリ直和}$$

が成り立つ。また $Ch_{\mathbb{C}}(G)$ が生成するベクトル空間は $Cl_{\mathbb{C}}(G)$ 内で $\| \ \|_\infty$に関して稠密になる。

証明. G の有限次元複素既約表現 (ρ, V) について $A : (\rho \otimes \rho^*, V \otimes V^*) \longrightarrow (\tau, \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$ は命題 6.3 より $G \times G$ 準同型写像になり、定理 1.16 より $(\rho \otimes \rho^*, V \otimes V^*)$ は $G \times G$ の複素既約表現になる。$A_\rho \neq 0$ だから補題 1.6 より A_ρは単射になる。

任意に $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ を 1 つとる。fは一様連続だから任意の$\varepsilon > 0$ に対して G の単位元の近傍 Uが存在して

$$yx^{-1} \in U \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす。この Uに対して補題 7.1 の実数値連続関数δをとる。

$$k(x, y) = \delta(yx^{-1}) \qquad (x, y \in G)$$

とおくと、kは $G \times G$ 上の実数値連続関数になる。kから命題 5.6 で定めた積分作用素を Kとすると、

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \int k(x, y) f(y) d\mu y \\ &= \int \delta(yx^{-1}) f(y) d\mu y \\ &= \int \delta(z) f(zx) d\mu z, \\ f(x) &= \int \delta(z) f(x) d\mu z \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} |f(x) - (Kf)(x)| &= \left| \int (\delta(z) f(x) - \delta(z) f(zx)) d\mu z \right| \\ &\leq \int \delta(z) |f(x) - f(zx)| d\mu z. \end{aligned}$$

ここで、任意の $z \in G$ に対して $(zx)x^{-1} = z$で$\operatorname{supp} \delta \subset U$だから、

$$\delta(z) |f(x) - f(zx)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \delta(z)$$

となり、補題 7.1 の (3) を使って両辺を積分すると

$$|f(x) - (Kf)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって
$$\|f - Kf\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
そこで次に Kfを $A_\rho(V^* \otimes V)$ ($[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G)$) の元の級数で表すことを考える。補題 7.1 の (5) より $x, y \in G$ に対して

$$k(y, x) = \delta(xy^{-1}) = \delta((yx^{-1})^{-1}) = \delta(yx^{-1}) = k(x, y).$$

さらに補題 7.1 の (4) より $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} k(g^{-1}xh, g^{-1}yh) &= \delta(g^{-1}yh(g^{-1}xh)^{-1}) = \delta(g^{-1}yx^{-1}g) \\ &= \delta(yx^{-1}) = k(x, y). \end{aligned}$$

したがって kは定理 5.12 と命題 6.4 の仮定を満たすので

$$K : (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)) \longrightarrow (\tau, (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty))$$

は $G \times G$ 準同型写像になり、Kの 0 以外の各固有値λに対応する固有関数 $f_\lambda \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ をとり Kfを $\| \ \|_\infty$に関する級数 $Kf = \sum_\lambda f_\lambda$で表すことができる。さらに Kの固有値λの固有関数空間を $E(\lambda)$ で表すと 0 でないλに対して $E(\lambda)$ は有限次元になり、K は $G \times G$ 準同型写像だから各 $E(\lambda)$ は $G \times G$ 不変部分ベクトル空間になる。定理 1.13 より $G \times G$ の表現 $(\tau|_{E(\lambda)}, E(\lambda))$ を $\langle \ , \ \rangle$ に関するユニタリ直和 $E(\lambda) = \sum_i X_i$に既約分解することができる。X_iの 0 でない元 a を 1 つとる。$\{\tau(h, e)a | h \in G\}$ が生成する複素部分ベクトル空間を Vとおくと $V \subset X_i$となり Vは有限次元である。$h \in G$ に対して$\rho(h) = \tau(h, e)|_V$とすると、定理 1.16 の証明より (ρ, V) は G の有限次元複素既約表現になる。Vの基底 $\{e_j\}$ をとり $\{e_j^*\}$ をその双対基底とする。各 $x \in G$ に対して
$$\rho(x)^{-1}a = \sum_j e_j^*(\rho(x)^{-1}a)e_j = \sum_j A_\rho(a \otimes e_j^*)(x)e_j.$$

