数学研究科

微分幾何学 I

理工学研究科

微分幾何学

Lie 群と等質空間入門

田崎博之

1995 年度

目 次

第 1 章　積分多様体

1.1　分布と積分多様体

定義 1.1.1 Mを n 次元多様体とし、kを $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とする。Mの各点 x に対して、$T_x(M)$ の k次元部分ベクトル空間 $\mathfrak{B}_x$を対応させる対応 $\mathfrak{B}$ が次の $(*)$ を満たすとき、$\mathfrak{B}$ を M上の k次元**分布**と呼ぶ。
$(*)$ Mの任意の点 x に対して、x の開近傍 Uと U上のベクトル場 $X_1, \ldots, X_k$が存在し各点 $z \in U$において $(X_1)_z, \ldots, (X_k)_z$は $\mathfrak{B}_z$の基底になる。
M上のベクトル場 Xと分布 $\mathfrak{B}$ が任意の点 $x \in M$に対して $X_x \in \mathfrak{B}_x$を満たすとき、Xは $\mathfrak{B}$ に**属する**という。M上の分布 $\mathfrak{B}$ に属する任意のベクトル場 X, Yに対して $[X, Y]$ もまた $\mathfrak{B}$ に属するとき、$\mathfrak{B}$ は**完全積分可能**であるという。Nを Mの部分多様体とし$\iota : N \longrightarrow M$を包含写像とする。$M$上の分布 $\mathfrak{B}$ に対して

$$d\iota_x(T_x(N)) = \mathfrak{B}_x \quad (x \in N)$$

が成り立つとき、Nを $\mathfrak{B}$ の**積分多様体**と呼ぶ。

逆関数定理より次の補題を証明することができる。

補題 1.1.2 Nを n 次元多様体 Mの k次元部分多様体とする。このとき各 $x \in N$に対して、x を含む Mの局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $x_i(x) = 0,\ (1 \leq i \leq n)$ を満たすものが存在し

$$V = \{z \in U | x_\alpha(z) = 0\ (k+1 \leq \alpha \leq n)\}$$

は Nにおける x の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$の Vへの制限は Nの局所座標系になる。

命題 1.1.3 Mを多様体とし、$\mathfrak{B}$ を M上の分布とする。Mの各点 x に対して、x を含む $\mathfrak{B}$ の積分多様体が存在するならば $\mathfrak{B}$ は完全積分可能である。

証明　Xと Yを $\mathfrak{B}$ に属する M上のベクトル場とする。Mの各点 x に対して、$[X, Y]_x \in \mathfrak{B}_x$ を示せばよい。Nを x を含む $\mathfrak{B}$ の積分多様体とする。各 $z \in N$に対して $X_z \in \mathfrak{B}_z = d\iota_z(T_z(N))$ であり $d\iota_z : T_z(N) \longrightarrow T_z(M)$ は単射だからただ 1 つ $X'_z \in T_z(N)$ が存在して $d\iota_z(X'_z) = X_z$を満たす。$\dim M = n,\ \dim N = k$とすると補題 1.1.2より x を含む Mの局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in U | x_\alpha(z) = 0\ (k+1 \leq \alpha \leq n)\}$$

は Nにおける x の開近傍になり $x_1,\dots,x_k$の Vへの制限 $y_1,\dots,y_k$は Nの局所座標系になる。Vも $\mathfrak{B}$ の積分多様体になる。Xの Uにおける局所表示を

$$X_z = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_z \quad (z \in U)$$

とすると各 a_iは U上の C^∞級関数である。$z \in V$に対して

$$d\iota_z\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_z\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_z$$

だから $a_\alpha(z) = 0\ (k+1 \le \alpha \le n)$ で

$$X'_z = \sum_{i=1}^{k} a_i \circ \iota(z)\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_z \quad (z \in V)$$

が成り立つ。よって対応 $z \longmapsto X'_z$は V上のベクトル場になり

$$d\iota_z(X'_z) = X_z \quad (z \in V)$$

を満たす。同様に Y'も V上のベクトル場になり

$$d\iota_z(Y'_z) = Y_z \quad (z \in V)$$

を満たす。したがって微分写像と Lie ブラケット積の関係から

$$[X,Y]_z = d\iota_z([X',Y']_z) \in d\iota_z(T_z(V)) = \mathfrak{B}_z \quad (z \in V)$$

となる。$x \in V$だから $[X,Y]_x \in \mathfrak{B}_x$が成り立つ。

補題 1.1.4 $F : M \longrightarrow N$を連結な多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。任意の $x \in M$に対して $dF_x = 0$ が成り立つならば、Fは定値写像である。

証明 $p \in F(M)$ をとる。このとき $M = F^{-1}(p)$ となることを示そう。まず $F^{-1}(p)$ は 1 点の逆像だから閉集合である。次に $F^{-1}(p)$ が開集合になることを示す。$x \in F^{-1}(p)$ をとる。$x \in U,\ F(U) \subset V$となる Mと Nの局所座標系 $(U; x_1,\dots,x_m)$ と $(V; y_1,\dots,y_n)$ をとることができる。さらに Uは連結になるようにとっておく。各 $z \in U$に対して $dF_z = 0$ だから、各 i, jについて

$$\frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i}(z) = 0$$

となって、Fは Uにおいて一定値をとる。よって $F(x) = p$ だから任意の $z \in U$に対して F(z) = p となり $U \subset F^{-1}(p)$。以上で $F^{-1}(p)$ は開かつ閉集合になり Mは連結だから $M = F^{-1}(p)$ が成り立つ。したがって Fは定値写像である。

1.2 Frobenius の定理

定理 1.2.1 (Frobenius) Mを n 次元多様体とし $\mathfrak{B}$ を M上の完全積分可能な k次元分布とする。このとき、Mの各点 x に対して x を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在し、U は各座標軸の開区間の積になり

$$\{z \in U | x_i(z) = c_i \ (k+1 \leq i \leq n)\} \quad (\text{各 } c_i \text{は定数})$$

は $\mathfrak{B}$ の積分多様体になる。さらに $\mathfrak{B}$ の連結な積分多様体 Nが $N \subset U$を満たせば上の形の積分多様体のうちの 1 つに含まれる。

証明　まず上のような局所座標近傍の存在を分布の次元 kに関する数学的帰納法で証明しよう。$k = 1$ の場合 x の開近傍 Vと V上のベクトル場 Xが存在し各点 $z \in V$において X_z は $\mathfrak{B}_z$の基底になる。特に $X_z \neq 0$ である。x を含む Mの局所座標近傍 $(V_1; y_1, \dots, y_n)$ を $V_1 \subset V$となるようにとる。V_1における Xの局所表示を

$$X_z = \sum_{i=1}^{n} a_i(z) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_z \quad (z \in V_1)$$

とする。$y_1, \dots, y_n$を線形変換によってとりかえて $X_x = \frac{\partial}{\partial y_1}|_x$となるようにできる。常微分方程式

$$\frac{d(y_i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)) \quad (1 \leq i \leq n)$$

の係数 a_iは C^∞級関数だから、ある$\varepsilon > 0$ と $\mathbf{R}^{n-1}$における 0 の開近傍 Wが存在し各 $(b_2, \dots, b_n) \in W$に対して初期条件 $(y_1(c(0)), \dots, y_n(c(0))) = (0, b_2, \dots, b_n)$ を満たす上の常微分方程式の解 $c(t)$ が$-\varepsilon < t < \varepsilon$において存在する。

$$\frac{dc(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(y_i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{c(t)} = X_{c(t)}$$

となっている。この解を $c(t) = c(t; b_2, \dots, b_n)$ と書く。初期条件に対する常微分方程式の解の可微分性より

$$\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \longrightarrow V_1 \ ; (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto c(x_1; x_2, \dots, x_n)$$

は C^∞級写像である。τの定義より

$$\begin{aligned} d\tau_0 \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_0 \right) &= \frac{dc}{dt}(0) = X_x = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_x \\ d\tau_0 \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0 \right) &= \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_x \quad (2 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

となるので逆関数定理より x の開近傍 $U \subset V_1$が存在し $x_1, \dots, x_n$は Uにおける局所座標系になる。さらに局所座標系によって Uが各座標軸の開区間の積になるように、Uを取り直すができる。このとき

$$\{z \in U | x_i(z) = c_i \ (2 \leq i \leq n)\} \quad (\text{各 } c_i \text{は定数})$$

は適当な開区間 I と微分同型な M の 1 次元部分多様体である。これらの微分同型な 2 つの多様体を同一視しておく。$\iota : I \longrightarrow M$ を包含写像とすると

$$\iota(t) = c(t; c_2, \ldots, c_n) \quad (t \in I)$$

だから

$$d\iota_t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = \frac{dc(t)}{dt} = X_{c(t)} \in \mathfrak{B}_{c(t)}.$$

したがって

$$d\iota_z(T_z(I)) = \mathfrak{B}_z \quad (z \in I)$$

となって I は $\mathfrak{B}$ の積分多様体である。さらに

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_z = X_z \quad (z \in U)$$

が成り立っていることに注意しておく。

$k-1$ 次元分布に対して定理で述べた局所座標近傍が存在すると仮定して k 次元分布の場合を証明しよう。x の開近傍 V と V 上のベクトル場 $X_1, \ldots, X_k$ が存在し各 $z \in V$ において $(X_1)_z, \ldots, (X_k)_z$ は $\mathfrak{B}_z$ の基底になる。特に $(X_1)_z \neq 0$ である。1 次元の場合ですでに示したように、x を含む局所座標近傍 $(V_1; y_1, \ldots, y_n)$ が存在し $V_1 \subset V$ で局所座標系によって V_1 は各座標軸の開区間の積になり

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_z = (X_1)_z \quad (z \in V_1)$$

を満たす。$X_1, \ldots, X_k$ を V_1 上のベクトル場とみなし

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1) X_1 \quad (2 \leq i \leq k) \end{aligned}$$

によって V_1 上のベクトル場 $Y_1, \ldots, Y_k$ を定める。ここで、$X_i(y_1)$ は関数 y_1 に微分作用素とみなした X_i を作用して得られる関数である。

$$[Y_1 \ldots Y_k] = [X_1 \ldots X_k] \begin{bmatrix} 1 & -X_2(y_1) & \ldots & -X_k(y_1) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

だから各 $z \in V_1$ において $(Y_1)_z, \ldots, (Y_k)_z$ は $\mathfrak{B}_z$ の基底になる。Y_i $(2 \leq i \leq k)$ の V_1 における局所表示を

$$(Y_i)_z = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(z) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_z \quad (z \in V_1)$$

とすると
$$a_i^1 = Y_i(y_1) = X_i(y_1) - X_i(y_1)X_1(y_1) = 0.$$
したがって Y_i $(2 \leq i \leq k)$ の V_1における局所表示は
$$(Y_i)_z = \sum_{j=2}^{n} a_i^j(z) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_z \quad (z \in V_1)$$
となっている。そこで
$$S = \{z \in V_1 | y_1(z) = y_1(x)\}$$
とおくと Sは $n-1$ 次元部分多様体になり $y_2, \ldots, y_n$の Sへの制限 $y_2', \ldots, y_n'$は Sの局所座標系になる。$2 \leq i \leq k$に対して
$$(Y_i')_z = \sum_{j=2}^{n} a_i^j(z) \left.\frac{\partial}{\partial y_j'}\right|_z \quad (z \in S)$$
は S上のベクトル場になり、包含写像$\iota : S \longrightarrow V_1$に対して
$$d\iota_z((Y_i')_z) = (Y_i)_z \quad (z \in S)$$
が成り立つ。また各 $z \in S$に対して $(Y_2')_z, \ldots, (Y_k')_z$は線形独立になる。よって
$$\mathfrak{B}_z' = \mathbf{R}(Y_2')_z + \ldots + \mathbf{R}(Y_k')_z \quad (z \in S)$$
とおくと $\mathfrak{B}'$は S上の $k-1$ 次元分布である。

$\mathfrak{B}'$が完全積分可能であることを以下で示そう。$\mathfrak{B}$ は完全積分可能だから各 $z \in V_1$に対して $[Y_i, Y_j]_z \in \mathfrak{B}_z$となる。したがって V_1上の C^∞級関数 c_{ij}^pが存在して
$$[Y_i, Y_j] = \sum_{p=1}^{k} c_{ij}^p Y_p$$
とできる。$2 \leq i, j \leq k$のとき $Y_i(y_1) = Y_j(y_1) = 0$ より
$$0 = [Y_i, Y_j](y_1) = \sum_{p=1}^{k} c_{ij}^p Y_p(y_1) = c_{ij}^1$$
だから
$$[Y_i, Y_j] = \sum_{p=2}^{k} c_{ij}^p Y_p$$
となる。$2 \leq i, j \leq k$のとき、$z \in S$に対して
$$d\iota_z([Y_i', Y_j']_z) = [Y_i, Y_j]_z = \sum_{p=2}^{k} c_{ij}^p(z)(Y_p)_z = d\iota_z\left(\sum_{p=2}^{k} c_{ij}^p \circ \iota(z)(Y_p')_z\right).$$

したがって

$$[Y_i', Y_j']_z = \sum_{p=2}^{k} c_{ij}^p \circ \iota(z)(Y_p')_z \in \mathfrak{B}_z'.$$

S上の $\mathfrak{B}'$に属する任意のベクトル場 Z_1, Z_2をとる。定義より

$$Z_1 = \sum_{p=2}^{k} d_1^p Y_p', \quad Z_2 = \sum_{q=2}^{k} d_2^q Y_q'$$

となる V_1上の C^∞級関数 d_1^p, d_2^qが存在する。$f \in C^\infty(S)$ に対して

$$\begin{aligned}
& [Z_1, Z_2](f) \\
= \ & Z_1(Z_2(f)) - Z_2(Z_1(f)) \\
= \ & \sum_{p=2}^{k} d_1^p Y_p'(\sum_{q=2}^{k} d_2^q Y_q'(f)) - \sum_{q=2}^{k} d_2^q Y_q'(\sum_{p=2}^{k} d_1^p Y_p'(f)) \\
= \ & \sum_{p,q=2}^{k} \{d_1^p Y_p'(d_2^q) Y_q' - d_2^q Y_q'(d_1^p) Y_p' + d_1^p d_2^q [Y_p', Y_q']\}(f)
\end{aligned}$$

したがって

$$[Z_1, Z_2] = \sum_{p,q=2}^{k} \{d_1^p Y_p'(d_2^q) Y_q' - d_2^q Y_q'(d_1^p) Y_p' + d_1^p d_2^q [Y_p', Y_q']\}$$

となり $[Z_1, Z_2]$ も $\mathfrak{B}'$に属する。以上で $\mathfrak{B}'$が完全積分可能であることがわかった。

$\mathfrak{B}'$は完全積分可能な $k-1$ 次元分布だから帰納法の仮定から x を含む Sの局所座標近傍 $(W; w_2, \ldots, w_n)$ が存在し局所座標系によって Wは各座標軸の開区間の積になり

$$\{z \in W | w_i(z) = c_i \ (k+1 \leq i \leq n)\} \quad (\text{各 } c_i \text{は定数})$$

は $\mathfrak{B}'$の積分多様体になる。$z \in V_1$に対して

$$y_1(z') = y_1(x), \ y_2(z') = y_2(z), \ \ldots, \ y_n(z') = y_n(z)$$

を満たす $z' \in S$がただ 1 つ存在する。この対応をπと書く。

$$\pi : V_1 \longrightarrow S \, ; z \longmapsto z'$$

は C^∞級写像になり

$$\begin{aligned}
U &= \{z \in V_1 | \pi(z) \in W\}, \\
x_1 &= y_1 \\
x_i &= w_i \circ \pi \quad (2 \leq i \leq n)
\end{aligned}$$

とおくと $(U; x_1, \ldots x_n)$ は Mの x を含む局所座標近傍になり局所座標系によって Uは各座標軸の開区間の積になる。

以下では Y_iを U上のベクトル場とみなし

$$Y_i(x_\alpha) = 0 \quad (1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n)$$

となることを証明しよう。x_jの定義から

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_1}(z) = \delta_{j1} \quad (z \in U)$$

が成り立つ。したがって

$$(Y_1)_z = (X_1)_z = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_z = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_z \quad (z \in U)$$

だから $Y_1(x_\alpha) = 0$ はわかる。$2 \leq i \leq k$とする。

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_\alpha)) = Y_1(Y_i(x_\alpha)) = [Y_1, Y_i](x_\alpha).$$

$\mathfrak{B}$ は完全積分可能だから U上の C^∞級関数 e_i^pが存在して

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{p=1}^{k} e_i^p Y_p$$

が成立する。したがって

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_\alpha)) = \sum_{p=1}^{k} e_i^p Y_p(x_\alpha) = \sum_{p=2}^{k} e_i^p Y_p(x_\alpha)$$

これを $I = \{z \in U | x_2(z) = c_2, \ldots, x_n(z) = c_n\}$ (各 c_iは定数) で考えると $Y_i(x_\alpha)$ $(2 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n)$ は x_1の関数になるので上の等式はこれらに関する線形常微分方程式になっている。Iは $W = S \cap U$と 1 点で交わり $z \in W$において

$$(Y_i(x_\alpha))(z) = (Y_i')_z(x_\alpha) = d\iota_z((Y_i')_z)(x_\alpha) = (Y_i')_z(w_\alpha).$$

他方

$$\{z \in W | w_{k+1}(z) = c_{k+1}, \ldots, w_n(z) = c_n\}$$

は $\mathfrak{B}'$の積分多様体だから $(Y_i')_z(w_\alpha) = 0$ となり $(Y_i(x_\alpha))(z) = 0$。上の線形常微分方程式は恒等的に 0 になる解を持つので解の一意性より

$$(Y_i(x_\alpha))(z) = 0 \quad (z \in I,\ 2 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n)$$

が成り立つ。Iを定める定数 $c_2, \ldots, c_n$を動かすことによって

$$Y_i(x_\alpha) = 0 \quad (2 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n)$$

が U 上で成立する。

U 上で

$$Y_i(x_\alpha) = 0 \quad (1 \le i \le k,\ k+1 \le \alpha \le n)$$

が成り立つので Y_i の U における局所表示は

$$(Y_i)_z = \sum_{j=1}^{k} b_i^j(z) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_z \quad (z \in U)$$

となり

$$\mathfrak{B}_z = \mathbf{R} \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_z + \cdots + \mathbf{R} \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_z \quad (z \in U)$$

と表せる。したがって

$$\{z \in U | x_\alpha(z) = c_\alpha\ (k+1 \le \alpha \le n)\} \quad (\text{各 } c_\alpha \text{は定数})$$

は $\mathfrak{B}$ の積分多様体である。

最後に $\mathfrak{B}$ の連結な積分多様体 N が $N \subset U$ を満たせば上の形の積分多様体のうちの 1 つに含まれることを証明しよう。$\iota : N \longrightarrow U$ を包含写像とする。$z \in N,\ k+1 \le \alpha \le n$ に対して

$$d\iota_z(T_z(N)) = \mathfrak{B}_z = \mathbf{R} \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_z + \cdots + \mathbf{R} \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_z$$
$$(dx_\alpha)_z \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_z \right) = 0 \quad (1 \le i \le k)$$

だから

$$0 = (dx_\alpha)_z \circ d\iota_z = d(x_\alpha \circ \iota)_z.$$

したがって補題 1.1.4より $x_\alpha \circ \iota$ は一定値 c_α をとり

$$N \subset \{z \in U | x_\alpha(z) = c_\alpha\ (k+1 \le \alpha \le n)\}$$

が成り立つ。

1.3 極大連結積分多様体

定義 1.3.1 M を多様体とし実数の閉区間 I から M への写像 $c : I \longrightarrow M$ が M の曲線 $\bar{c} : J \longrightarrow M$ の I への制限になっているとき c を M の曲線分と呼ぶ。写像 $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ に対して $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ が存在し各 $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ が M の曲線分になるとき、γ を M の区分的曲線分と呼ぶ。

補題 1.3.2 連結多様体の任意の 2 点は区分的曲線分で結べる。

証明 $x \in M$をとりMの任意の点がxと区分的曲線分で結べることを示す。xと区分的曲線分で結べるMの点の全体をO_1で表し、xと区分的曲線分で結べないMの点の全体をO_2で表す。任意の$y \in O_1$に対してyを含む局所座標近傍$(U; x_1, \ldots, x_n)$を局所座標系によってUと同一視する$\mathbf{R}^n$の開集合が中心$(x_1(y), \ldots, x_n(y))$の開球体になるようにとる。するとUの任意の点zはyと曲線分で結ぶことができ、したがってzはxと区分的曲線分で結べることになり$U \subset O_1$が成り立つ。よってO_1はMの開集合である。次に任意の$y \in O_2$に対してyを含む上と同様な局所座標近傍$(U; x_1, \ldots, x_n)$をとる。するとUの任意の点zはyと曲線分で結ぶことができ、したがってzはxと区分的曲線分で結べないことになり$U \subset O_2$が成り立つ。よってO_2はMの開集合である。$M = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$でMは連結だから$O_1 = M$となる。これよりMの任意の点がxと区分的曲線分で結べる。

定義 1.3.3 Mを多様体とし、$\mathfrak{B}$をM上の分布とする。$\mathfrak{B}$の連結積分多様体Nが$\mathfrak{B}$のどんな連結積分多様体にも真に含まれないとき、Nを$\mathfrak{B}$の極大連結積分多様体と呼ぶ。

定理 1.3.4 Mを多様体とし、$\mathfrak{B}$をM上の完全積分可能な分布とする。各$p \in M$に対してpを含む$\mathfrak{B}$の極大連結積分多様体Nがただ1つ存在する。さらにpを含む$\mathfrak{B}$の連結積分多様体はNに含まれる。

証明 $\dim M = n,\ \dim \mathfrak{B} = k$としておく。$M$の曲線$c : I \longrightarrow M$の速度ベクトルが各$t \in I$に対して$\mathfrak{B}_{c(t)}$に含まれるとき$c$を$\mathfrak{B}$の積分曲線と呼ぶ。さらに$M$の曲線分$d$が$\mathfrak{B}$のある積分曲線の制限になっているとき$d$を$\mathfrak{B}$の積分曲線分と呼ぶことにする。写像$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$に対して$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$が存在し各$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$が$\mathfrak{B}$の積分曲線分になるとき、$\gamma$を$\mathfrak{B}$の区分的積分曲線分と呼ぶことにする。

$$N = \{\gamma(b) | \gamma : [a, b] \longrightarrow M \text{は} \mathfrak{B} \text{の区分的積分曲線分},\ \gamma(a) = p\}$$

とおいてNがpを含む$\mathfrak{B}$の連結積分多様体になることを示す。各$x \in N$に対し定理1.2.1(Frobenius の定理) よりxを含む局所座標近傍$(U; x_1, \ldots, x_n)$が存在し、Uは各座標軸の開区間の積になり

$$U_x = \{z \in U | x_i(z) = x_i(x)\ (k + 1 \leq i \leq n)\}$$

はxを含む$\mathfrak{B}$の積分多様体になる。U_xは開区間の積と微分同型な$\mathfrak{B}$の積分多様体なのでU_xの各点とxを$\mathfrak{B}$の積分曲線分で結ぶことができる。したがって$U_x \subset N$となる。$x_1, \ldots, x_n$はU_xの局所座標系になっている。すべての$x \in N$に対する$(U_x; x_1, \ldots, x_k)$の全体はNに多様体構造を与え、この多様体構造に関してNは$\mathfrak{B}$の積分多様体になる。Nに含まれる$\mathfrak{B}$の区分的積分曲線分はNの位相に関しても連続だからNは弧状連結になる。特にNは連結である。

Nが$\mathfrak{B}$の極大連結積分多様体であることを示す。N'をpを含む$\mathfrak{B}$の連結積分多様体とする。補題10.2よりN'の任意の点はpとN'の区分的曲線分で結べる。N'は$\mathfrak{B}$の積分多様体だからN'の区分的曲線分は$\mathfrak{B}$の区分的積分曲線分になり$N' \subset N$が成り立つ。このことからNは$\mathfrak{B}$のどんな連結積分多様体にも真に含まれないことがわかる。したがってNは$\mathfrak{B}$の極大連結積分多様体である。

極大連結積分多様体の一意性は極大性からわかる。

1.4 可算開基

注意 1.4.1 高々可算を簡単のため単に可算ということにする。

定理 1.4.2 多様体が可算開基を持つこととコンパクト部分集合の可算族の合併になることは同値である。

証明 多様体 Mが可算開基 $\{O_i\}_{i\in\mathbf{N}}$を持つと仮定する。Mの各点 x はコンパクト近傍 U_xを持つ。$x\in O_{i(x)}\subset U_x$となる $O_{i(x)}$をとり $\mathbf{N}'=\{i(x)|x\in M\}$ とおくと $\{O_i\}_{i\in\mathbf{N}'}$は M の開被覆になる。$\overline{O}_{i(x)}\subset U_x$だから $i\in\mathbf{N}'$に対して$\overline{O}_i$はコンパクト。よって Mはコンパクト部分集合の可算族 $\{\overline{O}_i\}_{i\in\mathbf{N}'}$の合併になる。

逆に Mがコンパクト部分集合の可算族 $\{K_i\}_{i\in\mathbf{N}}$の合併になると仮定する。各 K_iの任意の点は $\mathbf{R}^n$ $(n=\dim M)$ の開集合と位相同型な開近傍を持つ。これらの開近傍は可算開基を持つ。K_iはコンパクトだからこれらの開近傍の有限族の合併に含まれる。Mは可算開基を持つ開集合の可算族の合併になる。したがって Mは可算開基を持つ。

補題 1.4.3 Mを連結多様体とし Mのある開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在し

(1) 各 U_αは可算開基を持つ、

(2) 各$\alpha\in A$ に対して、$\{\beta\in A|U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset\}$ は可算

