お茶の水女子大学大学院

幾何構造特論 IV

部分多様体の法ホロノミー群とその応用

修正版 (3 月 21 日)

田崎博之

1996 年度
(1997 年 3 月 10 – 14 日)

目 次

序

定曲率空間内の部分多様体の法ホロノミー群の構造に関する Olmos の論文 [8] から始まった一連の研究結果の解説をすることが、今回の講義の目的である。

講義内容の概略を説明しておく。第 1章「準備」に後で必要になる接続とホロノミー群、Riemann 対称空間、Riemann 部分多様体に関する基礎事項をまとめてある。第 2章「ホロノミー系」では、次の部分多様体の制限法ホロノミー群の章で必要になるホロノミー系に関する事項を、基礎から解説した。ホロノミー系の解説書があまりないようなので、Simons [15] に従って詳しく解説した。ホロノミー系が Riemann 対称空間と密接な関係があることが、2.3節「既約ホロノミー系」で明らかになる。部分多様体の制限法ホロノミー群には直接関係ないが、ホロノミー系に関する重要な応用について、6.1節「Riemann 多様体のホロノミー群」で簡単に触れておいた。第 3章「制限法ホロノミー群」で、Olmos の一連の研究の出発点になる論文 [8] の解説をする。ホロノミー系の理論は、多様体の接ベクトル束以外のベクトル束上の接続に関するホロノミー群に適用することができない。そこで、3.1節で、定曲率空間内の Riemann 部分多様体の法ベクトル束に曲率型テンソルを定め、それから定まるホロノミー系に第 2章の結果を適用する。それによって、定曲率空間内の Riemann 部分多様体の制限法ホロノミー群の作用の非自明成分は、半単純型 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現になるという論文 [8] の主定理が得られる。第 4章「s 表現の軌道」で、s 表現 (半単純型 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現) の軌道を詳しく調べる。そのための基本的な道具は Riemann 対称空間の制限ルート系 (4.1節) である。Riemann 対称空間の制限ルート系にあまり馴染みのない方のために、制限ルート系の一般論を理解するときの参考になるように、付録で非コンパクト対称対 $(SL(n, \mathbf{R}), SO(n))$ の制限ルート系を行列の計算で具体的に求めてある。制限ルート系を使って 4.2で s 表現の軌道の Lie 群の等質空間としての構造を明らかにする。これらの準備のもとで s 表現の主軌道が等径部分多様体になること (4.3節) と、s 表現の軌道の法ホロノミー群の決定 (4.4節) を行う。第 5章「定主曲率部分多様体」で、ここまでに得られた結果を使って、定曲率空間内の定主曲率部分多様体と定主曲率等質部分多様体の構造を明らかにする。制限法ホロノミー群の作用の非自明成分が s 表現になっていることが、重要な役割を演じる。定主曲率等質部分多様体の構造を明らかにする結果は、第二基本形式が平行な部分多様体の構造決定に関する結果の一般化になっている。講義の際に触れることができなかった他の関連した研究については、参考文献に文献を追加し、文献番号の右肩に$*$をつけた。

この方面の研究を勉強をするきっかけになったのは、東北大学の剱持先生が企画され、

1996 年 11 月に開かれた「部分多様体論・湯沢 1996」[1]で Olmos の一連の論文の紹介を依頼されたことであった。対称空間論が、私にとっては意外な形で部分多様体論に応用されているこの一連の研究に触れて、ぜひ詳しいノートを作りたいと感じたので、等質空間の積分幾何学の解説を予定していた 1997 年 1 月の千葉大学での集中講義の内容を、高木先生の許しを得て急遽部分多様体の法ホロノミー群とその応用に変えることにした。千葉大学では、接続とホロノミー群、対称空間、部分多様体に関する準備の後、論文 [8]、[6] の結果を解説した。今回の集中講義では、千葉大学での集中講義の内容にいくつかを付け加え、基礎的な部分の解説もより詳しいものにした。

[1] この研究会の記録は、「部分多様体論・湯沢 1996」研究会記録集 (剱持勝衛編集) にまとめられている。

第 1 章 準備

定曲率空間、特に Euclid 空間内の Riemann 部分多様体の法方向の測地線の挙動を法ホロノミー群を使って調べることによって、その Riemann 部分多様体の主曲率に関する結果を導くので、この章でその準備をしておく。1.1節で接続とホロノミー群の一般論と、ホロノミー群に関する Ambrose-Singer の定理を紹介する。1.2節では、後で必要になる Riemann 対称空間に関する基本事項を解説する。1.3節で Riemann 多様体内の Riemann 部分多様体に関する基本的な方程式 (Gauss, Codazzi, Ricci の方程式) 等を導く。

1.1 接続とホロノミー群

多様体上のベクトル束の接続の定義と基本的性質について述べる。その後で、接続から定まるホロノミー群を定義し、ホロノミー群の Lie 環が曲率テンソルから定まるという Ambrose-Singer [1] の定理を紹介する。詳しくは原論文または Kobayashi-Nomizu [7] を参照のこと。

多様体 Mの接ベクトル束を TMで表す。M上のベクトル束 Eの C^∞級断面の全体を $C^\infty(M, E)$ または単に $C^\infty(E)$ で表すことにする。特に、M上の C^∞級ベクトル場の全体は、$C^\infty(TM)$ と表される。

定義 1.1.1 Mを多様体とし、Eを M上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(E) \to C^\infty(E);\ (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、∇ を E上の**接続**と呼ぶ。

(1) $\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi, \qquad (X, Y \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E))$

(2) $\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi, \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi, \psi \in C^\infty(E))$

(3) $\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi, \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E),\ f \in C^\infty(M))$

(4) $\nabla_X(f\phi) = f\nabla_X\phi + (Xf)\phi. \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E),\ f \in C^\infty(M))$

任意の $X \in C^\infty(TM)$ に対して $\nabla_X\phi = 0$ を満たす$\phi \in C^\infty(E)$ を**平行**な断面という。

例 1.1.2 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体とする。M上には次の (1) と (2) を満たす接ベクトル束 TM上の接続 ∇ が、一意的に存在する。

(1) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad (X, Y, Z \in C^\infty(TM))$

(2) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \qquad (X, Y \in C^\infty(TM))$

この接続 ∇ は Riemann 多様体 Mの **Levi-Civita 接続**と呼ばれている。

定義 1.1.3 $\langle\ ,\ \rangle$ を多様体 M上のベクトル束 Eの計量とする。すなわち $\langle\ ,\ \rangle$ は Eの各ファイバーの内積を定めている。E上の接続 ∇ が

$$X\langle \phi, \psi\rangle = \langle \nabla_X \phi, \psi\rangle + \langle \phi, \nabla_X \psi\rangle \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi, \psi \in C^\infty(E))$$

を満たすとき、接続 ∇ は計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を**保つ**という。

Riemann 多様体の Levi-Civita 接続は、Riemann 計量を保つ接続の例になっている。

定義 1.1.4 ∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の接続とする。$X, Y \in C^\infty(TM)$ と$\phi \in C^\infty(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = \nabla_X \nabla_Y \phi - \nabla_Y \nabla_X \phi - \nabla_{[X,Y]}\phi$$

によって Eの断面 $R^\nabla(X, Y)\phi$を定めると、R^∇はベクトル束 $T^*M \otimes T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$ の C^∞ 級断面を定める。R^∇を接続 ∇ の**曲率テンソル**と呼ぶ。考えている接続が明らかな場合は、単に Rと書くこともある。

補題 1.1.5 ∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の接続とすると、その曲率テンソル R^∇は

$$R^\nabla(X, Y)\phi + R^\nabla(Y, X)\phi = 0 \qquad (X, Y \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E))$$

を満たす。さらに、Eが計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を持ち、∇ が $\langle\ ,\ \rangle$ を保つとき、

$$\langle R^\nabla(X, Y)\phi, \psi\rangle + \langle \phi, R^\nabla(X, Y)\psi\rangle = 0 \qquad (X, Y \in C^\infty(TM),\ \phi, \psi \in C^\infty(E))$$

が成り立つ。

証明 後半を示しておく。ベクトル場を関数に作用させると $[X, Y] = XY - YX$となることに注意して、定義 1.1.3を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= XY\langle \phi, \psi\rangle - YX\langle \phi, \psi\rangle - [X, Y]\langle \phi, \psi\rangle \\ &= \langle R^\nabla(X, Y)\phi, \psi\rangle + \langle \phi, R^\nabla(X, Y)\psi\rangle. \end{aligned}$$

命題 1.1.6 Riemann 多様体 Mの曲率テンソル Rは、$X, Y, Z, W \in C^\infty(TM)$ に対して次の (1) から (4) を満たす。

(1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0,$

(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(3) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle Z, R(X,Y)W\rangle = 0$,

(4) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

定義 1.1.7 Riemann 多様体 Mの曲率テンソル Rに対して、**Ricci テンソル** Ric と**スカラー曲率** s を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle \qquad (p \in M,\ X,Y \in T_pM) \\
s &= \sum_{i,j} \langle R(e_i,e_j)e_j, e_i\rangle
\end{aligned}
$$

によって定める。ただし、$\{e_i\}$ は T_pMの正規直交基底である。

命題 1.1.8 Riemann 多様体の Ricci テンソルは対称テンソルになる。

証明　Riemann 多様体を Mで表す。$p \in M$と T_pMの正規直交基底 $\{e_i\}$ をとる。$X, Y \in T_pM$に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle \\
&= -\sum_i \langle R(X,e_i)Y, e_i\rangle \qquad (\text{命題 1.1.6の (3)}) \\
&= -\sum_i \langle R(Y,e_i)X, e_i\rangle \qquad (\text{命題 1.1.6の (4)}) \\
&= -\sum_i \langle R(Y,e_i)e_i, X\rangle \\
&= \mathrm{Ric}(Y,X).
\end{aligned}
$$

したがって、Ricci テンソル Ric は対称テンソルになる。

定理 1.1.9 Mを連結 Riemann 多様体とし、$\dim M \geq 3$ とする。M上の関数 fが存在し、

$$
\mathrm{Ric}_p = f(p)\langle\ ,\ \rangle_p \qquad (p \in M)
$$

が成り立つと仮定する。このとき、fは定数になる。

定義 1.1.10 定理 1.1.9の条件を満たす Riemann 多様体を **Einstein 多様体**と呼ぶ。

多様体 M上のベクトル束 Eの局所自明性より、M上局所的に Eのフレーム $e_1, \ldots, e_r$をとることができる。このとき Eの局所的な断面ϕは

$$
\phi = \sum_{i=1}^{r} \phi^i e_i
$$

と表すことができる。Mのベクトル場 Xに対して

$$\nabla_X\phi=\sum_{i=1}^{r}\nabla_X(\phi^i e_i)=\sum_{i=1}^{r}((X\phi^i)e_i+\phi^i\nabla_X e_i)$$

となるので、$\nabla_X\phi$はϕの X方向の変化に対して定まる。そこで、Mの区分的 C^∞級曲線 c をとると、c に沿った Eの断面$\phi\in C^\infty(E|_c)$ に対しても、$\nabla_{c'}\phi$を定めることができる。

定義 1.1.11 ∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の接続とし、c を Mの区分的 C^∞級曲線とする。$\nabla_{c'}\phi=0$ を満たす c に沿った Eの断面ϕを**平行**な断面という。$\nabla_{c'}\phi=0$ はϕを未知関数とする線形常微分方程式になるので、c の定義域が閉区間 $[a,b]$ のとき、$v\in E_{c(a)}$に対して初期条件$\phi(a)=v$を満たす c に沿って平行な Eの断面が唯一つ存在し、$\phi(a)=v$に対して$\phi(b)\in E_{c(b)}$を対応させる写像は、$E_{c(a)}$から $E_{c(b)}$への線形同型写像になる。この線形同型写像を ∇ に関する c に沿った Eの**平行移動**と呼び、τ_c^∇で表す。考えている接続が明らかな場合は、単にτ_cと書くこともある。

今後、特に断らないかぎり、曲線は区分的 C^∞級曲線を表すことにする。

命題 1.1.12 多様体 M上のベクトル束 E上の接続 ∇ が、Eの計量を保つとき、Mの曲線に沿った平行移動は等長的になる。

証明 Eの計量を $\langle\ ,\ \rangle$ で表し、Mの曲線 c をとる。c に沿った平行な断面ϕ,ψに対して

$$c'\langle\phi,\psi\rangle=\langle\nabla_{c'}\phi,\psi\rangle+\langle\phi,\nabla_{c'}\psi\rangle=0$$

となるので、$\langle\phi,\psi\rangle$ は c 上一定値をとる。したがって、c に沿った平行移動は計量を保存し、等長的になる。

定義 1.1.13 ∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の接続とする。$x\in M$に対して、

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \{\tau_c \mid c \text{ は } x \text{ を端点とする } M \text{の閉曲線}\}\\ \Phi_x^* &= \{\tau_c \mid c \text{ は } x \text{ を端点とする } M \text{の一点可縮閉曲線}\}\end{aligned}$$

とおく。Φ_xを接続 ∇ の**ホロノミー群**と呼び、Φ_x^*を接続 ∇ の**制限ホロノミー群**と呼ぶ。Φ_x^*は一般線形群 $GL(E_x)$ の弧状連結部分群になるので、Lie 群内の弧状連結部分群は連結 Lie 部分群になるという山辺の定理 [17] より、Φ_x^*は $GL(E_x)$ の連結 Lie 部分群になる。さらにΦ_x^*は、$GL(E_x)$ の部分群Φ_xの単位元を含む連結成分 (今後は単に**単位連結成分**と呼ぶ) になることがわかり、Φ_xも $GL(E_x)$ の Lie 部分群になる。

系 1.1.14 ∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の接続とし、∇ は Eの計量を保つと仮定する。このとき、$x\in M$に対して、∇ のホロノミー群Φ_xと制限ホロノミー群Φ_x^*は、ともに直交群 $O(E_x)$ の部分群になる。

証明　命題 1.1.12より平行移動は等長的になるので、定義 1.1.13より、Φ_xとΦ_x^*はともに直交群 $O(E_x)$ の部分群になる。

定理 1.1.15 (Ambrose-Singer [1]) ∇ を連結多様体 M上のベクトル束 E上の接続とする。点 $x \in M$における ∇ のホロノミー群の Lie 環は、

$$\mathrm{Span}\{\tau_c \circ R^{\nabla}_{c(0)}(X,Y) \circ \tau_c^{-1} \mid c : [0,1] \to M \text{ は } c(1) = x \text{ を満たす曲線で } X, Y \in T_{c(0)}M\}$$

に一致する。

1.2 Riemann 対称空間

Riemann 多様体の内でも対称性が高く、多くの顕著な性質を持っている Riemann 対称空間の定義と基本事項について解説する。この節と 4.1節の内容の詳しい証明等については Helgason [4] を参照のこと。

定義 1.2.1 Riemann 多様体の曲率テンソルが Levi-Civita 接続に関して平行なとき、**Riemann 局所対称空間**と呼ぶ。

定義 1.2.2 連結 Riemann 多様体 Mの各点 x に対して、Mの等長変換 s_xが存在し、$s_x^2 = 1$ を満たし、x が s_xの孤立不動点になるとき、Mを **Riemann 対称空間**と呼ぶ。

命題 1.2.3 Riemann 対称空間は Riemann 局所対称空間になる。

定義 1.2.4 G を連結 Lie 群とし、Kを G の閉 Lie 部分群とする。対 (G, K) が次の条件を満たすとき、(G, K) を **Riemann 対称対**と呼ぶ。$\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトになり、G の位数 2 の自己同型写像θが存在して

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおいて、G_θの単位連結成分を G_θ^0で表したとき、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$が成り立つ。

定理 1.2.5 Mを Riemann 対称空間とし、o を Mの一点とする。このとき、Mの等長変換全体の成す群 $I(M)$ は Mの Lie 変換群になる。さらに、$I(M)$ の単位連結成分を G で表し、

$$K = \{g \in G \mid go = o\}$$

とおくと、Kはコンパクトになり、

$$G/K \to M \ ; \ gK \mapsto go$$

は微分同型写像になる。写像

$$\theta : G \to G \ ; \ g \mapsto s_o g s_o$$

は G の位数 2 の自己同型写像になり、このθに関して (G, K) は Riemann 対称対になる。

定義 1.2.6 Riemann 対称空間の等長変換全体の成す Lie 群が半単純になるとき、その Riemann 対称空間を**半単純**という。半単純 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現を **s 表現**と呼ぶ。

定理 1.2.7 Riemann 対称対 (G, K) に対して、等質空間 G/K に G 不変 Riemann 計量を入れると ($\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトであることからこのような計量は存在する)、G/K は Riemann 対称空間になる。G の位数 2 の自己同型写像を θ とし、θ が誘導する G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型写像も θ で表す。$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解すると、自然な射影 $G \to G/K$ の微分写像によって、$\mathfrak{p}$ は G/K の原点 o の接ベクトル空間 $T_o(G/K)$ と同一視することができる。(以後、$T_o(G/K)$ と $\mathfrak{p}$ を同一視する。) このとき、Riemann 対称空間 G/K の原点 o における曲率テンソル R_o は、

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{p})$$

で定まる。特に Riemann 対称空間 G/K の曲率テンソルは、G 不変 Riemann 計量のとり方に依存しない。

定義 1.2.8 局所 Riemann 対称空間内の全測地的平坦部分多様体の最大次元をその局所 Riemann 対称空間の**階数**と呼ぶ。

定義 1.2.9 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と位数 2 の自己同型写像 θ の組 $(\mathfrak{g}, \theta)$ が、次の条件をみたすとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ を**直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

とおくと、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 環 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ に対応する $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 内の連結 Lie 部分群はコンパクトになる。さらに、$\mathfrak{g}$ の中心と $\mathfrak{k}$ の共通部分が $\{0\}$ になるとき、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ は**効果的**と言われる。Lie 群の組 (G, K) が次の条件を満たすとき、(G, K) は直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応していると言われる。G は Lie 環 $\mathfrak{g}$ を持つ連結 Lie 群で、K は Lie 環 $\mathfrak{k}$ を持つ Lie 部分群である。

定義 1.2.10 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解する。$(\mathfrak{g}, \theta)$ が次の条件を満たすとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ を**既約直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。$\mathfrak{g}$ は半単純であって、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の非自明イデアルを含まず、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{p}$ に既約に作用する。直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応する Lie 群の組 G, K は、$(\mathfrak{g}, \theta)$ が既約のとき、**既約**と言う。Riemann 対称空間 M に対して、M の等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分を G とし、M の一点を固定する G の部分群を K とすると、定理 1.2.5より、(G, K) は Riemann 対称対になる。(G, K) が既約のとき、M を**既約 Riemann 対称空間**と呼ぶ。

補題 1.2.11 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を既約直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解する。このとき、$\mathfrak{k} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ が成り立つ。ここで、

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathrm{Span}\{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{p}\}$$

である。

例 1.2.12 (G, K) を Riemann 対称対とする。定義 1.2.4より、G の位数 2 の自己同型写像θが存在して

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおくと、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$が成り立つ。そこで、$\theta$の誘導する $\mathfrak{g}$ の自己同型写像もθで表すと、これも位数 2 になり、$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解される。さらに、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は直交対称 Lie 代数になることがわかる。Riemann 対称対 (G, K) は、定義 1.2.9の意味で、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応している。

命題 1.2.13 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{k}$ をθの不動点全体とする。Lie 群の組 (G, K) が $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応していて、G は単連結であり、Kは連結であると仮定する。このとき、(G, K) は Riemann 対称対になる。

定理 1.2.14 (G, K) は Riemann 対称対であり、G は半単純で G/Kに効果的に作用すると仮定する。G/Kに G 不変 Riemann 計量を入れると、G/Kの等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分は G に一致する。

定義 1.2.15 $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環とし、σで複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$内の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像とする。$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{k}$ と部分ベクトル空間 $\mathfrak{p}$ による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が **Cartan 分解**であるとは、$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$内にあるコンパクト半単純 Lie 部分環 $\mathfrak{g}_k$が存在し、

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_k^{\mathbf{C}}, \quad \sigma\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap (\sqrt{-1}\mathfrak{g}_k)$$

を満たすことをいう。

定理 1.2.16 $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環とすると、$\mathfrak{g}$ には Cartan 分解が存在し、しかも、$\mathfrak{g}$ のどの Cartan 分解も $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像で移り合う。

例 1.2.17 $\mathfrak{g}$ を非コンパクト実半単純 Lie 代数とし、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{k} \text{ が部分 Lie 環})$$

を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする。定理 1.2.16より、このような分解が存在し、しかも、$\mathfrak{g}$ の内部自己同型を除いて一意的である。このとき、

$$\theta(T + X) = T - X \qquad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{p})$$

によって線形写像$\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を定めると、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は直交対称 Lie 代数になる。

定義 1.2.18 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とすると、$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解される。

(1) $\mathfrak{g}$ がコンパクト半単純 Lie 環のとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は**コンパクト型**であるといわれる。

(2) $\mathfrak{g}$ が非コンパクト半単純 Lie 環であって、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解になっているとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は**非コンパクト型**であるといわれる。

(3) $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の可換イデアルになっているとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は **Euclid 型**であるといわれる。

Riemann 対称空間や Riemann 対称対に対しても、対応する直交対称 Lie 代数の型の名前をそのまま使う。

命題 1.2.19 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解する。$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ によって $\mathfrak{g}^*$を定め、θを $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$に複素線形に拡張して $\mathfrak{g}^*$ に制限したものをθ^*で表す。このとき、$(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ も直交対称 Lie 代数になる。さらに、$(\mathfrak{g}, \theta)$ がコンパクト型ならば、$(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ は非コンパクト型になり、逆も成り立つ。

定義 1.2.20 直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対して、命題 1.2.19で定めた直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ を $(\mathfrak{g}, \theta)$ の**双対**と呼ぶ。