したがって

$$a(x) = (\tau(x^{-1}, e)a)(e) = (\rho(x)^{-1}a)(e) = \sum_j A_\rho(a \otimes e_j^*)(x)e_j(e)$$

となり、
$$a = \sum_j e_j(e)A_\rho(\otimes e_j^*) \in A_\rho(V \otimes V^*).$$

A_ρは単射だから $A_\rho(V \otimes V^*)$ は既約になり $X_i = A_\rho(V \otimes V^*)$。したがって、

$$\sum_{\lambda \neq 0} E(\lambda) = \sum_{[\rho, V] \in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V \otimes V^*)$$

が成り立つ。これより $\|Kf - f'\|_\infty \leq \varepsilon/2$ を満たす $f' \in \sum_{[\rho,V] \in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V \otimes V^*)$ をとることができる。

$$\|f - f'\|_\infty \leq \|f - Kf\|_\infty + \|Kf - f'\| \leq \varepsilon$$

となり、$\sum_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V\otimes V^*)$ は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\|\ \|_\infty)$ において稠密になる。よって $\sum_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V\otimes V^*)$ は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G),\langle\ ,\ \rangle)$ においても稠密になり、$L^2(G)$ 内で稠密になる。

次に和$\sum_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V\otimes V^*)$ が $\langle\ ,\ \rangle$ に関してユニタリ直和になることを証明しよう。上で示したことより、$[\rho,V],[\sigma,W]\in D_{\mathbb{C}}(G)$ に対して $A_\rho(V\otimes V^*)\neq A_\sigma(W\otimes W^*)$ が成り立てば、$A_\rho(V\otimes V^*)$ と $A_\sigma(W\otimes W^*)$ は直交する。そこで $A_\rho(V\otimes V^*)=A_\sigma(W\otimes W^*)$ となる場合を考えよう。このとき$\rho\hat{\otimes}\rho^*\simeq\sigma\hat{\otimes}\sigma^*$となり、これらの指標を考えると$\rho\simeq\sigma$となることがわかる。したがって和$\sum_{[\rho,V]\in D_{\mathbb{C}}(G)} A_\rho(V\otimes V^*)$ は $\langle\ ,\ \rangle$ に関してユニタリ直和になっている。

最後に $Ch_{\mathbb{C}}(G)$ が生成するベクトル空間は $Cl_{\mathbb{C}}(G)$ 内で $\|\ \|_\infty$に関して稠密になっていることを示す。すでに示したことより、任意の $f\in Cl_{\mathbb{C}}(G)$ と$\varepsilon>0$ に対して有限個の $[\rho_i,V_i]\in D_{\mathbb{C}}(G)$ と $v_i\in V_i, v_i^*\in V_i^*$が存在し、

$$\left\| f-\sum_i A_{\rho_i}(v_i\otimes v_i^*)\right\|_\infty<\varepsilon$$

を満たす。$Pf=f$だから命題 6.7 の証明中に示したことより、

$$\left\| f-\sum_i PA_{\rho_i}(v_i\otimes v_i^*)\right\|_\infty<\varepsilon.$$

各 $x\in G$ に対して、

$$\begin{aligned}
PA_{\rho_i}(v_i\otimes v_i^*)(x) &= \int A_{\rho_i}(v_i\otimes v_i^*)(yxy^{-1})d\mu y\\
&= \int v_i^*(\rho_i(yxy^{-1})^{-1}v_i)d\mu y\\
&= \int v_i^*(\rho_i(yx^{-1}y^{-1})v_i)d\mu y\\
&= v_i^*\left(\int \rho_i(yx^{-1}y^{-1})d\mu y(v_i)\right).
\end{aligned}$$