を満たすとする。このとき、Mは可算開基を持つ。

証明 $U_{\alpha_0}\neq\emptyset$ となる$\alpha_0\in A$ を 1 つとり固定しておく。

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\alpha_0\}, \\ A_{i+1} &= \{\alpha\in A|{}^{\exists}\beta\in A_i : U_\beta\cap U_\alpha\neq\emptyset\} \quad (i\geq 0) \end{aligned}$$

として A の部分集合の列 A_iを帰納的に定める。仮定 (2) より A_1は可算になり、帰納的にすべての A_iも可算になることがわかる。そこで $A'=\cup\{A_i|i\in\mathbf{N}\}$ とおくと A'も可算である。$U=\cup\{U_\alpha|\alpha\in A'\}$ とおくと、Uは Mの開集合になる。また各 U_αは可算開基を持つので Uも可算開基を持つ。

$M=U$を示すために Uが閉集合になることを示す。$x\in\overline{U}$とする。$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$は Mの開被覆だから、ある U_α があって $x\in U_\alpha$となる。U_αは x の開近傍だから、$U\cap U_\alpha\neq\emptyset$。$U$の定義より、ある$\beta\in A_i$があって $U_\beta\cup U_\alpha\neq\emptyset$。したがって、$\alpha\in A_{i+1}\subset A'$となり、$x\in U_\alpha\subset U$。$\overline{U}\subset U$となり、$U$は Mの閉集合。Mは連結だから $M=U$。よって Mは可算開基を持つ。

補題 1.4.4 多様体の各連結成分は開集合になる。(一般に位相空間の連結成分は閉集合になる。)

証明 Mを n 次元多様体とし、Cを Mの 1 つの連結成分とする。Cの各点 x は $\mathbf{R}^n$の開集合と位相同型になる開近傍を持つので、特に連結な開近傍 Vを持つ。したがって $V\subset C$ となり Cは Mの開集合である。

補題 1.4.5 Mを連結多様体としMのある開被覆$\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$が存在し各U_iの任意の連結成分が可算開基を持つとする。このとき、Mは可算開基を持つ。

証明 各U_iを連結成分に分解し$U_i=\cup\{U_{i,\alpha}|\alpha\in A_i\}$とする。$U_i$は$M$の開集合だから補題 1.4.4より$U_{i,\alpha}$も$M$の開集合である。$\{U_{i,\alpha}|i\in\mathbf{N},\alpha\in A_i\}$は$M$の開被覆で各$U_{i,\alpha}$は仮定より可算開基を持つ。$i,j\in\mathbf{N},\alpha\in A_i$に対して

$$A_{i,j,\alpha}=\{\beta\in A_j|U_{i,\alpha}\cap U_{j,\beta}\neq\emptyset\}$$

が可算であることを示せば$\{(j,\beta)|U_{i,\alpha}\cap U_{j,\beta}\neq\emptyset\}$も可算になり補題 1.4.3を適用すると$M$は可算開基を持つことがわかる。

以下で$A_{i,j,\alpha}$が可算になることを示す。$U_{i,\alpha}\cap U_j$は$U_{i,\alpha}$の開集合で$U_{i,\alpha}$は可算開基を持つので$U_{i,\alpha}\cap U_j$の連結成分は可算である。そこで、$U_{i,\alpha}\cap U_j=\cup\{V_k|k\in\mathbf{N}\}$を連結成分への分解とする。$V_k\subset U_j$で$V_k$は連結だからただ1つ$\beta(k)\in A_j$が定まり$V_k\subset U_{j,\beta(k)}$となる。$V_k\subset U_{i,\alpha}\cap U_{j,\beta(k)}$だから$\beta(k)\in A_{i,j,\alpha}$となる。$\beta\in A_{i,j,\alpha}$とすると、$\emptyset\neq U_{i,\alpha}\cap U_{j,\beta}\subset U_{i,\alpha}\cap U_j$だからある$k\in\mathbf{N}$が存在し$(U_{i,\alpha}\cap U_{j,\beta})\cap V_k\neq\emptyset$。よって$U_{j,\beta}\cap V_k\neq\emptyset$となり$V_k\subset U_{j,\beta}$。したがって$\beta=\beta(k)$で$A_{i,j,\alpha}=\{\beta(k)|k\in\mathbf{N}\}$が成り立ち$A_{i,j,\alpha}$は可算である。

定理 1.4.6 可算開基を持つ多様体の連結な部分多様体は可算開基を持つ。

証明 M'を可算開基$\{O'_i\}_{i\in\mathbf{N}}$を持つ多様体とし$M$を$M'$の連結な部分多様体とする。$\dim M'=n$, $\dim M=k$とおく。M'の各点xは局所座標近傍U'_xを持つ。$x\in O'_{i(x)}\subset U'_x$となる$O'_{i(x)}$をとり$\mathbf{N}'=\{i(x)|x\in M'\}$とおくと各$i\in\mathbf{N}'$に対して$O'_i$も$M$の局所座標近傍で$\{O'_i\}_{i\in\mathbf{N}'}$は$M'$の開被覆になる。$\iota:M\longrightarrow M'$を包含写像とし$M_i=\iota^{-1}(O'_i)=M\cap O'_i$とおくと$\{M_i\}_{i\in\mathbf{N}'}$は$M$の開被覆になる。各$M_i$の任意の連結成分$O$が可算開基を持つことを示せば、補題 1.4.5を適用することができMは可算開基を持つ。

以下でOが可算開基を持つことを示そう。$O\subset M_i\subset O'_i$となっている。O'_iの局所座標系を$x_1,\ldots,x_n$で表す。$y_j=x_j|_O$ $(1\leq j\leq n)$とおく。$i=(i_1,\ldots,i_k)$ $(1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n)$に対して

$$O_i=\{x\in O|x\text{ のある開近傍 }U\text{が存在し、}(U;y_{i_1},\ldots,y_{i_k})\text{ は }O\text{の局所座標近傍 }\}$$

とおくと、各O_iはOの開集合である。Oは部分多様体だから$O=\cup\{O_i|1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n\}$となる。$O_i$の任意の連結成分$V$に対して

$$\varphi:V\longrightarrow\mathbf{R}^k;x\longmapsto(y_{i_1}(x),\ldots,y_{i_k}(x))$$

とおくと、φは挿入になる。$\mathbf{R}^k$は各P_iが連結になるような可算開基$\{P_i\}_{i\in\mathbf{N}}$を持つ。

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_i &= \{U|U\text{は}V\text{の開集合、}\varphi|_U:U\longrightarrow P_i\text{は微分同型 }\}\\ V_i &= \cup\{U|U\in\mathfrak{U}_i\}\end{aligned}$$

とおく。各V_iはVの開集合になり、φは挿入だから$V=\cup\{V_i|i\in\mathbf{N}\}$。ここで$U,U'\in\mathfrak{U}_i$, $U\cap U'\neq\emptyset$ならば$U=U'$になることを示そう。$U\cap U'\neq U$とする。$U\cap U'$はUの開集

合でUは連結だから、$U\cap U'$はUの閉集合にはならない。よってUにおける$U\cap U'$の境界は空集合ではない。そこでUにおける$U\cap U'$の境界点$p\in U$をとる。すると点列$q_n\in U\cap U'$が存在し$p=\lim_{n\to\infty} q_n$となる。よって$\varphi(p)=\lim_{n\to\infty}\varphi(q_n)$。$\varphi|_{U'}:U'\longrightarrow P_i$は微分同型だから、ある$q\in U'$が存在し$\varphi(q)=\varphi(p)$。よって$\varphi(q)=\lim_{n\to\infty}\varphi(q_n)$となり$q=\lim_{n\to\infty}q_n=p$。よって$p\in U\cap U'$となり$p$のとり方に矛盾する。したがって$U\cap U'=U$である。同様に$U\cap U'=U'$となり$U=U'$。

各$U\in\mathfrak{U}_i$はP_iと微分同型だから特に連結。したがって、$V_i=\cup\{U|U\in\mathfrak{U}_i\}$は$V_i$の連結成分への分解になる。さらに$P_i$は可算開基を持つので$V_i$の連結成分も可算開基を持つ。したがって$V$の開被覆$\{V_i\}_{i\in\mathbf{N}}$に補題 1.4.5を適用することができ、$V$は可算開基を持つ。さらに$O$の開被覆$\{O_i|1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n\}$に補題 1.4.5を適用すると、$O$は可算開基を持つ。

系 1.4.7 $\mathbf{R}^n$の連結な部分多様体は可算開基を持つ。

証明 $\mathbf{R}^n$は可算開基を持つので定理 1.4.6より$\mathbf{R}^n$の連結な部分多様体は可算開基を持つ。

命題 1.4.8 Mを多様体とし、$\mathfrak{B}$をM上の完全積分可能な分布とする。Nは$\mathfrak{B}$の積分多様体であって可算開基を持つとする。多様体LからMへのC^∞級写像fが$f(L)\subset N$を満たせばfをNへの写像とみなしても$f:L\longrightarrow N$はC^∞級写像になる。

証明 $\dim M=n, \dim N=k$としておく。$x\in L$とNにおける$y=f(x)$の開近傍Vをとる。定理 1.2.1(Frobenius の定理) よりyを含むMの局所座標近傍$(U;x_1,\ldots,x_n)$が存在し、Uは各座標軸の開区間の積になり

$$\{z\in U|x_i(z)=c_i\ (k+1\leq i\leq n)\}\quad (各\ c_i は定数)$$

は$\mathfrak{B}$の積分多様体になる。$p:U\longrightarrow\mathbf{R}^{n-k}\,;z\longmapsto(x_{k+1}(z),\ldots,x_n(z))$とおくと$p$は$C^\infty$級写像になる。$V'=p^{-1}(p(y))$は$N$における$y$の開近傍になり$x_1,\ldots,x_k$は$V'$上の局所座標系である。$U$を取り直して$V'\subset V$とできる。$f^{-1}(U)$は$L$の開集合になり$x$を含む$f^{-1}(U)$の連結成分を$C$とすると補題 1.4.4より$C$は$x$の開近傍になる。以下で$f(C)\subset V'$となることを示す。$N$の包含写像を$\iota:N\longrightarrow M$で表すと$N\cap U=\iota^{-1}(U)$となり$N\cap U$は$N$の開集合である。$N\cap U$の各連結成分は補題 1.4.4より$N$の開集合だから$U$に含まれる$\mathfrak{B}$の連結積分多様体になり、定理 1.2.1より$p$による 1 点の逆像に含まれる。仮定より$N$は可算開基を持つので$N\cap U$も可算開基を持ち$N\cap U$の連結成分の個数は可算になる。したがって$p(N\cap U)$は可算である。$f(C)\subset N\cap U$だから$p(f(C))$を考えることができ$p(f(C))$は$\mathbf{R}^{n-k}$の連結可算部分集合になる。よって$p(f(C))$は 1 点だけになる。$p(y)\in p(f(C))$だから$f(C)\subset p^{-1}(p(y))=V'$。$f(C)\subset U$で$f:L\longrightarrow M$は$C^\infty$級写像だから$x_1\circ f,\ldots,x_k\circ f$は$C$上の$C^\infty$級関数である。$f(C)\subset p^{-1}(p(y))=V'$で$x_1,\ldots,x_k$は$V'$上の局所座標系だから$f:C\longrightarrow N$は$C^\infty$級写像である。

第 2 章 Lie 群と Lie 環

2.1 Lie 群と Lie 環

定義 2.1.1 可算開基を持つと仮定していない多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 2.1.2 定義 2.1.1では、Lie 群は可算開基を持つと仮定しなかったが、連結 Lie 群は可算開基を持つことを後で示す (系 2.2.2)。

例 2.1.3 Vを有限次元実ベクトル空間とすると、Vの正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を一般線形群と呼ぶ。

証明 $\dim V = n$とする。$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V | f$は線形写像$\}$とおく。$V$の基底をとり、$\mathrm{End}(V)$ の元を行列で表現したときの行列の成分を考えれば、$\mathrm{End}(V)$ と n^2次元 Euclid 空間の間の微分同型写像になる。表現行列の成分が $\mathrm{End}(V)$ の座標になる。$\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ は $\mathrm{End}(V)$ の座標の多項式で表されるので連続であり、

$$GL(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) | \det f \neq 0\}$$

だから、$GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合である。特に、$GL(V)$ は n^2次元多様体になる。群演算

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V); (x, y) \mapsto xy$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の二次式で表されるので C^∞級写像であり、

$$GL(V) \to GL(V); x \mapsto x^{-1}$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の分数式で表されるので C^∞級写像である (Cramer の公式)。

定義 2.1.4 Lie 群 G の元 gに対して微分同型写像 L_g, R_gを

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ gによる**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 Xは、G の任意の元 gに対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

注意 2.1.5 Lie 群 G の単位元 e を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとっておけば、各 $g \in G$ に対して $(L_g(U); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。右移動を使っても同様にできる。

定義 2.1.6 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

例 2.1.7 多様体 M上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 2.1.8 Vをベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Yに対して $[X, Y] = XY - YX$と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

証明 定め方より $[\ ,\ ] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ は双線形写像である。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y, Zに対して

$$\begin{aligned}
& [X, Y] = XY - YX = -[Y, X], \\
& [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
= \ & [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
= \ & XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY \\
& + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{End}(V)$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

定理 2.1.9 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表す。すると、$\mathfrak{g}$ は Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

証明 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{X}(G)$ の部分ベクトル空間になることは定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (dL_g)_x(Y_x) = Y_{gx} \quad (x \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係より

$$(dL_g)_x([X, Y]_x) = [X, Y]_{gx} \quad (x \in G)$$

となり、$[X, Y] \in \mathfrak{g}$。よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環である。

αが線形写像になることは定義からわかる。$X \in \mathfrak{g}, \alpha(X) = 0$ とすると、任意の $g \in G$ に対し

$$X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$$

だから、$X = 0$。よって $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ となり、αは単射。他方 $X \in T_e(G)$ に対して$\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ とおき、$\tilde{X}$が左不変ベクトル場になることを示せば、αが全射になることがわかる。$(U; x_1, \ldots, x_n)$ を G の単位元 e を含む局所座標近傍とする。$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy$ は連続だから、e を含む開近傍 Vで $VV = \{xy | x, y \in V\} \subset U$を満たすものをとることができる。

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_e$$

とおく。注意 2.1.5より任意の $g \in G$ に対して、$(L_g(V); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。そこで $y_i = x_i \circ L_g^{-1}$とおくと $gx \in L_g(V)$ $(x \in V)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{gx} &= (dL_{gx})_e(X) = d(L_g \circ L_x)_e(X) = (dL_g)_x(dL_x)_e(X) \\
&= (dL_g)_x \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x .
\end{aligned}$$

ここで

$$\left((dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right)([L_g(U), y_k]) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right)([U, y_k \circ L_g]) = \delta_{jk}$$

だから

$$(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx}$$

となり

$$\tilde{X}_{gx} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx} .$$

$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy = L_x(y)$ は C^∞級写像だから、各 i, jに対して

$$V \to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞級写像になる。よって、各 jについて

$$L_g(V) \to \mathbf{R}; gx \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞級写像である。したがって$\tilde{X}$は G 上のベクトル場である。$\tilde{X}$は定め方より左不変。したがってαは線形同型写像である。

定義 2.1.10 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

定義 2.1.11 Lie 群の間の C^∞級写像 $f : G \to H$が群の準同型写像でもあるとき、fを **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持ち、f^{-1}も Lie 群の準同型写像であるとき、fを **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と Hは**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、fを **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持つとき、fを **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

2.2 連結 Lie 群

定理 2.2.1 G を連結 Lie 群とし、Uを G の単位元 e の近傍とする。このとき $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ が成り立つ。ただし、$U^n = \{g_1 \dots g_n | g_i \in U\}$。

証明 $U^{-1} = \{g^{-1} | g \in U\}$ も e の近傍になるので、$V = U \cap U^{-1}$は e の近傍である。$H = \cup\{V^n | n \in \mathbf{N}\}$ とおく。$V \subset U$だから、$G = H$を示せばよい。$g, h \in H$に対してある自然数 m, n があって $g \in V^m, h \in V^n$となる。よって $gh \in V^{m+n} \subset H$。$g = g_1 \dots g_m,\ g_i \in V$ とすると、$g^{-1} = g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$で $g_i^{-1} \in V$だから $g^{-1} \in V^m \subset H$。したがって Hは G の部分群である。Vは e の近傍で $V \subset H$だから、任意の $h \in H$に対して $L_h(V)$ は h の近傍になり $L_h(V) \subset H$。したがって Hは G の開集合である。G を Hの剰余類によって分解すると、

$$G = H \cup (\cup\{L_g(H) | g \in G, g \notin H\})$$

となり各 $L_g(H)$ は G の開集合だから、Hは G の閉集合である。G は連結だから $G = H$が成り立つ。

系 2.2.2 連結 Lie 群は可算開基を持つ。

証明 G を連結 Lie 群とし単位元 e のコンパクト近傍 Uをとる。群演算の連続性より各 U^nはコンパクトになり、定理 2.2.1より $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$。したがって定理 1.4.2より G は可算開基を持つ。

命題 2.2.3 G を Lie 群とし G の単位元を含む連結成分を G_0とすると、G_0は G の正規部分群であり、さらに Lie 部分群である。

証明 $\tau : G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh^{-1}$とすると、$\tau$は連続写像だから$\tau(G_0)$ は連結になる。$e = \tau(e,e) \in \tau(G_0)$ より$\tau(G_0) \subset G_0$が成り立つ。したがって、G_0は G の部分群になる。任意の $g \in G$ に対して $L_g \circ R_{g^{-1}}$は連続写像だから $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ は連結になり、$e = L_g \circ R_{g^{-1}}(e) \in L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ より $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0) \subset G_0$が成り立つ。したがって、$G_0$は G の正規部分群になる。また補題 1.4.4より G_0は G の開集合になるので、特に部分多様体になっている。$\tau : G \times G \longrightarrow G$ は C^∞級写像だから G_0への制限$\tau_{G_0} : G_0 \times G_0 \longrightarrow G_0$も C^∞級写像になり G_0は Lie 群である。よって G_0は G の Lie 部分群である。

補題 2.2.4 Lie 群が可算開基を持つための必要十分条件は、連結成分の個数が高々可算になることである。

証明 Lie 群が可算開基を持てば連結成分の個数は高々可算になる。逆に Lie 群 G の連結成分の個数が高々可算だとする。G の単位元の連結成分 G_0は命題 2.2.3より連結 Lie 群になるので、系 2.2.2より可算開基を持つ。G の連結成分は G_0の剰余類に一致し G_0の各剰余類は G_0に微分同型だから可算開基を持つ。したがって G も可算開基を持つ。

2.3 一般線形群

命題 2.3.1 Vを n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n,\mathbf{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ は同型になる。

証明 $v_1,\ldots,v_n$を Vの基底とし、$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して fの $v_1,\ldots,v_n$に関する表現行列を $R(f)$ で表す。つまり、

$$f[v_1,\ldots,v_n] = [v_1,\ldots,v_n]R(f)$$

となる。このとき、

$$R : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$$

は代数の同型写像になる。Rは線形同型写像だから特に微分同型写像である。

以上のことから、Rは Lie 環の同型写像

$$R : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$$

を与え、Rの $GL(V)$ への制限は Lie 群の同型写像

$$R|_{GL(V)} : GL(V) \to GL(n,\mathbf{R})$$

を与える。

補題 2.3.2 多様体 M上のベクトル場 X, Yの局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ における局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \quad Y_x = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad (x \in U)$$

としたとき、ベクトル場 $[X, Y]$ の Uにおける局所表示は

$$[X, Y]_x = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i}(x) - \eta^i(x) \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}(x) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \quad (x \in U)$$

である。

証明 $x \in U$に対して、

$$\begin{aligned} (X(x_j))(x) &= X_x(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(x) = \xi^j(x), \\ (Y(x_j))(x) &= \eta^j(x). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} X_x([U, Y(x_j)]) &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i}(x), \\ Y_x([U, X(x_j)]) &= \sum_{i=1}^{n} \eta^i(x) \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

これらより、

$$Z_x([U, x_j]) = \sum_{i=1} \left\{ \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i}(x) - \eta^i(x) \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}(x) \right\}.$$

よってベクトル場 $[X, Y]$ の局所表示は、

$$[X, Y]_x = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i}(x) - \eta^i(x) \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}(x) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x, \quad (x \in U)$$

になる。

定理 2.3.3 $GL(n, \mathbf{R})$ は例2.1.3の証明より $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を$\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

証明 定理 2.1.9を $GL(n,\mathbf{R})$ に適用すると $\tilde{}=\alpha^{-1}$となるので、$\tilde{}$は線形同型写像である。あとは $\tilde{}$ が Lie 環の準同型写像になることを示せばよい。(i,j)-成分のみが 1 で他の成分は 0 になる n 次正方行列を E_{ij}で表すと、$\{E_{ij}|1\le i,j\le n\}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の基底になる。その双対基底を $\{x_{ij}|1\le i,j\le n\}$ で表すと、x_{ij}は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の座標になる。$GL(n,\mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の開集合で $e\in GL(n,\mathbf{R})$ だから、$X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と十分小さい $t\in\mathbf{R}$ に対して $e+tX\in GL(n,\mathbf{R})$ となることに注意しておく。$g\in GL(n,\mathbf{R})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_g &= (dL_g)_e(X)=(dL_g)_e\left(\frac{d}{dt}(e+tX)\Big|_{t=0}\right)\\
&= \frac{d}{dt}L_g(e+tX)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}(g+tgX)\Big|_{t=0}\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}(gX)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(g)x_{kj}(X)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g.
\end{aligned}
$$

したがって補題 2.3.2を使うと $X,Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}),g\in GL(n,\mathbf{R})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{X},\tilde{Y}]_g\\
=&\sum_{i,j,p,q=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{n}x_{pr}(g)x_{rq}(X)\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(g)x_{kj}(Y)\right)}{\partial x_{pq}}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{r=1}^{n}x_{pr}(g)x_{rq}(Y)\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(g)x_{kj}(X)\right)}{\partial x_{pq}}\right\}\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g\\
=&\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\sum_{k,r=1}^{n}x_{ir}(g)x_{rk}(X)x_{kj}(Y)-\sum_{k,r=1}^{n}x_{ir}(g)x_{rk}(Y)x_{kj}(X)\right\}\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g\\
=&\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}(gXY-gYX)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g\\
=&\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}(g[X,Y])\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g\\
=&\widetilde{[X,Y]}_g.
\end{aligned}
$$

よって、

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]=\widetilde{[X,Y]}$$

となり、$\tilde{}$は Lie 環の準同型である。

注意 2.3.4 定理 2.3.3の Lie 環の同型写像$\tilde{}:\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})\to\mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ を $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環とみなすことにする。命題 2.3.1の同型より、有限次元ベクトル空間 Vに対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

2.4 一径数部分群

定義 2.4.1 Mを多様体とし、Xを M上のベクトル場とする。Iを実数の開区間とし、M上の曲線 $c : I \to M$が

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

を満たすとき、c を Xの**積分曲線**と呼ぶ。

補題 2.4.2 Mを多様体とし、Xを M上のベクトル場とする。実数 t_0と Mの各点 $x \in M$ に対して、Xの積分曲線 $c : I \to M$で $t_0 \in I,\ c(t_0) = x$ を満たすものが存在する。また $c_1, c_2 : I \to M$が $c_1(t_0) = c_2(t_0) = x$ を満たす Xの積分曲線ならば $c_1 = c_2$が成り立つ。

証明 x を含む Mの局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。Xの Uにおける局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad (x \in U)$$

とする。Uにおいて問題になっている等式

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

の局所表示は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}$$

となる。したがって c は

$$\frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)), \quad x_i \circ c(t_0) = x_i(x) \quad (1 \le i \le n)$$

を満たせばよい。これは Euclid 空間の開集合における常微分方程式であり a_iは C^∞級関数だから t_0を含む開区間 Iと $c : I \to U$が存在し上の常微分方程式を満たす。この曲線 c が求めるものである。

次に積分曲線の一意性を示そう。Mの局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $c_1(I), c_2(I) \subset U$を満たすものが存在する場合は、局所座標 $x_1, \ldots, x_n$を使うと

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_{c_1(t)}, \quad \frac{dc_2}{dt}(t) = X_{c_2(t)} \quad (t \in I)$$

は Euclid 空間の開集合における常微分方程式になり、常微分方程式の解の一意性から $c_1 = c_2$ となる。$c_1(I), c_2(I)$ が Mの 1 つの局所座標近傍に含まれない場合を考えよう。$t_0 < s, s \in I$ に対して $0 < \varepsilon$と $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s$ を次の条件を満たすようにとる。$I_i = (t_{i-1} - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ $(1 \le i \le k)$ とおくと各 i について $c_1(I_i), c_2(I_i)$ は Mの 1 つの局所座標近傍に含まれる。先に示したことを使うと $c_1(t_1) = c_2(t_1), \ldots, c_1(t_k) = c_2(t_k)$ を帰納的に示すことができる。特に $c_1(s) = c_2(s)$。$t_0 > s, s \in I$に対しても同様にして $c_1(s) = c_2(s)$ となり、$c_1 = c_2$が成り立つ。

定義 2.4.3 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 2.4.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 2.1.9によって$\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xを c に対応させる。

証明 次の (1),(2) のステップにわけて定理を証明する。

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものが存在し、c は G の一径数部分群である。

(2) 定理で定めた 2 つの対応はお互いの逆対応になる。

(1) 補題 2.4.2より、$\delta > 0$ と Xの積分曲線 $a : (-\delta, \delta) \to G$ で $a(0) = e$ を満たすものが存在する。$|s| < \delta/2$ となる s を 1 つ固定して

$$b_1(t) = a(s+t),\ b_2(t) = a(s)a(t) \quad (|s| < \delta/2)$$

とおく。すると、$t \mapsto b_1(t)$ は Xの積分曲線になり、

$$\frac{d}{dt}b_2(t) = (dL_{a(s)})_{a(t)}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right) = (dL_{a(s)})_{a(t)}(X_{a(t)}) = X_{a(s)a(t)}$$