注意 1.2.21 双対直交対称 Lie 代数の定め方からわかるように、直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現と、その双対直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現は同値になる。また、直交対称 Lie 代数はコンパクト型、非コンパクト型、Euclid 型直交対称 Lie 代数の直和に分解されることが知られている。よって、半単純直交対称 Lie 代数はコンパクト型と非コンパクト型直交対称 Lie 代数の直和に分解する。コンパクト型直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現は、双対の非コンパクト型直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現と同値になるので、半単純直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現を考える際は、非コンパクト型直交対称 Lie 代数のイソトロピー表現だけを考えれば十分である。したがって、s 表現を考える際は、非コンパクト型 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現だけを考えればよい。

定理 1.2.22 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を効果的直交対称 Lie 代数とする。このとき、$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$が存在し、次の (1) から (3) を満たす。

(1) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$と直和に分解される。

(2) $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$は$\theta$に関して不変である。

(3) θの $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$への制限をそれぞれ$\theta_0, \theta_-, \theta_+$で表すと、$(\mathfrak{g}_0, \theta_0), (\mathfrak{g}_-, \theta_-), (\mathfrak{g}_+, \theta_+)$ は、それぞれ Euclid 型、コンパクト型、非コンパクト型の直交対称 Lie 代数になる。

1.3 Riemann 部分多様体

Riemann 多様体内の部分多様体の接ベクトル束と法ベクトル束に自然に定まる接続を導入し、それらの接続や曲率テンソルの間に成り立つ関係式である Gauss, Codazzi, Ricci の方程式等を導く。この節の詳しい証明や関連事項については、例えば Chen [2] を参照のこと。

この節では、Riemann 多様体$\bar{M}$内の Riemann 部分多様体 Mについて考える。すなわち、挿入 $i : M \to \bar{M}$があり、i が等長的になるように Mに Riemann 計量を導入しておく。$\bar{M}$と Mの Riemann 計量はどちらも $\langle\ ,\ \rangle$ で表す。Mの法ベクトル束を $T^\perp M$で表すことにする。$\bar{M}$の Levi-Civita 接続を$\bar{\nabla}$で表す。

定義 1.3.1 ベクトル場 $X, Y \in C^\infty(TM)$ に対して、$\bar{\nabla}_X Y$を接成分と法成分に分解し、

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \qquad (\nabla_X Y \in TM,\ \alpha(X, Y) \in T^\perp M)$$

と表す。αを Mの**第二基本形式**と呼ぶ。また、上の等式を **Gauss の公式**と呼ぶ。

命題 1.3.2 定義1.3.1における ∇ は Mの Levi-Civita 接続に一致し、αは$T^*M \otimes T^*M \otimes T^\perp M$ の C^∞級断面になり、$\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ を満たす。

定義 1.3.3 ベクトル場 $X \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場$\xi \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、$\bar{\nabla}_X \xi$を接成分と法成分に分解し、

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \qquad (A_\xi X \in TM,\ \nabla^\perp_X \xi \in T^\perp M)$$

と表す。A を Mの**シェイプ作用素**と呼び、$\nabla^\perp$を Mの**法接続**と呼ぶ。法接続 $\nabla^\perp$の曲率テンソルを $R^\perp$で表し、**法曲率テンソル**と呼ぶ。また、上の等式を **Weingarten の公式**と呼ぶ。

命題 1.3.4 定義 1.3.3における A は $(T^\perp M)^* \otimes \mathrm{Sym}(TM)$ の C^∞級断面になり、$\nabla^\perp$は $T\bar{M}$の計量から自然に誘導される $T^\perp M$の計量を保つ $T^\perp M$の接続になる。ここで、$\mathrm{Sym}(TM)$は TMの各ファイバーの対称線形写像全体の成すベクトル束である。

命題 1.3.5 Mの第二基本形式αとシェイプ作用素 A は、各点 $x \in M$において $X, Y \in T_x M$と$\xi \in T_x^\perp M$に対し、

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle$$

を満たす。

命題 1.3.6 (Gauss の方程式) $\bar{M}$と Mの曲率テンソルをそれぞれ$\bar{R}$と Rで表すと、Mのベクトル場 X, Y, Z, Wに対して、

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle$$

が成り立つ。

命題 1.3.7 (Codazzi の方程式) Mのベクトル場 X, Y, Zに対して、

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

によって $\nabla^{\perp}_X \alpha$を定めると、$\bar{R}(X, Y)Z$の法成分は

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X, Z)$$

を満たす。

命題 1.3.8 (Ricci の方程式) Mの法接続 $\nabla^{\perp}$の曲率テンソルを $R^{\perp}$で表すと、Mのベクトル場 X, Yと法ベクトル場ξ, ηに対して、

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y \rangle$$

が成り立つ。

第 2 章　ホロノミー系

2.1　直交群の既約部分群

次のコンパクト Lie 群上の不変測度の存在が知られている。

定理 2.1.1 G をコンパクト Lie 群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の測度μ_Gが一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上のμ_G可積分関数 fと $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(3) G 上のμ_G可積分関数 fと $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(4) G 上のμ_G可積分関数 fに対して

$$\int_G f(x^{-1})d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

定義 2.1.2 定理 2.1.1で定まるコンパクト Lie 群 G 上の測度を、G の **Haar 測度**と呼ぶ。

補題 2.1.3 コンパクト Lie 群の Lie 環は、いくつかのコンパクト単純イデアルと中心の直和に分解される。

証明　G をコンパクト Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。$(\ ,\ )$ を $\mathfrak{g}$ の内積とし、

$$\langle Y, Z\rangle = \int_G (\mathrm{Ad}_G(g)Y, \mathrm{Ad}_G(g)Z)d\mu_G(g) \qquad (Y, Z \in \mathfrak{g})$$

によって $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。定理 2.1.1より、$g \in G$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}_G(g)Y, \mathrm{Ad}_G(g)Z\rangle = \langle Y, Z\rangle \qquad (Y, Z \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。$X \in \mathfrak{g}$ をとり、$g = \exp(tX)$ とおくと、

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \rangle = \langle Y, Z \rangle.$$

両辺を $t = 0$ で t に関して微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \rangle \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \right\rangle \\ &= \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle. \end{aligned}$$

よって、

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0 \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。

$\mathfrak{g}_1$を $\mathfrak{g}$ のイデアルとすると、$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}_1^{\perp}, Z \in \mathfrak{g}_1$に対して $[X, Z] \in \mathfrak{g}_1$となるので、

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle = 0.$$

よって、$[X, Y] \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$となり、$\mathfrak{g}_1^{\perp}$も $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。この操作を続けることによって、$\mathfrak{g}$ はいくつかの単純イデアルといくつかの 1 次元の可換イデアルの直和に分解される。1 次元可換イデアルすべての和が $\mathfrak{g}$ の中心に一致する。

最後に $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$がコンパクトになることの証明の概略を示す。$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を G 上の両側不変 Riemann 計量に拡張する。$\mathfrak{g}_i$に対応する連結 Lie 部分群 G_iは、Riemann 等質空間になり、特に完備になる。さらに、G_iの Levi-Civita 接続、曲率テンソルを計算すると、G_iは Einstein 多様体になり、さらに、Ricci 曲率テンソルは正定値になることがわかる。よって、Myers の定理より G_iはコンパクトになる。したがって、$\mathfrak{g}_i$はコンパクト単純イデアルになる。

補題 2.1.3の証明中に示したことから、次の補題も得られる。

補題 2.1.4 コンパクト Lie 群の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 内のイデアル $\mathfrak{h}$ に対して、$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{h}'$が存在し、$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$と直和に分解される。

補題 2.1.5 コンパクト Lie 群の Euclid 空間への等長作用は不動点を持つ。

証明 G を Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$に等長的に作用しているコンパクト Lie 群とする。$v \in \mathbf{R}^N$ を一つとり、

$$v_0 = \int_G g \cdot v d\mu_G(g)$$

とおく。任意の $g_1 \in G$ に対して

$$\begin{aligned} g_1 \cdot v_0 &= g_1 \left(\int_G g \cdot v d\mu_G(g) \right) \\ &= \int_G g_1 g \cdot v d\mu_G(g) \\ &= \int_G g \cdot v d\mu_G(g) \qquad (\text{定理 } 2.1.1(2)) \\ &= v_0 \end{aligned}$$

となるので、v_0は G の作用の不動点になる。

補題 2.1.6 G を Vの直交群の連結 Lie 部分群とし、G は Vに既約に作用していると仮定する。このとき、G の中心の次元は 1 以下になる。

証明 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表し、その中心を $\mathfrak{z}$ とすると、$\mathfrak{z}$ に対応する連結 Lie 部分群は G の中心の単位連結成分になる。したがって、$\dim \mathfrak{z} \leq 1$ を示せばよい。$\mathfrak{z}$ は可換であり、$\mathfrak{z}$ の各元は Vの交代線形写像になっているので、適当な座標変換によって、同時に標準形にすることができる。つまり、$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{o}(n)$ の標準的な極大可換部分環

$$\left\{ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & t_1 & & & & \\ -t_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & t_r & \\ & & & -t_r & 0 & \\ & & & & & (0) \end{array} \right] \middle| \, t_i \in \mathbf{R} \right\}$$

に含まれているとしてよい。もし $\dim \mathfrak{z} \geq 2$ とすると、線形独立になる元 $z_1, z_2 \in \mathfrak{z}$ をとり、これらの線形結合 $z \neq 0$ である t_1成分が 0 になるものをとることができる。すると

$$V_0 = \{ v \in V \mid z(v) = 0 \}$$

は Vの非自明部分ベクトル空間になる。$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}$ の中心だから、zは $\mathfrak{g}$ の作用と可換になる。したがって、V_0は $\mathfrak{g}$ の作用で不変になる。G は連結だから、V_0は G の作用に関しても不変になる。これは G の Vへの作用が既約であることに矛盾するので、$\dim \mathfrak{z} \leq 1$ となる。

定理 2.1.7 G を Vの直交群のコンパクト連結 Lie 部分群とし、G は Vに既約に作用していると仮定する。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとする。このとき、$\mathfrak{h}$ に対応する連結 Lie 部分群 Hは G のコンパクト Lie 部分群になる。

証明 G はコンパクトだから、補題 2.1.3より、その Lie 環 $\mathfrak{g}$ は次のような分解を持つ。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{t}$$

ここで、各 $\mathfrak{g}_i$はコンパクト単純イデアルで、$\mathfrak{t}$ は中心である。補題 2.1.6より、$\dim \mathfrak{t} \leq 1$ となる。$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_p, \mathfrak{t}$ のうちのいくつかの直和になり、$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{h}$ に含まれるか含まれないかのいずれかになる。そこで、

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q} \text{ または } \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q} \oplus \mathfrak{t}$$

としておく。各 $\mathfrak{g}_i$はコンパクト単純 Lie 環なので、対応する連結 Lie 部分群 G_iはコンパクト Lie 部分群になる。さらに、$\mathfrak{t}$ に対応する連結 Lie 部分群 Tは G の中心の単位連結成分になるので、特にコンパクト Lie 部分群になる。直積 Lie 群 $G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_q}$ または $G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_q} \times T$ は、被覆写像によって Hを被覆するので、Hは G のコンパクト Lie 部分群になる。

系 2.1.8 G を Vの直交群の連結 Lie 部分群とし、G は Vに既約に作用していると仮定する。このとき、G はコンパクト Lie 部分群になる。

証明 G の閉包$\bar{G}$は $O(V)$ のコンパクト連結 Lie 群になり、G が Vに既約に作用しているので、$\bar{G}$も Vに既約に作用する。G と$\bar{G}$の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と$\bar{\mathfrak{g}}$で表す。このとき、$\mathrm{Ad}_{O(V)}(\bar{G})(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ となることを示そう。

$$S(\mathfrak{g}) = \{\phi \in \mathrm{End}(\mathfrak{o}(V)) \mid \phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}\}$$

とおく。$\mathfrak{g}$ の基底 $e_1, \ldots, e_k$をとり、$\mathfrak{o}(V)$ の基底 $e_1, \ldots, e_n$に延長する。$f^1, \ldots, f^n$を $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底とすると、

$$S(\mathfrak{g}) = \{\phi \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid f^j(\phi(e_i)) = 0 \ (1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq j \leq n)\}$$

となる。そこで、$1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq j \leq n$ に対して

$$f_i^j : \mathrm{End}(\mathfrak{o}(V)) \to \mathbf{R}\ ;\ g \mapsto f^j(g(e_i))$$

によって連続関数 f_i^jを定める。すると

$$S(\mathfrak{g}) = \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq k \\ k+1 \leq j \leq n}} (f_i^j)^{-1}(0)$$

は $\mathrm{End}(\mathfrak{o}(V))$ の閉部分集合になり、$\mathrm{Ad}_{O(V)}^{-1}(S(\mathfrak{g}))$ は $O(V)$ の閉部分集合になる。G は $O(V)$ の Lie 部分群だから、$\mathrm{Ad}_{O(V)}(G)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ が成り立ち、$G \subset \mathrm{Ad}_{O(V)}^{-1}(S(\mathfrak{g}))$。したがって、$\bar{G} \subset \mathrm{Ad}_{O(V)}^{-1}(S(\mathfrak{g}))$ となり、$\mathrm{Ad}_{O(V)}(\bar{G})(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ を得る。これより、$[\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ を得る。したがって、$\mathfrak{g}$ は$\bar{\mathfrak{g}}$のイデアルになる。定理 2.1.7より、G はコンパクトになる。

ベクトル空間に既約に作用する群に関する次の一般的な補題を準備しておく。この補題は、群作用に関して不変な対称二次形式を扱う際に基本的であり、6.1で必要になる。

補題 2.1.9 (Schur) G を Vの直交群の部分群とし、G は Vに既約に作用していると仮定する。このとき、G の作用に関して不変な対称二次形式は、Vの内積の定数倍になる。

証明　G の作用に関して不変な対称二次形式をαで表す。αに対して、

$$\alpha(u,v) = \langle Au, v\rangle \qquad (u, v \in V)$$

によって対称線形写像 $A : V \to V$が定まる。αは G の作用に関して不変になるので、A は G の作用と可換になる。A は対称だから Vは A の固有空間の直交直和に分解され、各固有空間は G 不変になる。G は Vに既約に作用するので、A の固有空間はただ一つになり、特に、恒等写像の定数倍になる。その定数を c とると、$u, v \in V$に対して

$$\alpha(u,v) = \langle Au, v\rangle = \langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$$

となり、αは内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の c 倍になる。

2.2　ホロノミー系の定義と基本的性質

ホロノミー系の定義と基本事項を Simons [15] に従って復習し、Simons によるホロノミー系に関する結果を解説する。

Vを内積を持つベクトル空間とする。V上の $(1,3)$ 型テンソルを、$V \times V$から Vの線形変換の空間 $\mathrm{End}(V)$ への双線形写像とみなす。V上の $(1,3)$ 型テンソル全体の空間に、Vの内積から定まる自然な内積を導入したものを、$\mathcal{P}$ で表す。直交群 $O(V)$ は、自然に $\mathcal{P}$ 上に直交表現を持つ。この表現は次の作用で実現される。$g \in O(V)$ と $P \in \mathcal{P}$ に対して、

$$g(P)(x,y) = g \circ P(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) \circ g^{-1}.$$

$O(V)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(V)$ の元 A の $\mathcal{P}$ への作用は、

$$\begin{aligned} A(P)(x,y) &= AP(x,y) - P(x,y)A - P(A(x),y) - P(x,A(y)) \\ &= -P(A(x),y) - P(x,A(y)) - [P(x,y), A] \end{aligned}$$

である。

定義 2.2.1 $R \in \mathcal{P}$ が、$x, y, z, w \in V$に対して次の (1) から (4) を満たすとき、Rを V上の**曲率型テンソル**と呼ぶ。

(1) $R(x,y)z + R(y,x)z = 0,$

(2) $R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0,$

(3) $\langle R(x,y)z, w\rangle + \langle z, R(x,y)w\rangle = 0,$

(4) $\langle R(x,y)z, w\rangle = \langle R(z,w)x, y\rangle.$

条件 (1) から (4) は Rに関する一次式なので、V上の曲率型テンソル全体は $\mathcal{P}$ の部分ベクトル空間になる。この部分ベクトル空間を $\mathcal{R}$ で表すことにする。

注意 2.2.2 $O(V)$ は曲率型テンソル全体 $\mathcal{R}$ を不変にする。

定理 2.2.3 G を V の直交群の連結 Lie 部分群とし、$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{R}$ の部分ベクトル空間とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{Q(x,y) \mid Q \in \mathcal{Q},\ x, y \in V\}$$

を満たしていると仮定する。このとき、G はコンパクトになり、V は順序を除いて一意的な次のような直交直和分解

$$V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$$

を持つ。ここで、各 V_i は G 不変部分ベクトル空間であり、G の正規 Lie 部分群 $G_0, \ldots, G_k$ が存在し、次の条件を満たす。

(1) $G = G_0 \times \cdots \times G_k$. (直積)

(2) $i \neq j$ のとき、G_i は V_j に自明に作用する。

(3) $G_0 = \{1\}$ であり、$i \geq 1$ のとき、G_i は V_i に既約に作用する。

証明 G は V に等長的に作用するので、V は次のように直交直和に分解する。

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

ここで、各 V_i は G 不変であり、G は V_0 に自明に作用し、V_i $(1 \leq i \leq k)$ に既約に作用する。$u \in V$ の V_i への直交射影の像を u_i で表すことにする。

補題 2.2.4 $x, y \in V$ と $Q \in \mathcal{Q}$ に対して、次の (1) から (4) が成り立つ。

(1) $i \neq j$ のとき $Q(x_i, y_j) = 0$,

(2) $Q(x,y) = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i, y_i)$,

(3) $i \neq j$ のとき $Q(x_i, y_i)V_j = \{0\}$,

(4) $Q(x_i, y_i)V_i \subset V_i$.

証明 各 V_i は G 不変だから、$\mathfrak{g}$ 不変にもなる。特に $Q(x_i, y_i)V_i \subset V_i$ が成り立ち、(4) を得る。

$i \neq j$ のとき、V_i と V_j は直交するので、$u, v \in V$ に対して、

$$\langle Q(x_i, y_j)u, v\rangle = \langle Q(u,v)x_i, y_j\rangle = 0. \qquad (\text{定義 } 2.2.1 \text{の } (4))$$

よって $Q(x_i, y_j) = 0$ となり、(1) が成り立つ。さらに

$$Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{k} Q(x_i, y_j) = \sum_{i=0}^{k} Q(x_i, y_i)$$

となり、(2) を得る。

$v_j \in V_j$に対して、

$$Q(x_i, y_i)v_j = -Q(y_i, v_j)x_i - Q(v_j, x_i)y_i = 0 \qquad (\text{定義 } 2.2.1\text{の } (2))$$

となり、(3) が成り立つ。

補題 2.2.5 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}_i$を

$$\mathfrak{g}_i = \mathrm{Span}\{Q(x_i, y_i) \mid Q \in \mathcal{Q},\ x_i, y_i \in V_i\}$$

によって定めると、次の (1) から (5) が成り立つ。

(1) 各 $\mathfrak{g}_i$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになり、$\mathfrak{g}_0 = \{0\}$,

(2) $i \neq j$のとき $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ となり、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ は直和分解になる。

(3) 各 i について $\mathfrak{g}_i V_i \subset V_i$,

(4) $i \neq j$のとき $\mathfrak{g}_i V_j = \{0\}$,

(5) 各 $1 \leq i \leq k$について $\mathfrak{g}_i$は V_iに既約に作用する。

証明 補題 2.2.4の (3) より、$i \neq j$のとき、$\mathfrak{g}_i V_j = \{0\}$ が成り立ち、(4) を得る。また、補題 2.2.4の (4) より、(3) の $\mathfrak{g}_i V_i \subset V_i$が成り立つ。

G は V_0に自明に作用するので、$\mathfrak{g}_0 = \{0\}$ となる。

(3) と (4) より、$\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ は線形独立になる。さらに $i \neq j$のとき、$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ が成り立つ。よって補題 2.2.4の (2) より、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$$

は直和になり、(2) が成り立つ。この直和分解より、各 $\mathfrak{g}_i$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。よって (1) が成り立つ。

G は各 V_i $(1 \leq i \leq k)$ に既約に作用し、G は連結だから、$\mathfrak{g}$ も各 V_i $(1 \leq i \leq k)$ に既約に作用する。これより、$\mathfrak{g}_i$は V_iに既約に作用し、(5) が成り立つ。

定理 2.2.3の証明の続き G の $\mathfrak{g}_i$に対応する連結 Lie 部分群を G_iとおく。補題 2.2.5の (1) より、$G_0 = \{1\}$ となる。さらに補題 2.2.5より、$\mathfrak{g}_i$は $\mathfrak{o}(V_i)$ の Lie 部分環とみなすことができ、G_iは $O(V_i)$ の連結 Lie 部分群とみなすことができる。よって

$$G_0 \times \cdots \times G_k \to G\ ;\ (g_0, \ldots, g_k) \mapsto \begin{bmatrix} g_0 & & \\ & \ddots & \\ & & g_k \end{bmatrix}$$

は Lie 群の同型写像になる。さらに、$i \neq j$のとき G_iは V_jに自明に作用し、$i \geq 1$ のとき G_i は V_iに既約に作用する。Vの直和分解の一意性は、直交表現の直和分解の一意性からわかる。各 $\mathfrak{g}_i$は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、各 G_iは G の正規 Lie 部分群になる。さらに、$i \geq 1$ のとき G_iは V_iに既約に作用する $O(V_i)$ の連結 Lie 部分群とみなせるので、系 2.1.8より G_iはコンパクトになる。したがって、直積 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ もコンパクトになる。

定義 2.2.6 Rを内積を持つベクトル空間 V上の曲率型テンソルとする。G を $O(V)$ のコンパクト連結 Lie 部分群とし、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。任意の $x, y \in V$に対して $R(x, y) \in \mathfrak{g}$ となるとき、G を Rの**ホロノミー群**と呼ぶ。V, R, G の組 $[V, R, G]$ を**ホロノミー系**と呼ぶ。

定理 2.2.7 Riemann 多様体 Mの Levi-Civita 接続の曲率テンソル Rと制限ホロノミー群Φ_p^* をとると、Φ_p^*はコンパクトになり、$[T_pM, R_p, \Phi_p^*]$ はホロノミー系になる。

証明 $c(1) = p$ を満たす曲線 $c : [0, 1] \to M$に対して、T_pM上の曲率型テンソル c^*Rを

$$c^*R(u, v)w = \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v)\tau_c^{-1}w$$

で定める。T_pM上の曲率型テンソル全体の空間の部分ベクトル空間 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \mathrm{Span}\{c^*R \mid c : [0, 1] \to M \text{ は } c(1) = p \text{ を満たす曲線 }\}$$

で定める。Ambrose-Singer の定理 (定理 1.1.15) より、Mの点 p における Levi-Civita 接続に関する制限ホロノミー群Φ_p^*の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{S(x, y) \mid S \in \mathcal{S},\ x, y \in T_pM\}$$

で与えられる。以上より、Φ_p^*に定理 2.2.3を適用することができる。その結果、Φ_p^*はコンパクトになる。任意の $x, y \in T_pM$に対して $R_p(x, y) \in \mathfrak{g}$ となるので、Φ_p^*は R_pのホロノミー群になる。さらに、組 $[T_pM, R_p, \Phi_p^*]$ はホロノミー系になる。

定義 2.2.8 ホロノミー系 $[V, R, G]$ は、任意の $g \in G$ に対して $g(R) = R$が成り立つとき、**対称**といわれる。この条件は、任意の $A \in \mathfrak{g}$ に対して $A(R) = 0$ が成り立つことと同値になる。

命題 2.2.9 Riemann 局所対称空間のホロノミー系は対称になる。

証明 定義 1.2.1より、制限ホロノミー群の曲率テンソルへの作用は自明になるので、ホロノミー系は対称になる。

補題 2.2.10 ホロノミー系 $[V, R, G]$ に対して

$$G(R) = \mathrm{Span}\{g(R) \mid g \in G\}$$

によって、$\mathcal{R}$ の部分ベクトル空間 $G(R)$ を定めると、次の (1) から (3) が成り立つ。

(1) $Q \in G(R)$ かつ $g \in G$ のとき、$g(Q) \in G(R)$.