ここで G の表現 (ρ_i,V_i) から例 1.9 で定めた G の$\mathrm{Hom}(V_i,V_i)$ への表現を$\bar{\rho}_i$で表すと、

$$\int \rho_i(yx^{-1}y^{-1})d\mu y=\int \bar{\rho}_i(y)(\rho_i(x)^{-1})d\mu y$$

となり、これは命題 2.8 より V_iの G 準同型写像になる。(ρ_i,V_i) は有限次元複素既約表現だから補題 1.6 よりある $c_i\in\mathbb{C}$ が存在して、

$$\int \rho_i(yx^{-1}y^{-1})d\mu y=c_iI_{V_i}$$

となる。両辺のtr をとると

$$c_i\dim V_i=\mathrm{tr}(c_iI_{V_i})=\int \mathrm{tr}(\rho_i(yx^{-1}y^{-1}))d\mu y=\chi_{\rho_i}(x^{-1})=\overline{\chi_{\rho_i}(x)}$$

だから

$$\int \rho_i(yx^{-1}y^{-1})d\mu y = \frac{1}{\dim V_i}\overline{\chi_{\rho_i}(x)}I_{V_i}.$$

よって

$$\begin{aligned} PA_{\rho_i}(v_i \otimes v_i^*)(x) &= v_i^*\left(\frac{1}{\dim V_i}\overline{\chi_{\rho_i}(x)}I_{V_i}(v_i)\right) \\ &= \frac{v_i^*(v_i)}{\dim V_i}\overline{\chi_{\rho_i}(x)}. \end{aligned}$$

これより

$$\sum_i PA_{\rho_i}(v_i \otimes v_i^*) = \sum_i \frac{v_i^*(v_i)}{\dim V_i}\overline{\chi}_{\rho_i}$$

となり、$\overline{Ch_{\mathbb{C}}(G)}$が生成するベクトル空間が $Cl_{\mathbb{C}}(G)$ 内で $\|\ \|_\infty$に関して稠密になっていることがわかりる。$Cl_{\mathbb{C}}(G)$ は共役に関して閉じているので、$Ch_{\mathbb{C}}(G)$ が生成するベクトル空間も $Cl_{\mathbb{C}}(G)$ 内で $\|\ \|_\infty$に関して稠密になる。

7.3 例. 各 $1 \le k \le n$ について

$$\pi_k : T^n \longrightarrow U(1); (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto u_k$$

とおくと、定理 *4.6* より

$$D_{\mathbb{C}}(T^n) = \{\pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n} | m_k \in \mathbb{Z}\}$$

とみなせる。$\rho = \pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n}$としよう。$\rho$の表現空間は $\mathbb{C}$ になり、$1 \in \mathbb{C},\ 1 \in \mathbb{C}^*$をとると、

$$A_\rho(1 \otimes 1)(x) = \rho(x) \qquad (x \in T^n)$$

となる。さらに、T^nの *Haar* 測度をμとすると、$|\rho| = 1$ だから

$$\int |\rho|^2 d\mu = 1.$$

したがって、定理 *7.2* を使うと $D_{\mathbb{C}}(T^n)$ は $L^2(T^n)$ の *Hilbert* 基底になる。つまり、任意の $f \in L^2(T^n)$ は $L^2(T^n)$ の絶対収束級数

$$(*) \qquad f = \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}} \langle f, \pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n} \rangle \pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n}$$

で表される。ここで

$$\langle f, \pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n} \rangle = \int f\overline{\pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n}} d\mu = \int f\pi_1^{-m_1} \cdots \pi_n^{-m_n} d\mu$$

となる。$(*)$ は *Fourier* 級数展開に他ならない。さらに、$f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(T^n)$ のとき定理 *7.2* より級数 $(*)$ は関数級数として絶対一様収束する。