だから $t \mapsto b_2(t)$ も Xの積分曲線になる。さらに、

$$b_1(0) = a(s) = a(s)e = a(s)a(0) = b_2(0)$$

だから補題 2.4.2の一意性より、

$$b_1(t) = b_2(t) \quad (|t| < \delta/2).$$

結局

$$a(s+t) = a(s)a(t) = a(t)a(s) \quad (|s|, |t| < \delta/2)$$

が成り立つ。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となるように自然数 kをとり

$$c(t) = a\left(\frac{t}{k}\right)^k$$

として写像 $c : \mathbf{R} \to G$ を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$|t/k| < \delta/2, |t/l| < \delta/2$ となる自然数 k, lをとったとき、

$$a\left(\frac{t}{k}\right)^k = a\left(\frac{t}{kl}\right)^{kl} = a\left(\frac{t}{l}\right)^l$$

が成り立つので、上の c は kのとり方によらずに定まっている。$c(0)=a(0)=e$ は明らか。以下で、c が G の一径数部分群であることを示そう。$t\in\mathbf{R}$ に対して $|t/k|<\delta/2$ となる自然数 kをとる。t を含む開集合 Iで $s\in I$ならば $|s/k|<\delta/2$ となるものをとる。すると $s\in I$ に対して $c(s)=a(s/k)^k$となるので、c は Iにおいて C^∞級写像である。よって $c:\mathbf{R}\to G$ は C^∞級写像になる。任意の $s,t\in\mathbf{R}$ に対して $|s/k|,|t/k|<\delta/4$ となる自然数 kをとると、$|s/k|,|t/k|,|(s+t)/k|<\delta/2$ となり、

$$
\begin{aligned}
c(s)c(t) &= a\left(\frac{s}{k}\right)^k a\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(a\left(\frac{s}{k}\right)a\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \\
&= a\left(\frac{s+t}{k}\right)^k = c(s+t).
\end{aligned}
$$

したがって $c:\mathbf{R}\to G$ は G の一径数部分群になる。

次に c が Xの積分曲線であることを示そう。$s\in\mathbf{R}$ に対して、$t\in(s-\delta,s+\delta)$ とすると、$c(t)=c(s)c(t-s)=L_{c(s)}(c(t-s))$ だから、

$$
\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=s} = (dL_{c(s)})_e\left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) = (dL_{c(s)})_e(X_e) = X_{c(s)}.
$$

したがって c は Xの積分曲線である。

(2) $X\in\mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群 c は$\frac{dc}{dt}(0)=X_e$ を満たすので、c に対応する $\mathfrak{g}$ の元は Xになる。逆に G の一径数部分群 c に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xは $X_e=\frac{dc}{dt}(0)$ を満たす。(1) の最後で示したことは $\mathfrak{g}$ の元 Xと G の一径数部分群 c が$\frac{dc}{dt}(0)=X_e$を満たせば c は X の積分曲線になることである。したがって Xに対応する G の一径数部分群は c になる。

例 2.4.5 $GL(n,\mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n,\mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の元と同一視する。$X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})\cong T_e(GL(n,\mathbf{R}))$ に対応する $GL(n,\mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$で表すと、定理 2.1.9の証明中の計算より $\tilde{X}_g=gX$ $(g\in GL(n,\mathbf{R}))$ となる。したがって、Xに対応する $GL(n,\mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$
\frac{dc(t)}{dt}=c(t)X \quad (t\in\mathbf{R}), \quad c(0)=e
$$

を満たす。行列の指数関数: $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$を使うと $c(t)=e^{tX}$となる。

例 2.4.6 行列の指数関数の射影分解による計算法について述べる。n 次複素正方行列 A の固有多項式を$\gamma_A(t)$ で表す。$\gamma_A(t)$ を因数分解し$\gamma_A(t)=(t-\lambda_1)^{p_1}\ldots(t-\lambda_k)^{p_k}$ とする。次に部分分数展開:

$$
\frac{1}{\gamma_A(t)}=\frac{h_1(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}}+\ldots+\frac{h_k(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}
$$

を行う。

$$
1=h_1(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}}+\ldots+h_k(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}
$$

となり、$\gamma_A(t)$ は $(t-\lambda_i)^{p_i}$を因子に持っているので$\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$は t の多項式である。そこで $\pi_i(t) = h_i(t)\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ とおくと$\pi_i(t)$ も t の多項式になり

$$1 = \pi_1(t) + \ldots + \pi_k(t), \quad (t-\lambda_i)^{p_i}\pi_i(t) = h_i(t)\gamma_A(t)$$

が成り立つ。$P_i = \pi_i(A)$ とおくと

$$I_n = P_1 + \ldots + P_k.$$

これを射影分解と呼ぶ。Cayley-Hamilton の定理より

$$(A-\lambda_i I_n)^{p_i} P_i = h_i(A)\gamma_A(A) = 0.$$

以上の結果を使うと

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{i=1}^{k} e^{tA} P_i = \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i I_n + t(A-\lambda_i I_n)} P_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t I_n} e^{t(A-\lambda_i I_n)} P_i = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i. \end{aligned}$$

2.5 指数写像

定義 2.5.1 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.4.4で存在を示した Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 2.5.2 例 2.4.5で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 Xに対応する一径数部分群は e^{tX}になるので、$GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 2.5.3 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.4.4の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.4.4の対応で対応する G の一径数部分群を $t \mapsto c(t, X)$ と書くことにする。$s \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{d}{dt} c(st, X) = sX_{c(st,X)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

となるので、$t \mapsto c(st, X)$ は $sX \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群になる。よって $c(st, X) = c(t, sX)$ となり $t = 1$ とおくと

$$c(s, X) = c(1, sX) = \exp sX.$$

これより $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$に一致する。

命題 2.5.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

証明 $X_1, \ldots, X_n$を $\mathfrak{g}$ の基底とし $u_1, \ldots, u_n$をその双対基底とすると、$u_1, \ldots, u_n$は $\mathfrak{g}$ の座標になる。G の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $e \in U,\ x_1(e) = \ldots = x_n(e) = 0$ を満たすものをとっておく。$\sum_{i=1}^n u_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群を $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ と書くことにする。

$$\frac{d}{dt} c(t; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i (X_i)_{c(t; u_1, \ldots, u_n)}$$

だから、各 X_iの Uにおける局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x$$

とすると $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ は

$$\frac{d}{dt} x_j(c(t; u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^n u_i a_{ji}(c(t; u_1, \ldots, u_n))$$

を満たす。常微分方程式の解はパラメーターに関して滑らかだから、写像:

$$(t, u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1(c(t; u_1, \ldots, u_n)), \ldots, x_n(c(t; u_1, \ldots, u_n)))$$

は 0 の近傍で C^∞級写像になる。

$$\exp(\sum_{i=1}^n u_i X_i) = c(1; u_1, \ldots, u_n)$$

だから、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は 0 のある開近傍 Nで C^∞級写像である。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対してある自然数 p が存在し$\frac{1}{p} X \in N$となる。そこで Xの開近傍 Oを$\frac{1}{p} O \subset N$となるようにとると

$$\exp(Z) = \exp \left(\frac{1}{p} Z \right)^p \quad (Z \in O)$$

だから exp は Oにおいて C^∞級写像である。したがって、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞級写像になる。

定理 2.5.5 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明 $X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d \exp_e(X) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX) \right|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d \exp_e = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$。定理 2.1.9より $d \exp_e$は線形同型写像になる。逆関数定理を使うと、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

定義 2.5.6 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。定理 2.5.5より exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍 Uの間の微分同型写像になるので、$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$をとると $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$ は Uにおける局所座標系になり $u_1(e) = \ldots = u_n(e) = 0$ を満たす。$(u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$に関する G の**標準座標系**と呼び、$(U; u_1, \ldots, u_n)$ を G の**標準座標近傍**と呼ぶ。

命題 2.5.7 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
(Xf)(g) &= \left.\frac{d}{dt} f(g \exp tX)\right|_{t=0} \\
([X,Y]f)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

証明　接ベクトル X_gは曲線 $t \mapsto g \exp tX$の $t = 0$ における速度ベクトルになっているので

$$
(Xf)(g) = X_g(f) = \left.\frac{d}{dt} f(g \exp tX)\right|_{t=0}
$$

が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(XYf)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY)\right|_{s=t=0} \quad (\text{先に示したことより}) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1} \exp sX)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=0}\right. \\
&\quad \left.\left. + \left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp tY \exp sX)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \quad (\text{Leibniz の法則より}) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0} \\
&\quad +(YXf)(g).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
([X,Y]f)(g) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0}.
$$

系 2.5.8 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Yに対して $[X, Y] = 0$ となる。

証明 $f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\bigg|_{s=t=0} = 0.\end{aligned}$$

したがって $[X,Y]=0$ となる。

定義 2.5.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X,Yに対して $[X,Y]=0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 2.5.8は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

2.6 準同型写像

命題 2.6.1 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 2.6.2 G,Hを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ とおく。$f: G \to H$を Lie 群の準同型写像とする。定理 2.1.9の線形同型写像を$\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、$df_e(X_e) \in T_e(H)$ を H上の左不変ベクトル場に拡張したものが $df(X)$ になる。任意の $g \in G$ に対して、

$$df_g(X_g) = df_g \circ (dL_g)_e(X_e) = d(f \circ L_g)_e(X_e).$$

ここで $x \in G$ に対して

$$(f \circ L_g)(x) = f(gx) = f(g)f(x) = (L_{f(g)} \circ f)(x)$$

だから、

$$\begin{aligned}df_g(X_g) &= d(f \circ L_g)_e(X_e) = d(L_{f(g)} \circ f)(X_e) \\ &= (dL_{f(g)})_e \circ df_e(X_e) = df(X)_{f(g)}.\end{aligned}$$

よって $X,Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$df_g(X_g) = df(X)_{f(g)}, \quad df_g(Y_g) = df(Y)_{f(g)} \quad (g \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係を使うと

$$df_g([X,Y]_g) = [df(X), df(Y)]_{f(g)} \quad (g \in G)$$

となる。特に

$$df_e([X,Y]_e) = [df(X), df(Y)]_e$$

が成立し、定理 2.1.9より $[df(X), df(Y)]$ は H上の左不変ベクトル場だから、

$$df([X,Y]) = [df(X), df(Y)].$$

したがって $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型になる。

定義 2.6.3 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を fの**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 2.6.2は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 2.6.4 A, B, Cを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} d(id_A) &= \alpha_A^{-1} \circ d(id_A)_e \circ \alpha_A = \alpha_A^{-1} \circ id_{T_e(A)} \circ \alpha_A = id \\ d(g \circ f) &= \alpha_C^{-1} \circ d(g \circ f)_e \circ \alpha_A = \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ df_e \circ \alpha_A \\ &= \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ \alpha_B \circ \alpha_B^{-1} \circ df_e \circ \alpha_A = dg \circ df \end{aligned}$$

系 2.6.5 A, Bを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

証明

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) = d(id_B) = id$$

同様にして $d(f^{-1}) \circ df = id$ となり $d(f^{-1}) = df^{-1}$。したがって dfは Lie 環の同型写像になる。

命題 2.6.6 G, Hを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は Hの指数写像である。

証明 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になるので (命題 2.6.1)、$t \mapsto f(\exp tX)$ は Hの一径数部分群になる。定理 2.4.4よりある $Y \in \mathfrak{h}$ が存在して、

$$f(\exp tX) = \exp tY \quad (t \in \mathbf{R})$$

となる。$t=0$ で両辺を微分すると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left.\frac{d}{dt}f(\exp tX)\right|_{t=0} = df_e(X_e)\\ (\text{右辺}) &= \left.\frac{d}{dt}\exp tY\right|_{t=0} = Y_e.\end{aligned}$$

したがって、$df_e(X_e) = Y_e$となり $df(X) = Y$。これより、$f(\exp tX) = \exp(tdf(X))$ が成り立つ。特に $t=1$ とすると、$f(\exp X) = \exp(df(X))$。

定義 2.6.7 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 Vに対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 Vに対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 2.6.8 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

証明 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) &= \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]\\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = -[Z,[X,Y]] \quad (\text{Jacobi 律})\\ &= \mathrm{ad}([X,Y])(Z)\end{aligned}$$

となるので $[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) = \mathrm{ad}([X,Y])$ が成り立ち、ad は Lie 環の表現になる。

定義 2.6.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 2.6.10 Lie 群 G の元 gに対して $\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

証明 $L_g \circ R_{g^{-1}}$は G の自己同型写像だから、系 2.6.5より $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像になる。特に $\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となる。命題 2.6.6より

$$g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。命題 2.6.4を使うと $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(gh) &= d(L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}}) = d(L_g \circ L_h \circ R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}})\\ &= d(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}}) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) \circ d(L_h \circ R_{h^{-1}})\\ &= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h)\end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。

次に Ad が C^∞級写像になることを示そう。$GL(\mathfrak{g})$ における座標は $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$ とその双対基底$\theta_1, \dots, \theta_n$を使って $GL(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R};\ u \mapsto \theta_i(u(X_j))$ と表すことができる。したがって $G \to \mathbf{R};\ g \mapsto \theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j))$ が C^∞級関数になることを示せばよい。定理 2.1.9の証明と同様、

$$\theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j)) = \theta_i(\alpha_G^{-1} \circ dL_g \circ dR_{g^{-1}} \circ \alpha_G(X_j))$$

は gに関する C^∞級関数になる。

最後に Ad の微分が $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致することを示そう。命題 2.5.7より、$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)tY))\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)f(g)\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)\right)\Big|_{s=0} f(g)
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\Big|_{s=0} = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$$

となり

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)\Big|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)$$

が成り立つので、Ad の微分は ad になる。

定義 2.6.11 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(V)$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 2.6.12 有限次元ベクトル空間 Vに対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 2.5.2より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\Big|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

2.7 接束 Lie 群

定理 2.7.1 G を Lie 群とする。G の群演算を

$$\mu : G \times G \to G\ ;\ (g,h) \mapsto gh$$

で表すと、μは接ベクトル束の間の写像

$$d\mu : T(G \times G) \to TG$$

を誘導する。ここで $T(G \times G)$ は自然に $TG \times TG$ と同型になるので、

$$d\mu : TG \times TG \to TG$$

とみなすことができる。同様に逆元を対応させる写像を

$$\nu : G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

で表すことにすると、νは接ベクトル束の間の写像

$$d\nu : TG \to TG$$

を誘導する。この $d\mu$と $d\nu$により TG は Lie 群になり、G の単位元 e における接ベクトル 0_eが TG の単位元になる。

証明 TG の元 u, v, wに対して G の曲線 a, b, c を

$$u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t), \quad v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} b(t), \quad w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c\,(t)$$

となるようにとる。

$$\begin{aligned}
(u \cdot v) \cdot w &= d\mu(d\mu(u, v), w) \\
&= d\mu\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)b(t),\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c\,(t)\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a(t)b(t))c\,(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)(b(t)c\,(t)) \\
&= d\mu(u, d\mu(v, w)) \\
&= u \cdot (v \cdot w)
\end{aligned}$$

となるので、$d\mu$の定める演算は結合律を満たす。恒等的に G の単位元 e に値を持つ曲線の速度ベクトル 0_eは、この演算の単位元になる。

次に

$$\begin{aligned}
u \cdot d\nu(u) &= d\mu\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t),\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)^{-1}\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)a(t)^{-1} \\
&= 0_e
\end{aligned}$$

となるので、$d\nu(u)$ は u の逆元になる。以上で TG が Lie 群になることがわかった。

定義 2.7.2 Lie 群 G の接ベクトル束 TG に定理 2.7.1で定めた Lie 群の構造を入れたものを、G の**接束 Lie 群**と呼ぶことにする。

G の単位元 e における接ベクトル空間を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同一視する。このとき、TG の単位元 0_eにおける接ベクトル空間は

$$T_{0_e}(TG) \cong T_eG \times T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

となる。以後この同型によって TG の 0_eにおける接ベクトル空間と $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ とを同一視する。
G と TG の指数写像をそれぞれ $\exp$ と $\exp_T$で表す。

命題 2.7.3 $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ に対して

$$\exp_T(x, y) = (d\exp)_x y$$

が成り立つ。

証明 まず $s \mapsto (d\exp)_{sx}sy$が TG の一径数部分群であることを示す。$a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
& ((d\exp)_{ax}ay) \cdot ((d\exp)_{bx}by) \\
= & \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay) \right) \cdot \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(bx + tby) \right) \\
= & d\mu \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(bx + tby) \right) \\
= & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(\exp(ax + tay), \exp(bx + tby)) \\
= & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay) \exp(bx + tby) \\
= & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp((a + b)x + t(a + b)y) \\
= & (d\exp)_{(a+b)x}(a + b)y.
\end{aligned}$$

次に

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\exp)_{tx}ty = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

となるので、$\exp_T s(x, y) = (d\exp)_{sx}sy$がわかる。したがって $\exp_T(x, y) = (d\exp)_x y$となる。

補題 2.7.4 $u_g \in T_gG$ と $v_h \in T_hG$ に対して

$$u_g \cdot v_h = (dR_h)_g u_g + (dL_g)_h v_h$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} u_g \cdot v_h &= d\mu_{(g,h)}(u_g, v_h) \\ &= d\mu_{(g,h)}(u_g, 0) + d\mu_{(g,h)}(0, v_h) \\ &= (dR_h)_g u_g + (dL_g)_h v_h \end{aligned}$$

Lie 群の接ベクトル束は自明になる。実際

$$\iota_R : G \times \mathfrak{g} \to TG\ ;\ (g, u) \mapsto dR_g u$$

によって写像ι_Rを定めると、ι_Rは微分同型写像になる。したがってι_Rから $G \times \mathfrak{g}$ に Lie 群構造が定まる。その Lie 群を $G \times_R \mathfrak{g}$ で表し、元を $(g, u)_R$で表すことにする。

命題 2.7.5 $(g, u)_R, (h, v)_R \in G \times_R \mathfrak{g}$ に対して

$$(g, u)_R \cdot (h, v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R$$

が成り立つ。

証明 ι_R通して補題 2.7.4を使って計算すればよい。

$$\begin{aligned} \iota_R((g, u)_R \cdot (h, v)_R) &= dR_g u \cdot dR_h v \\ &= (dR_h)_g dR_g u + (dL_g)_h dR_h v \\ &= dR_{gh} u + (dR_h)_g dL_g v \\ &= dR_{gh} u + dR_{gh} \mathrm{Ad}(g) v \\ &= dR_{gh}(u + \mathrm{Ad}(g) v) \\ &= \iota_R(gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R \end{aligned}$$

となるので、

$$(g, u)_R \cdot (h, v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R$$

が成り立つ。

ι_Rと同様に

$$\iota_L : G \times \mathfrak{g} \to TG\ ;\ (g, u) \mapsto dL_g u$$

によって写像ι_Lを定めると、ι_Lは微分同型写像になる。したがってι_Lから $G \times \mathfrak{g}$ に Lie 群構造が定まる。その Lie 群を $G \times_L \mathfrak{g}$ で表し、元を $(g, u)_L$で表すことにする。次の命題 2.7.6 は後で使うわけではないが、命題 2.7.5に対応している。

命題 2.7.6 $(g, u)_L, (h, v)_L \in G \times_L \mathfrak{g}$ に対して

$$(g, u)_L \cdot (h, v)_L = (gh, \mathrm{Ad}(h)^{-1} u + v)_L$$

が成り立つ。

証明　ι_L通して補題 2.7.4を使って計算すればよい。

$$\begin{aligned}\iota_L((g,u)_L\cdot(h,v)_L) &= dL_gu\cdot dL_hv\\ &= (dR_h)_g dL_g u + (dL_g)_h dL_h v\\ &= (dL_g)_h dR_h u + dL_{gh} v\\ &= dL_{gh}\mathrm{Ad}(h)^{-1}u + dL_{gh}v\\ &= dL_{gh}(\mathrm{Ad}(h)^{-1}u + v)\end{aligned}$$

となるので、

$$(g,u)_L\cdot(h,v)_L = (gh, \mathrm{Ad}(h)^{-1}u+v)_L$$

が成り立つ。

$G\times_R\mathfrak{g}$ の指数写像を $\exp_R$で表す。

$$p : G\times_R\mathfrak{g}\to G\ ;\ (g,u)_R\mapsto g$$

とおく。

補題 2.7.7 p は Lie 群の準同型写像になり、$p\circ\exp_R = \exp\circ dp$ が成り立つ。

証明　命題 2.7.5より、p は Lie 群の準同型写像になる。よって命題 2.6.6より $p\circ\exp_R = \exp\circ dp$ が成り立つ。

$G\times_R\mathfrak{g}$ の指数写像 $\exp_R$をさらに詳しく調べるためにアファイン変換群を導入する。有限次元実ベクトル空間 Vに対して、V上のアファイン変換の全体を $A(V)$ で表す。

$$A(V) = \left\{ \begin{bmatrix} P & v\\ 0 & 1\end{bmatrix} \,\middle|\, P\in GL(V),\ v\in V\right\}$$

とみなす。$x\in V$に対して

$$\begin{bmatrix} P & v\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Px+v\\ 1\end{bmatrix}$$

によって Vへの作用を定めることにより、$A(V)$ を V上のアファイン変換の全体とみなすことができる。$A(V)$ の指数写像を $\exp_A$とおき、これを求めてみよう。$A(V)$ の Lie 環 $\mathfrak{a}(V)$ は

$$\mathfrak{a}(V) = \left\{ \begin{bmatrix} X & v\\ 0 & 0\end{bmatrix} \,\middle|\, X\in\mathfrak{gl}(V),\ v\in V\right\}$$

となる。

補題 2.7.8 $A(V)$ の指数写像 $\exp_A$は次の式で与えられる。

$$\exp_A \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^X & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}(V) \right).$$

証明　各自然数 kに対して

$$\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つことは

$$\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{k+1} & X^k v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることからわかる。したがって

$$\begin{aligned} \exp_A \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^X & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

補題 2.7.9 $G \times_R \mathfrak{g}$ から $A(\mathfrak{g})$ への写像ρ_Rを

$$\rho_R(g,u)_R = \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(g) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ((g,u)_R \in G \times_R \mathfrak{g})$$

で定めると、ρ_Rは Lie 群の準同型写像になる。

証明　命題 2.7.5より

$$(g,u)_R \cdot (h,v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R.$$

他方

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(g) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(h) & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(gh) & u + \mathrm{Ad}(g)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので、ρ_Rは準同型写像になる。

定理 2.7.10 $G \times_R \mathfrak{g}$ の指数写像 $\exp_R$は次で与えられる。

$$\exp_R(x,y) = \left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)_R \qquad ((x,y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).$$

証明　補題 2.7.7より、$\exp_R(x,y)$ の第一成分は $\exp x$ になる。次に補題 2.7.8と補題 2.7.9より

$$\begin{aligned}
\rho_R \exp_R(x,y) &= \exp_A d\rho_A(x,y) \\
&= \exp_A \begin{bmatrix} \mathrm{ad}x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \exp x & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり、$\exp_R(x,y)$ の第二成分は$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y$になる。したがって

$$\exp_R(x,y) = \left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)_R$$

となる。

定理 2.7.11 $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(d\exp)_x y = dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)$$

が成り立つ。

証明　命題 2.7.3と定理 2.7.10より

$$\begin{aligned}
(d\exp)_x y &= \exp_T(x,y) \\
&= \exp_T d\iota_R(x,y) \\
&= \iota_R(\exp_R(x,y)) \\
&= \iota_R\left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right) \\
&= dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

補題 2.7.12 次の収束冪級数の等式が成り立つ。

$$e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^{k-1} \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

証明 任意の $t\in\mathbf{R}$ に対して

$$e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k-1}=e^{-t}\frac{e^t-1}{t}=\frac{1-e^{-t}}{t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^{k-1}$$

が成り立つ。

定理 2.7.13 $x,y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$(d\exp)_x y=dL_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)$$

が成り立つ。

証明 定理 2.7.11と補題 2.7.12より

$$\begin{aligned}(d\exp)_x y &= dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\mathrm{Ad}(\exp x)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\left(e^{-\mathrm{ad}x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right).\end{aligned}$$

が成り立つ。

2.8 閉 Lie 部分群

定義 2.8.1 Lie 群 Hが Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、Hが G の部分多様体であり同時に Hが G の部分群であることをいう。

補題 2.8.2 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の Lie 部分群 Hの包含写像を $\iota:H\to G$ とすると $d\iota:\mathfrak{h}\to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

証明 ιの微分 $d\iota:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ は定理 2.6.2より Lie 環の準同型写像になり、Hが G の部分多様体であることから単射になる。したがって $d\iota:\mathfrak{h}\to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

定義 2.8.3 補題 2.8.2において、$d\iota(\mathfrak{h})$ を **Lie 部分群** H**に対応する Lie 部分環** と呼ぶ。今後、$d\iota$によって $\mathfrak{h}$ と $d\iota(\mathfrak{h})$ を同一視する。

命題 2.8.4 G を Lie 群とし、Hを G の Lie 部分群とする。G, Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、指数写像を $\exp_G, \exp_H$とする。このとき $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\exp_G(X) = \exp_H(X)$ が成り立つ。

証明 包含写像を$\iota : H \to G$ とするとιは Lie 群の準同型写像になる。命題 2.6.6より $X \in \mathfrak{h}$ に対して$\iota(\exp_H(X)) = \exp_G(d\iota(X))$ が成り立つ。ιと $d\iota$による同一視をすると $\exp_G(X) = \exp_H(X)$。

補題 2.8.5 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の直和分解とする。$\varphi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y)$ によって C^∞級写像$\varphi : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to G$ を定めると $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, Vと G における e の開近傍 Wが存在しφ は$U \times V$と Wの間の微分同型を与える。

証明 $(X, Y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ に対して

$$\begin{aligned} d\varphi_0(X+Y) &= \left.\frac{d}{dt}\exp(tX)\exp(tY)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\exp(tX))\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt}\exp(tY)\right|_{t=0} \\ &= X_e + Y_e = \alpha(X+Y) \end{aligned}$$