(2) $Q \in G(R)$ かつ $A \in \mathfrak{g}$ のとき、$A(Q) \in G(R)$.

(3) $Q \in G(R)$ のとき、任意の $x, y \in V$ に対して $Q(x, y) \in \mathfrak{g}$.

証明 $Q \in G(R)$ に対して、有限個の $g_i \in G$ と $a_i \in \mathbf{R}$ が存在し、

$$Q = \sum_i a_i g_i(R)$$

となる。したがって、

$$g(Q) = \sum_i a_i g g_i(R) \in G(R).$$

$\exp tA \in G$ だから、$\exp tA(Q) \in G(R)$ となり、この微分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tA(Q) = A(Q)$$

も $G(R)$ に含まれる。各 i について

$$g_i(R)(x, y) = \mathrm{Ad}(g_i)R(g_i^{-1}x, g_i^{-1}y) \in \mathfrak{g}$$

だから、

$$Q(x, y) = \sum_i a_i g_i(R)(x, y) \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。

補題 2.2.11 ホロノミー系 $[V, R, G]$ に対して

$$\mathfrak{g}^R = \mathrm{Span}\{Q(x, y) \mid Q \in G(R),\ x, y \in V\}$$

とおくと、$\mathfrak{g}^R$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

証明 $Q \in G(R)$ と $A \in \mathfrak{g}$ をとる。補題2.2.10の (2) より、$A(Q) \in G(R)$ となり、$x, y \in V$ に対して $A(Q)(x, y) \in \mathfrak{g}^R$となる。他方、$\mathfrak{g}$ の Q への作用は

$$A(Q)(x, y) = -Q(A(x), y) - Q(x, A(y)) - [Q(x, y), A]$$

を満たす。$\mathfrak{g}^R$の定義より、$Q(A(x), y), Q(x, A(y)) \in \mathfrak{g}^R$だから、$[Q(x, y), A] \in \mathfrak{g}^R$が成り立つ。したがって、$\mathfrak{g}^R$は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

定理 2.2.12 ホロノミー系 $[V, R, G]$ に対して、$\mathfrak{g}^R$に対応する連結 Lie 部分群を G^Rとおくと、G^Rは G のコンパクト Lie 部分群になる。さらに、$[V, R, G^R]$ もまたホロノミー系になる。

証明 G^RはVの直交群の連結 Lie 部分群であり、G^Rの Lie 環 $\mathfrak{g}^R$は

$$\mathfrak{g}^R = \mathrm{Span}\{Q(x,y) \mid Q \in G(R),\ x,y \in V\}$$

満たしている。したがって、定理 2.2.3より、G^Rはコンパクトになる。

$R \in G(R)$ だから、任意の $x, y \in V$に対して $R(x,y) \in \mathfrak{g}^R$となり、$[V, R, G^R]$ もまたホロノミー系になる。

命題 2.2.13 ホロノミー系 $[V, R, G]$ が対称であると仮定する。

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$$

とおき、$\tilde{\mathfrak{g}}$におけるブラケット $[\ ,\ ]$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} [A,B] &= [A,B] \qquad (A,B \in \mathfrak{g}) \\ [x,y] &= -R(x,y) \qquad (x,y \in V) \\ [A,x] &= A(x) \qquad (A \in \mathfrak{g},\ x \in V) \end{aligned}$$

さらに、$\tilde{\mathfrak{g}}$全体に双線形で交代的になるように、$[\ ,\ ]$ を拡張する。このとき、$\tilde{\mathfrak{g}}$は Lie 環になる。さらに、

$$\theta(A + x) = A - x \qquad (A \in \mathfrak{g},\ x \in V)$$

によって線形写像$\theta : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$を定めると、$(\tilde{\mathfrak{g}}, \theta)$ は直交対称 Lie 代数になる。$(\tilde{G}, \tilde{K})$ を $(\tilde{\mathfrak{g}}, \theta)$ に対応する Riemann 対称対とすると、Riemann 対称空間$\tilde{G}/\tilde{K}$の原点での曲率テンソルはRに一致する。

証明 $[\ ,\ ]$ が Jacobi 律を満たすことは、次のようにわかる。$A, B, C \in \mathfrak{g}$ と $x, y, z \in V$ をとる。$\mathfrak{g}$ は Lie 環だから、

$$[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0.$$

ブラケットの定め方より、

$$\begin{aligned} [[A,B],x] + [[B,x],A] + [[x,A],B] &= [A,B]\,(x) - AB(x) + BA(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ホロノミー系の対称性より、

$$\begin{aligned} [[A,x],y] + [[x,y],A] + [[y,A],x] &= [A(x),y] + [-R(x,y),A] - [A(y),x] \\ &= -R(A(x),y) - [R(x,y),A] - R(x,A(y)) \\ &= A(R)(x,y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

曲率型テンソルの性質より、

$$\begin{aligned}[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] &= -R(x,y)z-R(y,z)x-R(z,x)y \\ &= 0.\end{aligned}$$

以上で、[,] は Jacobi 律を満たし、$\tilde{\mathfrak{g}}$は Lie 環になる。
　ブラケット積の定め方より、

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g},\qquad [\mathfrak{g},V]\subset V,\qquad [V,V]\subset\mathfrak{g}$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned}\theta([A,B]) &= [A,B]=[\theta(A),\theta(B)] \\ \theta([A,x]) &= -[A,x]=[\theta(A),\theta(x)] \\ \theta([x,y]) &= [x,y]=[\theta(x),\theta(y)]\end{aligned}$$

となるので、θは Lie 環$\tilde{\mathfrak{g}}$の位数 2 の自己同型写像になる。G はコンパクトだから、$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$ に対応する $\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の連結 Lie 部分群

$$\{(\mathrm{Ad}_G(g),g)\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}\oplus V)\mid g\in G\}$$

もコンパクトになる。したがって、$(\tilde{\mathfrak{g}},\theta)$ は直交対称 Lie 代数になる。
　定理 1.2.7より、$\tilde{G}/\tilde{K}$の曲率テンソル$\tilde{R}$は、$x,y,z\in V$に対して

$$\tilde{R}_o(x,y)z=-[[x,y],z]=R(x,y)z$$

で与えられるので、$\tilde{R}_o$はホロノミー系 $[V,R,G]$ の曲率型テンソル Rに一致する。

2.3　既約ホロノミー系

定義 2.3.1 ホロノミー系 $[V,R,G]$ は、G が Vに既約に作用するとき、**既約**であるという。

命題 2.3.2 $[V,R,G]$ を既約対称ホロノミー系とし、$R\neq 0$ と仮定する。このとき、G の V への表現は既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現になり、$G^R=G$ が成り立つ。

　証明　命題 2.2.13より、$[V,R,G]$ に対して直交対称 Lie 代数 $(\tilde{\mathfrak{g}},\theta)$ が存在し、対応する Riemann 対称空間$\tilde{G}/\tilde{K}$の原点における曲率テンソルは Rに一致する。
　$(\tilde{\mathfrak{g}},\theta)$ に定理 1.2.22を適用し、

$$(\tilde{\mathfrak{g}},\theta)=(\tilde{\mathfrak{g}}_0,\theta_0)\oplus(\tilde{\mathfrak{g}}_-,\theta_-)\oplus(\tilde{\mathfrak{g}}_+,\theta_+)$$

と分解すると、$\mathfrak{g}$ の Vへの作用は既約だから、$(\tilde{\mathfrak{g}},\theta)$ は $(\tilde{\mathfrak{g}}_0,\theta_0),(\tilde{\mathfrak{g}}_-,\theta_-),(\tilde{\mathfrak{g}}_+,\theta_+)$ の内のいずれか一つに一致する。ところが、定理 1.2.7より、Euclid 型直交対称 Lie 代数に対応する

Riemann 対称空間の曲率テンソルは 0 になるので、$(\tilde{\mathfrak{g}}, \theta)$ は $(\tilde{\mathfrak{g}}_-, \theta_-), (\tilde{\mathfrak{g}}_+, \theta_+)$ のどちらかに一致する。どちらにしても、$\tilde{\mathfrak{g}}$は半単純になる。さらに、$\mathfrak{g}$ が$\tilde{\mathfrak{g}}$のイデアル $\mathfrak{h}$ を含むとすると、$[\mathfrak{h}, V] \subset \mathfrak{h} \cap V = \{0\}$ となるので、$\mathfrak{h}$ は Vに自明に作用することになり、$\mathfrak{h} = \{0\}$。よって、$(\tilde{\mathfrak{g}}, \theta)$ は既約直交対称 Lie 代数になる。

$X \in \tilde{\mathfrak{g}}$に対して

$$\theta e^{\mathrm{ad}X} \theta^{-1} = e^{\theta \mathrm{ad}X \theta^{-1}} = e^{\mathrm{ad}(\theta X)}$$

となるので、

$$\tilde{\theta}(\phi) = \theta \phi \theta^{-1} \qquad (\phi \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}}))$$

は $\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の位数 2 の自己同型写像を定める。$\tilde{\theta}$の微分写像も$\tilde{\theta}$で表すことにすると、上の計算より、

$$\tilde{\theta} : \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \ ; \ \mathrm{ad}(X) \mapsto \mathrm{ad}(\theta X)$$

となる。$\tilde{\mathfrak{g}}$は半単純だから、

$$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}})$$

は Lie 環の同型写像になり、$\tilde{\theta}\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \theta \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ が成り立つ。よって、$\tilde{\theta}$に対応した $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の直和分解は、

$$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g}) + \mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(V)$$

となる。$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$ に対応する連結 Lie 部分群を Kとおくと、$\tilde{\theta}$の不動点全体の単位連結成分は Kに一致し、G と同型になる。よって $(\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}}), K)$ は Riemann 対称対になり、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ 不変 Riemann 計量に関して $M = \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})/K$は Riemann 対称空間になる。$M$の等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分を $I_0(M)$ とし、$\phi \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ に対して

$$\Phi(\phi)(xK) = \phi x K \qquad (\phi \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}}))$$

によって $\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ から $I_0(M)$ への準同型写像Φを定める。

$$\ker(\Phi) = \{\phi \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}}) \mid \phi x K = xK \ (x \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}}))\}$$

となるので、$\ker(\Phi) \subset K$となり、$\ker(\Phi)$ は $\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の正規部分群になる。$\mathfrak{g}$ は$\tilde{\mathfrak{g}}$の非自明イデアルを含まないので、$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$ も $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の非自明イデアルを含まない。よって $\ker(\Phi)$ の次元は 0 になる。つまり、$\ker(\Phi)$ は離散部分群になる。$\ker(\Phi)$ は離散正規部分群になるので、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の中心に含まれる。$\tilde{\mathfrak{g}}$は半単純だから、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の中心は単位元のみであることが、次のようにわかる。ξを $\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の中心の元とする。任意の$\phi \in \mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ について$\xi \phi \xi^{-1} = \phi$となるので、任意の $X \in \mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{g}})$ と $t \in \mathbf{R}$ について

$$e^{t\mathrm{ad}X} = \xi e^{t\mathrm{ad}X} \xi^{-1} = e^{t \xi \mathrm{ad}X \xi^{-1}} = e^{t\mathrm{ad}(\xi X)}$$

が成り立つ。これを t に関して微分すると $\mathrm{ad}X = \mathrm{ad}(\xi X)$ を得る。$\tilde{\mathfrak{g}}$は半単純だから、$\mathrm{ad} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{g}})$ は単射になり、$X = \xi X$。よって$\xi = e$ となり、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の中心は単位元のみとなる。よって、$\ker(\Phi) = \{e\}$ となり、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ は Riemann 対称空間 Mに効果的に作用する。定理 1.2.14より、$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ は Mの等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分に一致する。

したがって、Mは既約 Riemann 対称空間になる。G の Vへの表現は既約 Riemann 対称空間 Mの線形イソトロピー表現と同値になる。

$[V, R, G]$ は対称だから、

$$\mathfrak{g}^R = \mathrm{Span}\{R(x, y) \mid x, y \in V\}$$

であることに注意すると、補題 1.2.11より、

$$\mathfrak{g} = [V, V] = R(V, V) = \mathfrak{g}^R$$

を得る。G と G^Rはそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^R$を Lie 環に持つ連結 Lie 部分群だから、$G = G^R$が成り立つ。

定義 2.3.3 V上の曲率型テンソル Rに対して、Rの **Ricci テンソル** $\mathrm{Ric}(R)$ と**スカラー曲率** $s(R)$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(R)(u, v) &= \sum_i \langle R(u, e_i)e_i, v\rangle \qquad (u, v \in V) \\
s(R) &= \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle
\end{aligned}$$

で定義する。ただし、$\{e_i\}$ は Vの正規直交基底である。

補題 2.3.4 スカラー曲率の定義は、正規直交基底のとり方によらない。スカラー曲率を対応させる写像を、V上の曲率型テンソル全体の空間 $\mathcal{R}$ から実数へのとみると、$O(V)$ 不変線形写像になる。

証明 正規直交基底どうしの変換行列は直交行列になるので、スカラー曲率の定義から、正規直交基底のとり方によらないことがわかる。

$a, b \in \mathbf{R}$ と $R, Q \in \mathcal{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
s(aR + bQ) &= \sum_{i,j} \langle (aR + bQ)(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\
&= a\sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle + b\sum_{i,j} \langle Q(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\
&= as(R) + bs(Q)
\end{aligned}$$

となり、$s : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ は線形写像になる。

$g \in O(V)$ に対して

$$\begin{aligned}
s(gR) &= \sum_{i,j} \langle (gR)(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle gR(g^{-1}e_i, g^{-1}e_j)g^{-1}e_j, e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle R(g^{-1}e_i, g^{-1}e_j)g^{-1}e_j, g^{-1}e_i\rangle \\
&= s(R)
\end{aligned}$$

となるので、s は $O(V)$ 不変になる。

定理 2.3.5 $[V, R, G]$ を既約ホロノミー系とし、$s(R) \neq 0$ と仮定する。$O(V)$ 内の G の正規化部分群の単位連結成分を $N(G)$ で表すと、$G^R = G = N(G)$ が成り立つ。さらに、V 上の 0 でない曲率型テンソル R' が存在し、$[V, R', G]$ は既約対称ホロノミー系になる。

証明 既約対称ホロノミー系 $[V, R', N(G)]$ を構成する。$O(V)$ 内の G の正規化部分群を N で表す。以下で N がコンパクト Lie 部分群になり、その単位連結成分 $N(G)$ もコンパクト Lie 部分群になることを示す。

$$N = \{n \in O(V) \mid nGn^{-1} = G\}$$

であることに注意して、$g \in G$ に対して

$$\phi_g : O(V) \to O(V) \ ; \ x \mapsto xgx^{-1}$$

によって連続写像 ϕ_g を定める。G はコンパクトだから、特に閉部分集合になり、$\phi_g^{-1}(G)$ も閉部分集合になる。よって、

$$N = \bigcap_{g \in G} \phi_g^{-1}(G)$$

も閉部分集合になる。したがって、N はコンパクト Lie 部分群になり、その単位連結成分 $N(G)$ もコンパクト Lie 部分群になる。

$N(G)$ の Haar 測度を μ で表し、

$$R' = \int_{N(G)} h(R) d\mu(h) \qquad \in \mathcal{R}$$

とおく。補題 2.3.4 より、

$$s(R') = s\left(\int_{N(G)} h(R) d\mu(h)\right) = \int_{N(G)} s(h(R)) d\mu(h) = \int_{N(G)} s(R) d\mu(h) = s(R) \neq 0$$

となり、$s(R') \neq 0$ が成り立つ。特に、$R' \neq 0$。

$N(G)$ の Lie 環は N の Lie 環と一致し、

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{o}(V) \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$$

で与えられる。$\mathfrak{g}$ は、コンパクト Lie 群 $N(G)$ の Lie 環 $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ 内のイデアルだから、補題 2.1.4 より、$\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ のイデアル $\mathfrak{g}'$ が存在し、$\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ は直和分解 $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ を持つ。この分解から、$\mathfrak{g}'$ は

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{o}(V) \mid [X, \mathfrak{g}] = \{0\}\}$$

に一致するので、

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

は直和分解になる。$A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$、$Q \in G(R)$ と $x, y, z, w \in V$に対して、

$$\begin{aligned}
& \langle A(Q)(x,y)z, w\rangle \\
= \ & -\langle Q(Ax,y)z,w\rangle - \langle Q(x,Ay)z,w\rangle - \langle [Q(x,y),A]z,w\rangle \\
= \ & -\langle Q(Ax,y)z,w\rangle - \langle Q(x,Ay)z,w\rangle \qquad (Q(x,y) \in \mathfrak{g}^R \subset \mathfrak{g}) \\
= \ & -\langle Q(z,w)Ax,y\rangle - \langle Q(z,w)x,Ay\rangle \qquad (\text{曲率型テンソルの性質}) \\
= \ & -\langle Q(z,w)Ax,y\rangle + \langle AQ(z,w)x,y\rangle \\
= \ & \langle [A,Q(z,w)]x,y\rangle \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

以上より、

$$A(Q) = 0 \qquad (A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),\ Q \in G(R))$$

が成り立つ。これと補題 2.2.10の (2) を合せると、$\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ は $G(R)$ を不変にする。よって $N(G)$ は $G(R)$ を不変にする。したがって、

$$R' = \int_{N(G)} h(R)d\mu(h) \in G(R)$$

となり、$\mathfrak{g}^R$の定め方より、任意の $x, y \in V$に対して $R'(x,y) \in \mathfrak{g}^R \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ が成り立つ。よって $[V, R', N(G)]$ はホロノミー系になる。さらに、定理 2.1.1より、$h \in N(G)$ に対して $h(R') = R'$となる。G は Vに既約に作用しているので、$N(G)$ も Vに既約に作用する。以上より、$[V, R', N(G)]$ は既約対称ホロノミー系になる。命題 2.3.2より、$N(G)^{R'} = N(G)$ が成り立つ。

任意の $x, y \in V$に対して $R'(x,y) \in \mathfrak{g}^R$が成り立つので、$N(G)^{R'} \subset G^R$となり、

$$N(G) = N(G)^{R'} \subset G^R \subset G \subset N(G).$$

これより、$G^R = G = N(G)$ を得る。したがって、$[V, R', G]$ は既約対称ホロノミー系になる。

系 2.3.6 $[V, R, G]$ を既約ホロノミー系とし、$s(R) \neq 0$ と仮定する。このとき、G の Vへの表現は既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現と同値になり、特に s 表現になる。

証明 定理 2.3.5より、V上の 0 でない曲率型テンソル R'が存在し、$[V, R', G]$ は既約対称ホロノミー系になる。命題 2.3.2より、G の Vへの表現は既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現になり、特に s 表現になる。

第 3 章　制限法ホロノミー群

定曲率空間内の Riemann 部分多様体の制限法ホロノミー群は、S 表現と自明表現の直和になるという Olmos の定理 [8] の証明がこの章の目的である。Riemann 部分多様体の法ベクトル束の法接続の曲率テンソルは、曲率型テンソルにはならないので、Riemann 多様体のホロノミー群の構造を調べる際に有効だった Simons のホロノミー系の結果を法接続の曲率テンソルに直接適用することはできない。そこで、3.1節で法ベクトル束にホロノミー系の結果が適用できるような曲率型テンソルを定義し、上記の Olmos の定理を 3.2節で証明する。

3.1　Riemann 部分多様体の法ベクトル束の曲率型テンソル

定曲率空間内の Riemann 部分多様体の法接続の曲率テンソルとシェイプ作用素を使って、曲率型テンソルを定義し、法接続の曲率テンソルとの間に成り立つ性質を明らかにする。

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を n 次元連結 Riemann 多様体とし、Q を定曲率空間とする。M を Q の Riemann 部分多様体とする。簡単のため、Q や $T^\perp M$ の計量も $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。

定義 3.1.1 テンソル

$$\mathcal{R}^\perp : C^\infty(T^\perp M)^3 \to C^\infty(T^\perp M)$$

を

$$\mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3 = \sum_{j=1}^{n} R^\perp(A_{\xi_1}(e_j), A_{\xi_2}(e_j))\xi_3 \qquad (\xi_i \in T^\perp M)$$

によって定める。ここで、$R^\perp$ は法接続 $\nabla^\perp$ の曲率テンソル、A は M のシェイプ作用素であり、$\{e_j\}$ は TM の正規直交基底である。$\mathcal{R}^\perp$ を Riemann 部分多様体 M の**法曲率型テンソル**と呼ぶことにする。

内積を持つベクトル空間 V に対して、V の交代線形写像の全体を $\mathcal{A}(V)$ で表し、$\mathcal{A}(V)$ 上の内積 $(\ ,\ )$ を

$$(A, B) = -\mathrm{tr}(AB) \qquad (A, B \in \mathcal{A}(V))$$

で定める。

補題 3.1.2 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、次の (1) から (4) が成り立つ。特に法曲率型テンソル $\mathcal{R}^\perp$ は法ベクトル空間の曲率型テンソルになる。

(1) $\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)+\mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_1)=0$,

(2) $\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3+\mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_3)\xi_1+\mathcal{R}^{\perp}(\xi_3,\xi_1)\xi_2=0$,

(3) $\langle\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle+\langle\xi_3,\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_4\rangle=0$,

(4) $\langle\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle=\langle\mathcal{R}^{\perp}(\xi_3,\xi_4)\xi_1,\xi_2\rangle=-\frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])$.