となるので $d\varphi_0 = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ が成り立ち定理 2.1.9より $d\varphi_0$は線形同型写像である。逆関数定理を使うと、$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, Vと G における e の開近傍 Wが存在しφ は$U \times V$と Wの間の微分同型を与えることがわかる。

定理 2.8.6 G を Lie 群とし Hを G の部分群とする。Hが G の閉集合ならば、Hは相対位相に関して Lie 部分群になる。

証明 $\mathfrak{g}$ 上のノルム$|\ |$を 1 つとっておく。

$$S = \left\{ X \in \mathfrak{g} \,\middle|\, X_n \in \mathfrak{g} - \{0\},\ \exp X_n \in H,\ \lim_{n\to\infty} X_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = X \right\}$$

とおく。まず $X \in S$に対して $\exp tX \in H$ $(t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示そう。$X_n \in \mathfrak{g} - \{0\}$, $\exp X_n \in H$, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = X$ としておく。$t \in \mathbf{R}$ に対して $t = m_n|X_n| + r_n,\ 0 \le r_n < |X_n|$ となる整数 m_nと実数 r_nをとる。すると$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ となって$\lim_{n\to\infty} m_n|X_n| = t$。したがって

$$tX = \lim_{n\to\infty} m_n|X_n| \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \lim_{n\to\infty} m_n X_n.$$

exp は連続だから

$$\exp tX = \lim_{n\to\infty} \exp m_n X_n = \lim_{n\to\infty} (\exp X_n)^{m_n} \in H \quad (H\text{は閉集合}).$$

次に $\mathfrak{h} = \{tX | t \in \mathbf{R},\ X \in S\}$ とおいて $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間になることを示す。そのためには $\mathfrak{h}$ が加法について閉じていることを示せば十分。$X, Y \in \mathfrak{h} - \{0\}$ とすると $\exp tX, \exp tY \in H$ $(t \in \mathbf{R})$。曲線 $t \mapsto \exp tX \exp tY$ は $t = 0$ で e を通り像は Hに含まれている。定理 2.5.5より、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えるので、0 を含むある開区間 Iで定義された $\mathfrak{g}$ の曲線 $c : I \to \mathfrak{g}$ が存在し $c(0) = 0,\ \exp(c(t)) = \exp tX \exp tY$ $(t \in I)$ となる。この両辺を $t = 0$ で微分すると

$$\alpha\left(\frac{dc}{dt}(0)\right) = X_e + Y_e = \alpha(X + Y)$$

となる。定理 2.1.9より $\frac{dc}{dt}(0) = X + Y$。したがって $\lim\limits_{t\to 0} \frac{c(t)}{t} = X + Y$。十分大きい n に対しては $\frac{1}{n} \in I$となるので $Z_n = c(\frac{1}{n})$ とおくと $Z_n \neq 0$ で

$$\begin{aligned}
&\exp Z_n = \exp\left(c\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in H,\\
&\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{1}{n}\right) = c(0) = 0,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{|Z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\left|c\left(\frac{1}{n}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \left|\frac{\frac{1}{n}}{c\left(\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{X+Y}{|X+Y|}
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって $\frac{X+Y}{|X+Y|} \in S$となり $X + Y \in \mathfrak{h}$。これで $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間であることがわかった。

Hの位相は相対位相を考えることにし、Hに G の部分多様体になるような多様体構造が存在することを示そう。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{h}'$を 1 つとり直和分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$をつくると、補題 2.8.5より、$\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}'$における 0 の開近傍 $U,\ V$と G における e の開近傍 Wが存在し $\varphi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}' \to G; (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ は $U \times V$と Wの間の微分同型を与える。$\mathfrak{h}$ における 0 の近傍 Nをとると $\exp(N)$ は Hにおける e の近傍になることを示す。$\exp(N)$ が Hにおける e の近傍にならないと仮定して矛盾を導こう。系 2.2.2と命題 2.2.3より、G の単位元の連結成分は可算開基を持つので、特に e は可算基本近傍系を持つ。したがって、e に収束する点列 g_nが存在し $g_n \in H,\ g_n \notin \exp(N)$ を満たす。$U \subset N,\ g_n \in W$となるように Uと g_nをとりなおすと、$X_n \in U,\ Y_n \in V$が存在し $g_n = \exp X_n \exp Y_n$を満たす。$g_n \notin \exp(N)$ だから $Y_n \neq 0$。$\frac{Y_n}{|Y_n|}$のノルムは 1 だから部分列をとりなおすことにより $\frac{Y_n}{|Y_n|}$は収束列になる。$X = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{Y_n}{|Y_n|} \in \mathfrak{h}'$とおく。$\exp Y_n = (\exp X_n)^{-1} g_n \in H,\ \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$ が成り立つので $X \in S \subset \mathfrak{h}$ となり矛盾。特に $\exp(U)$ は Hにおける e の開近傍になる。$\mathfrak{h}$ の基底 $X_1, \ldots, X_k$をとり $x \in \exp(U)$ に対して $\exp^{-1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(x) X_i$とおく。$H$は G の部分群だから各 $h \in H$に対して $L_h(\exp(U)) \subset H$となり $\{(L_h(\exp(U)); x_1 \circ L_h^{-1}, \ldots, x_k \circ L_h^{-1})\}_{h\in H}$

は Hに多様体の構造を与える。さらにこの多様体構造に関して Hは G の部分多様体になっている。

上で定めた多様体構造に関して Hが Lie 群であることを示す。$\tau : G \times G \to G; (g, h) \mapsto gh^{-1}$とすると、$\tau$は連続写像で Hの位相は相対位相だからτの Hへの制限$\tau_H : H \times H \to H$も連続になる。$(h_1, h_2) \in H \times H$に対して、逆関数定理を使うと、$\tau_H(h_1, h_2) = h_1 h_2^{-1}$を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0 \ (k + 1 \leq i \leq n)\}$$

は Hにおける $h_1 h_2^{-1}$の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$のそこへの制限は Hの局所座標系になることがわかる。τ_Hは Hの位相に関して連続だから (h_1, h_2) の $H \times H$における開近傍 Uが存在し$\tau_H(U) \subset V$となる。$U \to W; (x, y) \mapsto xy^{-1}$は C^∞級写像になるので $(x, y) \mapsto x_i(xy^{-1})$ は U上の C^∞級関数になる。したがって$\tau_H : U \to V$は C^∞級写像である。これでτ_Hが C^∞級写像になることがわかり、Hは Lie 群である。以上より Hは G の Lie 部分群である。

定義 2.8.7 定理 2.8.6より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

命題 2.8.8 Lie 群 G とその Lie 部分群 Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続}\}$$

が成り立つ。Hが閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

証明

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続}\}$$

とおいておく。$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$は補題 2.8.2と定義 2.8.3よりわかる。$X \in \mathfrak{h}',\ s \in \mathbf{R}$ に対して、$\exp sX$を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0 \ (k + 1 \leq i \leq n)\}$$

は Hにおける $\exp sX$の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$のそこへの制限は Hの局所座標系になる。$t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続だから s を含む開区間 Iが存在し $\exp tX \in V \ (t \in I)$となる。$I \to W; t \mapsto \exp tX$は C^∞級写像になるので $t \mapsto x_i(\exp tX)$ は I上の C^∞級関数になる。したがって $t \mapsto \exp tX$は Hの多様体構造に関して C^∞級写像である。これで $X \in \mathfrak{h}$がわかり、$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ である。以上より $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$である。さらに Hが閉 Lie 部分群の場合は Hの位相は相対位相だから $X \in \mathfrak{g}$ が $\exp tX \in H (t \in \mathbf{R})$ を満たせば $t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続になり $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

系 2.8.9 Lie 群 G の閉 Lie 部分群 H, Kの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とおくと $H \cap K$は G の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ である。

定義 2.8.10 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

例 2.8.11 G を一般線形群 $GL(V)$ の閉 Lie 部分群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおく。例 2.5.2より $GL(V)$ の指数写像は指数関数になるので、$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp_G(X) = e^X$が成り立つ。さらに $g \in G,\ X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{Ad}_G(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\bigg|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

2.9 線形 Lie 群

補題 2.9.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ と $v \in V$に対して $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \rho(X)v = 0\}$ とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環になる。

証明 $a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(aX + bY)v &= a\rho(X)v + b\rho(Y)v = 0, \\ \rho([X, Y])v &= \rho(X)\rho(Y)v - \rho(Y)\rho(X)v = 0 \end{aligned}$$

だから $aX + bY, [X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。

補題 2.9.2 Lie 群 G の表現$\rho : G \to GL(V)$ と $v \in V$に対して

$$H = \{g \in G | \rho(g)v = v\}$$

とおくと Hは G の閉 Lie 部分群になる。$\mathfrak{h}$ を Hの Lie 環とすると

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | d\rho(X)v = 0\}$$

が成り立つ。

証明 $g, h \in H$に対して$\rho(gh^{-1})v = \rho(g)\rho(h^{-1})v = v$だから $gh^{-1} \in H$となり Hは G の部分群である。次に$\rho : G \to GL(V)$ は C^∞級写像だから$\rho_v : G \to V; g \mapsto \rho(g)v$ とおくと ρ_vも C^∞級写像になる。よって $H = \rho_v^{-1}(v)$ は G の閉集合である。したがって Hは G の閉 Lie 部分群である (定理 2.8.6と定義 2.8.7)。

命題 2.8.8より、$X \in \mathfrak{h}$ をとると、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\exp tX \in H$となるので $\rho(\exp tX)v = v$。両辺を $t = 0$ で微分し命題 2.6.6を使うと

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)v\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{td\rho(X)}v\bigg|_{t=0} = d\rho(X)v.$$

逆に $d\rho(X)v = 0$ となる $X \in \mathfrak{g}$ をとると任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho(\exp tX)v = \exp(td\rho(X))v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(td\rho(X))^n v = v$$

だから $\exp tX \in H$となり命題 2.8.8より $X \in \mathfrak{h}$。

補題 2.9.3 有限次元実ベクトル空間 Vに対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、det の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

証明　行列式の性質より $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になる。$X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $X : V \to V$の固有値をλ_i $(1 \leq i \leq k)$ とし、各固有値の重複度を p_iとすると、例 2.4.6より、

$$\det(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{k}(e^{\lambda_i t})^{p_i} = \prod_{i=1}^{k} e^{p_i\lambda_i t}.$$

したがって、

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k} e^{p_i\lambda_i t}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k} p_i\lambda_i = \mathrm{tr}(X)$$

となり、det の微分は tr になる。

定義 2.9.4 Vを有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) | \det g = 1\}$ と表すと、補題 2.9.2と補題 2.9.3より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 2.9.2と補題 2.9.3より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

命題 2.9.5 Vを有限次元ベクトル空間とし $A : V \times V \to \mathbf{R}$ を双線形写像とする。

$$G = \{g \in GL(V) | A(gu, gv) = A(u, v)\ (u, v \in V)\}$$

とおくと G は線形 Lie 群になる。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

が成り立つ。

証明　$V \times V$から $\mathbf{R}$ への双線形写像の全体を $M^2(V, \mathbf{R})$ で表す。$b, c \in \mathbf{R},\ B, C \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して $(bB + cC)(u, v) = bB(u, v) + cC(u, v)\ (u, v \in V)$ によって $bB + cC \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めるとこの演算によって $M^2(V, \mathbf{R})$ はベクトル空間になる。$g \in GL(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して

$$(\rho(g)B)(u, v) = B(g^{-1}u, g^{-1}v) \qquad (u, v \in V)$$

として$\rho(g)B \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めると$\rho(g) \in GL(M^2(V, \mathbf{R}))$。$g, h \in GL(V),\ u, v \in V$について

$$\begin{aligned}(\rho(gh)B)(u,v) &= B((gh)^{-1}u, (gh)^{-1}v) = B(h^{-1}g^{-1}u, h^{-1}g^{-1}v) \\ &= (\rho(h)B)(g^{-1}u, g^{-1}v) = (\rho(g)(\rho(h)B))(u,v)\end{aligned}$$

だから$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり$\rho : GL(V) \to GL(M^2(V, \mathbf{R}))$ は群の準同型写像である。各$u, v \in V,\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ について $g \mapsto (\rho(g)B)(u,v)$ はC^∞級関数だからρはC^∞級写像になる。したがってρは Lie 群の準同型写像である。ρの定義より $G = \{g \in GL(V) | \rho(g)A = A\}$。補題 2.9.2を適用すると G は線形 Lie 群になる。

G の Lie 環を求めるためにρの微分を計算する。$X \in \mathfrak{gl}(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R}),\ u, v \in V$について

$$\begin{aligned}(d\rho(X)B)(u,v) &= \left.\frac{d}{dt}(\rho(e^{tX})B)(u,v)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}B(e^{-tX}u, e^{-tX}v)\right|_{t=0} \\ &= -B(Xu, v) - B(u, Xv)\end{aligned}$$

だから補題 2.9.2より

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) | d\rho(X)A = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}.\end{aligned}$$

定義 2.9.6 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V上の正定値内積とする。Vの A に関する直交変換の全体を $O(V) = O(V; A)$ で表すと命題 2.9.5より $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと命題 2.9.5より

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。

注意 2.9.7 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 2.9.8 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V上の正定値内積とする。

$$SO(V) = SO(V; A) = SL(V) \cap O(V; A)$$

と表すと、系 2.8.9より $SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V; A)$ で表すと系 2.8.9より $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。

定義 2.9.9 Vを有限次元複素ベクトル空間とし、$I : V \to V; v \mapsto \sqrt{-1}v$とする。$V$の実正則線形変換の全体を $GL_{\mathbf{R}}(V)$、その Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ で表す。例 2.6.12より $g \in GL_{\mathbf{R}}(V)$ に対して $\mathrm{Ad}(g)I = gIg^{-1}$だから Vの複素正則線形変換の全体 $GL_{\mathbf{C}}(V)$ は

$$\{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) | \mathrm{Ad}(g)I = I\}$$

に一致し、系 2.8.9より線形 Lie 群になる。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素一般線形群**と呼ぶ。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表す。定理 2.6.10より

$$d\mathrm{Ad}(X)T = \mathrm{ad}(X)(T) = XT - TX \qquad (X, T \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V))$$

だから、

$$\begin{aligned} GL_{\mathbf{C}}(V) &= \{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) | gI = Ig\}, \\ \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V) | XI = IX\} \end{aligned}$$

となっている。$\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は V の複素線形変換の全体である。$GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$, $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$ は $GL(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 2.9.10 Lie 群 G と複素有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**複素表現** と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**複素表現**と呼ぶ。

命題 2.9.11 Lie 群 G の複素表現の微分は、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

証明　$\rho : G \to GL_{\mathbf{C}}(V)$ を G の複素表現とし、I を V の複素構造とする。命題 2.6.6より、$X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$I \exp(td\rho(X))I^{-1} = I\rho(\exp tX)I^{-1} = \rho(\exp tX) = \exp(td\rho(X))$$

が成り立つ。両辺を $t = 0$ で微分すると

$$Id\rho(X)I^{-1} = d\rho(X)$$

となり、$d\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$。したがって、$d\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

補題 2.9.12 複素有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(V) \to GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{0\}$ は $GL_{\mathbf{C}}(V)$ の複素表現になり、$\det_{\mathbf{C}}$ の微分は $\mathrm{tr}_{\mathbf{C}} : \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ である。

証明　補題 2.9.3と同様に証明することができる。

定義 2.9.13 V を有限次元複素ベクトル空間とし $\det_{\mathbf{C}}$ で複素行列式を表す。$SL_{\mathbf{C}}(V) = \{g \in GL_{\mathbf{C}}(V) | \det_{\mathbf{C}} g = 1\}$ と表すと補題 2.9.2と補題 2.9.3より、$SL_{\mathbf{C}}(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素特殊線形群**と呼ぶ。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表すと補題 2.9.2と補題 2.9.3より、

$$\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) | \mathrm{tr}_{\mathbf{C}} X = 0\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$ における複素特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{C}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 2.9.14 Vを有限次元複素ベクトル空間とし A を V上の正定値 Hermite 内積とする。Vの A に関するユニタリ変換の全体を $U(V) = U(V; A)$ で表すと命題 2.9.5より $U(V)$ は線形 Lie 群になる。$U(V)$ を**ユニタリ群**と呼ぶ。$U(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{u}(V) = \mathfrak{u}(V; A)$ で表すと命題 2.9.5より

$$\mathfrak{u}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0 \ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$の標準 Hermite 内積に関するユニタリ群とその Lie 環を $U(n), \mathfrak{u}(n)$ とも書く。

注意 2.9.15 $U(n)$ は n 次ユニタリ行列の全体であり $\mathfrak{u}(n)$ は n 次交代 Hermite 行列の全体である。

定義 2.9.16 Vを有限次元複素ベクトル空間とし A を V上の正定値 Hermite 内積とする。$SU(V) = SU(V; A) = SL_{\mathbf{C}}(V) \cap U(V; A)$ と表すと系 2.8.9より $SU(V)$ は線形 Lie 群になる。$SU(V)$ を**特殊ユニタリ群**と呼ぶ。$SU(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{su}(V; A)$ で表すと系 2.8.9より $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) \cap \mathfrak{u}(V)$ となる。$\mathbf{C}^n$の標準 Hermite 内積に関する特殊ユニタリ群とその Lie 環を $SU(n), \mathfrak{su}(n)$ とも書く。

2.10 Lie 部分群と Lie 部分環

定理 2.10.1 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるものが一意に存在する。

証明 $\dim\mathfrak{h} = k$としておく。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、$\mathfrak{H}_g$は $T_g(G)$ の k次元部分ベクトル空間になる。$g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g$を対応させる対応 $\mathfrak{H}$ が G 上の k次元分布になることを示す。$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$を $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{h}$ となるようにとる。各 X_iは G 上の左不変ベクトル場だから $1 \leq i \leq k$に対して $(X_i)_g \in \mathfrak{H}_g (g \in G)$ が成り立ち、$\mathfrak{H}$ は G 上の k次元分布である。X, Yを $\mathfrak{H}$ に属するベクトル場とすると、$f_i, g_i \in C^\infty(G)$ が存在し $X = \sum_{i=1}^k f_i X_i, \ Y = \sum_{i=1}^k g_i X_i$ と書ける。$f \in C^\infty(G)$ に対して、

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= \sum_{i,j=1}^k [f_i X_i, g_j X_j](f) = \sum_{i,j=1}^k \{f_i X_i(g_j X_j(f)) - g_j X_j(f_i X_i(f))\} \\
&= \sum_{i,j=1}^k \{f_i (X_i g_j)(X_j f) + f_i g_j X_i X_j f - g_j (X_j f_i)(X_i f) - g_j f_i X_j X_i f\} \\
&= \sum_{i,j=1}^k \{f_i (X_i g_j) X_j - g_j (X_j f_i) X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}(f)
\end{aligned}$$

となるので、

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^k \{f_i (X_i g_j) X_j - g_j (X_j f_i) X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}.$$

$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環だから $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ となり、$[X, Y]$ は $\mathfrak{H}$ に属する。よって $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な k次元分布である。定理 1.3.4より G の単位元 e を含む $\mathfrak{H}$ の極大連結積分多様体 Hが存在する。$g \in G$ に対して $L_g(H)$ は G の部分多様体になり各 $x \in H$について

$$\begin{aligned} T_{gx}(L_g(H)) &= d(Lg)_x T_x(H) = d(L_g)_x \mathfrak{H}_x = d(L_g)_x d(L_x)_e(\alpha(\mathfrak{h})) \\ &= d(L_{gx})_e(\alpha(\mathfrak{h})) = \mathfrak{H}_{gx} \end{aligned}$$

が成り立つので $L_g(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体である。そこで $g \in H$に対して $L_{g^{-1}}(H)$ を考えると $L_{g^{-1}}(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体になり $L_{g^{-1}}(H) \ni L_{g^{-1}}(g) = e$。したがって Hの極大性より $L_{g^{-1}}(H) \subset H$。よって Hは G の部分群である。

Hが G の Lie 部分群であることを証明しよう。Hは連結だから G の単位元の連結成分 G_0に含まれる。命題 2.2.3より G_0は連結 Lie 群になるので、系 2.2.2より可算開基を持つ。Hは G_0 の連結部分多様体だから、定理 1.4.6より可算開基を持つ。$\tau_H : H \times H \longrightarrow G; (g, h) \longmapsto gh^{-1}$ は C^∞級写像で、Hは G の部分群だから$\tau_H(H \times H) \subset H$。$H$は可算開基を持つ $\mathfrak{H}$ の積分多様体なので、命題 1.4.8より$\tau_H : H \times H \longrightarrow H$は C^∞級写像である。したがって Hは Lie 群になり G の Lie 部分群である。Hの構成法より Hに対応する Lie 部分環は $\mathfrak{h}$ である。

最後に一意性を証明する。H' も G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるとする。命題 2.8.4より H,H'の指数写像は G の指数写像の制限になる。定理 2.5.5より Hと H' は恒等写像によって微分同型になる単位元の開近傍 Uを持つ。したがって $H = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\} = H'$となり (定理 2.2.1)、$H$と H'は集合として一致する。恒等写像$\iota : H \longrightarrow H'$は群の同型写像で単位元の開近傍 Uにおいて微分同型を与える。各 $h \in H$に対して $L_{h^{-1}} \circ \iota = \iota \circ L_{h^{-1}}$ となるのでιは $L_h(U)$ において微分同型を与える。したがって$\iota : H \longrightarrow H'$は Lie 群の同型写像になる。

系 2.10.2 Lie 群 G とその Lie 部分群 Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、対応 $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な分布になる。さらに Hは $\mathfrak{H}$ の積分多様体になっている。

定義 2.10.3 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が任意の $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ を満たすとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルと呼ぶ。

命題 2.10.4 $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を Lie 環の準同型写像とすると、$\ker f$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

証明 $X \in \mathfrak{g}, Y \in \ker f$に対して、$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = 0$。したがって $[X, Y] \in \ker f$となり、$\ker f$は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

命題 2.10.5 $f : G \longrightarrow H$を Lie 群の準同型写像とすると、$\ker f$は G の正規閉 Lie 部分群 (正規部分群でかつ閉 Lie 部分群) になる。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると $\ker f$に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker df$で $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。さらに G が連結の場合は $f(G)$ は Hの Lie 環の Lie 部分環 $df(\mathfrak{g})$ に対応する Hの連結 Lie 部分群に一致する。

証明 fは群の準同型写像だから $\ker f$は G の正規部分群である。$\ker f$は 1 点の逆像だから、定理 2.8.6より閉 Lie 部分群になる。$\ker f$に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{h}$ とおくと、命題 2.8.8より $X \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}$ の元になるための必要十分条件は $\exp tX \in \ker f$ $(t \in \mathbf{R})$ である。命題 2.6.6より $f(\exp tX) = \exp(tdf(X))$ だから、$f(\exp tX) = e$ $(t \in \mathbf{R})$ の必要十分条件は $df(X) = 0$ となり $X \in \ker df$。したがって $\mathfrak{h} = \ker df$。定理 2.6.2より dfは Lie 環の準同型になり、命題 2.10.4より $\ker df$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

G が連結の場合を考えよう。定理 2.5.5より、$\exp(\mathfrak{g})$ は G における単位元の近傍になる。また定理 2.2.1より $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから

$$
\begin{aligned}
f(G) &= f(\cup\{(\exp \mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}) \\
&= \cup\{(f(\exp \mathfrak{g}))^n | n \in \mathbf{N}\} \\
&= \cup\{(\exp(df(\mathfrak{g})))^n | n \in \mathbf{N}\} \quad (\text{命題 2.6.2より})
\end{aligned}
$$

となり $f(G)$ は $df(\mathfrak{g})$ に対応する連結 Lie 部分群に一致する。

例 2.10.6 有限次元実ベクトル空間 Vに対して $\det_{\mathbf{R}} : GL_{\mathbf{R}}(V) \longrightarrow GL_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ は Lie 群の準同型写像だから (補題 2.9.3)、$SL_{\mathbf{R}}(V) = \ker(\det_{\mathbf{R}})$ は $GL_{\mathbf{R}}(V)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{R}}(V)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{R}}(V)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ のイデアルになる。また有限次元複素ベクトル空間 Wに対しても $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(W) \longrightarrow GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ は Lie 群の準同型写像だから、$SL_{\mathbf{C}}(W) = \ker(\det_{\mathbf{C}})$ は $GL_{\mathbf{C}}(W)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{C}}(W)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(W)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(W)$ のイデアルになる。

命題 2.10.7 Lie 群 G の Lie 部分群 Hが可算個の連結成分を持つとする。G と Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

証明 命題 2.8.8より

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R}),\ t \longmapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続}\}$$

が成り立つので $\exp tX \in H(t \in \mathbf{R})$ となる $X \in \mathfrak{g}$ に対して $t \longmapsto \exp tX$が Hの位相に関して連続になることを示せばよい。$f : \mathbf{R} \longrightarrow G;\ t \longmapsto \exp tX$は C^∞級写像で $f(\mathbf{R}) \subset H$。Hは可算個の連結成分を持つので、補題 2.2.4より Hは可算開基を持つ。また系 2.10.2より Hは G 上の完全積分可能な分布の積分多様体になっている。したがって命題 1.4.8を適用することができ、fを Hへの写像とみなしても $f : \mathbf{R} \longrightarrow H$は C^∞級写像になる。特に H の位相に関して連続になる。

定理 2.10.8 G を Lie 群とし Hをその Lie 部分群とする。Hの連結成分の個数は可算であるか、または Hは閉 Lie 部分群であると仮定する。G, Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、Hが G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

証明 $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ とすると、Hは G の正規部分群だから定理 2.6.10を使うと

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)(tY)) = \exp(sX)\exp(tY)\exp(sX)^{-1} \in H \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

が成り立ち、命題 2.8.8または 2.10.7より $\mathrm{Ad}(\exp sX)Y \in \mathfrak{h}$ となる。

$$\left.\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\right|_{s=0} = [X, Y] \quad (\text{定理 } 2.6.10)$$

だから $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

定理 2.10.9 G を連結 Lie 群とし Hをその連結 Lie 部分群とする。G, Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、Hが G の正規部分群になるための必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルになることである。

証明 定理 2.10.8より Hが G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。逆に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルとする。定理 2.5.5より G における単位元の開近傍 Uと $\mathfrak{g}$ における 0 の開近傍 Vが存在し $\exp : V \longrightarrow U$は微分同型写像になる。さらに $\exp(V \cap \mathfrak{h})$ は Hにおける単位元の開近傍になる。$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$(\exp X)(\exp Y)(\exp X)^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(\exp X)Y)$$

ここで命題 2.6.6を Ad に適用すると定理 2.6.10より

$$\mathrm{Ad}(\exp X)Y = e^{\mathrm{ad}X}Y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}X)^n Y \in \mathfrak{h}$$

だから $(\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1} \subset H$。したがって定理 2.2.1より

$$\begin{aligned}(\exp X)H(\exp X)^{-1} &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})^n(\exp X)^{-1} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}((\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1})^n \subset H\end{aligned}$$

であり $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから任意の $g \in G$ に対して $gHg^{-1} \subset H$が成り立つ。よって Hは G の正規部分群である。

定義 2.10.10 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。$\ker(\mathrm{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{g} \text{ に対して } [X, Y] = 0\}$ を $\mathfrak{g}$ の中心と呼ぶ。(命題 2.10.4より中心はイデアルになる。)

補題 2.10.11 f, gを連結 Lie 群から Lie 群への Lie 群の準同型写像とする。もし $df = dg$ならば $f = g$が成り立つ。

証明 f, gを連結 Lie 群 G から Lie 群 Hへの Lie 群の準同型写像とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して命題 2.6.6より

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) = \exp(dg(X)) = g(\exp X)$$

となるので fと gは $\exp(\mathfrak{g})$ において一致する。定理 2.5.5と定理 2.2.1を使うと $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ となるので fと gは G 全体で一致する。

定理 2.10.12 連結 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の中心は随伴表現 Ad の核に一致する。特に G の中心は正規閉 Lie 部分群になり対応する Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ の中心である。

証明 G の中心を Zで表す。随伴表現の定義 (定理 2.6.10, 定義 2.6.11) より $Z \subset \ker \mathrm{Ad}$ はすぐにわかる。$g \in \ker \mathrm{Ad}$ とすると $d(L_g \circ R_g^{-1})$ は $\mathfrak{g}$ の恒等写像になるので、補題 2.10.11 より $L_g \circ R_g^{-1}$は G の恒等写像になる。したがって $g \in Z$となり $Z = \ker \mathrm{Ad}$ がわかった。命題 2.10.5より Zは G の正規閉 Lie 部分群になり Zに対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker d\mathrm{Ad} = \ker \mathrm{ad}$ で (定理 2.6.10)、$\mathfrak{g}$ の中心である。

系 2.10.13 連結 Lie 群が可換になるための必要十分条件はその Lie 環が可換になることである。

証明 G を連結 Lie 群としその Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G が可換ならば $\mathfrak{g}$ も可換になることは系 2.5.8で示した。そこで $\mathfrak{g}$ が可換であると仮定すると $\mathfrak{g}$ の中心は $\mathfrak{g}$ に一致する。定理 2.10.12より G の中心は G に一致し G は可換になる。

2.11 線形 Lie 群の連結性

定理 2.11.1 ユニタリ群 $U(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow U(n)$ は全射である。特に $U(n)$ は連結である。

証明 $U(n)$ の任意の元 u は正規行列だからユニタリ行列によって対角化可能である。つまり、ある $g \in U(n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ が存在して

$$g^{-1}ug = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

となる。$g^{-1}ug \in U(n)$ だから $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$。よって$\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して $a_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ となる。

$$u = g \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix}.$$

ここで注意 2.9.15より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g)\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

となり $U(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{u}(n)$ は連結だから $U(n)$ も連結。

定理 2.11.2 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{su}(n) \longrightarrow SU(n)$ は全射である。特に $SU(n)$ は連結である。

証明 定理 2.11.1の証明と同様に $SU(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$(*) \quad u = g \exp \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} g^{-1}.$$

ここで $\det u = 1$ だから$\theta_1 + \ldots + \theta_n = 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$。$e^{\sqrt{-1}\theta_1} = e^{\sqrt{-1}(\theta_1 - 2\pi k)}$ よりθ_1を$\theta_1 - 2\pi k$ に置き換えても上の $(*)$ は成立し$\theta_1 + \ldots + \theta_n = 0$ となる。定義 2.9.16より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g)\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n).$$

したがって $SU(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{su}(n)$ は連結だから $SU(n)$ も連結。

定理 2.11.3 回転群 $SO(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow SO(n)$ は全射である。特に $SO(n)$ は連結である。

証明 $SO(n) \subset U(n)$ だから定理 2.11.1の証明と同様に $SO(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と$\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$u = g \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{bmatrix} g^{-1}.$$

u の固有多項式は実係数だから u の固有値に共役な値も u の固有値になる。gの縦ベクトルの順序を適当にかえて

$$(*)\quad u = g\begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} &&&&&&& \\ & e^{-\sqrt{-1}\theta_1} &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& e^{\sqrt{-1}\theta_k} &&&& \\ &&&& e^{-\sqrt{-1}\theta_k} &&& \\ &&&&& \varepsilon_{2k+1} && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& \varepsilon_n \end{bmatrix} g^{-1}$$

とできる。ただし$\theta_i \notin \pi\mathbf{Z}$ $(1 \le i \le k)$, $\varepsilon_j = \pm 1$ $(2k+1 \le j \le n)$。$g = [g_1 \ldots g_n]$ と表すと $ug_{2i-1} = e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。u は実行列だから $u\bar{g}_{2i-1} = e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。そこで g_{2i}を$\bar{g}_{2i-1}$に置き換えても $g \in U(n)$ となり $(*)$ は成り立つ。また$\varepsilon_j \in \mathbf{R}$ だから $g_j \in \mathbf{R}^n$ とすることができる。さらに $\det u = 1$ だから$\varepsilon_j = -1$ となるε_jの個数は偶数。よって gの縦ベクトルの順序を適当にかえて$\varepsilon_{2k+1} = \ldots = \varepsilon_{2l} = -1$, $\varepsilon_{2l+1} = \ldots = \varepsilon_n = 1$ とできる。$1 \le i \le k$に対して

$$h_{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{2i-1} + \bar{g}_{2i-1}), \quad h_{2i} = \frac{1}{\sqrt{-2}}(g_{2i-1} - \bar{g}_{2i-1})$$

とおき $h_j = g_j$ $(2k+1 \le j \le n)$ とすると $h = [h_1 \ldots h_n] \in U(n)$ で h は実行列になる。したがって $h \in O(n)$。$1 \le i \le k$に対して

$$\begin{aligned} uh_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1} + e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \cos\theta_i h_{2i-1} - \sin\theta_i h_{2i} \\ uh_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{-2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1} - e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \sin\theta_i h_{2i-1} + \sin\theta_i h_{2i} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\theta_i = \pi \quad (k+1 \le i \le l) \\ &R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (1 \le i \le l) \end{aligned}$$

とおくと

$$u = h\begin{bmatrix} R_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && R_l &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} h^{-1}.$$

ところが $X_i = \begin{bmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{bmatrix}$ $(1 \leq i \leq l)$ とおくと $\exp X_i = R_i$ となるので

$$u = \exp \mathrm{Ad}(h) \begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで注意 2.9.7と定義 2.9.8より

$$\mathrm{Ad}(h) \begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$$

だから $SO(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{so}(n)$ は連結だから $SO(n)$ も連結。

系 2.11.4 直交群 $O(n)$ は 2 つの連結成分 $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \mathrm{det} g = -1\}$ を持つ。

証明 $\det(O(n)) = \{\pm 1\}$ だから $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \mathrm{det} g = -1\}$ はどちらも $O(n)$ の開かつ閉集合。定理 2.11.3より $SO(n)$ は連結で、$\mathrm{det} h = -1$ となる $h \in O(n)$ をとると

$$\{g \in O(n) | \mathrm{det} g = -1\} = L_h(SO(n))$$

となりこれも連結。したがって $SO(n)$ と $L_h(SO(n))$ はどちらも $O(n)$ の連結成分になり $O(n) = SO(n) \cup L_h(SO(n))$ は $O(n)$ の連結成分への分解になっている。

定理 2.11.5 $GL(n, \mathbf{C})$ と $SL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

証明 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の (i, j) 成分を X_{ij}で表すことにする。

$$T(n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) | X_{ii} > 0 (1 \leq i \leq n),\ X_{ij} = 0 (i > j)\}$$

とおくと、$T(n, \mathbf{C})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{C})$ は連結である。さらに、$X \in T(n, \mathbf{C})$ に対して $\mathrm{det} X = \prod_{i=1}^n X_{ii} > 0$ だから $X \in GL(n, \mathbf{C})$。したがって $T(n, \mathbf{C}) \subset GL(n, \mathbf{C})$。さらに $T(n, \mathbf{C})$ は $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群になる。

$$P : U(n) \times T(n, \mathbf{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbf{C}); (a, X) \longmapsto aX$$

とおくと Pは連続になる。さらに Pが全射になることを示そう。任意の $g \in GL(n, \mathbf{C})$ に対して $g = [g_1 \dots g_n]$ と縦ベクトル $g_i \in \mathbf{C}^n$を使って表す。$g_1, \dots, g_n$は $\mathbf{C}^n$の基底になる。$\mathbf{C}^n$の標準的な Hermite 内積に関して $g_1, \dots g_n$に Gram-Schmidt の直交化を行う。$b_1 = g_1, a_1 = \frac{1}{|b_1|}b_1$ とし、$b_k, a_k (k \geq 2)$ を次のように帰納的に定める。

$$b_k = g_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle g_k, a_i \rangle a_i, \quad a_k = \frac{1}{|b_k|} b_k.$$

すると $a_1, \dots, a_n$は $\mathbf{C}^n$の正規直交基底になる。各 a_kは $g_1, \dots, g_k$の線形結合になっていて、その線形結合の g_kの係数は $1/|b_k| > 0$ である。そこで基底の変換を

$$(*) \quad [a_1 \dots a_n] = [g_1 \dots g_n] X$$

で表すと $X \in T(n, \mathbf{C})$ となる。$a = [a_1 \dots a_n]$ とおくと $a \in U(n)$ で $a = gX$。$g = aX^{-1}$になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{C})$ だから $g = P(a, X^{-1})$。したがって Pは全射である。定理 2.11.1より $U(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{C})$ も連結だから $GL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

$$S : GL(n, \mathbf{C}) \longrightarrow SL(n, \mathbf{C}); X \longmapsto X \begin{bmatrix} \frac{1}{\det X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。Sは連続になり $S(X) = X \ (X \in SL(n, \mathbf{C}))$ だから $S(GL(n, \mathbf{C})) = SL(n, \mathbf{C})$。よって $SL(n, \mathbf{C})$ も連結になる。

定理 2.11.6 $GL(n, \mathbf{R})$ は 2 つの連結成分

$$GL^+(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g > 0\}, \quad \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g < 0\}$$

を持つ。$SL(n, \mathbf{R})$ は連結である。

証明 定理 2.11.5の証明で使った記号を使うことにする。$\det : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は連続だから $GL^+(n, \mathbf{R})$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の開部分群になる。特に、$GL^+(n, \mathbf{R})$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 部分群である。$T(n, \mathbf{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cap T(n, \mathbf{C})$ とおくと、$T(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{R})$ は連結である。さらに $T(n, \mathbf{R})$ は $GL^+(n, \mathbf{R})$ の部分群になる。以下で $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ を示そう。定理 2.11.5の証明と同様にすると、任意の $g \in GL^+(n, \mathbf{R})$ に対してある $a \in O(n)$ と $X \in T(n, \mathbf{R})$ が存在し $a = gX$となる。$\det g > 0, \det X > 0$ だから $\det a = 1$ になり $a \in SO(n)$。$g = aX^{-1}$になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{R})$。したがって $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ である。定理 12.3 より $SO(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{R})$ も連結だから $GL^+(n, \mathbf{R})$ は連結である。

$$\det{}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t > 0\}) = GL^+(n, \mathbf{R}),$$
$$\det{}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t < 0\}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g < 0\}$$

はどちらも $GL(n,\mathbf{R})$ の開かつ閉の連結部分集合になる。したがってこれら 2 つが $GL(n,\mathbf{R})$ の連結成分である。

次に $ST(n,\mathbf{R})=T(n,\mathbf{R})\cap ST(n,\mathbf{C})$ とおくと $S(T(n,\mathbf{R}))=ST(n,\mathbf{R})$ となり $T(n,\mathbf{R})$ は連結だから $ST(n,\mathbf{R})$ も連結になる。任意の $g\in SL(n,\mathbf{R})$ に対して $a=gX,\ a\in SO(n), X\in T(n,\mathbf{R})$ となり $\det g=1$ より $\det X=1$。したがって $P(SO(n)\times ST(n,\mathbf{R}))=SL(n,\mathbf{R})$。$SO(n)$ は連結だから $SL(n,\mathbf{R})$ も連結になる。

系 2.11.7 Vを n 次元実ベクトル空間とし、

$$B_{\mathbf{R}}(V)=\{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n|v_1,\ldots,v_n\text{は}V\text{の基底}\}$$

として Vの基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ を定義すると $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^nの開集合で $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。n 次元複素ベクトル空間 Wに対して同様に Wの基底全体 $B_{\mathbf{C}}(W)$ を定義すると $B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^nの開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

証明 Vの基底 $e_1,\ldots,e_n$を 1 つ固定しておく。

$$T:\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)\longrightarrow V^n; g\longmapsto (g(e_1),\ldots,g(e_n))$$

とおくと、Tは線形同型写像になり $T(GL_{\mathbf{R}}(V))=B_{\mathbf{R}}(V)$。したがって $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^nの開集合になり $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。定理 2.11.6より $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。

複素ベクトル空間 Wの場合も Tと同様の写像を定義することにより、$B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^nの開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になることがわかる。定理 2.11.5より $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

定義 2.11.8 有限次元実ベクトル空間 Vの基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ の 1 つの連結成分を Vの向きと呼ぶ。系 2.11.7より Vは 2 つの向きを持っている。

系 2.11.9 n 次元実ベクトル空間 Vの 2 つの基底 $u_1,\ldots,u_n$と $v_1,\ldots,v_n$が Vの同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X\in GL(n,\mathbf{R})$(つまり $(u_1\ldots u_n)=(v_1\ldots v_n)X$) が $GL^+(n,\mathbf{R})$ に属することである。

系 2.11.10 内積を持つ n 次元実ベクトル空間 Vの 2 つの正規直交基底 $u_1,\ldots,u_n$と $v_1,\ldots,v_n$ が Vの同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X\in O(n)$(つまり $(u_1\ldots u_n)=(v_1\ldots v_n)X$) が $SO(n)$ に属することである。

2.12 自己同型群

定義 2.12.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の線形変換 p が

$$p([X,Y])=[p(X),Y]+[X,p(Y)]\quad (X,Y\in\mathfrak{g})$$

を満たすとき p を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**微分**と呼ぶ。$\mathfrak{g}$ の微分の全体を $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ で表す。

補題 2.12.2 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の微分の全体 $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環である。さらに $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。

証明 $p, q \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}),\ a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
(ap+bq)([X,Y]) &= ap([X,Y]) + bq([X,Y]) \\
&= a([p(X),Y]+[X,p(Y)]) + b([q(X),Y]+[X,q(Y)]) \\
&= [(ap+bq)(X),Y] + [X,(ap+bq)(Y)], \\
[p,q]([X,Y]) &= pq([X,Y]) - qp([X,Y]) \\
&= p([q(X),Y]+[X,q(Y)]) - q([p(X),Y]+[X,p(Y)]) \\
&= [pq(X),Y] + [q(X),p(Y)] + [p(X),q(Y)] + [X,pq(Y)] \\
&\quad -[qp(X),Y] - [p(X),q(Y)] - [q(X),p(Y)] - [X,qp(Y)] \\
&= [[p,q](X),Y] + [X,[p,q](Y)]
\end{aligned}$$

となるので $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。
$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}(X))([Y,Z]) &= [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\
&= [Y,(\mathrm{ad}(X))(Z)] + [(\mathrm{ad}(X))(Y),Z].
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{ad}(X)$ は $\mathfrak{g}$ の微分になり $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$。$p \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[p,\mathrm{ad}(X)](Y) &= p\mathrm{ad}(X)(Y) - \mathrm{ad}(X)p(Y) = p([X,Y]) - [X,p(Y)] \\
&= [p(X),Y] = \mathrm{ad}(p(X))(Y)
\end{aligned}$$

だから $[p,\mathrm{ad}(X)] = \mathrm{ad}(p(X))$。これより $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。

定理 2.12.3 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型の全体 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 Lie 群になり、その Lie 環は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ である。

証明 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線形写像の全体を $M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ で表すと $M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ は命題 2.9.5 の証明中の $M^2(V,\mathbf{R})$ と同様にベクトル空間になる。$g \in GL(\mathfrak{g}),\ B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ に対して $(\rho(g)B)(X,Y) = gB(g^{-1}X, g^{-1}Y)\ (X, Y \in \mathfrak{g})$ として$\rho(g)B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ を定めると $\rho(g) \in GL(M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$。$g, h \in GL(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned}
(\rho(gh)B)(X,Y) &= ghB((gh)^{-1}X,(gh)^{-1}Y) = g(hB(h^{-1}g^{-1}X, h^{-1}g^{-1}Y)) \\
&= g((\rho(h)B)(g^{-1}X, g^{-1}Y)) = (\rho(g)(\rho(h)B))(X,Y)
\end{aligned}$$

だから$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり$\rho : GL(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$ は群の準同型写像である。各 $X, Y \in \mathfrak{g},\ B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ について $g \longmapsto (\rho(g)B)(X,Y)$ は C^∞級関数だからρは C^∞級写像になる。したがってρは Lie 群の準同型写像である。$[\ ,\ ] \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ とみなすとρの定義よ

り $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{g \in GL(\mathfrak{g}) | \rho(g)[\ ,\ ] = [\ ,\ ]\}$。補題 2.9.2を適用すると $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 Lie 群になる。

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の Lie 環を $\mathfrak{a}$ とおいておく。$\mathfrak{a}$ を求めるためにρの微分を計算する。$p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ B \in M^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned}(d\rho(p)B)(X,Y) &= \left.\frac{d}{dt}(\rho(e^{tp})B)(X,Y)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{tp}B(e^{-tp}X, e^{-tp}Y)\right|_{t=0} \\ &= pB(X,Y) - B(pX,Y) - B(X,pY)\end{aligned}$$

だから補題 2.9.2より

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \{p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) | d\rho(p)[\ ,\ ] = 0\} \\ &= \{p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) | p([X,Y]) = [pX,Y] + [X,pY]\ (X,Y \in \mathfrak{g})\} \\ &= \mathfrak{d}(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

定義 2.12.4 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型の全体 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**自己同型群**と呼ぶ。$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群を $\mathfrak{g}$ の**随伴群**と呼び $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で表す。(定理 2.10.1よりこのような連結 Lie 部分群は一意的に存在する。)

命題 2.12.5 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の随伴群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規 Lie 部分群である。

証明 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は連結だから定理 2.5.5と 2.2.1より $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \cup\{(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))^n | n \in \mathbf{N}\}$ となる。補題 2.12.2より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ だから $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ となる。$\iota : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ を包含写像とする。定理 2.12.3より $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の位相は $GL(\mathfrak{g})$ の相対位相になるので$\iota : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は連続になる。したがって C^∞級写像になり、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分群である。

$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群になることを示すためには任意の $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ に対して $a(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))a^{-1} \subset \exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$ を示せば十分。$X \in \mathfrak{g}$ に対して $ae^{\mathrm{ad}(X)}a^{-1} = e^{a\mathrm{ad}(X)a^{-1}}$。任意の $Y \in \mathfrak{g}$ について

$$a\mathrm{ad}(X)a^{-1}(Y) = a[X, a^{-1}(Y)] = [a(X), Y] = \mathrm{ad}(a(X))(Y)$$

となるので $a\mathrm{ad}(X)a^{-1} = \mathrm{ad}(a(X))$ となり $ae^{\mathrm{ad}(X)}a^{-1} = e^{\mathrm{ad}(a(X))}$。したがって

$$a(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))a^{-1} \subset \exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$$

となり $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である。

定義 2.12.6 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

とおくと Bは $\mathfrak{g}$ 上の対称 2 次形式になる。Bを $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式**と呼ぶ。

命題 2.12.7 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を Bとし、

$$H = \{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid B(g(X), g(Y) = B(X, Y)\ (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

とおくと Hは線形 Lie 群になり、その Lie 環 $\mathfrak{h}$ は

$$\mathfrak{h} = \{T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \mid B(T(X), Y) + B(X, T(Y)) = 0\ (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

で与えられる。さらに $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は Hの Lie 部分群になる。

証明 命題の前半の主張は Killing 形式 Bに命題 2.9.5を適用すればよい。命題 2.12.5の証明中示したように $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(a(X)) = a\mathrm{ad}(X)a^{-1}$が成り立つので、$Y \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$\begin{aligned} & B(a(X), a(Y)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(a(X))\mathrm{ad}(a(Y))) = \mathrm{tr}(a\mathrm{ad}(X)a^{-1}a\mathrm{ad}(Y)a^{-1}) \\ = \ & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) = B(X, Y) \end{aligned}$$

となり $a \in H$。したがって、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset H$。$H$は線形 Lie 群だから包含写像 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \longrightarrow H$ は C^∞級写像になり、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は Hの Lie 部分群である。

定義 2.12.8 Lie 群 G の自己同型の全体を G の**自己同型群**と呼び $\mathrm{Aut}(G)$ で表す。G の内部自己同型の全体を G の**内部自己同型群**と呼び $\mathrm{Int}(G)$ で表す。

命題 2.12.9 G を連結 Lie 群としその Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。

$$d : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}); a \longmapsto da$$

は群の単射準同型写像になり $d(\mathrm{Int}(G)) = \mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つ。特に $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ならば $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Aut}(G)$ となる。

証明 系 2.6.5より $a \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $da \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。命題 2.6.4より $a, b \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $d(a \circ b) = da \circ db$ となるので d は群の準同型写像である。補題 2.10.11より d は単射になる。随伴表現の定義 (定理 2.6.10、定義 2.6.11) より $d(\mathrm{Int}(G)) = \mathrm{Ad}(G)$。$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の準同型写像であり G は連結だから命題 2.10.5より $\mathrm{Ad}(G)$ は $d\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群に一致する。したがって $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = d(\mathrm{Int}(G)) \subset d(\mathrm{Aut}(G)) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ だからもし $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ならば $d(\mathrm{Int}(G)) = d(\mathrm{Aut}(G))$ となり $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Aut}(G)$ が成り立つ。

補題 2.12.10 3 次回転群 $SO(3)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ と 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ は、Lie 環として同型になる。

証明

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3は $\mathfrak{so}(3)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。

次に

$$f_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}/2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}/2 \\ \sqrt{-1}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと f_1, f_2, f_3は $\mathfrak{su}(2)$ の基底になり

$$[f_1, f_2] = f_3, \quad [f_2, f_3] = f_1, \quad [f_3, f_1] = f_2$$

が成り立つ。

そこで $F(e_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ となるように線形写像 $F : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{su}(2)$ を定めると、上の Lie 環の計算から Fは Lie 環の間の同型写像になる。

定理 2.12.11 $\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$ が成り立つ。さらに $\mathrm{Int}(SO(3)) = \mathrm{Aut}(SO(3))$, $\mathrm{Int}(SU(2)) = \mathrm{Aut}(SU(2))$ が成り立つ。

証明 補題 2.12.10の証明中に使った $\mathfrak{so}(3)$ の基底 e_1, e_2, e_3をそのまま使うことにする。$\mathfrak{so}(3)$ の Killing 形式を Bで表し、Bの e_1, e_2, e_3に関する表現行列を求めておこう。$\mathrm{ad}(e_i)(1 \leq i \leq 3)$ の表現行列は

$$\mathrm{ad}(e_1) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_2) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_3) : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になり

$$\begin{aligned} &B(e_1, e_1) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(e_1)\mathrm{ad}(e_1)) = -2, \ B(e_1, e_2) = B(e_2, e_1) = 0, \\ &B(e_1, e_3) = B(e_3, e_1) = 0, \ B(e_2, e_2) = -2, \ B(e_2, e_3) = 0, \ B(e_3, e_3) = -2. \end{aligned}$$

したがって Bの表現行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$-B$ は正定値になり、命題 2.12.7より

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) \subset O(\mathfrak{so}(3); -B) \cong O(3).$$

$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3))$ は連結で $\mathrm{ad}(e_i)$ の表現行列の形から $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(3)) = \mathfrak{o}(\mathfrak{so}(3); -B)$ となっている。定理 2.11.3より $SO(\mathfrak{so}(3); -B)$ も連結だから

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) = SO(\mathfrak{so}(3); -B).$$

系 2.11.4より $O(\mathfrak{so}(3); -B)$ は連結成分を 2 つ持ち、

$$SO(\mathfrak{so}(3); -B) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) \subset O(\mathfrak{so}(3); -B)$$

だから、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$ は $SO(\mathfrak{so}(3); -B)$ または $O(\mathfrak{so}(3); -B)$ に一致する。

$$g(e_1) = e_1, \quad g(e_2) = e_2, \quad g(e_3) = -e_3$$

となる $g \in GL(\mathfrak{so}(3))$ をとると、$g \in O(\mathfrak{so}(3); -B), \det g = -1$。

$$[g(e_1), g(e_2)] = [e_1, e_2] = e_3 \neq g(e_3)$$

だから $g \notin \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$。したがって、

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) = SO(\mathfrak{so}(3); -B) = \mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)).$$