証明　一般に、曲率テンソル$\bar{R}$を持つ Riemann 多様体$\bar{M}$内の Riemann 部分多様体 Mの法曲率テンソル $R^{\perp}$とシェイプ作用素 A は、Ricci の方程式 (命題 1.3.8)

$$\langle\bar{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle=\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle\qquad(X,Y\in TM,\ \xi,\eta\in T^{\perp}M)$$

を満たす。特に$\bar{M}$が定曲率 c を持つ定曲率空間のときは、

$$\langle\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z},\bar{W}\rangle=c(\langle\bar{X},\bar{W}\rangle\langle\bar{Y},\bar{Z}\rangle-\langle\bar{X},\bar{Z}\rangle\langle\bar{Y},\bar{W}\rangle)$$

を満たすので、

$$\langle\bar{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle=c(\langle X,\eta\rangle\langle Y,\xi\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle Y,\eta\rangle)=0.$$

したがって、Ricci の方程式 (命題 1.3.8) より、

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle=\langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle$$

が成り立つ。

$\mathcal{R}^{\perp}$の定義より、(1) が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle &= \left\langle\sum_{j=1}^{n}R^{\perp}(A_{\xi_1}e_j,A_{\xi_2}e_j)\xi_3,\xi_4\right\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle R^{\perp}(A_{\xi_1}e_j,A_{\xi_2}e_j)\xi_3,\xi_4\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1}e_j,A_{\xi_2}e_j\rangle\qquad(\text{Ricci の方程式 (命題 1.3.8)})\\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1}e_j,e_j\rangle\qquad(A\text{ の対称性})\\
&= \mathrm{tr}(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1})\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1})+\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{t}(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1}).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\mathrm{tr}(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1})=\mathrm{tr}(A_{\xi_1}A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}^t(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1}) &= \mathrm{tr}({}^tA_{\xi_1}{}^t[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]^tA_{\xi_2})\\ &= -\mathrm{tr}(A_{\xi_1}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_2}) \qquad ([A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\in\mathcal{A}(TM))\\ &= -\mathrm{tr}(A_{\xi_2}A_{\xi_1}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\end{aligned}$$

となるので、

$$\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}][A_{\xi_3},A_{\xi_4}]).$$

以上より、

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle &= \langle\mathcal{R}^\perp(\xi_3,\xi_4)\xi_1,\xi_2\rangle\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}][A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\\ &= -\frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\end{aligned}$$

したがって、(4) を得る。
　さらに、

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}][A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}][A_{\xi_4},A_{\xi_3}])\\ &= -\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_4,\xi_3\rangle\\ &= -\langle\xi_3,\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_4\rangle\end{aligned}$$

となるので、(3) を得る。
　(4) を示すときに途中ででてきた等式より、

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle &= \mathrm{tr}(A_{\xi_2}[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]A_{\xi_1})\\ &= \mathrm{tr}(A_{\xi_2}A_{\xi_3}A_{\xi_4}A_{\xi_1})-\mathrm{tr}(A_{\xi_2}A_{\xi_4}A_{\xi_3}A_{\xi_1})\\ &= \mathrm{tr}(A_{\xi_1}A_{\xi_2}A_{\xi_3}A_{\xi_4})-\mathrm{tr}(A_{\xi_3}A_{\xi_1}A_{\xi_2}A_{\xi_4}).\end{aligned}$$

これにξ_iの添え字 i の集合 $\{1,2,3\}$ の巡回置換を施して加えると、

$$\langle\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3+\mathcal{R}^\perp(\xi_2,\xi_3)\xi_1+\mathcal{R}^\perp(\xi_3,\xi_1)\xi_2,\xi_4\rangle=0.$$

よって、

$$\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3+\mathcal{R}^\perp(\xi_2,\xi_3)\xi_1+\mathcal{R}^\perp(\xi_3,\xi_1)\xi_2=0$$

となり、(2) を得る。

補題 3.1.3 Mの一点で、$R^\perp=0$ となる必要十分条件は、$\mathcal{R}^\perp=0$ である。

証明 $R^\perp = 0$ と仮定すると、任意の $X, Y \in TM$ に対して、$R^\perp(X,Y) = 0$ となる。$\mathcal{R}^\perp$ の定義より、任意の $\xi, \eta \in T^\perp M$ に対して、$\mathcal{R}^\perp(\xi,\eta) = 0$ が成り立つ。

次に $\mathcal{R}^\perp = 0$ と仮定する。補題 3.1.2の (4) より、任意の $\xi, \eta \in T^\perp M$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{R}^\perp(\xi,\eta)\xi, \eta\rangle \\ &= -\frac{1}{2}([A_\xi, A_\eta], [A_\xi, A_\eta]) \\ &= -\frac{1}{2}|[A_\xi, A_\eta]|^2. \end{aligned}$$

よって、$[A_\xi, A_\eta] = 0$ となり、Ricci の方程式 (命題 1.3.8) より、$R^\perp = 0$ がわかる。

命題 3.1.4 Mの一点 p において、

$$\mathrm{Span}\{R^\perp(X,Y) \mid X, Y \in T_p(M)\} = \mathrm{Span}\{\mathcal{R}^\perp(\xi,\eta) \mid \xi, \eta \in T_p^\perp(M)\}.$$

証明 補題 3.1.2の (1) と (3) より、$\mathcal{R}^\perp$は

$$\mathcal{R}^\perp(\xi \wedge \eta) = \mathcal{R}^\perp(\xi, \eta)$$

と定めることによって、

$$\mathcal{R}^\perp : \wedge^2(T^\perp M) \to \mathcal{A}(T^\perp M)$$

とみなすことができる。同様に、

$$R^\perp : \wedge^2(TM) \to \mathcal{A}(T^\perp M)$$

を定める。

$$L : \wedge^2(T^\perp M) \to \mathcal{A}(TM)$$

を $L(\xi \wedge \eta) = [A_\xi, A_\eta]$ によって定める。また、同型写像

$$h : \mathcal{A}(TM) \to \wedge^2(TM)$$

を

$$\langle h^{-1}(x \wedge y)u, v\rangle = \langle x, u\rangle\langle y, v\rangle - \langle y, u\rangle\langle x, v\rangle \qquad (x, y, u, v \in TM)$$

によって定める。

$$\langle h^{-1}(e_i \wedge e_j)e_k, e_l\rangle = \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_l\rangle - \langle e_j, e_k\rangle\langle e_i, e_l\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}$$

となるので、

$$h^{-1}(e_i \wedge e_j) = \delta_{ik}\delta_{jl}e_k^* \otimes e_l - \delta_{jk}\delta_{il}e_k^* \otimes e_l = e_i^* \otimes e_j - e_j^* \otimes e_i.$$

これより、

$$h(e_i^* \otimes e_j - e_j^* \otimes e_i) = e_i \wedge e_j.$$

したがって、$A \in \mathcal{A}(TM)$ に対して、

$$h(A) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle Ae_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j = \sum_{i<j}\langle Ae_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j$$

が成り立つ。

補題 3.1.5 $\mathcal{R}^\perp = -R^\perp hL$ が成り立つ。

証明 $\xi, \eta \in T^\perp M$ に対して、

$$\begin{aligned}
-R^\perp hL(\xi \wedge \eta) &= -R^\perp h([A_\xi, A_\eta]) \\
&= -R^\perp \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [A_\xi, A_\eta]e_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [A_\xi, A_\eta]e_i, e_j\rangle R^\perp(e_i, e_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle (A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi)e_i, e_j\rangle R^\perp(e_i, e_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}(\langle A_\xi A_\eta e_i, e_j\rangle - \langle A_\eta A_\xi e_i, e_j\rangle)R^\perp(e_i, e_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}(\langle A_\xi A_\eta e_i, e_j\rangle - \langle e_i, A_\xi A_\eta e_j\rangle)R^\perp(e_i, e_j) \\
&= -\frac{1}{2}(\sum_i R^\perp(e_i, A_\xi A_\eta e_i) - \sum_j R^\perp(A_\xi A_\eta e_j, e_j)) \\
&= \sum_i R^\perp(A_\xi A_\eta e_i, e_i) \\
&= \sum_{ij} R^\perp(A_\xi \langle A_\eta e_i, e_j\rangle e_j, e_i) \\
&= \sum_{ij}\langle A_\eta e_i, e_j\rangle R^\perp(A_\xi e_j, e_i) \\
&= \sum_{ij}\langle e_i, A_\eta e_j\rangle R^\perp(A_\xi e_j, e_i) \qquad (A \text{ の対称性}) \\
&= \sum_j R^\perp(A_\xi e_j, A_\eta e_j) \\
&= \mathcal{R}^\perp(\xi, \eta) \\
&= \mathcal{R}^\perp(\xi \wedge \eta).
\end{aligned}$$

以上より、$\mathcal{R}^\perp = -R^\perp hL$ が成り立ち、証明が完結する。

$\wedge^2(TM)$ に $h : \mathcal{A}(TM) \to \wedge^2(TM)$ が線形等長写像になるように内積 $((\ ,\ ))$ を入れる。すなわち、$v, w \in \wedge^2(TM)$ に対して、

$$((v, w)) = (h^{-1}(v), h^{-1}(w)) = -\mathrm{tr}(h^{-1}(v)h^{-1}(w))$$

によって定める。

補題 3.1.6 $\ker R^\perp = (hL(\wedge^2(T^\perp M)))^\perp$ が成り立つ。

証明 $\xi, \eta \in T^\perp M$に対して、

$$
\begin{aligned}
& ((e_k \wedge e_l, hL(\xi \wedge \eta))) \\
= & -\mathrm{tr}(h^{-1}(e_k \wedge e_l)L(\xi \wedge \eta)) \\
= & -\mathrm{tr}(h^{-1}(e_k \wedge e_l)[A_\xi, A_\eta]) \\
= & -\mathrm{tr}([A_\xi, A_\eta]h^{-1}(e_k \wedge e_l)) \\
= & -\sum_s \langle [A_\xi, A_\eta]h^{-1}(e_k \wedge e_l)e_s, e_s \rangle \\
= & -\langle [A_\xi, A_\eta]e_l, e_k \rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]e_k, e_l \rangle \\
= & \, 2\langle [A_\xi, A_\eta]e_k, e_l \rangle \\
= & \, 2\langle R^\perp(e_k \wedge e_l)\xi, \eta \rangle. \qquad \text{(Ricci の方程式 (命題 1.3.8))}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\langle R^\perp(e_k \wedge e_l)\xi, \eta \rangle = \frac{1}{2}((e_k \wedge e_l, hL(\xi \wedge \eta)))$$

となり、任意の $u \in \wedge^2(TM)$ に対しても、

$$\langle R^\perp(u)\xi, \eta \rangle = \frac{1}{2}((u, hL(\xi \wedge \eta)))$$

が成り立つ。この等式より、$\ker R^\perp = (hL(\wedge^2(T^\perp M)))^\perp$が成り立つことがわかる。

命題 3.1.4の証明 補題 3.1.5と補題 3.1.6より、

$$
\begin{aligned}
R^\perp(\wedge^2(TM)) &= R^\perp hL(\wedge^2(T^\perp M)) \qquad \text{(補題 3.1.6)} \\
&= \mathcal{R}^\perp(\wedge^2(T^\perp M)). \qquad \text{(補題 3.1.5)}
\end{aligned}
$$

以上で、命題 3.1.4が証明された。

3.2 Riemann 部分多様体の制限法ホロノミー群

この章の目的である次の定理をこの節で証明する。

定理 3.2.1 Mを定曲率空間 Q の Riemann 部分多様体とする。$x \in M$をとり、Φ^*を点 x における Mの法接続の制限ホロノミー群とする。このとき、Φ^*はコンパクトになり、x における法ベクトル空間は、順序を除いて一意的な次のような直交直和分解

$$T_x^\perp M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$$

を持つ。ここで、各 V_iはΦ^*不変部分ベクトル空間であり、Φ^*の正規 Lie 部分群$\Phi_0, \ldots, \Phi_k$が存在し、次の条件を満たす。

(1) $\Phi^* = \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_k$. (直積)

(2) $i \neq j$のとき、Φ_iはV_jに自明に作用する。

(3) $\Phi_0 = \{1\}$ であり、$i \geq 1$ のとき、Φ_iはV_iに既約に作用し、ある既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現と同値になる。

証明 $c(1) = x$ を満たす曲線 $c : [0,1] \to M$に対して、$T_x^\perp M$上の曲率型テンソル $c^*\mathcal{R}^\perp$を

$$c^*\mathcal{R}^\perp(u,v)w = \tau_c\mathcal{R}_q^\perp(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v)\tau_c^{-1}w$$

で定める。ここで、$c(0) = q$である。$T_x^\perp M$上の曲率型テンソル全体の空間の部分ベクトル空間 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \mathrm{Span}\{c^*\mathcal{R}^\perp \mid c : [0,1] \to M \text{ は } c(1) = x \text{ を満たす曲線 }\}$$

で定める。Ambrose-Singer の定理 (定理 1.1.15) より、

$$\mathrm{Span}\{\tau_c \circ R^\perp(X,Y) \circ \tau_c^{-1} \mid c : [0,1] \to M \text{ は } c(1) = x \text{ を満たす曲線で } X, Y \in T_{c(0)}M\}$$

は、Mの点 x における法接続に関する制限法ホロノミー群Φ^*の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に一致する。したがって、命題 3.1.4より、

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{\mathcal{Q}(u,v) \mid \mathcal{Q} \in \mathcal{S},\ u, v \in T_x^\perp M\}$$

が成り立つ。以上より、Φ^*に定理 2.2.3を適用することができる。その結果、Φ^*はコンパクトになり、$T_x^\perp M$は順序を除いて一意的な次のような直交直和分解

$$T_x^\perp M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$$

を持つ。ここで、各 V_iはΦ^*不変部分ベクトル空間であり、Φ^*の正規 Lie 部分群$\Phi_0, \ldots, \Phi_k$が存在し、次の条件を満たす。

(1) $\Phi^* = \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_k$. (直積)

(2) $i \neq j$のとき、Φ_iはV_jに自明に作用する。

(3) $\Phi_0 = \{1\}$ であり、$i \geq 1$ のとき、Φ_iはV_iに既約に作用する。

$i \geq 1$ に対して $c_i^*\mathcal{R}^\perp$が V_i上 0 にならないように c_iを選ぶ。このとき、各 $[V_i, c_i^*\mathcal{R}^\perp, \Phi_i]$ は既約ホロノミー系になる。補題 3.1.2の (4) より、$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in V_i$に対して、$\bar{\xi}_j = \tau_c^{-1}\xi_j$とおくと、

$$\begin{aligned}
\langle c_i^*\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3, \xi_4\rangle &= \langle \tau_c\mathcal{R}^\perp(\tau_c^{-1}\xi_1, \tau_c^{-1}\xi_2)\tau_c^{-1}\xi_3, \xi_4\rangle \\
&= \langle c_i^*\mathcal{R}^\perp(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2)\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle [A_{\bar{\xi}_1}, A_{\bar{\xi}_2}], [A_{\bar{\xi}_3}, A_{\bar{\xi}_4}]\rangle.
\end{aligned}$$

これより、

$$\langle c_i^*\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_2,\xi_1\rangle = \frac{1}{2}|[A_{\bar{\xi}_1},A_{\bar{\xi}_2}]|^2 \geq 0$$

となり、スカラー曲率が 0 になる必要十分条件は、c の始点でのすべてのシェイプ作用素が可換になることであり、Ricci の方程式 (命題 1.3.8) より、これは c_iの始点で $R^\perp = 0$ となることと同値である。よって $c_i^*\mathcal{R}^\perp$のスカラー曲率が 0 になる必要十分条件は、$c_i^*\mathcal{R}^\perp = 0$ になることである。c_iのとり方より、$c_i^*\mathcal{R}^\perp$のスカラー曲率は 0 にならないので、系 2.3.6を既約ホロノミー系 $[V_i, c_i^*\mathcal{R}^\perp, \Phi_i]$ に適用すると、Φ_iの V_iへの表現は、既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現と同値になる。以上で定理が証明された。

第 4 章　s 表現の軌道

4.1　半単純 Riemann 対称空間の制限ルート系

この節では s 表現の軌道を等質空間として表すために、半単純 Riemann 対称空間の制限ルート系を導入する。

注意 1.2.21で述べたように、s 表現を考える際は、非コンパクト型 Riemann 対称対 (G, K) に対応する非コンパクト型 Riemann 対称空間 G/Kの線形イソトロピー表現を考えればよい。ここで、G は G/Kの等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分 $I_0(G/K)$ に一致しているとする。非コンパクト型対称空間は Euclid 空間に微分同型になることが知られているので、特に G/Kは単連結になる。G は連結だから、Kも連結になる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Riemann 対称対 (G, K) に対応する Cartan 分解とする。$T_o(G/K)$ と $\mathfrak{p}$ を同一視すると、イソトロピー部分群 Kの $T_o(G/K)$ への表現は、Ad による $\mathfrak{p}$ への表現と同一視される。$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。

定理 4.1.1 次の等式が成り立つ。

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}.$$

この定理より、Kの $\mathfrak{p}$ への作用を考える際は、$\mathfrak{a}$ を不変にする Kの元の作用を調べることが重要になる。その作用を記述するのが、次に定義する Weyl 群である。

定義 4.1.2 Kの閉 Lie 部分群 $N_K(\mathfrak{a})$ と $Z_K(\mathfrak{a})$ を

$$\begin{aligned} N_K(\mathfrak{a}) &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} \\ Z_K(\mathfrak{a}) &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)A = A \ (A \in \mathfrak{a})\} \end{aligned}$$

によって定めると、剰余群 $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ は有限群になる。これを Riemann 対称空間 G/K の **Weyl 群**と呼び、$W(G/K)$ で表す。定め方より、$W(G/K)$ は自然に $\mathfrak{a}$ に線形に作用する。

Weyl 群 G/Kの $\mathfrak{a}$ への作用を詳しく調べるために、以下で Riemann 対称空間のルート系を定義する。各 $A \in \mathfrak{a}$ について、$\mathrm{ad}A$ は対角化可能になるので、$\{\mathrm{ad}A \mid A \in \mathfrak{a}\}$ は同時対角化可能になる。そこで、$\mathfrak{k}$ 内の $\mathfrak{a}$ の中心化部分環を $\mathfrak{k}_0$とし、$\lambda \in \mathfrak{a}^*$に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid [A, X] = \lambda(A)X \ (A \in \mathfrak{a})\}$$

とおいたとき、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$$

が成り立つ。$\mathfrak{g}$ は有限次元だから、有限個の$\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\}$ を除いて $\mathfrak{g}_\lambda = \{0\}$ となる。よって、$\mathfrak{a}^* - \{0\}$ の有限部分集合

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}\}$$

が定まり、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

が成り立つ。Λを Riemann 対称空間 G/Kの $\mathfrak{a}$ に関する**制限ルート系**と呼び、Λの元を**制限ルート**と呼ぶ。また、$\mathfrak{g}_\lambda$を**制限ルート空間**と呼び、上の $\mathfrak{g}$ の直和分解を**制限ルート空間分解**と呼ぶ。$\lambda, \mu \in \Lambda$に対して、$X \in \mathfrak{g}_\lambda$と $Y \in \mathfrak{g}_\mu$をとると、$A \in \mathfrak{a}$ について

$$\begin{aligned}
[A, [X, Y]] &= [[A, X], Y] + [X, [A, Y]] \qquad \text{(Jacobi 律)} \\
&= \lambda(A)[X, Y] + \mu(A)[X, Y] \\
&= (\lambda + \mu)(A)[X, Y].
\end{aligned}$$

よって $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$となり、

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$$

が成り立つ。

$$\{A \in \mathfrak{a} \mid \lambda(A) \neq 0 \ (\lambda \in \Lambda)\}$$

の各連結成分を **Weyl 領域**と呼ぶ。

定理 4.1.3 Weyl 群 $W(G/K)$ は Weyl 領域全体の集合の置換を引き起こし、単純推移的に作用する。

Weyl 領域 C_0を一つとり、固定しておく。

$$\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(C_0) > 0\}$$

とおくと、$\Lambda = \Lambda_+ \cup (-\Lambda_+)$ となる。$\lambda \in \Lambda$に対して

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{k} \mid (\mathrm{ad}A)^2 X = \lambda^2(A) X \ (A \in \mathfrak{a})\} \\
\mathfrak{p}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{p} \mid (\mathrm{ad}A)^2 X = \lambda^2(A) X \ (A \in \mathfrak{a})\}
\end{aligned}$$