定理 2.11.3より $SO(3)$ は連結だから命題 2.12.9より $\mathrm{Aut}(SO(3)) = \mathrm{Int}(SO(3))$。定理 2.11.2より $SU(2)$ は連結で補題 2.12.10より $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ だから、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) = \mathrm{Int}(\mathfrak{su}(2))$ となり、命題 2.12.9より $\mathrm{Aut}(SU(2)) = \mathrm{Int}(SU(2))$。

第 3 章　等質空間

3.1　等質空間の多様体構造

定義 3.1.1 Mを多様体とし G を Lie 群とする。C^∞級写像 $G \times M \to M; (g,x) \mapsto g \cdot x$ が存在し任意の $g_1, g_2 \in G, x \in M$に対して $(g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ を満たすとき、G を Mの **Lie 変換群**と呼ぶ。さらに任意の $x, y \in M$に対してある $g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$となるとき G は Mに**推移的**に作用しているという。

注意 3.1.2 Lie 群 G が多様体 Mの Lie 変換群のとき、各 $g \in G$ に対して

$$g : M \to M; x \mapsto g \cdot x$$

は Mの微分同型写像になる。逆写像は g^{-1}が誘導する写像である。

定理 3.1.3 G を Lie 群とし Hを G の閉 Lie 部分群とする。射影$\pi : G \to G/H; g \mapsto gH$によって G の H による剰余類の全体 G/Hに商位相をいれる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合 }\}$$

を G/Hの開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって G が G/Hの Lie 変換群になるような G/Hの多様体構造が存在する。

証明　まず位相空間 G/Hが Hausdorff 空間になることを示す。$g_1, g_2 \in G,\ g_1H \neq g_2H$ とする。$g_2^{-1}g_1 \notin H$となり Hは G の閉集合だから $G - H$は $g_2^{-1}g_1$の開近傍になる。群演算の連続性より、g_iの開近傍 U_iが存在し $U_2^{-1}U_1 \subset G - H$を満たす。任意の $x_i \in U_i$に対して $x_2^{-1}x_1 \notin H$となるので $x_1H \neq x_2H$。したがって$\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$。$\pi : G \to G/H$は開写像だから$\pi(U_i)$ は $g_iH = \pi(g_i)$ の開近傍になる。よって G/Hは Hausdorff 空間である。

次に写像

$$\tau : G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

が連続になることを示す。$\nu : G \times G \to G; (g,x) \mapsto gx$ とおくと、νは連続になり$\tau \circ (1 \times \pi) = \pi \circ \nu$も連続。$G/H$の開集合 Oに対して $(\tau \circ (1 \times \pi))^{-1}(O) = (\pi \circ \nu)^{-1}(O)$ は $G \times G$ の開集合。$1 \times \pi : G \times G \to G \times (G/H)$ は全射だから

$$\tau^{-1}(O) = (1 \times \pi)((\tau \circ (1 \times \pi))^{-1}(O))$$

となり $1\times\pi$は開写像だから$\tau^{-1}(O)$ は $G\times(G/H)$ の開集合になる。したがってτは連続写像である。特に各 $g\in G$ について$\tau_g : G/H\to G/H; xH\mapsto gxH$とおくと$\tau_g$は位相同型写像である。

以上の準備のもとに G/Hの多様体構造について考えよう。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし Hに対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{h}$ とする。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{m}$ を 1 つとり固定しておく。$\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ は直和分解だから補題 2.8.5より $\mathfrak{m},\mathfrak{h}$ における 0 の開近傍 U_m, U_hと G における e の開近傍 Vが存在し、

$$U_m\times U_h\to V; (X,Y)\mapsto \exp X\exp Y$$

は微分同型写像になる。$\exp U_h$は Hにおける e の開近傍であり Hの位相は G の相対位相だから G における e のある開近傍 Wが存在して $\exp U_h=W\cap H$となる。$\mathfrak{m}$ における 0 の開近傍 Uで$\overline{U}$がコンパクトになり$\overline{U}\subset U_m, \exp(-\overline{U})\exp\overline{U}\subset W$ を満たすものをとる。$\exp : \overline{U}\to\exp\overline{U}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射になるので位相同型写像になる。次に$\pi : \exp\overline{U}\to\pi(\exp\overline{U})$ が単射になることを示す。$X_1, X_2\in\overline{U}$が$\pi(\exp X_1)=\pi(\exp X_2)$ を満たすとすると $(\exp X_1)H=(\exp X_2)H$だから $\exp(-X_2)\exp X_1\in H$。他方 $X_1, X_2\in\overline{U}$だから、$\exp(-X_2)\exp X_1\in W$ となり $W\cap H=\exp U_h$なので、ある $Y\in U_h$が存在して $\exp(-X_2)\exp X_1=\exp Y$。よって $\exp X_1=\exp X_2\exp Y$。U_m, U_h のとり方より $X_1=X_2, Y=0$。したがって、$\pi : \exp\overline{U}\to\pi(\exp\overline{U})$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射になるので位相同型写像になる。$U\times U_h$は $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ における 0 の近傍で $U\times U_h\subset U_m\times U_h$だから $\exp U\exp U_h$ は G における e の開近傍になる。よって$\pi(\exp U\exp U_h)=\pi(\exp U)$ は G/Hにおける$\pi(e)$ の開近傍になる。さらに $\psi : U\to\pi(\exp U); X\mapsto\pi(\exp X)$ とおくと上で示したことよりψは位相同型写像になる。

各 $g\in G$ に対して$\tau_g : G/H\to G/H$は位相同型写像だから $O_g=\tau_g(\pi(\exp U))$ は G/Hの開集合になり $\{O_g\}_{g\in G}$は G/Hの開被覆になる。

$$\phi_g=\psi^{-1}\circ\tau_g^{-1} : O_g\to U\subset\mathfrak{m}$$

とおいて $\{(O_g,\phi_g)\}_{g\in G}$が G/Hに多様体構造を定めることを示そう。

写像

$$l : U\times H\to(\exp U)H; (X,h)\mapsto(\exp X)h$$

は$U\times\exp U_h$において微分同型写像になる。各$h\in H$について$l=R_h\circ l\circ(1\times R_{h^{-1}})$ だからlは$U\times R_h(\exp U_h)$ においても微分同型写像になる。さらにlが全単射になれば、lが$U\times H$全体で微分同型写像になることがわかる。lが全射になることは定義よりわかる。$(X_i,h_i)\in U\times H$について $l(X_1,h_1)=l(X_2,h_2)$ とすると $(\exp X_1)h_1=(\exp X_2)h_2$だから、$\exp(-X_2)\exp X_1=h_2h_1^{-1}\in W\cap H$。したがって、ある $Y\in U_h$が存在して $\exp(-X_2)\exp X_1=\exp Y$。よって $\exp X_1=\exp X_2\exp Y$となり $X_1=X_2,\ Y=0$。$h_2h_1^{-1}=\exp Y=e$ だから $h_1=h_2$。以上で lが単射になることがわかり

$$l : U\times H\to(\exp U)H=\pi^{-1}(O_e)\subset G$$

は微分同型写像になる。特に $l^{-1} = ((l^{-1})_1, (l^{-1})_2)$ と表わすと $(l^{-1})_1 : \pi^{-1}(O_e) \to U$は C^∞ 級写像である。さらに、$g \in \pi^{-1}(O_e)$ に対して

$$g = l((l^{-1})_1(g), (l^{-1})_2(g)) = \exp((l^{-1})_1(g))(l^{-1})_2(g)$$

だから$\pi(g) = \pi(\exp((l^{-1})_1(g))) = \psi((l^{-1})_1(g))$ となり

$$(l^{-1})_1(g) = \psi^{-1} \circ \pi(g) \quad (g \in \pi^{-1}(O_e)).$$

以上を使って $O_{g_1} \cap O_{g_2} \neq \emptyset$ となる $g_i \in G$ に対して

$$\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1} : \phi_{g_1}(O_{g_1} \cap O_{g_2}) \to \phi_{g_2}(O_{g_1} \cap O_{g_2})$$

が微分同型写像になることを示そう。$X \in \phi_{g_1}(O_{g_1} \cap O_{g_2})$ に対して

$$\begin{aligned} & \phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}(X) = \psi^{-1} \circ \tau_{g_2}^{-1} \circ \tau_{g_1} \circ \psi(X) \\ = \ & \psi^{-1}(\pi(g_2^{-1} g_1 \exp X)) = (l^{-1})_1(g_2^{-1} g_1 \exp X) \end{aligned}$$

より$\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}$は C^∞級写像である。逆写像は$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}^{-1}$になり、これも C^∞級写像である。したがって$\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}$は微分同型写像になる。以上で $\{(O_g, \phi_g)\}_{g \in G}$が G/Hに多様体構造を定めることがわかった。

最後に$\tau : G \times (G/H) \to G/H$によって G が G/Hの Lie 変換群になることを示そう。任意の $g_1, g_2 \in G, x \in G/H$に対して$\tau(g_1 g_2, x) = \tau(g_1, \tau(g_2, x))$ となるのはτの定義よりわかるので、τが C^∞級写像になることを示せばよい。τが連続であることはすでに示した。$(g, xH) \in G \times (G/H)$ と $X \in U, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} & \phi_{gx} \circ \tau \circ ((L_g \circ \exp) \times \phi_x^{-1})(Z, X) = \phi_{gx} \circ \tau(g \exp Z, \pi(x \exp X)) \\ = \ & \phi_{gx} \circ \pi(g(\exp Z) x \exp X) = \psi^{-1} \circ \tau_{gx}^{-1} \circ \pi(g(\exp Z) x \exp X) \\ = \ & \psi^{-1} \circ \pi(\exp(\mathrm{Ad}(x^{-1})Z) \exp X) = (l^{-1})_1(\exp(\mathrm{Ad}(x^{-1})Z) \exp X) \end{aligned}$$

となるので、τは (g, xH) の近傍で C^∞級写像である。これが $G \times (G/H)$ の任意の点で成り立つのでτは C^∞級写像である。

定義 3.1.4 G を Lie 群とし Hを G の閉 Lie 部分群とする。定理 3.1.3で存在を示した多様体構造を持つ G/Hを G の**等質空間**と呼ぶ。G は G/Hに推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定理 3.1.5 G は多様体 Mに推移的に作用している Lie 変換群で G の連結成分の個数は可算であるとする。$p \in M$をとり

$$G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$$

とおくと、G_pは G の閉 Lie 部分群になる。さらに写像

$$\alpha : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

は等質空間 G/G_pと Mとの間の微分同型写像になる。

証明 $G \times M \to M; (g,x) \mapsto g \cdot x$ は C^∞級写像だから$\bar{\alpha} : G \to M; g \mapsto g \cdot p$ とおくと$\bar{\alpha}$も C^∞級写像である。よって $G_p = \bar{\alpha}^{-1}(p)$ は G の閉集合になる。G_pは G の部分群にもなるので、定理 7.6 より G_pは G の閉 Lie 部分群である。そこで $H = G_p$として定理 3.1.3の証明で使った記号を使うことにする。

まずαが位相同型写像になることを示す。G は Mに推移的に作用しているので、αは全単射である。Mの開集合 Oに対して$\bar{\alpha}^{-1}(O)$ は G の開集合になり、$\pi : G \to G/H$は開写像だから$\pi(\bar{\alpha}^{-1}(O))$ は G/Hの開集合。$\alpha \circ \pi = \bar{\alpha}$だから$\alpha^{-1}(O) = \pi(\bar{\alpha}^{-1}(O))$ となりαは連続である。αが開写像になることを示すために$\bar{\alpha}$が開写像になることを示そう。Oを G の開集合とする。任意の $x \in O$に対して単位元 e のコンパクト近傍 Cが存在し $C = C^{-1}, xC^2 \subset O$ を満たす。G の連結成分の個数は可算だから補題 2.2.4より G は可算開基 $\{O_i\}_{i \in \mathbf{N}}$を持つ。

$$\{O_i \mid \text{ある } g \in G \text{ が存在し } O_i \subset gC \text{ を満たす }\}$$

も G の可算開基になり、この中の各 O_iに対して $O_i \subset g_iC$となる $g_i \in G$ をとると、$G = \cup_i g_iC$が成り立つ。$\bar{\alpha}$は全射だから $M = \bigcup_i \bar{\alpha}(g_iC)$。各 g_iCはコンパクトなので$\bar{\alpha}(g_iC)$ もコンパクト。特に$\bar{\alpha}(g_iC)$ は Mの閉集合。Mは局所コンパクト Hausdorff 空間だから Baire の定理よりある i が存在して$\bar{\alpha}(g_iC) = g_i \cdot \bar{\alpha}(C)$ は内点を持つ。よって注意 3.1.2より、$\bar{\alpha}(C)$も内点$\bar{\alpha}(c) = c \cdot p$ を持つ。

$$p \in c^{-1} \cdot \bar{\alpha}(C) = c^{-1}C \cdot p \subset C^2 \cdot p$$

だから $C^2 \cdot p$ は p の近傍になる。$xC^2 \cdot p$ は $x \cdot p$ の近傍になり

$$\bar{\alpha}(x) = x \cdot p \in xC^2 \cdot p = \bar{\alpha}(xC^2) \subset \bar{\alpha}(O).$$

よって$\bar{\alpha}(O)$ は Mの開集合になり、$\bar{\alpha}$は開写像である。そこで今度は Oを G/Hの開集合とすると$\pi^{-1}(O)$ は G の開集合になり、$\bar{\alpha}$は開写像だから、$\bar{\alpha}(\pi^{-1}(O))$ は Mの開集合。$\alpha(O) = \bar{\alpha}(\pi^{-1}(O))$ よりαは開写像になる。よってαは位相同型写像である。

$g \in G, X \in U$に対して$\alpha \circ \phi_g^{-1}(X) = (g \exp X) \cdot p$ だから、αは$\pi(g) \in G/H$の近傍で C^∞級写像になる。したがって$\alpha : G/H \to M$は C^∞級写像である。$\alpha \circ \pi = \bar{\alpha}$だから$d\alpha_{\pi(e)} \circ \pi_e = \bar{\alpha}_e$。定理 2.1.9により $\mathfrak{g}$ と $T_e(G)$ を同一視すると、$\ker(d\pi_e) = \mathfrak{h}$ となるので$\ker(d\bar{\alpha}_e) \supset \mathfrak{h}$。$X \in \ker(d\bar{\alpha}_e)$ とすると、任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$0 = (d\bar{\alpha}_e(X))(f) = \frac{d}{dt} f(\bar{\alpha}(\exp tX))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p)\bigg|_{t=0}.$$

$s \in \mathbf{R}$ に対して $f_s(q) = f(\exp sX \cdot q)$ $(q \in M)$ とおくと $f_s \in C^\infty(M)$ となる。上の結果をf_sに適用すると

$$0 = \frac{d}{dt} f_s(\exp tX \cdot p)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\exp(s+t)X \cdot p)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p)\bigg|_{t=s}.$$

したがって $t \mapsto f(\exp tX \cdot p)$ は一定になる。これが任意の $f \in C^\infty(M)$ について成り立つので $\exp tX \cdot p = p$ $(t \in \mathbf{R})$ となり $\exp tX \in G_p$ $(t \in \mathbf{R})$。G_pは G の閉 Lie 部分群だから、命題 2.8.8より $X \in \mathfrak{h}$。したがって $\ker(d\bar{\alpha}_e) = \mathfrak{h}$ が成り立つ。これより

$$\operatorname{rank}(d\bar{\alpha}_e) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{m} = \dim(G/H).$$

$d\pi_e$は全射だから

$$\mathrm{rank}(d\alpha_{\pi(e)}) = \mathrm{rank}(d\bar{\alpha}_e) = \dim(G/H).$$

$\alpha : G/H \to M$は位相同型写像だから、次元の位相不変性 (2 つの Euclid 空間の開集合が位相同型ならばそれらの Euclid 空間の次元は等しい) より $\dim(G/H) = \dim M$となり、$\mathrm{rank}(d\alpha_{\pi(e)}) = \dim M$。よって $d\alpha_{\pi(e)}$は線形同型写像になり、逆関数定理よりαは$\pi(e)$ のある開近傍 Vで微分同型写像になる。各 $g \in G$ について$\alpha = g \circ \alpha \circ \tau_g^{-1}$だから$\alpha$は$\tau_g(V)$ においても微分同型写像になり、結局$\alpha : G/H \to M$は微分同型写像である。

命題 3.1.6 G を Lie 群とし Hを G の閉 Lie 部分群とする。$\pi : G \to G/H$を自然な射影としたとき、等質空間 G/Hから多様体 Mへの写像 fが C^∞級写像になるための必要十分条件は $f \circ \pi$が C^∞級写像になることである。

証明　定理 3.1.3よりπは C^∞級写像である。したがって fが C^∞級写像ならば、合成 $f \circ \pi$ は C^∞級写像になる。

逆に $f \circ \pi$が C^∞級写像であると仮定しよう。定理 3.1.3の証明で使った記号を使うことにする。任意に $g \in G$ をとる。各 $X \in U$に対して

$$f \circ \phi_g^{-1}(X) = f \circ \tau_g \circ \psi(X) = f \circ \tau_g \circ \pi \circ \exp(X) = (f \circ \pi) \circ L_g \circ \exp(X)$$

となるので、仮定より fは$\pi(g)$ の開近傍 O_gにおいて C^∞級写像である。よって $f : G/H \to M$ は C^∞級写像になる。

命題 3.1.7 G を多様体 Mの Lie 変換群とする。$p \in M$をとり $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$ とおくと、G_pは G の閉 Lie 部分群になる。さらに $G(p) = \{g \cdot p | g \in G\}$ は等質空間 G/G_pと微分同型であるような Mの部分多様体になる。

証明　定理 3.1.5の証明と同様にして、G_pは G の閉 Lie 部分群になり

$$\iota : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

とおくと$\iota(G/G_p) = G(p)$ で$\iota : G/G_p \to G(p)$ は全単射になる。ιによって $G(p)$ に多様体構造を入れ、定理 3.1.5の証明と同様にすると $G(p)$ は Mの部分多様体になることがわかる。

3.2 線形 Lie 群の等質空間

命題 3.2.1 線形 Lie 群 $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ はコンパクトである。

証明　$O(n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の有界閉集合だから Heine-Borel の定理よりコンパクトである。$SO(n), U(n), SU(n)$ についても同様。

定理 3.2.2 $1 \leq k \leq n$ とする。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関して正規直交系になる $\mathbf{R}^n$の k個の元の全体を

$$V_{\mathbf{R}}(n,k) = \{(v_1,\ldots,v_k) \in (\mathbf{R}^n)^k | \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\ (1 \leq i,j \leq k)\}$$

で定める。

$$1_k \times O(n-k) = \left\{ g \in O(n) \middle| g = \begin{bmatrix} 1_k & \\ & g' \end{bmatrix}, g' \in O(n-k) \right\}$$

とおき $1_k \times SO(n-k)$ も同様に定めると、$1_k \times O(n-k)$ と $1_k \times SO(n-k)$ はそれぞれ $O(n)$ と $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $O(n)/(1_k \times O(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{R}^n)^k$の部分多様体になる。$k < n$ のとき $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $SO(n)/(1_k \times SO(n-k))$ とも微分同型になる。

証明

$$O(n) \times (\mathbf{R}^n)^k \to (\mathbf{R}^n)^k; (g,(v_1,\ldots,v_k)) \mapsto (g(v_1),\ldots,g(v_k))$$

によって $O(n)$ は $(\mathbf{R}^n)^k$の Lie 変換群になる。$e_i \in \mathbf{R}^n$を i 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 であるような元とする。$p = (e_1,\ldots,e_k)$ とおくと $p \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ であり任意の $(v_1,\ldots,v_k) \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に対してある $g \in O(n)$ が存在し $(v_1,\ldots,v_k) = g\cdot p$ となる。したがって $V_{\mathbf{R}}(n,k) = O(n)(p)$。さらに $O(n)_p = 1_k \times O(n-k)$ となるので、命題 3.1.7より $1_k \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $O(n)/(1_k \times O(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{R}^n)^k$の部分多様体になる。

$O(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ の Lie 変換群になるので $SO(n)$ も $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ の Lie 変換群になる。$k < n$ のときを考えよう。任意の $(v_1,\ldots,v_k) \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に対して $(v_1,\ldots,v_k) = g\cdot p$ となる $g \in O(n)$ をとったとき、gの第 n 列を $\det g$倍したものを g'とおくと $g' \in SO(n)$ で $(v_1,\ldots,v_k) = g'\cdot p$ が成り立つ。したがって $SO(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。さらに $SO(n)_p = 1_k \times SO(n-k)$ となるので、命題 3.1.7より $1_k \times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $SO(n)/(1_k \times SO(n-k))$ と微分同型になる。

定義 3.2.3 $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**実 Stiefel 多様体**と呼ぶ。

定理 3.2.4 $1 \leq k \leq n$ とし、$\mathbf{R}^n$の k次元ベクトル部分空間の全体を $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ で表わす。

$$O(k) \times O(n-k) = \left\{ g \in O(n) \middle| g = \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix}, g_1 \in O(k), g_2 \in O(n-k) \right\}$$

とおくと $O(k) \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉 Lie 部分群になり、$Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ と 1 対 1 に対応する。この対応を使って $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}} : V_{\mathbf{R}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k); (v_1,\ldots,v_k) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(v_1,\ldots,v_k)$$

$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(v_1,\ldots,v_k)$ は $v_1,\ldots,v_k$が張る $\mathbf{R}^n$内の k 次元ベクトル部分空間

とおくと $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$は C^∞級写像になる。

証明 $O(k) \times O(n-k)$ は命題 3.2.1よりコンパクトだから $O(n)$ の相対位相に関してもコンパクト。したがって $O(k) \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉部分群になる。写像

$$O(n) \times Gr_{\mathbf{R}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k); (g,V) \mapsto g(V)$$

によって群 $O(n)$ を集合 $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ の変換群とみなす。任意の $g \in O(n)$ に対して $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}} \circ g = g \circ \mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ が成り立つ。$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ は全射になり、定理 3.2.2の証明より $O(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用しているので、$O(n)$ は $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(e_1,\dots,e_k) = W$ とおくと $O(n)_W = O(k) \times O(n-k)$ となる。したがって対応

$$O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k);\ g(O(k) \times O(n-k)) \mapsto gW$$

によって $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ と $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として 1 対 1 に対応する。$\pi_1 : O(n) \to O(n)/(1_k \times O(n-k))$ と $\pi_2 : O(n) \to O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ をそれぞれ自然な射影とすると、定理 3.1.3の証明での等質空間の多様体構造の定め方より π_1, π_2 は C^∞ 級写像になる。$\phi(g(1_k \times O(n-k))) = g(O(k) \times O(n-k))$ として $O(n)/(1_k \times O(n-k))$ から $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ への写像 ϕ を定めると

$$\begin{array}{ccc}
O(n) & \xrightarrow{id} & O(n) \\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
O(n)/(1_k \times O(n-k)) & \xrightarrow{\phi} & O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \\
{\scriptstyle \cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
V_{\mathbf{R}}(n,k) & \xrightarrow{\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}} & Gr_{\mathbf{R}}(n,k)
\end{array}$$

は可換図式になるので命題 3.1.6より ϕ は C^∞ 級写像になる。したがって $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ も C^∞ 級写像になる。

定義 3.2.5 $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。特に、$Gr_{\mathbf{R}}(n+1,1)$ を**実射影空間**と呼び $P^n(\mathbf{R})$ で表す。

定理 3.2.6 $1 \le k \le n$ とし、$\mathbf{R}^n$ の向きを持つ k 次元ベクトル部分空間の全体を $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ で表わす。$SO(n)$ の部分群 $SO(k) \times SO(n-k)$ を定理 3.2.4の $O(n)$ の部分群 $O(k) \times O(n-k)$ と同様に定義すると、$SO(k) \times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。$k = n$ のとき $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,n)$ は 2 点になり、$k < n$ のとき $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k))$ と 1 対 1 に対応する。この対応を使って $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}} : V_{\mathbf{R}}(n,k) \to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k); (v_1,\dots,v_k) \mapsto \mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(v_1,\dots,v_k)$
$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(v_1,\dots,v_k)$ は $v_1,\dots,v_k$ が張る $\mathbf{R}^n$ 内の k 次元ベクトル部分空間で
$(v_1,\dots,v_k)$ を含む向きを持つ

とおくと $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$ は C^∞ 級写像になる。

証明 $SO(k)\times SO(n-k)$ は命題 3.2.1よりコンパクトだから $SO(n)$ の相対位相に関してもコンパクト。したがって $SO(k)\times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉部分群になる。写像

$$SO(n)\times Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)\to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k);(g,V)\mapsto g(V)$$
$$g(V)\text{ の向きは }V\text{の向きを }g\text{で送ったもの}$$

によって群 $SO(n)$ を集合 $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ の変換群とみなす。任意の $g\in SO(n)$ に対して $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}\circ g=g\circ\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$が成り立つ。また $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$は全射になる。$k=n$ のときは、$Gr^o_{\mathbf{R}}(n,n)$ は 2 点になる。$k<n$ のとき定理 3.2.2より $SO(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用しているので、$SO(n)$ は $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(e_1,\ldots,e_k)=W$とおくと $SO(n)_W=SO(k)\times SO(n-k)$ となる。したがって対応

$$SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))\to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k);\ g(SO(k)\times SO(n-k))\mapsto gW$$

によって $SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ と $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として 1 対 1 に対応する。$\pi_1:SO(n)\to SO(n)/(1_k\times SO(n-k))$ と$\pi_2:O(n)\to SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ をそれぞれ自然な射影とすると、定理3.1.3の証明での等質空間の多様体構造の定め方よりπ_1,π_2はC^∞級写像になる。$\phi(g(1_k\times SO(n-k)))=g(SO(k)\times SO(n-k))$ として $SO(n)/(1_k\times SO(n-k))$ から $SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ への写像ϕを定めると

$$\begin{tikzcd}
SO(n) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi_1"'] & SO(n) \arrow[d, "\pi_2"] \\
SO(n)/(1_k\times SO(n-k)) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\cong"'] & SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k)) \arrow[d, "\cong"] \\
V_{\mathbf{R}}(n,k) \arrow[r, "\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}"] & Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)
\end{tikzcd}$$

は可換図式になるので命題 3.1.6よりϕは C^∞級写像になる。したがって $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$も C^∞級写像になる。

定義 3.2.7 $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**有向実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。

定理 3.2.8 $1\le k\le n$ とする。$\mathbf{C}^n$の標準 Hermite 内積に関して正規直交系になる $\mathbf{C}^n$の k 個の元の全体を

$$V_{\mathbf{C}}(n,k)=\{(v_1,\ldots,v_k)\in(\mathbf{C}^n)^k|\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}\ (1\le i,j\le k)\}$$

で定める。

$$1_k\times U(n-k)=\left\{g\in U(n)\,\middle|\,g=\begin{bmatrix}1_k & \\ & g'\end{bmatrix},g'\in U(n-k)\right\}$$

とおき $1_k\times SU(n-k)$ も同様に定める。このとき、$1_k\times U(n-k)$ と $1_k\times SU(n-k)$ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ は $U(n)/(1_k\times U(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{C}^n)^k$の部分多様体になる。$k<n$ のとき $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ は $SU(n)/(1_k\times SU(n-k))$ とも微分同型になる。

定理 3.2.2の証明と同様の方針で証明することができるので、証明は省略する。

定義 3.2.9 $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ を**複素 Stiefel 多様体**と呼ぶ。

定理 3.2.10 $1 \leq k \leq n$ とし、$\mathbf{C}^n$の k次元複素ベクトル部分空間の全体を $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ で表わす。

$$U(k) \times U(n-k) = \left\{ g \in U(n) \middle| g = \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix}, g_1 \in U(k), g_2 \in U(n-k) \right\}$$

とおく。このとき $U(k) \times U(n-k)$ は $U(n)$ の閉 Lie 部分群になり $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ と 1 対 1 に対応する。この対応を使って $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$$\begin{aligned}&\mathrm{Span}_{\mathbf{C}} : V_{\mathbf{C}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{C}}(n,k); (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k)\\ &\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k) \text{ は } v_1, \ldots, v_k \text{が張る } \mathbf{C}^n \text{内の } k \text{ 次元ベクトル部分空間}\end{aligned}$$

とおくと $\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}$は C^∞級写像になる。

定理 3.2.4の証明と同様の方針で証明することができるので、証明は省略する。

定義 3.2.11 $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ を**複素 Grassmann 多様体**と呼ぶ。$Gr_{\mathbf{C}}(n+1,1)$ を**複素射影空間**と呼び $P^n(\mathbf{C})$ で表す。

3.3 等質空間の Riemann 計量

この節では、等質空間に Riemann 計量を定める方法について述べる。

定理 3.3.1 G をコンパクト Hausdorff 位相群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の Radon 測度μ_Gが一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上のμ_G可積分関数 fと $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(3) G 上のμ_G可積分関数 fと $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(4) G 上のμ_G可積分関数 fに対して

$$\int_G f(x^{-1}) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

定義 3.3.2 定理 3.3.1で定まるコンパクト Hausdorff 位相群 G 上の測度を、G の **Haar 測度**と呼ぶ。

定義 3.3.3 Riemann 計量を持つ Lie 群の任意の左移動が等長的になっているとき、その Riemann 計量を**左不変**という。任意の右移動も等長的になる左不変 Riemann 計量を、両側不変 Riemann 計量という。

命題 3.3.4 Lie 群 G の左不変 Riemann 計量の全体と、その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積の全体は一対一に対応する。さらに、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

証明 G 上の左不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ があるとする。$\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Yに対して、$\langle X, Y\rangle$ は G 上の左不変関数になるので、定数である。明らかにこれは $\mathfrak{g}$ の内積を定める。

逆に、$\mathfrak{g}$ に内積が定まっているとする。G の任意の点 $g \in G$ の接ベクトル空間 T_gG の内積 $\langle\ ,\ \rangle_g$を

$$\langle X, Y\rangle_g = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle \qquad (X, Y \in T_gG)$$

で定める。ただし、$\tilde{X}, \tilde{Y}$はそれぞれ X, Yを左不変ベクトル場に拡張したものであり、定理 2.1.9より、このような拡張は可能である。さらに定理 2.1.9の証明と同様に、$\langle\ ,\ \rangle_g$が gに対して滑らかに依存していることがわかる。したがって、$\{\langle\ ,\ \rangle_g\}_{g\in G}$は、$G$ 上の Riemann 計量を定める。さらに、この Riemann 計量は、定め方より、左不変であることがわかる。

随伴表現 Ad の定め方 (定理 2.6.10) より、G の元 gに対して

$$\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$$

だから、G の Riemann 計量が両側不変ならば、対応する $\mathfrak{g}$ の内積は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変になる。逆も上の等式からわかる。

系 3.3.5 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G 上の両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0 \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

を満たす。すなわち、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ となる。さらに G が連結のとき、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たす $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の全体は一対一に対応する。

証明 $\langle\ ,\ \rangle$ が G の両側不変 Riemann 計量のとき、$Y, Z \in \mathfrak{g}$ と $g \in G$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}(g)Y, \mathrm{Ad}(g)Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$$

が成り立つ。$X \in \mathfrak{g}$ をとり、$g = \exp(tX)$ とおくと、

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle = \langle Y, Z\rangle.$$

両辺を $t=0$ で t に関して微分すると、

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle \\
&= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\right\rangle \\
&= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle \qquad (\text{定理 } 2.6.10).
\end{aligned}$$

したがって、各 $\mathrm{ad}(X)$ は交代線形写像になり、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ が成り立つ。

G が連結の場合を考える。G の両側不変 Riemann 計量が $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たすことはすでに示したので、命題 3.3.4より、この条件を満たす $\mathfrak{g}$ の内積が、$\mathrm{Ad}(G)$ 不変になることを示せば十分である。$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle \\
&= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\right\rangle \\
&= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle \qquad (\text{定理 } 2.6.10) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$$

となり、内積は $\mathrm{Ad}(\exp \mathfrak{g})$ 不変になる。ところが、G は連結だから定理 2.5.5と 2.2.1より、内積は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変になることがわかる。

命題 3.3.6 G をコンパクト Hausdorff 位相群とし、μ_Gを G の Haar 測度とする。G の表現 (ρ, V) に対してρを G から $\mathrm{Hom}(V,V)$ への写像とみなして $P = \int \rho d\mu_G \in \mathrm{Hom}(V,V)$ とおくと、$P^2 = P$が成り立つ。また

$$V_G = \{v \in V | \rho(g)(v) = v\ (g \in G)\}$$

とおくと、$\mathrm{Im}P = V_G$となる。

証明 $v \in V$に対して積分の線形性より

$$P(v) = \int \rho(x) d\mu_G x(v) = \int \rho(x)(v) d\mu_G x$$

となる。これより $v \in V_G$ならば $P(v) = v$となり $v \in \mathrm{Im}P$。よって $V_G \subset \mathrm{Im}P$。また任意の $v \in V$と $g \in G$ について

$$\rho(g)P(v) = \rho(g) \int \rho(x)(v) d\mu_G x$$

$$\begin{aligned} &= \int \rho(g)\rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\rho(g)\ \text{の作用の線形性}) \\ &= \int \rho(gx)(v)d\mu_G x \\ &= \int \rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\text{Haar 積分の左不変性}) \\ &= P(v) \qquad (\mu_G(G)=1\ \text{だから}) \end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{Im}P \subset V_G$となり、$\mathrm{Im}P = V_G$がわかる。さらに

$$\begin{aligned} P^2(v) &= \int \rho(x)P(v)d\mu_G x \\ &= \int P(v)d\mu_G x \qquad (P(v)\in V_G) \\ &= P(v) \qquad (\mu_G(G)=1\ \text{だから}) \end{aligned}$$

となるので、$P^2 = P$が成り立つ。

命題 3.3.7 (ρ, V) をコンパクト Hausdorff 位相群 G の表現とすると、ρが直交（ユニタリ）表現になるような Vの内積が存在する。

証明 G の Haar 測度をμ_Gとしておく。

Vが実ベクトル空間の場合 V上の対称 2 次形式の全体がつくる実ベクトル空間を $S(V)$ で表す。

$$(\rho_S(g)A)(v,w) = A(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(w)) \qquad (g\in G,\ A\in S(V),\ v,w\in V)$$

によってρ_Sを定めると $(\rho_S, S(V))$ は G の表現になる。正定値の元 $A_0 \in S(V)$ を 1 つとる。$P = \int \rho_S d\mu_G$とおくと、命題 3.3.6より、$P(A_0)\in S(V)_G$となる。また任意の $v(\neq 0)\in V$について

$$P(A_0)(v,v) = \int A_0(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(v))d\mu_G g > 0$$

となるので、$P(A_0)$ も正定値になる。この内積 $P(A_0)$ によって (ρ, V) は直交表現になる。

Vが複素ベクトル空間の場合も、V上の Hermite2 次形式の全体がつくる複素ベクトル空間を考えることにより、同様に証明できる。

系 3.3.8 コンパクト Lie 群には、両側不変 Riemann 計量が存在する。

証明 G をコンパクト Lie 群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。G の随伴表現に命題 3.3.7を適用すると、$\mathfrak{g}$ 上に $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積が存在する。したがって、命題 3.3.4より、この内積に対応する G 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 3.3.9 コンパクト線形 Lie 群の場合は、Haar 測度を使わなくても、以下のように具体的に両側不変 Riemann 計量を構成することができる。コンパクト線形 Lie 群 $G\subset GL(n,\mathbf{R})$ に対して、命題 3.3.7より

$$G\subset O(\mathbf{R}^n; B)$$

となる $\mathbf{R}^n$の内積 Bが存在する。$\mathbf{R}^n$の Bに関する正規直交基底をとり、それについて行列表示することにより、$G \subset O(n)$ とみなす。このとき、$O(n)$ に両側不変 Riemann 計量を構成すれば、G に誘導される Riemann 計量も両側不変になる。

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}({}^tXY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ 上の 2 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= \mathrm{tr}({}^tXY) = -\mathrm{tr}(XY)\\ &= -\mathrm{tr}(YX) = \mathrm{tr}({}^tYX)\\ &= \langle Y, X\rangle\end{aligned}$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X = (X_{ij}) \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\langle X, X\rangle = \mathrm{tr}({}^tXX) = \sum_{i,j} X_{ij}^2$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。さらに $g \in O(n)$ に対して例 2.8.11より

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \qquad (X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle &= -\mathrm{tr}(gXg^{-1}gYg^{-1})\\ &= -\mathrm{tr}(gXYg^{-1})\\ &= -\mathrm{tr}(XY)\\ &= \langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(O(n))$ 不変になり、命題 3.3.4より、対応する $O(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

定義 3.3.10 Riemann 計量を持つ等質空間 G/Hとする。定理 3.1.3で定まる G の G/Hへの作用が等長的になっているとき、その Riemann 計量を G **不変**という。

命題 3.3.11 G を Lie 群とし、Hを G の閉 Lie 部分群とする。G と Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、等質空間 G/Hの G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。

証明 任意の $h \in H$に対して、$L_h \circ R_{h^{-1}}$は Hを不変にするので、その微分 $\mathrm{Ad}_G(h)$ は $\mathfrak{h}$ を不変にする。したがって、線形写像

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

は、商ベクトル空間の線形写像

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

を誘導する。上にあるように、誘導された線形写像も同じ記号で表すことにする。

G/Hの H自身による剰余類を G/Hの原点と呼び、o で表すことにする。定理 2.1.9で定めた線形同型写像$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ と自然な射影$\pi : G \to G/H$の微分写像 $d\pi_e$を使って、線形写像の合成

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha} T_e(G) \xrightarrow{d\pi_e} T_o(G/H)$$

をβとおく。βの核は $\mathfrak{h}$ になる。よって、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ と $T_o(G/H)$ は、βの誘導する線形写像によって線形同型になる。βの誘導する線形写像もβで表すことにする。Hの元 h は G/Hの原点 o を動かさないので、

$$dh_o : T_o(G/H) \to T_o(G/H)$$

を誘導する。dh_oに対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の線形写像を求めてみよう。$X \in \mathfrak{g}$ をとる。

$$\begin{aligned} dh_o d\pi_e \alpha(X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\pi(\exp tX) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tX)H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tXh^{-1})H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp t\mathrm{Ad}(h)X)H \\ &= d\pi_e \alpha(\mathrm{Ad}(h)X). \end{aligned}$$

したがって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(h)} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \beta}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \beta}\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ T_o(G/H) & \xrightarrow{dh_o} & T_o(G/H) \end{array}$$

以上の準備のもとに命題を証明する。G/Hに G 不変 Riemann 計量があるとすると、$T_o(G/H)$ における計量は、各 $h \in H$に対して dh_oで不変になる。線形同型写像βで対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の内積は、上の可換図式より、$\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積になる。

逆に $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積があるとすると、βで対応する $T_o(G/H)$ 上の内積は、各 $h \in H$に対して dh_oで不変になる。その内積を $\langle\ ,\ \rangle_o$で表す。任意の元 $x \in G/H$における内積を

$$\langle X, Y\rangle_x = \langle dgX, dgY\rangle_o \qquad (X, Y \in T_x(G/H),\ gx = o)$$

で定義する。内積の定義が、$gx = o$ となる $g \in G$ のとり方によらないことは、次のようにしてわかる。$g_1x = g_2x = o$ とすると、$x = g_1^{-1}o$ となり、

$$o = g_2x = g_2g_1^{-1}o.$$

よって $g_2g_1^{-1} \in H$となる。そこで、$h = g_2g_1^{-1} \in H$とおくと、

$$\begin{aligned}\langle dg_1X, dg_1Y\rangle_o &= \langle dhdg_1X, dhdg_1Y\rangle_o \qquad (\langle\ ,\ \rangle_o\text{の不変性})\\ &= \langle dg_2dg_1^{-1}dg_1X, dg_2dg_1^{-1}dg_1Y\rangle_o\\ &= \langle dg_2X, dg_2Y\rangle_o.\end{aligned}$$

これにより G/Hに G 不変な Riemann 計量が定まる。

系 3.3.12 G を Lie 群とし、Hを G のコンパクト Lie 部分群とする。G と Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

を満たす。等質空間 G/Hの G 不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

証明　命題 3.3.7より、$\mathfrak{g}$ には $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変内積が存在する。その内積に関する $\mathfrak{h}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ で表す。任意の $h \in H$について、

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

は内積を保ち、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ を満たすので、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ も成り立つ。さらに、

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_{G(h)}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}\\ \downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong}\\ \mathfrak{m} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_{G(h)}} & \mathfrak{m}\end{array}$$

は可換になるので、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体と、一対一に対応する。よって、命題 3.3.11より、等質空間 G/Hの G 不変 Riemann 計量の全体とも一対一に対応する。

G がコンパクトだから、Kもコンパクトになり、命題 3.3.7より、$\mathfrak{m}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積が存在する。したがって、G/Hに G 不変 Riemann 計量が存在する。

3.4 Lie 群上の Riemann 幾何学

左不変 Riemann 計量を持っている Lie 群の Riemann 接続、曲率等を求める。特に両側不変 Riemann 計量の場合は、これらの記述が単純になり、単位元を通る測地線が一径数部分群に一致することがわかる。その応用として、コンパクト連結 Lie 群の指数写像が全射になることを示す。

命題 3.4.1 $\langle\ ,\ \rangle$ を Lie 群 G の左不変 Riemann 計量とする。線形写像 A の随伴線形写像を A^*で表すことにすると、以下の等式が成り立つ。

(1) G の Riemann 接続を ∇ で表すと、$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X,Y] - \mathrm{ad}(X)^*(Y) - \mathrm{ad}(Y)^*(X).$$

特に $\nabla_X Y$も左不変ベクトル場になる。

(2) G の曲率テンソルを Rで表すと、$X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle.$$

特に $R(X,Y)Z$も左不変ベクトル場になる。

(3) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y, X\rangle &= \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y) + \mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2 - \langle \mathrm{ad}(X)^*(X), \mathrm{ad}(Y)^*(Y)\rangle \\ &\quad -\frac{3}{4}|[X,Y]|^2 - \frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle - \frac{1}{2}\langle[[Y,X],X],Y\rangle.\end{aligned}$$

(4) 一径数部分群 $\exp(tX)$ が測地線になるための必要十分条件は、$\mathrm{ad}(X)^*(X) = 0$ である。

証明 (1) Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は左不変だから、G 上の関数 $\langle X, Y\rangle$ も左不変になり、特に定数になる。したがって、

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ &\quad +\langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle \\ &= \langle[X,Y],Z\rangle - \langle \mathrm{ad}(X)(Z), Y\rangle - \langle \mathrm{ad}(Y)(Z), X\rangle \\ &= \langle[X,Y],Z\rangle - \langle Z, \mathrm{ad}(X)^*Y\rangle - \langle Z, \mathrm{ad}(Y)^*X\rangle\end{aligned}$$

となり、

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X,Y] - \mathrm{ad}(X)^*Y - \mathrm{ad}(Y)^*X).$$

この結果より、$\nabla_X Y \in \mathfrak{g}$ となる。
(2) (1) の結果より $Y, Z \in \mathfrak{g}$ のとき $\nabla_Y Z \in \mathfrak{g}$ だから、$\langle \nabla_Y Z, W \rangle$ は定数になる。

$$0 = X\langle \nabla_Y Z, W \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle.$$

これより、

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle \\ &= -\langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle.\end{aligned}$$

この結果より、$R(X,Y)Z \in \mathfrak{g}$ となる。
(3) (1) と (2) の結果より

$$\begin{aligned} & \langle R(X,Y)Y, X \rangle \\ = & \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_Y Y, \nabla_X X \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle \\ = & \frac{1}{4}\langle [X,Y] - \mathrm{ad}(X)^*(Y) - \mathrm{ad}(Y)^*(X), [Y,X] - \mathrm{ad}(Y)^*(X) - \mathrm{ad}(X)^*(Y) \rangle \\ & -\langle -\mathrm{ad}(Y)^*(Y), -\mathrm{ad}(X)^*(X) \rangle \\ & \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y] - \mathrm{ad}([X,Y])^*(Y) - \mathrm{ad}(Y)^*([X,Y]), X \rangle \\ = & -\frac{1}{4}|[X,Y]|^2 + \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y) + \mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2 \\ & -\langle \mathrm{ad}(X)^*(X), \mathrm{ad}(Y)^*(Y) \rangle \\ & -\frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y], X \rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [[X,Y],X] \rangle + \frac{1}{2}\langle [X,Y],[Y,X] \rangle \\ = & \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y) + \mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2 - \langle \mathrm{ad}(X)^*(X), \mathrm{ad}(Y)^*(Y) \rangle \\ & -\frac{3}{4}|[X,Y]|^2 - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y], X \rangle - \frac{1}{2}\langle [[Y,X],X], Y \rangle. \end{aligned}$$

(4) 一径数部分群 $\exp(tX)$ の接ベクトルは Xだから、$\exp(tX)$ が測地線になるための必要十分条件は、$\nabla_X X = 0$ であり、これは、(1) の結果より $\mathrm{ad}(X)^*(X) = 0$ と同値になる。

系 3.4.2 $\langle\ ,\ \rangle$ を Lie 群 G の両側不変 Riemann 計量とする。以下の等式が成り立つ。

(1) G の Riemann 接続を ∇ で表すと、$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

(2) G の曲率テンソルを Rで表すと、$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

(3) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\langle R(X,Y)Y, X\rangle = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2.$$

特に G の断面曲率は 0 以上になる。

(4) G の一径数部分群の全体は単位元を通る測地線の全体に一致する。

証明 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は両側不変だから、系 3.3.5より、

$$\langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0 \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。これより、

$$\mathrm{ad}(X)^* = -\mathrm{ad}(X)$$

となる。

(1) 命題 3.4.1の (1) より、

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \frac{1}{2}([X,Y] - \mathrm{ad}(X)^*(Y) - \mathrm{ad}(Y)^*(X)) \\ &= \frac{1}{2}([X,Y] + [X,Y] + [Y,X]) \\ &= \frac{1}{2}[X,Y].\end{aligned}$$

(2) 命題 3.4.1の (2) に、上で示した (1) を代入すると、

$$\begin{aligned}&\langle R(X,Y)Z, W\rangle \\ =\ &\langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle \\ =\ &\frac{1}{4}\langle [X,Z],[Y,W]\rangle - \frac{1}{4}\langle [Y,Z],[X,W]\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Z],W\rangle \\ =\ &-\frac{1}{4}\langle [Y,[X,Z]],W\rangle + \frac{1}{4}\langle [X,[Y,Z]],W\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Z],W\rangle.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= -\frac{1}{4}[Y,[X,Z]] + \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \qquad (\text{Jacobi 律}) \\ &= -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].\end{aligned}$$

(3) (2) より、

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y, X\rangle &= -\frac{1}{4}\langle [[X,Y],Y],X\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle [X,Y],[X,Y]\rangle \\ &= \frac{1}{4}|[X,Y]|^2.\end{aligned}$$

(4) 命題 3.4.1の (4) より、一径数部分群 $\exp(tX)$ が測地線になるための必要十分条件は、$\mathrm{ad}(X)^*(X) = 0$ であるが、Riemann 計量が両側不変だから、すべての $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{ad}(X)^*(X) = -\mathrm{ad}(X)(X) = 0.$$

したがって、すべての一径数部分群は測地線になる。また、$T_e(G)$ のすべての元に対してそれに接する一径数部分群は存在するので、一径数部分群で単位元を通るすべての測地線を表すことができる。

定理 3.4.3 (Hopf-Rinow) コンパクト連結 Riemann 多様体の任意の 2 点は、測地線で結ぶことができる。

定理 3.4.4 コンパクト連結 Lie 群の指数写像は全射になる。

証明 G をコンパクト連結 Lie 群とする。系 3.3.8より、G には両側不変 Riemann 計量が存在する。この Riemann 計量に関して G はコンパクト連結 Riemann 多様体になるので、定理 3.4.3より、任意の $g \in G$ は単位元と測地線で結ぶことができる。系 3.4.2の (4) より、この測地線は G の一径数部分群になり、特に gは指数写像の像に含まれる。したがって、指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全射になる。

3.5 等質空間上の Riemann 幾何学

まず Riemannian submersion に関する準備をし、Riemann 等質空間上の Riemann 幾何学を議論する。

定義 3.5.1 多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級全射πの各点 $x \in M$の微分写像

$$d\pi_x : T_x(M) \to T_{\pi(x)}(N)$$

が全射になるとき、πを **submersion** と呼ぶ。$V_x = \mathrm{Ker}(d\pi_x)$ を**垂直部分空間**と呼ぶ。さらに Mと Nがともに Riemann 計量を持っているとき、$H_x = \mathrm{Ker}(d\pi_x)^\perp$を**水平部分空間**と呼び、各点 $x \in M$で

$$d\pi_x : H_x \to T_{\pi(x)}(N)$$

が等長線形写像になるとき、πを **Riemannian submersion** と呼ぶ。

命題 3.5.2 $\pi : M \to N$を $n + k$次元多様体 Mから n 次元多様体 Nへの submersion とする。このとき、Nの l次元部分多様体 L に対して$\pi^{-1}(L)$ は、Mの $k + l$次元部分多様体になる。さらに、各点 $x \in \pi^{-1}(L)$ について

$$\bar{L}_x = (d\pi_x|_{H_x})^{-1}(T_{\pi(x)}(L))$$

とおくと

$$T_x(\pi^{-1}(L)) = V_x \oplus \bar{L}_x$$

が成り立つ。

証明　$\pi^{-1}(L)$ が M の $k+l$次元部分多様体になることは、陰関数定理からわかる。
k次元多様体と Nの$\pi(x)$ における開近傍の積に微分同型になる Mにおける x の開近傍が存在することが、陰関数定理からわかるので、これより、

$$T_x(\pi^{-1}(L)) = V_x \oplus \bar{L}_x$$

が成り立つ。

命題 3.5.3 $\pi : M \to N$を Riemann 多様体間の Riemannian submersion とする。N上のベクトル場 Xに対して、各点 $x \in M$で$\bar{X}_x \in H_x$と $d\pi_x \bar{X}_x = X_{\pi(x)}$を満たす M上のベクトル場$\bar{X}$がただ一つ存在する。Nの曲線 c と定義域 Iの元 t_0に関する $c(t_0)$ のπによる逆像の元 $x_0 \in \pi^{-1}(c(t_0))$ に対して、各点 $t \in I$で$\pi(\bar{c}(t)) = c(t)$ と$\dfrac{d\bar{c}}{dt}(t) \in H_{\bar{c}(t)}$を満たし、$\bar{c}(t_0) = x_0$ となる M上の曲線$\bar{c}$がただ一つ存在する。

証明　各点 $x \in M$で $d\pi_x : H_x \to T_{\pi(x)}(N)$ は等長線形写像になっているので、特に線形同型であり、$d\pi_x \bar{X}_x = X_{\pi(x)}$となる$\bar{X}_x \in H_x$がただ一つ存在する。
命題 3.5.2より、$\pi^{-1}(\mathrm{Im}(c))$ は Mの部分多様体になり、

$$\pi : \pi^{-1}(\mathrm{Im}(c)) \to \mathrm{Im}(c)$$

は Riemannina submersion になる。そこで、$\mathrm{Im}(c)$ 上のベクトル場$\dfrac{dc}{dt}$に命題の前半を適用すると、各点 $x \in \pi^{-1}(\mathrm{Im}(c))$ で$\bar{X}_x \in H_x$と $d\pi_x \bar{X}_x = \dfrac{dc}{dt}_{\pi(x)}$ を満たす$\pi^{-1}(\mathrm{Im}(c))$ 上のベクトル場$\bar{X}$がただ一つ存在する。そこで、$\bar{c}(t_0) = x_0$を初期条件とする$\bar{X}$の積分曲線$\bar{c}$をとれば、$\bar{c}$は求める条件を満たす曲線になる。