とおく。

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{k}_{-\lambda}, \qquad \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{-\lambda}$$

が成り立つ。$A \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathrm{ad}A(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{p}, \qquad \mathrm{ad}A(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{k}$$

となるので、

$$\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda} = \mathfrak{k}_\lambda + \mathfrak{p}_\lambda$$

が成り立つ。したがって、制限ルート空間分解より、直和分解

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_+} \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Lambda_+} \mathfrak{p}_\lambda$$

を得る。$\lambda, \mu \in \Lambda_+$に対して

$$\begin{aligned} [\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] &\subset [\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda}, \mathfrak{g}_\mu + \mathfrak{g}_{-\mu}] \cap \mathfrak{p} \\ &= (\mathfrak{g}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{g}_{\lambda-\mu} + \mathfrak{g}_{-\lambda+\mu} + \mathfrak{g}_{-\lambda-\mu}) \cap \mathfrak{p} \\ &= \mathfrak{p}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{p}_{\lambda-\mu} \end{aligned}$$

となるので、

$$[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] \subset \mathfrak{p}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{p}_{\lambda-\mu}$$

が成り立つ。

4.2 s 表現の軌道

4.1節の設定のもとで、$A_0 \in \mathfrak{p}$ をとり、軌道 $M = \mathrm{Ad}(K)A_0$について考える。定理 4.1.1 より、$A_0 \in \mathfrak{a}$ とすることができ、さらに、定理 4.1.3より、$A_0 \in \bar{C}_0$としてよい。Λの部分集合$\Lambda_0(A_0)$ と$\Lambda_+(A_0)$ を

$$\begin{aligned} \Lambda_0(A_0) &= \{\lambda \in \Lambda_+ \mid \lambda(A_0) = 0\} \\ \Lambda_+(A_0) &= \{\lambda \in \Lambda_+ \mid \lambda(A_0) > 0\} \end{aligned}$$

によって定めると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_+} \mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda_+(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda, \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Lambda_+} \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda \end{aligned}$$

となる。そこで、

$$\mathfrak{k}_{A_0} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \mathfrak{p}_{A_0} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda$$

とおくと、$\mathfrak{k}_{A_0}$は $\mathfrak{k}$ 内の A_0の中心化部分環になり、$\mathfrak{p}_{A_0}$は $\mathfrak{p}$ 内の A_0の中心化部分空間になる。

$$\mathfrak{k}_+(A_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_+(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \mathfrak{p}_+(A_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda$$

とおくと、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{A_0} + \mathfrak{k}_+(A_0), \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{A_0} + \mathfrak{p}_+(A_0)$$

が成り立つ。

$X \in \mathfrak{k}$ に対して、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)A_0 = [X, A_0]$$

となる。ここで、$\lambda \in \Lambda_+(A_0)$ に対して、

$$(\mathrm{ad}A_0)^2|_{\mathfrak{k}_\lambda+\mathfrak{p}_\lambda} = \lambda^2(A_0)|_{\mathfrak{k}_\lambda+\mathfrak{p}_\lambda} \neq 0$$

だから、

$$\mathrm{ad}A_0 : \mathfrak{k}_+(A_0) \to \mathfrak{p}_+(A_0), \qquad \mathrm{ad}A_0 : \mathfrak{p}_+(A_0) \to \mathfrak{k}_+(A_0)$$

は線形同型写像になる。$M = \mathrm{Ad}(K)A_0$の A_0における接ベクトル空間 $T_{A_0}M$は

$$T_{A_0}M = [\mathfrak{k}, A_0] = [\mathfrak{k}_+(A_0), A_0] = \mathfrak{p}_+(A_0)$$

となる。$\mathfrak{p}_+(A_0)$ が接ベクトル空間になるので、Mの A_0における法ベクトル空間は $\mathfrak{p}_{A_0}$になる。

$$T_{A_0}M = \mathfrak{p}_+(A_0), \qquad T^\perp_{A_0}M = \mathfrak{p}_{A_0}.$$

A_0における Kのイソトロピー部分群

$$K_{A_0} = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)A_0 = A_0\}$$

の Lie 環は $\mathfrak{k}_{A_0}$に一致し、等質空間 K/K_{A_0}の原点における接ベクトル空間は $\mathfrak{k}_+(A_0)$ と同一視することができる。

$$f : K/K_{A_0} \to M;\ kK_{A_0} \mapsto \mathrm{Ad}(k)A_0$$

は微分同型写像になる。$X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ に対して、fの $eK_{A_0} \in K/K_{A_0}$における微分写像は

$$f_*(X) = [X, A_0] = -\mathrm{ad}(A_0)X$$

となるので、

$$f_* = -\mathrm{ad}(A_0) : \mathfrak{k}_+(A_0) \to \mathfrak{p}_+(A_0)$$

が成り立つ。

G の左不変 Riemann 計量は Kに両側不変 Riemann 計量を誘導し、K/K_{A_0}に正規等質 Riemann 計量を誘導する。この計量、またはその定数倍に関して、$f : K/K_{A_0} \to M$は、一般的には等長的にならない。これは次のようにしてわかる。$\lambda \in \Lambda_+$をとる。$x, y \in \mathfrak{k}_\lambda$に対して、

$$\begin{aligned}
\langle f_*x, f_*y\rangle &= \langle [A_0, x], [A_0, y]\rangle = B([A_0, x], [A_0, y]) \\
&= -B([A_0, [A_0, x]], y) = -\lambda^2(A_0)B(x, y) \\
&= \lambda^2(A_0)\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\langle f_*x, f_*y\rangle = \lambda^2(A_0)\langle x, y\rangle \qquad (x, y \in \mathfrak{k}_\lambda)$$

となるので、K/K_{A_0}の正規等質 Riemann 計量を定数倍して fが等長的になるための必要十分条件は、$\lambda \in \Lambda_+(A_0)$ に対して$\lambda(A_0)$ が一定値をとることである。

K/K_{A_0}の正規等質 Riemann 計量に関する測地線の fによる像に沿った Mの法ベクトル束の平行移動は次の補題からわかる。まず、K/K_{A_0}の測地線の fによる像は、$X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ と $k \in K$によって、

$$c(t) = f(k \exp tX \cdot K_{A_0}) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)A_0$$

と表される。

補題 4.2.1 (Heintze-Olmos [5]) $X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ と $k \in K$によって、$M = \mathrm{Ad}(K)A_0$の曲線 $c(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)A_0$を定め、$\xi \in \mathfrak{p}_{A_0}$をとって$\xi(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)\xi$とおくと、$\xi(t)$ は曲線 $c(t)$ に沿った平行法ベクトル場になる。

証明 Kは $\mathfrak{p}$ に等長的に作用するので、$\xi(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)\xi$は、$c(t)$ に沿った Mの法ベクトル場になる。Euclid 空間 $\mathfrak{p}$ の Levi-Civita 接続を$\bar{\nabla}$で表すと、

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{c'(t_0)}\xi(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \xi(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \mathrm{Ad}(k \exp tX)\xi \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mathrm{Ad}(k \exp(t_0 + s)X)\xi \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mathrm{Ad}(k \exp t_0X)\mathrm{Ad}(\exp sX)\xi \\
&= \mathrm{Ad}(k \exp t_0X)[X, \xi]
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{p}_{A_0}] &= \left[\sum_{\lambda\in\Lambda_+(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{a} + \sum_{\mu\in\Lambda_0(A_0)} \mathfrak{p}_\mu\right] \\
&\subset \sum_{\lambda\in\Lambda_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_+(A_0)\\ \mu\in\Lambda_0(A_0)}} [\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] \\
&\subset \sum_{\lambda\in\Lambda_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_+(A_0)\\ \mu\in\Lambda_0(A_0)}} (\mathfrak{p}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{p}_{\lambda-\mu}).
\end{aligned}$$

$\lambda \in \Lambda_+(A_0), \mu \in \Lambda_0(A_0)$ に対して $(\lambda \pm \mu)(A_0) > 0$ だから、$\lambda \pm \mu \in \pm\Lambda_+(A_0)$ となる。よって、

$$[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{p}_{A_0}] \subset \mathfrak{p}_+(A_0) = T_{A_0}M$$

より、$[X,\xi] \in T_{A_0}M$となる。$\mathrm{Ad}(k\exp t_0X)$ は $\mathfrak{p}$ に等長的に作用し、Mを不変にするので、

$$\bar{\nabla}_{c'(t_0)}\xi(t) = \mathrm{Ad}(k\exp t_0X)[X,\xi] \in T_{c(t_0)}M$$

が成り立つ。Mの法接続を $\nabla^{\perp}$で表すと、定義 1.3.3より、$\nabla^{\perp}_{c'(t_0)}\xi(t) = 0$ となる。よって、$\xi(t)$ は $c(t)$ に沿った Mの平行法ベクトル場になる。

4.3 s 表現の等径軌道

この節では s 表現の軌道の制限ルート系による等質空間としての表示を使って、Weyl 領域の軌道が等径部分多様体になることを証明する。

補題 4.3.1 A_0が Weyl 領域に含まれていると仮定すると、$K_{A_0} = Z_K(\mathfrak{a})$ が成り立つ。

証明 A_0は Weyl 領域に含まれているので、$\Lambda_0(A_0) = \emptyset$ となり、

$$T_{A_0}M = \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{p}_\lambda, \qquad T^{\perp}_{A_0}M = \mathfrak{a}$$

が成り立つことに注意しておく。

定め方より $Z_K(\mathfrak{a}) \subset K_{A_0}$は明らかだから、以下で逆の包含関係を示す。$k \in K_{A_0}$をとると、$\mathrm{Ad}(k)$ は Mに作用し A_0を固定するので、$T^{\perp}_{A_0}M$を不変にする。したがって、$\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ となり、kは $N_K(\mathfrak{a})$ に含まれる。A_0はある Weyl 領域Cに含まれているので、$\mathrm{Ad}(k)A_0 = A_0$ より、kが代表する Weyl 群の元 wは Weyl 領域Cを固定する。よって、定理 4.1.3より、wは $W(G/K) = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ の単位元になる。すなわち、$k \in Z_K(\mathfrak{a})$ となり、$K_{A_0} \subset Z_K(\mathfrak{a})$ を得る。以上で $K_{A_0} = Z_K(\mathfrak{a})$ が証明された。

定義 4.3.2 群 Hが集合 Xに作用しているとする。$x \in X$に対して

$$H_x = \{h \in H \mid h(x) = x\}$$

とおく。$x_0 \in X$が、任意の $x \in X$に対してある $h \in H$が存在し $H_{x_0} \subset hH_xh^{-1}$を満たすとき、$H(x_0)$ を Hの作用の**主軌道**と呼ぶ。

系 4.3.3 $A \in \mathfrak{a}$ に対して、$\mathrm{Ad}(K)A$ が s 表現の主軌道であるための必要十分条件は、A が Weyl 領域に含まれることである。

証明 A_0が Weyl 領域に含まれていると仮定すると、補題 4.3.1より、$K_{A_0} = Z_K(\mathfrak{a})$ が成り立つ。任意の $A \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$K_{A_0} = Z_K(\mathfrak{a}) \subset K_A$$

が成り立つ。さらに、任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して、定理 4.1.1より、ある $k_1 \in K$が存在し $\mathrm{Ad}(k_1)X \in \mathfrak{a}$ となる。よって、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{Ad}(k_1)X} &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)\mathrm{Ad}(k_1)X = \mathrm{Ad}(k_1)X\} \\ &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k_1^{-1}kk_1)X = X\} \\ &= k_1\{k' \in K \mid \mathrm{Ad}(k')X = X\}k_1^{-1} \qquad (k' = k_1^{-1}kk_1 \text{ とおく}) \\ &= k_1 K_X k_1^{-1}. \end{aligned}$$

これより、

$$K_{A_0} \subset K_{\mathrm{Ad}(k_1)X} = k_1 K_X k_1^{-1}.$$

したがって、$\mathrm{Ad}(K)A_0$は主軌道になる。

$A \in \mathfrak{a}$ が Weyl 領域に入っていないと仮定する。$\Lambda_0(A) \neq \emptyset$ となり、K_Aの Lie 環 $\mathfrak{k}_A$は

$$\mathfrak{k}_{A_0} = \mathfrak{k}_0 \neq \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A)} \mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{k}_A$$

を満たす。よって $K_{A_0} = Z_K(\mathfrak{a}) \subset K_A$であり、$K_{A_0} \neq K_A$となり、$\mathrm{Ad}(K)A$ は主軌道にはならない。

定義 4.3.4 Riemann 多様体内の Riemann 部分多様体の法ベクトル束が平坦で、すなわち、法曲率テンソルが 0 になり、任意の局所平行法ベクトル場に関するシェイプ作用素の固有値が一定のとき、その Riemann 部分多様体を**等径部分多様体**と呼ぶ。

定理 4.3.5 s 表現の主軌道 $M = \mathrm{Ad}(K)A_0$は Euclid 空間 $\mathfrak{p}$ の等径部分多様体になる。さらに Mの法ベクトル束は大域的平坦になっている。すなわち、法ベクトル束の平行フレームが大域的に存在する。

証明 補題 4.3.1の証明中に述べたように、$T^\perp_{A_0}M = \mathfrak{a}$ となっていることに注意しておく。$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$\bar{\xi}_{\mathrm{Ad}(k)A_0} = \mathrm{Ad}(k)\xi \qquad (k \in K)$$

によって Mの法ベクトル場$\bar{\xi}$を定める。Kは $M = \mathrm{Ad}(K)A_0$に作用しているので、$\bar{\xi}$の定め方が well-defined になることさえ示せば、$\bar{\xi}$は Mの法ベクトル場になることがわかる。$k_1, k_2 \in K$が $\mathrm{Ad}(k_1)A_0 = \mathrm{Ad}(k_2)A_0$を満たすとすると、$k_2^{-1}k_1 \in K_{A_0}$となり、補題 4.3.1より、$k_2^{-1}k_1 \in Z_K(\mathfrak{a})$ が成り立つ。よって、$\mathrm{Ad}(k_2^{-1}k_1)\xi = \xi$、すなわち、$\mathrm{Ad}(k_1)\xi = \mathrm{Ad}(k_2)\xi$ となり、$\bar{\xi}$は well-defined になる。

補題 4.2.1で扱った Mの曲線 $c(t)$ は、$M = K/K_{A_0}$の正規等質 Riemann 計量に関するすべての測地線を表示できるので、すべての点のすべての方向の接ベクトルに接することができる。さらに $\nabla^\perp_{c'(t)}\bar{\xi} = 0$ となり、$\bar{\xi}$は Mの平行法ベクトル場になる。したがって、Mの法ベクトル束は大域的平坦になる。

Mの平行法ベクトル場$\bar{\xi}$は、上で構成したように、Kの作用で定まるので、シェイプ作用素 $A_{\bar{\xi}}$の固有値は一定になる。以上で、Mは等径部分多様体になることがわかった。

4.4 s 表現の軌道の法ホロノミー群

4.2節で求めた s 表現の軌道の制限ルート系による等質空間としての表示を使って、s 表現の軌道の法ホロノミー群を求める。

定理 4.4.1 (H-O[5]) $X = G/K$を非コンパクト型対称空間とし、$G = I_0(X)$ となっているとする。$A_0 \in T_oX$をとり、$M = K \cdot A_0 \subset T_oX$とおく。$M$は$T_oX$の充満部分多様体、すなわち T_oX内の非自明アファイン部分空間に含まれていない Riemann 部分多様体と仮定する。このとき、Mの法ホロノミー表現は、Kの A_0におけるイソトロピー部分群 K_{A_0}の、Mの A_0における法ベクトル空間 $T^{\perp}_{A_0}M$への作用を効果的にしたものに同値になる。さらに、制限法ホロノミー表現は、Riemann 対称空間 $\mathrm{Exp}T^{\perp}_{A_0}M = P_{A_0}$のホロノミー表現に一致する。

証明　正規等質 Riemann 計量に関する K/K_{A_0}の測地線は、$X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ と $k \in K$によって、$c(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)A_0$と表すことができる。補題 4.2.1より、曲線 c に沿った法接続に関する平行移動は、$\mathrm{Ad}(k \exp tX) \in \mathrm{Ad}(K)$ になる。Mの任意の曲線は K/K_{A_0}の正規等質 Riemann 計量に関する測地線の fによる像によって近似される。$\mathrm{Ad}(K)$ は、$O(\mathfrak{p})$ のコンパクト部分群だから、Mの任意の曲線に沿った法接続に関する平行移動も $\mathrm{Ad}(K)$ の元になる。したがって、

$$L_{A_0} = \{k \in K_{A_0} \mid \mathrm{Ad}(k) \text{ は } \mathfrak{p}_{A_0} \text{上恒等写像}\}$$

とおくと、K_{A_0}のある部分群 Hが存在し、Mの A_0における法ホロノミー群の表現は、H/L_{A_0} の $\mathfrak{p}_{A_0}$への随伴作用と同値になる。

以下で $H = K_{A_0}$を示す。

$$\tilde{H} = \{\exp x_1 \cdots \exp x_r \mid r \in \mathbf{N},\ x_i \in \mathfrak{k}_+(A_0)\}$$

とおく。K/K_{A_0}の正規等質 Riemann 計量に関する区分的測地線は、$X_i \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ と $x_i = (t_i - t_{i-1})X_i$によって

$$(\exp x_1 \cdots \exp x_{i-1} \exp(t - t_{i-1})X_i)K_{A_0} \qquad (t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, r)$$

と表される。したがって、$H \supset \tilde{H} \cap K_{A_0}$が成り立つ。$\tilde{H}$は$K$の弧状連結部分群になるので、山辺の定理 [17] $\tilde{H}$は Kの Lie 部分群になる。$\tilde{H}$の Lie 環を$\tilde{\mathfrak{h}}$で表すと、$\tilde{\mathfrak{h}} \supset \mathfrak{k}_+(A_0)$ となる。よって、さらに$\tilde{\mathfrak{h}} \supset [\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{k}_+(A_0)] + \mathfrak{k}_+(A_0)$ が成り立つ。$[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{k}_+(A_0)] + \mathfrak{k}_+(A_0) = \mathfrak{k}$ を示すために、$[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{k}_+(A_0)] + \mathfrak{k}_+(A_0)$ に直交する $X \in \mathfrak{k}$ は 0 のみであることを示す。まず $X \in \mathfrak{k}_{A_0}$となることがわかる。

$$0 = \langle X, [\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{k}_+(A_0)]\rangle = \langle [X, \mathfrak{k}_+(A_0)], \mathfrak{k}_+(A_0)\rangle$$

となり、$[X, \mathfrak{k}_+(A_0)] \subset \mathfrak{k}_+(A_0)$ だから、$[X, \mathfrak{k}_+(A_0)] = 0$。$K/K_{A_0}$は正規等質 Riemann 計量を持つので、$K/K_{A_0} = \exp(\mathfrak{k}_+(A_0))K_{A_0}$となる。これを fで写すと、$M = \mathrm{Ad}(\exp(\mathfrak{k}_+(A_0)))A_0$

を得る。$Y \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ に対して、$[X, Y] = 0$ となるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp tX)\mathrm{Ad}(\exp Y)A_0 &= \mathrm{Ad}(\exp tX \exp Y)A_0 \\ &= \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{Ad}(\exp tX)Y)\exp tX)A_0 \\ &= \mathrm{Ad}(\exp Y)\mathrm{Ad}(\exp tX)A_0 \\ &= \mathrm{Ad}(\exp Y)A_0. \qquad (X \in \mathfrak{k}_{A_0})\end{aligned}$$

$\mathrm{Ad}(\exp tX)$ は M上恒等写像になる。仮定より Mは充満部分多様体だから、$\mathrm{Ad}(\exp tX)$ は $\mathfrak{p}$ 上恒等写像になる。これより、すべての $t \in \mathbf{R}$ について $\exp tX = e$ となる。よって、$X = 0$ となり、

$$\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{k}_+(A_0)] + \mathfrak{k}_+(A_0).$$

したがって、$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{k}$ を得る。$\tilde{H}$と Kはともに連結だから、$\tilde{H} = K$が成り立つ。したがって、$H = K_{A_0}$となり、Mの法ホロノミー表現は、K_{A_0}/L_{A_0}の Mの A_0における法ベクトル空間 $T^{\perp}_{A_0}M$への作用に同値になる。

$\mathfrak{p}_{A_0}$の定め方より、$[\mathfrak{p}_{A_0}, \mathfrak{p}_{A_0}] \subset \mathfrak{k}_{A_0}$となる。さらに、$[\mathfrak{k}_{A_0}, \mathfrak{p}_{A_0}] \subset \mathfrak{p}_{A_0}$だから、$\mathfrak{p}_{A_0}$は $\mathfrak{p}$ 内の Lie triple system になる。$\mathfrak{p}_{A_0}$は Mの A_0における法ベクトル空間に対応しているので、P_{A_0}は $X = G/K$の全測地的部分多様体になり、特に Riemann 対称空間になる。$\mathfrak{g}_{A_0} = \mathfrak{k}_{A_0} + \mathfrak{p}_{A_0}$とおくと、$(\mathfrak{g}_{A_0}, \mathfrak{k}_{A_0})$ は P_{A_0}に対応する直交対称 Lie 代数になる。これは一般には効果的にはならないので、L_{A_0}の Lie 環で $\mathfrak{k}_{A_0}$を割ったものを$\bar{\mathfrak{k}}_{A_0}$で表すと、$\bar{\mathfrak{g}}_{A_0} = \bar{\mathfrak{k}}_{A_0} + \mathfrak{p}_{A_0}$が対応する効果的な Lie 代数になる。$\bar{\mathfrak{k}}_{A_0}$に対応する連結 Lie 部分群は、$K_{A_0}/L_{A_0}$の単位連結成分に一致する。この単位連結成分を$\bar{K}_{A_0}$で表す。Riemann 対称空間を Euclid 成分と半単純成分とに分解したとき、半単純成分への線形イソトロピー表現は定まるので、Euclid 成分への $\bar{K}_{A_0}$の作用が自明になることを示せばよい。

$$\mathfrak{a}_0 = \{v \in \mathfrak{p}_{A_0} \mid [v, w] = 0 \ (w \in \mathfrak{p}_{A_0})\}$$

とおくと、$\mathfrak{a}_0$は $\mathfrak{p}_{A_0}$の Euclid 成分になる。$\bar{K}_{A_0}$が $\mathfrak{a}_0$に自明に作用することを示しておく。

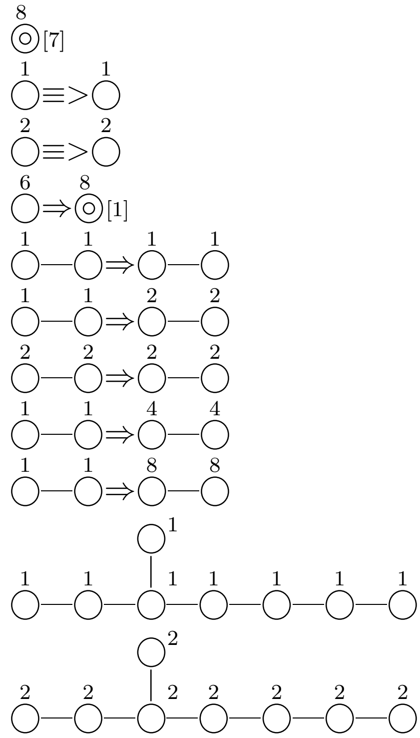
$$\langle [\bar{\mathfrak{k}}_{A_0}, \mathfrak{a}_0], \mathfrak{p}_{A_0} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{k}}_{A_0}, [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{p}_{A_0}] \rangle = 0$$

となるので、$\mathfrak{k}_{A_0}$は $\mathfrak{a}_0$に自明に作用する。したがって、$\bar{K}_{A_0}$も $\mathfrak{a}_0$に自明に作用する。

定理 4.4.2 表現ρが、s 表現の軌道の制限法ホロノミー表現と同値になるための必要十分条件は、$\rho = l \cdot 1 \oplus \rho'$となり、$l \geq l_0$であり、$l_0 = l_0(\rho')$ は以下に記述されたもので、ρ'は以下の因子を含まない s 表現である。

	型	コンパクト型 Riemann 対称空間
(1)	FII	$F_4/Spin(9)$
(2)	G	$G \quad G_2/SO(4)$
(3)	G_2	コンパクト単純 Lie 群
(4)	$EIII$	$E_6/SO(10)T^1$
(5)	FI	$F_4/Sp(3)SU(2)$
(6)	EII	$E_6/SU(6)SU(2)$
(7)	F_4	コンパクト単純 Lie 群
(8)	EVI	$E_7/SO(12)SU(2)$
(9)	EIX	$E_8/E_7SU(2)$
(10)	EV	$E_7/SU(8)$
(11)	E_8	コンパクト単純 Lie 群

Dynkin-Loos 図形



以上の既約 Riemann 対称空間の Dynkin-Loos 図形は、他の既約 Riemann 対称空間の Dynkin-Loos 図形の部分図形にならないもの全体である。これらを因子として含まない s 表現ρ'に対して、$l_0(\rho')$ はρ'に対応する Dynkin-Loos 図形を含む Dynkin-Loos 図形に拡張するために必要な頂点の最小数である。

証明 定理 4.4.1より、P_{A_0}で表される対称空間をすべて決定すればよい。P_{A_0}を $\mathbf{R}^l \times P'$ と Euclid 空間と半単純対称空間 P'の直積に分解する。これに対応する $\mathfrak{p}_{A_0}$の直和分解を $\mathfrak{p}_{A_0} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{p}'$と表す。すると、$\mathfrak{p}' = \mathfrak{a}' + \sum_{\lambda \in \Lambda_0(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda$ となり、

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &= \{A \in \mathfrak{a} \mid \lambda(A) = 0 \ (\lambda \in \Lambda_0(A_0))\} \\ \mathfrak{a}' &= \mathrm{Span}\{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0(A_0)\}. \end{aligned}$$

ただし、v_λはλの双対ベクトルである。

重複度付きのルート系ΛとΛ_0は対称空間 Xと P'を定め、$l = \mathrm{rank}\Lambda - \mathrm{rank}\Lambda_0$となるので、問題は次のルート系に関する問題に帰着する。問題：ルート系Λに対して、どのΛの既約成分とも直交しないベクトル A_0が存在し、$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(A_0) = 0\}$ となるΛ_0をすべて決定せよ。さらに、単純ルート系の場合に帰着する。

Λの Weyl 閉領域 $C \subset \mathfrak{a}$ を $A_0 \in C$を満たすようにとり、Πを Cに関する基本ルート系とする。このとき、任意の$\lambda \in \Lambda$に対して$\lambda(A_0) \geq 0$ となる。さらに、$\Pi_0 = \Pi \cap \Lambda_0$は$\Lambda_0$の基本系になることが、次のようにわかる。$\lambda \in \Lambda_0$に対して、$\lambda = \sum_{\pi_i \in \Pi} \alpha_i \pi_i$で$\alpha_i \geq 0$ となるか、または、$-\lambda = \sum_{\pi_i \in \Pi} \alpha_i \pi_i$で$\alpha_i \geq 0$ となる。これを A_0に作用させると、

$$0 = \lambda(A_0) = \sum_{\pi_i \in \Pi} \alpha_i \pi_i(A_0).$$

を得る。よって、すべての i について $\alpha_i\pi_i(A_0) = 0$ となる。これより、λ または $-\lambda$ は Π_0 内のルートの非負係数の線形結合で表される。つまり、P' の Dynkin-Loos 図形 Δ_0 は、X の Dynkin-Loos 図形 Δ から l 個の頂点を取り除いて、重複度をそのままにしたものになる。このとき、A_0 に対する条件は、Δ_0 は Δ の連結成分を含まないことと同値になる。以上のことと次の補題から定理 4.4.2は従う。

補題 4.4.3 V を Euclid 空間とし、$\Lambda \subset V^*$ を単純基本系 $\Pi \subset \Lambda$ を持つルート系とする。このとき、任意の部分集合 $\Pi' \subset \Pi$ に対して、ある $A_0 \in V$ が存在し、

$$\Pi' = \{\lambda \in \Pi \mid \lambda(A_0) = 0\}$$

が成り立つ。

証明 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$H_\lambda = \ker\lambda$ とおく。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して H_λ は、C の壁の一つになる。そこで、$\cap_{\lambda\in\Pi'} H_\lambda$ の内部から A_0 をとると、A_0 は望む条件を満たす。

第 5 章　定主曲率部分多様体

任意の曲線に沿った平行法ベクトル場に関するシェイプ作用素の固有値が、その曲線上一定になる部分多様体を定主曲率部分多様体と呼ぶ。この章の目的は、Euclid 空間内の Riemann 部分多様体が定主曲率部分多様体になるための必要十分条件は、等径部分多様体または等径部分多様体の焦点部分多様体になることであるという Heintze-Olmos-Thorbergsson [6] の定理の証明の解説である。定理 3.2.1を応用する際に、4.3節で示した結果を使う。

5.1　定主曲率部分多様体と等径部分多様体

この章の主定理の主張を述べるために必要になる概念を定義し、法ホロノミー群に関する第 3章の結果を使って、主定理を証明する。

定義 5.1.1 Riemann 多様体内の連結 Riemann 部分多様体の任意の曲線に沿った平行法ベクトル場に関するシェイプ作用素の固有値が、その曲線上一定になるとき、その Riemann 部分多様体を**定主曲率部分多様体**と呼ぶ。

定義 5.1.2 Mを Riemann 多様体$\bar{M}$の等径部分多様体とする。M上の平行法ベクトル場ξが存在し、$N = \mathrm{Exp}_{T^\perp M}(\xi)$ となり、$\dim N = \dim M$ $(\dim N < \dim M)$ のとき、Nを等径部分多様体 Mの**平行部分多様体** (**焦点部分多様体**) と呼ぶ。

定義 5.1.3 $f : M \to \mathbf{R}^n$と$\hat{f} : \hat{M} \to \mathbf{R}^n$を等長挿入とする。$T^\perp \hat{M}$の平行ベクトル場$\xi$と全射$\pi : \hat{M} \to M$が存在し、$\mathrm{Exp}_{T^\perp \hat{M}} \circ \xi = f \circ \pi$を満たし、さらに $\dim M < \dim \hat{M}$ $(\dim M = \dim \hat{M})$ が成り立つとき、fを$\hat{f}$の**焦点挿入 (平行挿入)** と呼ぶ。どちらの場合も、

$$f(M) = \{\hat{f}(\hat{p}) + \xi(\hat{p}) \mid \hat{p} \in \hat{M}\}$$

が成り立つ。

定理 5.1.4 Euclid 空間内の Riemann 部分多様体が定主曲率部分多様体になるための必要十分条件は、等径部分多様体または等径部分多様体の焦点部分多様体になることである。

この定理を証明するために、いくつかの準備をしておく。

Mを $\mathbf{R}^n$の連結 Riemann 部分多様体とする。Mの法ベクトル束を $T^\perp M$で表す。Mの曲線 c に沿った法接続 $\nabla^\perp$に関する平行移動を$\tau_c^\perp$で表す。$p\in M$と$\xi\in T_p^\perp M$をとり、

$$\mathrm{Hol}_\xi(M)=\{\tau_c^\perp\xi \mid c:[0,1]\to M\text{は曲線、}c(0)=p\}$$

とおく。$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ をξを通る $T^\perp M$の**ホロノミー部分束**と呼ぶ。$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ の各ファイバーは、法ホロノミー群Φの軌道になる。定理 3.2.1より、Φの単位連結成分である制限法ホロノミー群Φ^*はコンパクトになり、その法ベクトル空間への表現の非自明成分は s 表現になる。さらに、定理 4.3.5より、s 表現の主軌道は等径部分多様体になる。したがって、$\Phi^*\xi$をΦ^*の主軌道とすると、$\mathrm{Hol}_\xi(M)\to M$のファイバーの連結成分は、法ベクトル空間の等径部分多様体になる。Mの普遍被覆空間を$\tilde{M}$で表し、$T^\perp M$の$\tilde{M}$への引戻しを $T^\perp\tilde{M}$で表す。$\xi\in T^\perp M$の $T^\perp\tilde{M}$への持ち上げを$\tilde{\xi}$で表す。$\hat{M}_\xi=\mathrm{Hol}_{\tilde{\xi}}(\tilde{M})$ とおくと、これは $T^\perp\tilde{M}$の部分多様体になる。$|\xi|$ が Mとその焦点集合との間の距離より小さいとき、写像

$$\hat{f}_\xi:\hat{M}_\xi\to\mathbf{R}^n,\quad \hat{f}_\xi=\mathrm{Exp}_{T^\perp\tilde{M}}|_{\hat{M}_\xi}$$

は挿入になる。この挿入$\hat{f}_\xi$から誘導される計量を$\hat{M}_\xi$に入れておく。$\pi:\hat{M}_\xi\to M$で、被覆写像$\tilde{M}\to M$から定まる標準的な射影を表すことにする。

定理 5.1.5 $f:M\to\mathbf{R}^n$を等長挿入とする。$\xi\in T^\perp M$を制限法ホロノミー群の主軌道の元とし、$|\xi|$ が Mとその焦点との距離よりも小さいとする。このとき、等長挿入$\hat{f}_\xi:\hat{M}_\xi\to\mathbf{R}^n$は次の性質を持つ。

(1) $\hat{f}_\xi(\hat{M}_\xi)=\mathrm{Exp}_{T^\perp M}(\mathrm{Hol}_\xi(M))$.

(2) $\hat{M}_\xi$は大域的に平坦な法ベクトル束を持つ。

(3) fは$\hat{f}_\xi$の平行挿入であるか、または焦点挿入である。

(4) $\pi:\hat{M}_\xi\to M$のファイバーは$\hat{M}_\xi$内で全測地的であり、Mの法ベクトル空間内の等径部分多様体になる。

(5) $\hat{M}_\xi$が完備になるための必要十分条件は、Mが完備になることである。

(6) $\hat{M}_\xi$が等径部分多様体になるための必要十分条件は、Mが定主曲率部分多様体になることである。

証明 (1) は構成の仕方より明らか。

局所的な議論をするときは、Mと$\hat{M}$はともに埋め込まれていて、$|\xi|$ より大きいある正の数εに対して、$\mathrm{Exp}_{T^\perp M}$は零断面のε管状近傍上で微分同型であると仮定することができる。

以下で (4) を示す。射影$\pi:\hat{M}_\xi\to M$から、$\hat{M}_\xi$の Riemann 計量に関して、$\hat{p}\in\hat{M}_\xi$における接ベクトル空間 $T_{\hat{p}}\hat{M}_\xi$を、垂直部分空間 $\mathcal{V}_{\hat{p}}=\ker\pi_{*\hat{p}}$と水平部分空間 $\mathcal{H}_{\hat{p}}=\mathcal{V}_{\hat{p}}^\perp$の直交直和に分解することができる。$\mathcal{H}$に接する$\hat{M}_\xi$の曲線を水平曲線と呼び、$\mathcal{V}$ に接する$\hat{M}_\xi$の曲

線を垂直曲線と呼ぶ。垂直部分空間 $\mathcal{V}_{\hat{p}}$はπの$\hat{p}$を通るファイバーの接ベクトル空間になる。また、$p = \pi(\hat{p})$ とおくと、平行移動により $\mathcal{H}_{\hat{p}} = T_pM$とみなせることをみておこう。

Mの曲線$\gamma(t)$ を$\gamma(0) = p$ を満たすようにとり、$\gamma(t)$ に沿った平行法ベクトル場$\xi(t)$ を$\xi(0) = \hat{p}$を満たすようにとる。すると、$\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) + \xi(t)$ は、$\hat{M}_\xi$を $\mathbf{R}^n$の部分集合とみなしたときの$\hat{M}_\xi$の曲線になる。$\xi(t)$ は平行だから、

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}'(t) &= \gamma'(t) + \nabla^\perp_{\gamma'(t)}\xi(t) - A_{\xi(t)}\gamma'(t) \qquad (\nabla^\perp, A \text{ は } M\text{の法接続とシェイプ作用素})\\ &= \gamma'(t) - A_{\xi(t)}\gamma'(t)\\ &= (1 - A_{\xi(t)})\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M.\end{aligned}$$

$\hat{\gamma}'(t)$ は $\mathcal{V}$ に直交することになるので、$\hat{\gamma}(t)$ は水平曲線になり、$\hat{\gamma}(t)$ は$\hat{\gamma}(0) = \hat{p}$を満たす$\gamma(t)$ の水平持ち上げとみなすことができる。$1 - A_{\xi(t)}$は非退化線形写像になるので、T_pMと $\mathcal{H}_{\hat{p}}$を同一視することができる。さらに、$\zeta \in T^\perp_{\hat{p}}\hat{M}_\xi$を$\hat{\gamma}$に沿って平行移動した法ベクトル場を$\zeta(t)$ とすると、$\hat{A}_{\zeta(t)}$は $\mathcal{H}_{\hat{\gamma}(t)}$を不変にし、$\hat{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_{\hat{\gamma}(t)}$だから、

$$\zeta'(t) = -\hat{A}_{\zeta(t)}(\hat{\gamma}'(t)) \in \mathcal{H}_{\hat{\gamma}(t)} = T_{\gamma(t)}M$$

となる。よって、$\zeta(t)$ は$\gamma(t)$ に沿った Mの平行法ベクトル場とみなすこともできる。

よって、$T^\perp_pM \supset \mathcal{V}_{\hat{p}}$となり、$T^\perp_{\hat{p}}\hat{M}_\xi \subset T^\perp_pM$が成り立つ。Lemma 5.1.6を適用するために、

$$N = \mathbf{R}^n, \qquad N_1 = p + T^\perp_pM, \qquad N_2 = \hat{M}_\xi$$

とおく。N_1は Nのアファイン部分空間だから、特に全測地的になる。$T_{\hat{p}}\hat{M}_\xi = \mathcal{V}_{\hat{p}} + \mathcal{H}_{\hat{p}}$と直交直和に分解し、$\mathcal{H}_{\hat{p}} = T_pM$と $\mathcal{V}_{\hat{p}} \subset T^\perp_pM$が成り立つので、$T_{\hat{p}}N_2 = T_{\hat{p}}\hat{M}_\xi$は、$T_{\hat{p}}N_1 = T^\perp_pM$に対する鏡影に関して不変になる。よって Lemma 5.1.6を適用することができ、

$$N_1 \cap N_2 = (p + T^\perp_pM) \cap \hat{M}_\xi = \pi^{-1}(p)$$

は $N_2 = \hat{M}_\xi$内で全測地的になる。さらに、$\hat{M}_\xi$のシェイプ作用素を$\hat{A}$で表すと、

$$\zeta \in T_{\hat{p}}N_1 \cap T^\perp_{\hat{p}}N_2 = T^\perp_pM \cap T^\perp_{\hat{p}}\hat{M}_\xi = T^\perp_{\hat{p}}\hat{M}_\xi$$

に対して、$\hat{A}_\zeta$は

$$T_{\hat{p}}N_1 \cap T_{\hat{p}}N_2 = T^\perp_pM \cap T_{\hat{p}}(\hat{M}_\xi) = \mathcal{V}_{\hat{p}}$$

を不変にする。したがって、$\hat{A}_\zeta$は $\mathcal{H}_{\hat{p}}$も不変にし、分解 $TM_\xi = \mathcal{V} + \mathcal{H}$を保つ。定理 3.2.1より、制限法ホロノミー群の作用は s 表現と同値になる。$\xi \in T^\perp_pM$を制限法ホロノミー群の主軌道の元とすると、定理 4.3.5より、$\pi : \hat{M}_\xi \to M$のファイバーは法ベクトル空間内の等径部分多様体になる。以上で (4) が示された。

以下で、$\hat{M}_\xi$の法ベクトル束 $T^\perp\hat{M}_\xi$が、大域的に平坦であることを証明する。$\zeta \in T^\perp_{\hat{p}}\hat{M}_\xi$を$\hat{M}_\xi$の水平曲線に沿って平行に拡張する。制限法ホロノミー群の主軌道の元におけるイソトロピー部分群は、定理 4.3.5の証明中に示したように、その法ベクトル空間に自明に作用するので、ζの平行移動による拡張は水平曲線のとり方に依存しない。この構成法より、$\hat{M}_\xi$の法ベクトル場ζは、水平方向に関して平行になっている。

πのファイバーはMの法ベクトル空間内で等径部分多様体になっているので、ζは垂直方向に関しても平行になっている。よってζは$\hat{M}_\xi$全体で定義された平行法ベクトル場になる。これより$\hat{M}_\xi$の法ベクトル束$T^\perp\hat{M}_\xi$は、大域的に平坦であることがわかった。したがって、(2) が示されたことになり、また、$\hat{M}_\xi$の構成法より、(3) もわかる。

次に (6) を証明する。πのファイバーは、$\hat{M}_\xi$とアファイン部分空間$p+T_p^\perp M$の共通部分になるので、$\hat{M}_\xi$の平行法ベクトル場ζに対して、$\hat{M}_\xi$のシェイプ作用素$\hat{A}_\zeta$の垂直方向への制限は、ファイバーのシェイプ作用素に一致する。さらにファイバーは s 表現の軌道になるので、ファイバーのシェイプ作用素は一定の固有値を持つ。よって、$\hat{A}_\zeta$の垂直方向への制限も、各ファイバー上では一定の固有値を持つ。以上のことから、$\hat{A}_\zeta$が一定の固有値を持つための必要十分条件は、$\hat{A}_\zeta$の水平方向への制限が一定の固有値を持つことになる。$\hat{M}_\xi$の水平曲線$\hat{\gamma}(t)$ に沿った$\hat{M}_\xi$の平行法ベクトル場$\zeta(t)$ は、$\gamma(t)$ に沿ったMの平行法ベクトル場ともみなせることができるので、

$$
\begin{aligned}
A_{\zeta(t)}(\gamma'(t)) &= -\zeta'(t) = \hat{A}_{\zeta(t)}(\hat{\gamma}'(t)) \\
&= \hat{A}_{\zeta(t)}(\gamma'(t) - A_{\xi(t)}\gamma'(t)) \\
&= \hat{A}_{\zeta(t)}(1 - A_{\xi(t)})\gamma'(t).
\end{aligned}
$$

したがって、$T_{\gamma(t)}M = \mathcal{H}_{\hat{\gamma}(t)}$上

$$A_{\zeta(t)} = \hat{A}_{\zeta(t)}(1 - A_{\xi(t)})$$

が成り立ち、

$$\hat{A}_{\zeta(t)}|_{\mathcal{H}} = A_{\zeta(t)}(1 - A_{\xi(t)})^{-1}$$

を得る。Mの曲線$\gamma(t)$ に沿った平行法ベクトル場$\gamma(t)$ は、$\hat{M}_\xi$の水平曲線$\hat{\gamma}(t)$ に沿った平行法ベクトル場とみなすこともできるので、

$$\hat{A}_{\xi(t)}|_{\mathcal{H}} = A_{\xi(t)}(1 - A_{\xi(t)})^{-1}$$

も成り立つ。vを $A_{\xi(t)}$の固有ベクトルとし、対応する固有値をλとすると、vは$\hat{A}_{\xi(t)}|_{\mathcal{H}}$の固有ベクトルにもなり、対応する固有値は$\lambda(1-\lambda)^{-1}$になる。区間 $(-\infty, 1)$ 上