定義 3.5.4 命題 3.5.3において、M上のベクトル場$\bar{X}$を N上のベクトル場 Xの**水平持ち上げ**と呼ぶ。また、Mの曲線$\bar{c}$を Nの曲線 c の**水平持ち上げ**と呼ぶ。

補題 3.5.5 πを多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。M上のベクトル場$\tilde{X}, \tilde{Y}$と N上のベクトル場 X, Yが

$$d\pi_x(\tilde{X}_x) = X_{\pi(x)}, \quad d\pi_x(\tilde{Y}_x) = Y_{\pi(x)} \quad (x \in M)$$

を満たすとすると

$$d\pi_x([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x) = [X, Y]_{\pi(x)} \quad (x \in M)$$

が成り立つ。

証明　仮定より任意の $f \in C^\infty(N)$ と $x \in M$に対して

$$\begin{aligned} \tilde{X}(f \circ \pi)(x) &= \tilde{X}_x(f \circ \pi) = d\pi_x(\tilde{X}_x)(f) = X_{\pi(x)}(f) \\ &= (Xf)(\pi(x)) \end{aligned}$$

となるので

$$\tilde{X}(f \circ \pi) = (Xf) \circ \pi$$

が成り立つ。同様に

$$\tilde{Y}(f \circ \pi) = (Yf) \circ \pi$$

も成り立つ。したがって $x \in M$について

$$\begin{aligned}
d\pi_x([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x)(f) &= \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]_x (f \circ \pi) \\
&= (\tilde{X}(\tilde{Y}(f \circ \pi)) - \tilde{Y}(\tilde{X}(f \circ \pi)))(x) \\
&= \tilde{X}_x(\tilde{Y}(f \circ \pi)) - \tilde{Y}_x(\tilde{X}(f \circ \pi)) \\
&= \tilde{X}_x((Yf) \circ \pi) - \tilde{Y}_x((Xf) \circ \pi) \\
&= d\pi_x(\tilde{X}_x)(Yf) - d\pi_x(\tilde{Y}_x)(Xf) \\
&= X_{\pi(x)}(Yf) - Y_{\pi(x)}(Xf) \\
&= (X(Yf) - Y(Xf))(\pi(x)) \\
&= ([X, Y](f))(\pi(x)) \\
&= [X, Y]_{\pi(x)}(f)
\end{aligned}$$

となるので

$$d\pi_x([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x) = [X, Y]_{\pi(x)}.$$

補題 3.5.6 $\pi : M \to N$を Riemann 多様体間の Riemannian submersion とする。M, Nの Riemann 接続をそれぞれ$\bar{\nabla}, \nabla$ で表す。N上のベクトル場 X, Yに対して、

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^V$$

が成り立つ。ただし、$\cdot^V$は垂直成分を表す。

証明 X, Y, Zを Nのベクトル場とする。水平持ち上げの定め方より、

$$d\pi\bar{X} = X, \quad d\pi\bar{Y} = Y$$

が成り立つ。よって、補題 3.5.5より $d\pi[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ となり$\pi : M \to N$は Riemanninan submersion だから、

$$\langle[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}\rangle = \langle[X, Y], Z\rangle.$$

さらに、$\bar{X}\langle\bar{Y}, \bar{Z}\rangle = X\langle Y, Z\rangle$ だから、

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}\rangle &= \frac{1}{2}\{\bar{X}\langle\bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \bar{Y}\langle\bar{X}, \bar{Z}\rangle - \bar{Z}\langle\bar{X}, \bar{Y}\rangle \\
&\quad +\langle[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}\rangle - \langle[\bar{X}, \bar{Z}], \bar{Y}\rangle - \langle[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&\quad +\langle[X, Y], Z\rangle - \langle[X, Z], Y\rangle - \langle[Y, Z], X\rangle\} \\
&= \langle\nabla_X Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

したがって、$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$の水平成分は$\overline{(\nabla_X Y)}$に一致する。

次に$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$の垂直成分を求めるために、$N$の垂直ベクトル場$T$に対して $\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, T\rangle$ を計算する。

$$\begin{aligned}\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, T\rangle &= \frac{1}{2}\{\bar{X}\langle\bar{Y}, T\rangle + \bar{Y}\langle\bar{X}, T\rangle - T\langle\bar{X}, \bar{Y}\rangle \\ &\quad + \langle[\bar{X}, \bar{Y}], T\rangle - \langle[\bar{X}, T], \bar{Y}\rangle - \langle[\bar{Y}, T], \bar{X}\rangle\}\end{aligned}$$

において、

$$\langle\bar{Y}, T\rangle = \langle\bar{X}, T\rangle = 0$$

だから、

$$\bar{X}\langle\bar{Y}, T\rangle = \bar{Y}\langle\bar{X}, T\rangle = 0.$$

また、$\langle\bar{X}, \bar{Y}\rangle = \langle X, Y\rangle$ だから、

$$T\langle\bar{X}, \bar{Y}\rangle = 0.$$

$d\pi T = 0$ だから、補題 3.5.5より $d\pi[\bar{X}, T] = [X, 0] = 0$ となり、

$$\langle[\bar{X}, T], \bar{Y}\rangle = 0.$$

同様にして、

$$\langle[\bar{Y}, T], \bar{X}\rangle = 0.$$

以上より、

$$\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, T\rangle = \frac{1}{2}\langle[\bar{X}, \bar{Y}], T\rangle.$$

したがって、$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$の垂直成分は$\frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^V$に一致する。

$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$の水平成分と垂直成分を合せることにより、

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^V$$

を得る。

定理 3.5.7 (O'Neill) $\pi : M \to N$を Riemann 多様体間の Riemannian submersion とする。M, Nの曲率テンソルをそれぞれ$\bar{R}, R$で表す。N上のベクトル場 X, Yに対して、

$$\langle R(X, Y)Y, X\rangle = \langle\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Y}, \bar{X}\rangle + \frac{3}{4}|[\bar{X}, \bar{Y}]^V|^2$$

が成り立つ。特に Mの断面曲率が 0 以上ならば、Nの断面曲率も 0 以上になり、Mの断面曲率が正ならば、Nの断面曲率も正になる。

証明 N上のベクトル場 X, Y, Z, Wに対して、補題 3.5.6の結果と証明中に示したことを使うと

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z}, \bar{W} \rangle &= \bar{X} \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z}, \bar{W} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{W} \rangle \\ &= X \langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\bar{Y}, \bar{Z}]^V, [\bar{X}, \bar{W}]^V \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\bar{Y}, \bar{Z}]^V, [\bar{X}, \bar{W}]^V \rangle.\end{aligned}$$

さらに、$\cdot^H$で水平成分を表すことにすると、

$$\langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]} \bar{Z}, \bar{W} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]^H} \bar{Z}, \bar{W} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]^V} \bar{Z}, \bar{W} \rangle.$$

ここで、補題 3.5.5より $d\pi[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ だから、$[\bar{X}, \bar{Y}]^H$は $[X, Y]$ の水平持ち上げになり、補題 3.5.6より、

$$\langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]^H} \bar{Z}, \bar{W} \rangle = \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle$$

となる。また Mの垂直ベクトル場 Tに対して、補題 3.5.6の結果と証明中に示したことを使うと、

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_T \bar{X}, \bar{Y} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} T + [T, \bar{X}], \bar{Y} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} T, \bar{Y} \rangle \\ &= -\langle T, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle T, [\bar{X}, \bar{Y}]^V \rangle\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]} \bar{Z}, \bar{W} \rangle = \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle - \frac{1}{2} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^V, [\bar{Z}, \bar{W}]^V \rangle.$$

したがって

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Z}, \bar{W} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z}, \bar{W} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z}, \bar{W} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]} \bar{Z}, \bar{W} \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z, W \rangle \\ &\quad -\frac{1}{4} \langle [\bar{Y}, \bar{Z}]^V, [\bar{X}, \bar{W}]^V \rangle + \frac{1}{4} \langle [\bar{X}, \bar{Z}]^V, [\bar{Y}, \bar{W}]^V \rangle + \frac{1}{2} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^V, [\bar{Z}, \bar{W}]^V \rangle \\ &= \langle R(X, Y) Z, W \rangle \\ &\quad -\frac{1}{4} \langle [\bar{Y}, \bar{Z}]^V, [\bar{X}, \bar{W}]^V \rangle + \frac{1}{4} \langle [\bar{X}, \bar{Z}]^V, [\bar{Y}, \bar{W}]^V \rangle + \frac{1}{2} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^V, [\bar{Z}, \bar{W}]^V \rangle.\end{aligned}$$

ここで、$Z = Y, W = X$とおくと、

$$\langle \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle R(X, Y) Y, X \rangle - \frac{3}{4} |[\bar{X}, \bar{Y}]^V|^2$$

となり、

$$\langle R(X, Y) Y, X \rangle = \langle \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{3}{4} |[\bar{X}, \bar{Y}]^V|^2$$

を得る。

注意 3.5.8 定理 3.5.7より、$[\bar{X},\bar{Y}]^V$は Xと Yの一点の値で定まることがわかるが、次のようにして、このことを直接確かめることもできる。Mの垂直ベクトル場 Tに対して、

$$\begin{aligned}\langle[\bar{X},\bar{Y}]^V,T\rangle &= \langle[\bar{X},\bar{Y}],T\rangle\\ &= \langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}-\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},T\rangle\\ &= \bar{X}\langle\bar{Y},T\rangle-\langle\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}T\rangle-\bar{Y}\langle\bar{X},T\rangle+\langle\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{Y}}T\rangle\\ &= -\langle\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}T\rangle+\langle\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{Y}}T\rangle\end{aligned}$$

となり、最後の行は Xと Yの一点の値に対して定まる。

命題 3.5.9 $\pi:M\to N$を Riemann 多様体間の Riemannian submersion とする。c を Nの曲線とするとき、c が Nの測地線になるための必要十分条件は、c の水平持ち上げ$\bar{c}$が Mの測地線になることである。

証明 補題 3.5.6より、

$$\bar{\nabla}_{\bar{c}'}\bar{c}'=\overline{\nabla_{c'}c'}+\frac{1}{2}[\bar{c}',\bar{c}']^V=\overline{\nabla_{c'}c'}.$$

したがって、$\bar{\nabla}_{\bar{c}'}\bar{c}'=0$ となる必要十分条件は、$\nabla_{c'}c'=0$ となり、命題が得られる。

命題 3.5.10 G を Lie 群とし、Hを G の閉 Lie 部分群とする。G と Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。さらに、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h},\quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$$

を満たし、$\mathfrak{m}$ 上に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変内積が存在すると仮定する。このとき、$\mathfrak{m}$ 上の内積を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$$

が直交直和分解になるように $\mathfrak{g}$ に拡張し、G と G/Hに Riemann 計量を誘導すると、$\pi:G\to G/H$は Riemannnina submersion になり、$d\pi:\mathfrak{m}\to T_o(G/H)$ によって $\mathfrak{m}$ と $T_o(G/H)$ を同一視すると、G/Hの曲率テンソル Rは、$X,Y\in\mathfrak{m}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y,X\rangle &= \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y)+\mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2-\langle\mathrm{ad}(X)^*(X),\mathrm{ad}(Y)^*(Y)\rangle\\ &\quad -\frac{3}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{m}}|^2-\frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle-\frac{1}{2}\langle[[Y,X],X],Y\rangle\end{aligned}$$

を満たす。ただし、$\cdot^{\mathfrak{m}}$は $\mathfrak{m}$ 成分を表す。

証明　G の曲率テンソルを Rで表すと、命題 3.4.1より、

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X,Y)Y,X\rangle &= \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y)+\mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2-\langle \mathrm{ad}(X)^*(X),\mathrm{ad}(Y)^*(Y)\rangle \\ &\quad -\frac{3}{4}|[X,Y]|^2-\frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle-\frac{1}{2}\langle[[Y,X],X],Y\rangle.\end{aligned}$$

となる。さらに、定理 3.5.7を適用すると、

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y,X\rangle &= \langle \bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Y},\bar{X}\rangle+\frac{3}{4}|[\bar{X},\bar{Y}]^{\mathfrak{h}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\mathrm{ad}(X)^*(Y)+\mathrm{ad}(Y)^*(X)|^2-\langle \mathrm{ad}(X)^*(X),\mathrm{ad}(Y)^*(Y)\rangle \\ &\quad -\frac{3}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{m}}|^2-\frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle-\frac{1}{2}\langle[[Y,X],X],Y\rangle\end{aligned}$$

を得る。

定義 3.5.11 両側不変 Riemann 計量を持つ Lie 群 G の閉 Lie 部分群 Hに対して、G/Hに誘導される Riemann 計量を正規といい、G/Hを正規 Riemann 等質空間と呼ぶ。

系 3.5.12 G/Hを正規 Riemann 等質空間とし、

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$$

を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直交直和分解とする。

(1) G/Hの曲率テンソルを Rで表すと、$X,Y\in\mathfrak{m}$ に対して、

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle=\frac{1}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{m}}|^2+|[X,Y]^{\mathfrak{h}}|^2$$

が成り立つ。特に G/Hの断面曲率は 0 以上になる。

(2) $\pi:G\to G/H$で自然な射影を表すと、G/Hの原点を通る測地線は、$X\in\mathfrak{m}$ によって $\pi(\exp tX)$ と表すことができる。

証明　(1) G の曲率テンソルを$\bar{R}$で表すことにすると、系 3.4.2(3) と定理 3.5.7より、

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y,X\rangle &= \langle \bar{R}(X,Y)Y,X\rangle+\frac{3}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{h}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|[X,Y]|^2+\frac{3}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{h}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|[X,Y]^{\mathfrak{m}}|^2+|[X,Y]^{\mathfrak{h}}|^2\end{aligned}$$

が成り立つ。
(2) $c(t)$ を G/Hの測地線とし、$\bar{c}(t)$ を$\bar{c}(0)=e$ を満たす G への水平持ち上げとする。命題 3.5.9より、$\bar{c}(t)$ は G の測地線になる。系 3.4.2より、ある $X\in\mathfrak{g}$ が存在し$\bar{c}(t)=\exp tX$となる。$\bar{c}(t)$ の速度ベクトルは水平なので、$X\in\mathfrak{m}$。さらに、

$$c(t)=\pi(\bar{c}(t))=\pi(\exp tX)$$

が成り立つ。

3.6 コンパクト等質空間のコホモロジー

コンパクト等質空間のコホモロジーに関する Samelson の結果を紹介する。

定義 3.6.1 n 次元多様体 M 上の p 次微分形式の全体を $\Omega^p(M)$ で表し、

$$\begin{aligned} Z^p(M) &= \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d\omega = 0\} \\ B^p(M) &= \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{p-1}(M)\} \end{aligned}$$

とおく。外微分 d は $d^2 = 0$ を満たすので、$B^p(M) \subset Z^p(M)$ となる。そこで、

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

とおき、$H^p(M)$ を M の p **次 de Rham コホモロジー群**と呼ぶ。

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p(M)$$

とおき、$\chi(M)$ を M の **Euler 数**と呼ぶ。

M の C^∞ 級 p 次元特異単体群を $C_p(M)$ で表し、

$$\begin{aligned} Z_p(M) &= \{c \in C_p(M) \mid \partial c = 0\} \\ B_p(M) &= \{\partial c \mid c \in C_{p+1}(M)\} \end{aligned}$$

とおく。境界作用素 ∂ は $\partial^2 = 0$ を満たすので、$B_p(M) \subset Z_p(M)$ となる。そこで、

$$H_p(M) = Z_p(M)/B_p(M)$$

とおき、$H_p(M)$ を M の C^∞ **級** p **次特異ホモロジー群**と呼ぶ。

定理 3.6.2 (de Rham) $\omega \in Z^p(M)$ に対して、ω の代表する $H^p(M)$ 内の元を $[\omega]$ で表すことにする。線形写像

$$Z_p(M) \to \mathbf{R}\ ;\ c \mapsto \int_c \omega$$

は $H_p(M)^*$ の元を誘導し、それによって $H^p(M)$ と $H_p(M)^*$ は線形同型になる。

系 3.6.3 $\omega_1, \omega_2 \in Z^p(M)$ に対して、$[\omega_1] = [\omega_2]$ となるための必要十分条件は、任意の $c \in Z_p(M)$ に対して

$$\int_c \omega_1 = \int_c \omega_2$$

が成り立つことである。

証明 $[\omega_1] = [\omega_2]$ とすると、ある$\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ が存在して$\omega_2 = \omega_1 + d\eta$となる。よって、Stokes の定理より、任意の $c \in Z_p(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_c \omega_2 &= \int_c \omega_1 + \int_c d\eta \\ &= \int_c \omega_1 + \int_{\partial c} \eta \\ &= \int_c \omega_1.\end{aligned}$$

逆に任意の $c \in Z_p(M)$ に対して

$$\int_c \omega_1 = \int_c \omega_2$$

が成り立つとすると、ω_1とω_2の誘導する $H_p(M)^*$の元は一致することになり、定理 3.6.2より、$[\omega_1] = [\omega_2]$ が成り立つ。

定理 3.6.4 (Samelson) G をコンパクト連結 Lie 群とし、Hを G の閉 Lie 部分群とする。G に両側不変 Riemann 計量を入れ、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

と直交直和に分解しておく。このとき、

$$\chi(M) = \int_H \det{}_{\mathfrak{m}}(1 - \mathrm{Ad}(h)) d\mu_H(h)$$

が成り立つ。

証明 $M = G/H$とおいておく。$\omega \in Z^p(M)$ をとる。G は連結だから、任意の $g \in G$ に対して、gと単位元を G 内の滑らかな曲線で結ぶことができる。したがって $H^p(M)$ のホモトピー不変性から、$[\omega] = [g^*\omega]$ が成り立つ。補題 3.6.3より、任意の $c \in Z_p(M)$ に対して

$$\int_c \omega = \int_c g^*\omega$$

が成り立つ。そこで、

$$\int_G g^*\omega d\mu_G(g) \in \Omega^p(M)$$

について考える。積分は Mの各点で行っている。

$$d\left(\int_G g^*\omega d\mu_G(g)\right) = \int_G dg^*\omega d\mu_G(g) = \int_G g^* d\omega d\mu_G(g) = 0$$

となるので、

$$\int_G g^*\omega d\mu_G(g) \in Z^p(M).$$

任意の $c \in Z_p(M)$ に対して

$$\int_c \int_G g^*\omega d\mu_G(g) = \int_G \int_c g^*\omega d\mu_G(g) = \int_G \int_c \omega d\mu_G(g) = \int_c \omega.$$

したがって、系 3.6.3より、

$$\left[\int_G g^*\omega d\mu_G(g)\right] = [\omega].$$

さらに$\int_G g^*\omega d\mu_G(g)$ は G 不変微分形式になっている。そこで、

$$I^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid g^*\omega = \omega\ (g \in G)\}$$

とおく。$I^p(M)$ の元は Mの一点の値で決まるので、特に、各 $I^p(M)$ は有限次元になる。また、$\omega \in I^p(M)$ と任意の $g \in G$ に対して

$$g^*d\omega = dg^*\omega = d\omega$$

となるので、$d\omega \in I^p(M)$。したがって、$(I^p(M), d)$ は $(\Omega^p(M), d)$ の部分複体になる。さらに、上で示したことより、$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$ の代表元として、$Z^p(M) \cap I^p(M)$ の元をとることができたので、Mの de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ は、複体 $(I^p(M), d)$ のコホモロジー群と同型になる。

$I^p(M)$ は自然に

$$\wedge^p_H(\mathfrak{m}) = \{\omega \in \wedge^p(\mathfrak{m}) \mid \mathrm{Ad}(h)^*\omega = \omega\ (h \in H)\}$$

と一対一に対応するので、定理 3.6.4は、次の定理に帰着する。

定理 3.6.5 (Samelson) コンパクト Hausdorff 位相群 Kの表現$\rho : K \to GL(V)$ に対して、

$$\wedge^p_K(V) = \{\omega \in \wedge^p(V) \mid k^*\omega = \omega\ (k \in K)\}$$

によって$\wedge^p_K(V)$ を定め、

$$\chi(\rho) = \sum_p (-1)^p \dim \wedge^p_K(V), \quad P_\rho(t) = \sum_p \dim \wedge^p_K(V) t^p$$

とおくと、

$$\chi(\rho) = \int_K \det(1 - \rho(k)) d\mu_K(k), \quad P_\rho(t) = \int_K \det(t\rho(k) + 1) d\mu_K(k)$$

が成り立つ。

この定理の証明のために次の二つの補題を準備しておく。

補題 3.6.6 コンパクト Hausdorff 位相群 Kの表現$\rho : K \to GL(V)$ に対して、

$$\int_K \mathrm{tr}\rho(k) d\mu_K(k) = \dim V_K$$

が成り立つ。ただし、

$$V_K = \{v \in V \mid \rho(k)v = v\ (k \in K)\}.$$

証明　命題 3.3.6 より、$P = \int \rho d\mu_K \in \mathrm{Hom}(V, V)$ とおくと、$P^2 = P$ と $\mathrm{Im}P = V_K$ が成り立つので、

$$\dim V_K = \mathrm{tr}P = \mathrm{tr} \int \rho(k) d\mu_K(k) = \int \mathrm{tr}\rho(k) d\mu_K(k).$$

補題 3.6.7 有限次元ベクトル空間 V の線形写像 $f : V \to V$ に対して、$f^* : \wedge^*(V) \to \wedge^*(V)$ を $\wedge^p(V)$ に制限したものを $f^{(p)}$ で表すことにすると、

$$\det(tf + 1) = \sum_p \mathrm{tr}(f^{(p)}) t^p$$

が成り立つ。

証明　$n = \dim V$ とおき、V^* の基底 θ_1, θ_n をとっておく。線形写像の行列式は転置をとっても変わらないので、

$$(tf + 1)^*(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) = \det(tf + 1)\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$$

となることに注意しておく。他方、

$$\begin{aligned} & (tf + 1)^*(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) \\ = \ & (tf + 1)^*\theta_1 \wedge \cdots \wedge (tf + 1)^*\theta_n \\ = \ & \sum_{p=0}^{n} t^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \theta_1 \wedge \cdots \wedge f^*\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\theta_{i_p} \wedge \cdots \wedge \theta_n. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} f^{(p)}(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}) &= f^*\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\theta_{i_p} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} f^{j_1 \cdots j_p}_{i_1 \cdots i_p} \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_p} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (tf + 1)^*(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) &= \sum_{p=0}^{n} t^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f^{i_1 \cdots i_p}_{i_1 \cdots i_p} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \mathrm{tr}(f^{(p)}) t^p. \end{aligned}$$

したがって

$$\det(tf + 1) = \sum_p \mathrm{tr}(f^{(p)}) t^p$$

が成り立つ。

定理 3.6.5 **の証明**　補題 3.6.7 より、$k \in K$ に対して、

$$\det(t\rho(k) + 1) = \sum_p \mathrm{tr}(\rho^{(p)}) t^p$$

が成り立つ。両辺を K 上で積分すると、補題 3.6.6より、

$$\begin{aligned}\int_K \det(t\rho(k)+1)d\mu_K(k) &= \sum_p \int_K \mathrm{tr}(\rho^{(p)})d\mu_K(k)t^p \\ &= \sum_p \dim \wedge_K^p(V)t^p \\ &= P_\rho(t).\end{aligned}$$

上の等式に $t=-1$ を代入すると、

$$\int_K \det(1-\rho(k))d\mu_K(k) = P_\rho(-1) = \chi(\rho)$$

となり、定理 3.6.5の証明が完結する。

定理 3.6.4**の証明**　M のコホモロジー $H^*(M)$ は複体 $(I^*(M), d)$ のコホモロジーに同型になることはすでに示した。

$$d^p : I^p(M) \to I^{p+1}(M)$$

と書くことにすると、ホモロジー代数の結果より、

$$\sum_p (-1)^p \dim(\mathrm{Ker} d^p/d^{p-1}I^p(M)) = \sum_p (-1)^p \dim I^p(M)$$

が成り立つ。したがって、定理 3.6.5を

$$\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{m}} : H \to GL(\mathfrak{m})$$

に適用すると、

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_p (-1)^p \dim(\mathrm{Ker} d^p/d^{p-1}I^p(M)) \\ &= \sum_p (-1)^p \dim I^p(M) \\ &= \int_H \det_{\mathfrak{m}}(1-\mathrm{Ad}(h))d\mu_H(h)\end{aligned}$$

を得る。

系 3.6.8 (Samelson) 定理 3.6.4と同じ仮定のもとで、$\chi(G/H) \geq 0$ が成り立つ。

注意 3.6.9 上の系で、$\chi(G/H) = 0$ が成り立つための必要十分条件を、コンパクト連結 Lie 群の階数を使って述べると、$\mathrm{rank}(H) < \mathrm{rank}(G)$ が成り立つことになる。

系 3.6.8**の証明**　H の単位連結成分を H_0 で表すと、自然な射影

$$p : G/H_0 \to G/H$$

は被覆写像になる。このとき、$x \in G/H$をとると

$$\chi(G/H_0) = \sharp(p^{-1}(x))\chi(G/H)$$

となるので、系を証明するためには、Hが連結の場合だけを考えれば十分である。
G には両側不変 Riemann 計量が入っているので、

$$\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{m}} : H \to GL(\mathfrak{m})$$

は直交表現になる。さらに、Hは連結だから、

$$\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{m}} : H \to SO(\mathfrak{m})$$

となる。そこで、$h \in H$に対して $\mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{m}}$を標準形にすると、標準形の一つのブロックは、

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad 1$$

の内のいずれかの形になる。よって $1 - \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{m}}$の一つのブロックは、

$$\begin{bmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad 0$$

の内のいずれかの形になる。

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = 2(1-\cos\theta) \geq 0$$

となるので、

$$\det_{\mathfrak{m}}(1 - \mathrm{Ad}(h)) \geq 0.$$

したがって、定理 3.6.4より、

$$\chi(G/H) = \int_H \det_{\mathfrak{m}}(1 - \mathrm{Ad}(h)) d\mu_H(h) \geq 0$$

を得る。