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

となるので、関数 $x \mapsto x(1-x)^{-1}$は単調増加になり、$A_{\xi(t)}$の固有空間分解と$\hat{A}_{\xi(t)}|_{\mathcal{H}}$の固有空間分解は一致する。$\hat{M}_\xi$の法ベクトル束は平坦なので、Ricci の方程式 (命題 1.3.8) より、$[\hat{A}_{\xi(t)}, \hat{A}_{\zeta(t)}] = 0$ となる。よって、$\hat{A}_{\xi(t)}$と$\hat{A}_{\zeta(t)}$は同時対角化可能になり、$\hat{A}_{\xi(t)}|_{\mathcal{H}}$と$\hat{A}_{\zeta(t)}|_{\mathcal{H}}$も同時対角化可能になる。以上より、$\hat{A}_{\xi(t)}|_{\mathcal{H}}$、$\hat{A}_{\zeta(t)}|_{\mathcal{H}}$と $A_{\xi(t)}$は同時対角化可能になる。

$$A_{\zeta(t)} = \hat{A}_{\zeta(t)}(1 - A_{\xi(t)})$$

より、$A_{\zeta(t)}$を合わせても同時対角化可能になる。

以上の考察より、$\hat{M}_\xi$が等径部分多様体ならば、$\hat{A}_{\xi(t)}$の固有値は一定になり、$A_{\xi(t)}$の固有値も一定になる。したがって、Mは定主曲率部分多様体になる。逆にMが定主曲率部分多様体ならば、$A_{\xi(t)}$と$A_{\zeta(t)}$の固有値はそれぞれ一定になり、

$$\hat{A}_{\zeta(t)}|_{\mathcal{H}} = A_{\zeta(t)}(1 - A_{\xi(t)})^{-1}$$

より、$\hat{A}_{\zeta(t)}|_{\mathcal{H}}$の固有値も一定になる。$\hat{M}_\xi$の任意の二点は水平曲線で結ぶことができるので、$\hat{M}_\xi$は等径部分多様体になる。

射影$\pi : \hat{M}_\xi \to M$は Lipschitz 写像になるので、$\hat{M}_\xi$の Cauchy 列をMの Cauchy 列に写す。Mが完備であると仮定する。$\hat{M}_\xi$の Cauchy 列$\hat{x}_i$をとると、$x_i = \pi(\hat{x}_i)$はMの Cauchy 列になる。仮定より、x_iはMの収束列になり、$x = \lim_{i\to\infty} x_i$が存在する。$x$のコンパクト近傍$C$をとると、$x_i \in C$としてよい。$\pi$のファイバーはコンパクトだから、$\pi^{-1}(C)$もコンパクトになる。$\hat{x}_i \in \pi^{-1}(C)$だから、$\hat{x}_i$は収束列になる。したがって、$\hat{M}_\xi$は完備になる。

逆に$\hat{M}_\xi$が完備であると仮定する。Mの Cauchy 列x_iをとると、x_iは有界列になる。πのファイバーはコンパクトだから、x_iの逆像の元$\hat{x}_i$を有界列になるようにとることができる。$\hat{M}_\xi$は完備だから、$\{\hat{x}_i\}$を含むコンパクト部分集合Cが存在する。$\pi(C)$もコンパクトになり、x_iを含むので、x_iは収束部分列を持つ。x_iは収束部分列を持つ Cauchy 列になり、収束列になる。したがって、Mは完備になる。

補題 5.1.6 N_1, N_2と$N_1 \cap N_2$は Riemann 多様体Nの部分多様体になっていると仮定し、さらに、N_1はNの全測地的部分多様体になっているとする。任意の$p \in N_1 \cap N_2$に対して、T_pN_2がT_pN_1に対する鏡影に関して不変になっているならば、$N_1 \cap N_2$はN_2内で全測地的になる。さらにこのとき、$p \in N_1 \cap N_2$と$\xi \in T_p^\perp N_2 \cap T_pN_1$に対して、$N_2$のシェイプ作用素$A_\xi$は$T_p(N_1 \cap N_2)$を不変にする。

証明 各$p \in N_1 \cap N_2$について、T_pN_2がT_pN_1に対する鏡影に関して不変になっているので、$T_p^\perp N_2$もT_pN_1に関する鏡影に関して不変になる。したがって、T_pNは

$$T_pN = (T_pN_1 \cap T_pN_2) \oplus (T_pN_1 \cap T_p^\perp N_2) \oplus (T_p^\perp N_1 \cap T_pN_2) \oplus (T_p^\perp N_1 \cap T_p^\perp N_2)$$

と直交直和に分解する。$N, N_2, N_1 \cap N_2$の Levi-Civita 接続をそれぞれ$\nabla^N, \nabla^{N_2}, \nabla^{N_1\cap N_2}$で表す。また、$N$内の$N_2$の第二基本形式を$\alpha^{N_2}$で表し、$N_2$内の$N_1 \cap N_2$の第二基本形式を$\alpha_{N_2}^{N_1\cap N_2}$で表すことにする。$N_1$は$N$内で全測地的なので、$X, Y \in C^\infty(N_1, TN_1)$に対して

$$(\nabla^N_X Y)_p = (\nabla^{N_1}_X Y)_p \in T_pN_1$$

となる。さらに$X, Y \in C^\infty(N_1 \cap N_2, T(N_1 \cap N_2))$とすると、

$$\begin{aligned}(\nabla^N_X Y)_p &= (\nabla^{N_2}_X Y)_p + \alpha^{N_2}(X_p, Y_p)\\ &= (\nabla^{N_1\cap N_2}_X Y)_p + \alpha_{N_2}^{N_1\cap N_2}(X_p, Y_p) + \alpha^{N_2}(X_p, Y_p).\end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X^{N_1\cap N_2}Y)_p &\in T_pN_1 \cap T_p(N_2) = T_p(N_1\cap N_2),\\
\alpha_{N_2}^{N_1\cap N_2}(X_p, Y_p) &\in T_p^\perp N_1 \cap T_p(N_2),\\
\alpha^{N_2}(X_p, Y_p) &\in T_p^\perp N_2
\end{aligned}
$$

となるので、$(\nabla_X^{N_1\cap N_2}Y)_p \in T_p(N_1)$ より、$\alpha_{N_2}^{N_1\cap N_2}(X_p, Y_p) = 0$ が成り立つ。したがって、$N_1 \cap N_2$は N_2内で全測地的になる。

次に法ベクトル束 $T^\perp N_2$の法接続を $\nabla^{T^\perp N_2}$で表す。$X \in C^\infty(N_1\cap N_2, T(N_1\cap N_2))$ と $\xi \in C^\infty(N_1\cap N_2, TN_1 \cap T^\perp N_2)$ をとると、

$$
(\nabla_X^N \xi)_p = (\nabla_X^{T^\perp N_2}\xi)_p - A_\xi X_p
$$

となるが、X, ξはともに N_1に接しているので、$(\nabla_X^N\xi)_p \in T_pN_1$となり、直交直和分解

$$
T_pN_1 = (T_pN_1 \cap T_pN_2) \oplus (T_pN_1 \cap T_p^\perp N_2)
$$

より、$A_\xi X_p \in T_pN_1 \cap T_pN_2 = T_p(N_1\cap N_2)$ が成り立つ。したがって、シェイプ作用素 A_ξ は $T_p(N_1\cap N_2)$ を不変にする。

定理 5.1.4の証明 Mを Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$内の定主曲率部分多様体とする。$\xi \in T^\perp M$を制限法ホロノミー群の主軌道の元とする。Mの主曲率が一定であることから、Mとその焦点との距離は正になる。そこで、ξの長さをその距離よりも小さくとると、定理 5.1.5を Mに適用することができ、$\hat{M}_\xi$は等径部分多様体になり、Mは$\hat{M}_\xi$の焦点部分多様体になる。

逆に等径部分多様体の平行部分多様体と焦点部分多様体は、ともに定主曲率部分多様体になることがわかる。

5.2 定主曲率等質部分多様体

定義 5.2.1 Mを $\mathbf{R}^N$の連結 Riemann 部分多様体とする。任意の $p, q \in M$と p, qを結ぶ M の曲線 c に対して、次の (1) から (3) を満たす $\mathbf{R}^N$の等長変換 gが存在するとき、Mを**定主曲率等質部分多様体**と呼ぶ。

(1) $g(M) = M$,

(2) $g(p) = q$

(3) $dg_p|_{T_p^\perp M} = \tau_c^\perp : T_p^\perp M \to T_q^\perp M$.

ただし、$\tau_c^\perp$は c に沿った法接続に関する平行移動である。

定義 5.2.2 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体とし、Mの Levi-Civita 接続を ∇ で表す。接ベクトル束 TM上の接続 ∇^cが次の (1) と (2) を満たすとき、∇^cを**標準接続**と呼ぶ。

(1) $\nabla^c\langle\ ,\ \rangle = 0,$

(2) $D = \nabla - \nabla^c$によって二次形式 Dを定めると、$\nabla^c D = 0.$

Mが $\mathbf{R}^N$の Riemann 部分多様体のとき、Mの第二基本形式αに対して

$$(\nabla^c_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla^c_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla^c_X Z) \qquad (X,Y,Z \in TM)$$

によって $\nabla^c\alpha$を定める。

注意 5.2.3 Riemann 多様体の Levi-Civita 接続は標準接続になる。

定理 5.2.4 (O-S[12]) Mを $\mathbf{R}^N$内の連結コンパクト充満部分多様体とし、Mの第二基本形式をαで表す。このとき、次の (1) から (3) は同値になる。

(1) Mは $\nabla^c\alpha = 0$ を満たす TMの標準接続 ∇^cを持つ。

(2) Mは定主曲率等質部分多様体になる。

(3) Mは s 表現の軌道になる。

証明 **(2)⇒(3)** いくつかの結果を組み合わせて証明することができる。そのためにまず次の定義を述べておく。

定義 5.2.5 G をコンパクト Lie 群とし、$\rho : G \to O(V)$ を直交表現とする。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表すことにする。$v \in V$に対して、$\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{g}\cdot v)^{\perp}$とおき、$\mathfrak{a}_v$が最小次元になる $v \in V$をとる。任意の $u \in \mathfrak{a}_v$に対して、$\langle \mathfrak{g}\cdot u, \mathfrak{a}_v\rangle = 0$ が成り立つとき、G の直交表現ρを**極表現**と呼ぶ。

命題 5.2.6 s 表現は極表現になる。

証明 第 4章での記号をそのまま使うことにする。定理 4.1.1より、軌道を考える元は $\mathfrak{a}$ からとればよい。$A_0 \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$[\mathfrak{k}, A_0] = \sum_{\lambda\in\Lambda_+(A_0)} [\mathfrak{k}_\lambda, A_0] = \sum_{\lambda\in\Lambda_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_+(A_0).$$

よって、$[\mathfrak{k}, A_0]$ が最大次元になるための必要十分条件は、A_0が Weyl 領域に含まれることである。このとき、$\Lambda_+(A_0) = \Lambda_+$となり、

$$[\mathfrak{k}, A_0] = \sum_{\lambda\in\Lambda_+} \mathfrak{p}_\lambda.$$

よって、$\mathfrak{a}_{A_0} = \mathfrak{a}$ が成り立つ。さらに、任意の $A \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[\mathfrak{k}, A] = \mathfrak{p}_+(A)$$

だから、

$$\langle [\mathfrak{k}, A], \mathfrak{a}_{A_0} \rangle = \langle \mathfrak{p}_+(A), \mathfrak{a} \rangle = 0.$$

したがって、Kの $\mathfrak{p}$ への表現は極表現になる。

ある意味でこの命題の逆を示したのが、次の Dadok の定理である。

定理 5.2.7 (Dadok[3]) 極表現$\rho : G \to O(V)$ に対して、ある s 表現$\tilde{\rho} : \tilde{G} \to O(V)$ が存在し、$\rho(G)$ と$\tilde{\rho}(\tilde{G})$ の軌道は一致する。

定理 5.2.8 (P-T[14]) Mをコンパクト連結 Lie 群 G の直交表現$\rho : G \to O(V)$ の軌道とする。Mが Vの等径部分多様体になるための必要十分条件は、ρが極表現であり Mが主軌道であることである。

定理 5.2.4(2)⇒(3) の証明の続き $c : [0,1] \to M$を曲線とし、$\xi(t)$ を c に沿った平行法ベクトル場とする。Mは定主曲率等質部分多様体だから、各 $t \in [0,1]$ について $\mathbf{R}^N$の等長変換 g_tが存在し、

(1) $g_t(M) = M$,

(2) $g_t(c(0)) = c(t)$

(3) $(dg_t)_{c(0)}|_{T^{\perp}_{c(0)}M} = \tau^{\perp}_{c|_{[0,t]}} : T^{\perp}_{c(0)}M \to T^{\perp}_{c(t)}M.$

これより、$(dg_t)_{c(0)}(\xi(0)) = \xi(t)$ となり、

$$A_{\xi(t)} = g_t A_{\xi(0)} g_t^{-1}$$

が成り立つので、$A_{\xi(t)}$の固有値は一定になる。したがって、Mは定主曲率部分多様体になる。

$p \in M$をとり、$\xi \in T^{\perp}_p M$を制限法ホロノミー群Φ^*の主軌道からとる。上でみたことから、$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ を不変にする $\mathbf{R}^N$の等長変換の全体$\tilde{G}$は、閉 Lie 部分群になり、$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ に推移的に作用する。$\tilde{G}$は Mにも推移的に作用する。$\tilde{G}$の単位連結成分を G で表す。Mは連結だから、$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ も連結になり、G も $\mathrm{Hol}_\xi(M)$ に推移的に作用する。よって、

$$K = \{g \in G \mid g \cdot p = p,\ dg_p \xi = \xi\}$$

とおくと、Kは G のコンパクト Lie 部分群になり、$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ は等質空間 G/Kに微分同型になる。Mはコンパクトだから $\mathrm{Hol}_\xi(M)$ もコンパクトになり、したがって、G もコンパクトになる。補題 2.1.5より、コンパクト Lie 群の Euclid 空間への等長作用は不動点を持つので、必要ならば平行移動することによって、G は $\mathbf{R}^N$の原点を不動にしているとすることができる。以上より、G の $\mathbf{R}^N$への作用は、直交表現になる。

定理 5.1.4の証明中に示したことから、$\mathrm{Hol}_\xi(M)$ は等径部分多様体になるので、定理 5.2.8 より、G の $\mathbf{R}^N$への表現は極表現になる。Mは G の極表現の軌道になるので、定理 5.2.7より、Mはある s 表現の軌道になる。

(3)⇒(1) s 表現の軌道を考えることになるので、第 4章での記号をそのまま使うことにする。Mは $A \in \mathfrak{a}$ の軌道になっているとする。$M = \mathrm{Ad}(K)A \subset \mathfrak{p}$ の Riemann 部分多様体としての Riemann 計量を $\langle\ ,\ \rangle$ で表し、それに関する Levi-Civita 接続を ∇ で表す。その他に、直和分解

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_A + \mathfrak{k}_+(A), \qquad [\mathfrak{k}_A, \mathfrak{k}_+(A)] \subset \mathfrak{k}_+(A)$$

に対応して K/K_Aの接ベクトル束上の K不変接続 ∇^cが存在することが、等質空間の不変接続の一般論からわかる。A を通る Mの ∇^cに関する測地線は、$X \in \mathfrak{k}_+(A)$ をとって $\mathrm{Ad}(\exp tX)A$ と表すことができる。さらに、この測地線に沿った ∇^cに関する平行移動は、$d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A$になる。これより、$K$の作用に関して不変なテンソル場は、$\nabla^c$に関して平行になる。したがって、Riemann 部分多様体としての Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は ∇^cに関して平行になる。また、$D = \nabla - \nabla^c$によって二次形式 Dを定めると、Dは K不変になり、∇^cに関して平行になる。以上より、接続 ∇^cは Riemann 部分多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の標準接続になる。

$u, v \in T_AM$を測地線 $\mathrm{Ad}(\exp tX)A$ に沿って、∇^cに関して平行に拡張すると、

$$d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A u, \quad d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A v$$

になる。よって

$$\begin{aligned}
(\nabla^c_{\mathrm{ad}X\cdot A}\alpha)(u,v) &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A u, d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A v) \right)^{\perp} \\
&= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d(\mathrm{Ad}(\exp tX))_A \alpha(u,v) \right)^{\perp} \quad (\alpha \text{ は } K \text{の作用に関して不変}) \\
&= (\mathrm{ad}X \cdot \alpha(u,v))^{\perp} \\
&= 0. \qquad (\text{補題 4.2.1の証明中より } [\mathfrak{k}_+(A), T_A^{\perp}M] \subset T_AM)
\end{aligned}$$

これより、$(\nabla^c\alpha)_A = 0$ となり、等質性より、さらに、$\nabla^c\alpha = 0$ が成り立つ。

(1)⇒(2) の証明の前に次の補題を準備しておく。

補題 5.2.9 Mを Riemann 多様体とし、∇^cを Mの標準接続とする。このとき、∇^cの捩率テンソル

$$T^{\nabla^c}(X,Y) = \nabla^c_X Y - \nabla^c_Y X - [X,Y] \qquad (X, Y \in TM)$$

は ∇^c平行になる。Mが Riemann 多様体として完備ならば、Mは ∇^cに関しても完備になる。Mが Euclid 空間の Riemann 部分多様体であり、Mの第二基本形式αが $\nabla^c\alpha = 0$ を満たすならば、∇^cの曲率テンソルは ∇^c平行になる。

証明 Mの接ベクトル X, Yに対して

$$\begin{aligned}
T^{\nabla^c}(X,Y) &= \nabla^c_X Y - \nabla^c_Y X - [X,Y] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] - D(X,Y) + D(Y,X) \\
&= D(Y,X) - D(X,Y).
\end{aligned}$$

標準接続の定義より $\nabla^c D = 0$ だから、$\nabla^c T^{\nabla^c} = 0$ が成り立つ。

Mが Riemann 多様体として完備ならば、Mは ∇^cに関しても完備になることを示す。γを ∇^cに関する測地線とする。すなわち $\nabla^c_{\gamma'}\gamma' = 0$ とする。

$$\gamma'\langle\gamma', \gamma'\rangle = 2\langle\nabla^c_{\gamma'}\gamma', \gamma'\rangle = 0$$

となるので、γの速度ベクトルγ'は Mの Riemann 計量に関して長さ一定になる。その一定値を Cとしておく。γの極大定義域を (a, b) とする。$b < \infty$ と仮定する。b に収束する列 $t_i \in (a, b)$ をとる。

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq \int_{t_i}^{t_j} |\gamma'(t)|dt = C|t_i - t_j|$$

となり、t_iは Cauchy 列だから、$\gamma(t_i)$ も Cauchy 列になる。Mの完備性より$\gamma(t_i)$ は収束列になる。また、この収束列の極限は t_iのとり方に依存しない。よってγは b にまで定義域が延長され、さらに b を含む開区間でも定義される。これは (a, b) がγの極大定義域であることに反する。したがって $b = \infty$ が成り立つ。同様にして $a = -\infty$ が成り立つこともわかる。つまり、γは実数全体で定義される。以上より、Mは ∇^cに関しても完備になる。

Mが Euclid 空間の Riemann 部分多様体であり、Mの第二基本形式αが $\nabla^c\alpha = 0$ を満たすならば、∇^cの曲率テンソルは ∇^c平行になることを示す。Mの Riemann 計量に関する Levi-Civita 接続の曲率テンソルを Rで表す。Euclid 空間の曲率テンソルは 0 だから、Gauss の方程式 (命題 1.3.6) より、

$$0 = \langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle - \langle\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle$$

となるので、

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle - \langle\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle$$

を得る。αと $\langle\ ,\ \rangle$ は ∇^c平行だから、Rも ∇^c平行になる。次に Rと ∇^cの曲率テンソル R^{∇^c}の間の関係を求める。Mの接ベクトル場 X, Y, Zに対して、

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X(\nabla^c_Y Z + D(Y, Z)) - \nabla_Y(\nabla^c_X Z + D(X, Z)) \\
&\quad -\nabla^c_{[X,Y]}Z - D([X, Y], Z) \\
&= \nabla^c_X(\nabla^c_Y Z + D(Y, Z)) + D(X, \nabla^c_Y Z + D(Y, Z)) \\
&\quad -\nabla^c_Y(\nabla^c_X Z + D(X, Z)) - D(Y, \nabla^c_X Z + D(X, Z)) \\
&\quad -\nabla^c_{[X,Y]}Z - D([X, Y], Z) \\
&= R^{\nabla^c}(X, Y)Z \\
&\quad +D(\nabla^c_X Y, Z) + D(Y, \nabla^c_X Z) + D(X, \nabla^c_Y Z) + D(X, D(Y, Z)) \\
&\quad -D(\nabla^c_Y X, Z) - D(X, \nabla^c_Y Z) - D(Y, \nabla^c_X Z) - D(Y, D(X, Z)) \\
&\quad -\nabla^c_{[X,Y]}Z - D([X, Y], Z) \\
&= R^{\nabla^c}(X, Y)Z + D(T^{\nabla^c}(X, Y), Z) + D(X, D(Y, Z)) - D(Y, D(X, Z)).
\end{aligned}$$

R, D, T^{∇^c}は ∇^c平行なので、R^{∇^c}もまた ∇^c平行になる。

(1)⇒(2) 証明の概略を述べる。$\pi : \tilde{M} \to M$を普遍被覆とする。Mはコンパクトだから完備になり、$\tilde{M}$も完備になる。πによって引き戻したものに ˜ をつけることにする。仮定より$\tilde{\nabla}^c\tilde{\alpha} = 0$ となる。補題 5.2.9より、$\tilde{M}$は$\tilde{\nabla}^c$に関して完備になり、$\tilde{\nabla}^c$の曲率テンソルと捩率テンソルはどちらも$\tilde{\nabla}^c$平行になる。さらに$\tilde{M}$は単連結だから、アファイン簡約空間になり、$\tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{K}$と Lie 群の等質空間として表すことができる。$M$もアファイン簡約空間になり、$M = G/K$と Lie 群の等質空間として表すことができる。さらに G が $\mathbf{R}^N$の等長変換全体の成す Lie 群の Lie 部分群になることを示すことができ、仮定 $\nabla^c\alpha = 0$ を使って、Mの法ベクトル束への G の作用を調べることにより、Mが定主曲率等質部分多様体になることがわかる。

第 6 章 関連する研究

6.1 Riemann 多様体のホロノミー群

第 2章「ホロノミー系」では、第 3章「制限法ホロノミー群」で必要になる Simons [15] の結果を解説したが、この節では Riemann 多様体のホロノミー群に関する Simons [15] 結果の概略を解説する。

定理 6.1.1 $[V, R, G]$ を既約ホロノミー系とする。G^Rが Vの単位球面に推移的に作用しないとすると、$[V, R, G]$ は対称になる。

この定理の証明は省略する。

定理 6.1.2 Mを既約 Riemann 多様体とし、$\dim M \geq 3$ とする。各点 $p \in M$について、定理 2.2.7でホロノミー系になることを示した $[T_pM, R_p, \Phi_p^*]$ が対称になると仮定すると、Mは局所 Riemann 対称空間になる。

証明 各点 $p \in M$に対して R_pはΦ_p^*の作用に関して不変になっているので、Ricci テンソル Ric_pもΦ_p^*の作用に関して不変になる。Schur の補題 (補題 2.1.9) より、ある実数 $f(p)$ が存在し

$$\mathrm{Ric}_p(\ ,\ ) = f(p)\langle\ ,\ \rangle$$

となる。$\dim M \geq 3$ だから、定理 1.1.9より、$f(p)$ は M上一定になる。その定数を a としておく。Mは既約だからある点 $q \in M$に対して $R_q \neq 0$ となる。既約対称ホロノミー系 $[T_qM, R_q, \Phi_q^*]$ に対応する既約直交対称 Lie 代数がコンパクト型であるか非コンパクト型であるかに応じて、$a > 0$ または $a < 0$ になる。いずれにしても $a \neq 0$ となる。よって、任意の $p \in M$について $\mathrm{Ric}_p \neq 0$ となり、$R_p \neq 0$ となる。

$c : [0, 1] \to M$を曲線とする。定理 2.2.7の証明中に使った記号

$$c^*R(u, v)w = \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v)\tau_c^{-1}w$$

を使うことにする。Mが局所 Riemann 対称空間になることを示すには、任意の曲線 c に対して $c^*R = R_{c(1)}$が成り立つことを示せばよい。

Ambrose-Singer の定理 (定理 1.1.15) と定理 2.2.7より、$[T_{c(1)}, c^*R, \Phi^*_{c(1)}]$ は既約ホロノミー系になる。$g \in \Phi^*_{c(1)}$ に対して、$\tau_c^{-1} \circ g \circ \tau_c \in \Phi^*_{c(0)}$。$M$の各点でホロノミー系が対称になるという仮定より、

$$(\tau_c^{-1} \circ g \circ \tau_c)R_{c(0)} = R_{c(0)}$$

だから、任意の $x, y, z \in T_{c(0)}M$に対して

$$\tau_c^{-1} g \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1} g^{-1} \tau_c x, \tau_c^{-1} g^{-1} \tau_c y)(\tau_c^{-1} g^{-1} \tau_c z) = R_{c(0)}(x, y)z.$$

$u, v, w \in T_{c(1)}M$をとり、$\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v, \tau_c^{-1}w$を上の等式に代入すると

$$\begin{aligned}
\tau_c^{-1} g^{-1} \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1} g^{-1} u, \tau_c^{-1} g^{-1} v)(\tau_c^{-1} g^{-1} w) &= R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v)\tau_c^{-1}w \\
g^{-1} \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1} g^{-1} u, \tau_c^{-1} g^{-1} v)(\tau_c^{-1} g^{-1} w) &= \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v)\tau_c^{-1}w \\
(g(c^*R))(u, v)w &= (c^*R)(u, v)w.
\end{aligned}$$

したがって、$g(c^*R) = c^*R$となり、$[T_{c(1)}, c^*R, \Phi^*_{c(1)}]$ は既約対称ホロノミー系になる。

$[T_{c(1)}, R_{c(1)}, \Phi^*_{c(1)}]$ と $[T_{c(1)}, c^*R, \Phi^*_{c(1)}]$ はともに既約対称ホロノミー系になるので、ある定数 b が存在し $c^*R = bR_{c(1)}$が成り立つ。両辺の Ricci テンソルを考えると、

$$\mathrm{Ric}(c^*R) = \mathrm{Ric}(bR_{c(1)}) = b\mathrm{Ric}(R_{c(1)}).$$

ここで、$u, v \in T_{c(1)}M$に対して

$$b\mathrm{Ric}(R_{c(1)})(u, v) = ba\langle u, v\rangle$$

であり、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(c^*R)(u, v) &= \sum_i \langle (c^*R)(u, e_i)e_i, v\rangle \\
&= \sum_i \langle \tau_c R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}e_i)\tau_c^{-1}e_i, v\rangle \\
&= \sum_i \langle R_{c(0)}(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}e_i)\tau_c^{-1}e_i, \tau_c^{-1}v\rangle \\
&= \mathrm{Ric}(R_{c(0)})(\tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v) \\
&= a\langle \tau_c^{-1}u, \tau_c^{-1}v\rangle \\
&= a\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

したがって、$b = 1$ となり、$c^*R = R_{c(1)}$。以上より、Mは局所 Riemann 対称空間になる。

定理 6.1.3 Mを既約 Riemann 多様体とし、ある点 $p \in M$についてΦ^*_pが T_pMの単位球面に推移的に作用しないとすると、Mは階数 2 以上の局所 Riemann 対称空間になる。

証明 仮定よりすべての $p \in M$についてΦ^*_pが T_pMの単位球面に推移的に作用しないことになる。$\dim M = 2$ のときは、制限ホロノミー群は単位元のみになり、Mの既約性に反する。よって、$\dim M \geq 3$ の場合を考えればよい。定理 6.1.1より、すべての $p \in M$について $[T_pM, R_p, \Phi^*_p]$ は対称ホロノミー系になる。したがって、定理 6.1.2より Mは局所 Riemann 対称空間になる。階数 1 の局所 Riemann 対称空間の制限ホロノミー群は接ベクトル空間の単位球面に推移的に作用するので、Mの階数は 2 以上になる。

付録

この章では、非コンパクト対称対の例 $(SL(n,\mathbf{R}),SO(n))$ について、具体的な計算をしながら、詳しく解説していく。

実 n 次正方行列の全体を $M_n(\mathbf{R})$ で表し、n **次実特殊線形群** $SL(n,\mathbf{R})$、n **次直交群** $O(n)$ と n **次回転群** $SO(n)$ を

$$\begin{aligned} SL(n,\mathbf{R}) &= \{g \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det g = 1\} \\ O(n) &= \{g \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^t g g = 1\} \\ SO(n) &= SL(n,\mathbf{R}) \cap O(n) \end{aligned}$$

で定める。これらの Lie 環 $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$、$\mathfrak{o}(n)$ と $\mathfrak{so}(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) &= \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr} X = 0\} \\ \mathfrak{o}(n) &= \mathfrak{so}(n) \\ &= \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^t X + X = 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。n **次複素特殊線形群** $SL(n,\mathbf{C})$、n **次ユニタリ群** $U(n)$ と n **次特殊ユニタリ群** $SU(n)$ の定義もここで与えておく。複素 n 次正方行列の全体を $M_n(\mathbf{C})$ で表す。

$$\begin{aligned} SL(n,\mathbf{C}) &= \{g \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det g = 1\} \\ U(n) &= \{g \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t \bar{g} g = 1\} \\ SU(n) &= SL(n,\mathbf{C}) \cap U(n). \end{aligned}$$

これらの Lie 環 $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$、$\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}) &= \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\} \\ \mathfrak{u}(n) &= \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t \bar{X} + X = 0\} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t \bar{X} + X = 0,\ \mathrm{tr} X = 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。

$SL(n,\mathbf{R})$ は連結 Lie 群であり、$SO(n)$ は $SL(n,\mathbf{R})$ 内のコンパクト部分群になっている。$SO(n)$ はコンパクトだから、$\mathrm{Ad}_{SL(n,\mathbf{R})}(SO(n))$ もコンパクトになる。以後、$\mathrm{Ad}_{SL(n,\mathbf{R})}$を単に Ad と書くことにする。

$$\theta : SL(n,\mathbf{R}) \to SL(n,\mathbf{R})\ ;\ g \mapsto {}^t g^{-1}$$

によって、$SL(n,\mathbf{R})$ の自己同型写像θを定める。すると、θは位数 2 の自己同型写像になり、

$$SO(n) = \{g \in SL(n,\mathbf{R}) \mid \theta(g) = g\}$$

が成り立つ。n が奇数のとき、$SL(n,\mathbf{R})$ の中心は $\{1\}$ になり、n が偶数のとき、$SL(n,\mathbf{R})$ の中心は $\{\pm 1\}$ になる。以上より、$(SL(n,\mathbf{R}), SO(n))$ は Riemann 対称対になる。

$SL(n,\mathbf{R})$ の自己同型写像θに対応する Lie 環 $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ の自己同型写像θは

$$\theta : \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})\ ; X \mapsto -{}^tX$$

になる。よって、θによる $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ の分解は、

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \mid {}^tX = X\}$$

となる。$(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}), \theta)$ は、Riemann 対称対 $(SL(n,\mathbf{R}), SO(n))$ から定まっているので、直交対称 Lie 代数になる。

Lie 環 $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ は非コンパクト単純 Lie 環になることが知られている。$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ の複素化は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ になり、$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ 内の $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ に関する複素共役写像σは、通常の複素共役写像、つまり行列の各成分の複素共役をとる写像に一致する。$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ 内のコンパクト単純 Lie 環になることが知られている。

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{o}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

となるので、$\mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ が成り立つ。上の $\mathfrak{su}(n)$ の分解より、$\sigma\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n)$ が成り立つこともわかる。さらに、

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \cap \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{o}(n), \qquad \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \cap (\sqrt{-1}\mathfrak{su}(n)) = \mathfrak{p}$$

が成り立つので、分解

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \mid {}^tX = X\}$$

は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ の Cartan 分解になる。したがって、$(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}), \theta)$ は非コンパクト型直交 Lie 代数になり、$(SL(n,\mathbf{R}), SO(n))$ は非コンパクト型 Riemann 対称対になる。

上で示したことより、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{o}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{su}(n)$$

となり、

$$\theta^* : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)\ ; X \mapsto -{}^tX.$$

さらに $(\mathfrak{su}(n), \theta^*)$ は、コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。対応するコンパクト型 Riemann 対称対は、$(SU(n), SO(n))$ であって、$SU(n)$ の位数 2 の自己同型写像は

$$\theta^* : SU(n) \to SU(n)\ ; g \mapsto {}^tg^{-1}$$

になる。

Riemann 対称対 $(SL(n,\mathbf{R}),SO(n))$ の線形イソトロピー表現は、

$$\mathrm{Ad}(k)X = kXk^{-1} = kX^tk \qquad (k \in SO(n),\ X \in \mathfrak{p})$$

で与えられる。

$$\mathfrak{p} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tX = X,\ \mathrm{tr}X = 0\}$$

の部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix} \middle|\ t_i \in \mathbf{R},\ \sum_{i=1}^n t_i = 0 \right\}$$

で定めると、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間になることが、次のようにわかる。まず、

$$A(t_1,\ldots,t_n) = \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$[A(s_1,\ldots,s_n),A(t_1,\ldots,t_n)] = A(s_1t_1 - t_1s_1,\ldots,s_nt_n - t_ns_n) = 0$$

となるので、$\mathfrak{a}$ は可換部分空間になる。次に $X = [X_{ij}] \in \mathfrak{p}$ が任意の $A(t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{a}$ と可換になるとすると、

$$\begin{aligned} [A(t_1,\ldots,t_n),X] &= \begin{bmatrix} t_1X_{11} & \cdots & t_1X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_nX_{n1} & \cdots & t_nX_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_1X_{11} & \cdots & t_nX_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_1X_{n1} & \cdots & t_nX_{nn} \end{bmatrix} \\ &= [(t_i - t_j)X_{ij}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、$i \neq j$となる i,jに対して $X_{ij} = 0$ となり、$X \in \mathfrak{a}$ が成り立つ。よって、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間になる。

今考えている例に関する定理 4.1.1の主張

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

は、トレースが 0 の実 n 次対称行列は回転群 $SO(n)$ の元で対角化できるということを言っている。このように、Riemann 対称対 (G,K) の G が行列群のときの定理 4.1.1の主張は、行列の標準形に関する主張になっている。

Riemann 対称空間 $SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$ とその $\mathfrak{a}$ への作用を求めるため、

$$\begin{aligned} N_{SO(n)}(\mathfrak{a}) &= \{k \in SO(n) \mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} \\ Z_{SO(n)}(\mathfrak{a}) &= \{k \in SO(n) \mid \mathrm{Ad}(k)A = A\ (A \in \mathfrak{a})\} \end{aligned}$$

とおいて、まず、これらを求める。簡単のため、$N_{SO(n)}(\mathfrak{a})$ と $Z_{SO(n)}(\mathfrak{a})$ を単に $N(\mathfrak{a})$ と $Z(\mathfrak{a})$ とも書くことにする。$k = [k_{ij}] \in SO(n)$ と $A(t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(k)A(t_1,\ldots,t_n) &= \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{1n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n k_{pi}k_{qi}t_i\right]. \end{aligned}$$

$k \in N(\mathfrak{a})$ となるための必要十分条件は、$p \neq q$のとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i = 0$ を満たす任意の t_iについて

$$\sum_{i=1}^n k_{pi}k_{qi}t_i = 0$$

となることである。他方 $k \in SO(n)$ だから、$\displaystyle\sum_{i=1}^n k_{pi}k_{qi} = 0$ となっているので、上の条件は、$p \neq q$のとき、

$$k_{p1}k_{q1} = \cdots = k_{pn}k_{qn} = 0$$

となることと同値になる。これは、kが置換行列の各成分を± 1 倍した $SO(n)$ の元になること同値になる。したがって、n 次の置換群を $\mathcal{S}_n$で表すと

$$N(\mathfrak{a}) = \{(\varepsilon_j \delta_{\sigma(i)j}) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$$

となる。さらに $k \in Z(\mathfrak{a})$ となるための必要十分条件は、$k \in N(\mathfrak{a})$ であって、かつ、任意の p と$\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i = 0$ を満たす任意の t_iについて

$$\sum_{i=1}^n k_{pi}^2 t_i = t_p$$

となることである。これは、任意の p について $k_{pp} = \pm 1$ となることと同値になるので、

$$Z(\mathfrak{a}) = \{A(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \mid \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1\}$$

となる。さらに、$k = (\varepsilon_j \delta_{\sigma(i)j}) \in N(\mathfrak{a})$ の $\mathfrak{a}$ への作用は、$A(t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(k)A(t_1,\ldots,t_n) &= \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \delta_{\sigma(p)i} \varepsilon_i \delta_{\sigma(q)i} t_i\right] \\ &= (\delta_{\sigma(p)\sigma(q)} t_{\sigma(p)}) \\ &= A(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

したがって、Weyl 群 $W(SL(n,\mathbf{R})/SO(n))$ の $\mathfrak{a}$ への作用は、座標 $t_1,\ldots,t_n$の置換全体に一致する。

$A(t_1,\ldots,t_n)\in\mathfrak{a}$ と $X=[X_{ij}]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ に対して

$$[A(t_1,\ldots,t_n),X]=[(t_p-t_q)X_{pq}]$$

となる。そこで、$\lambda\in\mathfrak{a}^*$に対する

$$\mathfrak{g}_\lambda=\{X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})\mid[A,X]=\lambda(A)X\ (A\in\mathfrak{a})\}$$

は、

$$\lambda_p(A(t_1,\ldots,t_n))=t_p\qquad(A(t_1,\ldots,t_n)\in\mathfrak{a})$$

によって$\lambda_p\in\mathfrak{a}^*$を定め、$(p,q)$ 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 になる n 次正方行列を E_{pq} で表すと、$p\neq q$のとき、

$$\mathfrak{g}_{\lambda_p-\lambda_q}=\mathbf{R}E_{pq}$$

となり、$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ のルート空間分解は、

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})=\mathfrak{a}+\sum_{p\neq q}\mathfrak{g}_{\lambda_p-\lambda_q}$$

で与えられる。さらに、ルート系Λは

$$\Lambda=\{\lambda_p-\lambda_q\mid p\neq q\}$$

となる。

Weyl 領域は

$$\{A\in\mathfrak{a}\mid\lambda(A)\neq 0\ (\lambda\in\Lambda)\}$$

の連結成分であり、今考えている例に関して上の集合は、

$$\{A(t_1,\ldots,t_n)\mid t_i\neq t_j\ (i\neq j)\}$$

になるので、

$$C_0=\{A(t_1,\ldots,t_n)\mid t_1>t_2>\cdots>t_n\}$$

は一つの Weyl 領域になる。そこで、

$$\Lambda_+=\{\lambda\in\Lambda\mid\lambda(C_0)>0\}$$

とおくと、

$$\Lambda_+=\{\lambda_p-\lambda_q\mid p<q\}$$

となる。$\lambda\in\Lambda_+$に対する

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_\lambda &= \{X\in\mathfrak{k}\mid(\mathrm{ad}A)^2X=\lambda^2(A)X\ (A\in\mathfrak{a})\}\\ \mathfrak{p}_\lambda &= \{X\in\mathfrak{p}\mid(\mathrm{ad}A)^2X=\lambda^2(A)X\ (A\in\mathfrak{a})\}\end{aligned}$$

を以下で具体的に求める。各$\lambda_p - \lambda_q \in \Lambda_+$について

$$\mathfrak{k}_{\lambda_p-\lambda_q} + \mathfrak{p}_{\lambda_p-\lambda_q} = \mathfrak{g}_{\lambda_p-\lambda_q} + \mathfrak{g}_{-\lambda_p+\lambda_q} = \mathbf{R}E_{pq} + \mathbf{R}E_{qp}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_{\lambda_p-\lambda_q} &= (\mathbf{R}E_{pq} + \mathbf{R}E_{qp}) \cap \mathfrak{o}(n) = \mathbf{R}(E_{pq} - E_{qp}) \\ \mathfrak{p}_{\lambda_p-\lambda_q} &= (\mathbf{R}E_{pq} + \mathbf{R}E_{qp}) \cap \mathfrak{p} = \mathbf{R}(E_{pq} + E_{qp}).\end{aligned}$$

これより、直和分解

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(n) &= \sum_{p<q} \mathfrak{k}_{\lambda_p-\lambda_q} = \sum_{p<q} \mathbf{R}(E_{pq} - E_{qp}) \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{a} + \sum_{p<q} \mathfrak{p}_{\lambda_p-\lambda_q} = \mathfrak{a} + \sum_{p<q} \mathbf{R}(E_{pq} + E_{qp})\end{aligned}$$

を得る。

$\mathfrak{a}$ の Weyl 領域の元の t_i成分はすべて異なり、定理 4.3.5より、その $SO(n)$ による軌道は $\mathfrak{p}$ の等径部分多様体になる。ここでは、Weyl 領域の元と反対の性質を持つ元の $SO(n)$ 軌道を考える。自然数 lを $1 \leq l \leq n-1$ とし、

$$A_0 = A(\overbrace{t_1, \ldots, t_1}^{l}, \overbrace{t_2, \ldots, t_2}^{n-l}), \qquad lt_1 + (n-l)t_2 = 0, \qquad t_1 > t_1$$

となる $A_0 \in \mathfrak{a}$ をとる。$A_0 \in \bar{C}_0$となっている。この A_0に対して

$$\begin{aligned}\Lambda_0(A_0) &= \{\lambda \in \Lambda_+ \mid \lambda(A_0) = 0\} \\ \Lambda_+(A_0) &= \{\lambda \in \Lambda_+ \mid \lambda(A_0) > 0\}\end{aligned}$$

は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\Lambda_0(A_0) &= \{\lambda_p - \lambda_q \mid 1 \leq p < q \leq l\} \cup \{\lambda_p - \lambda_q \mid l+1 \leq p < q \leq n\} \\ \Lambda_+(A_0) &= \{\lambda_p - \lambda_q \mid 1 \leq p \leq l,\ l+1 \leq q \leq n\}.\end{aligned}$$

これより、各$\lambda_p - \lambda_q \in \Lambda_+(A_0)$ について

$$(\lambda_p - \lambda_q)(A_0) = t_1$$

となり、一定値 t_1をとる。

$$K_{A_0} = \{k \in SO(n) \mid \mathrm{Ad}(k)A_0 = A_0\}$$

とおくと、4.2節「s 表現の軌道」で述べたように、$SO(n)/K_{A_0}$の正規等質 Riemann 計量を定数倍することにより、微分同型写像

$$f : SO(n)/K_{A_0} \to \mathrm{Ad}(SO(n))A_0\ ; kK_{A_0} \mapsto \mathrm{Ad}(k)A_0$$

は等長写像になる。

K_{A_0}の Lie 環 $\mathfrak{k}_{A_0}$は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_{A_0} &= \sum_{\lambda\in\Lambda_0(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda \\
&= \sum_{1\le p<q\le l} \mathfrak{k}_{\lambda_p-\lambda_q} + \sum_{l+1\le p<q\le n} \mathfrak{k}_{\lambda_p-\lambda_q} \\
&= \sum_{1\le p<q\le l} \mathbf{R}(E_{pq}-E_{qp}) + \sum_{l+1\le p<q\le n} \mathbf{R}(E_{pq}-E_{qp}) \\
&= \mathfrak{o}(l)+\mathfrak{o}(n-l)
\end{aligned}$$

となる。

次に Lie 部分群 K_{A_0}を具体的に計算して求めてみよう。$k\in SO(n)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(k)A_0 = \left[\sum_{i=1}^{l} k_{pi}k_{qi}t_1 + \sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}k_{qj}t_2\right]$$

となる。$k\in K_{A_0}$とする。$1\le p\le l$について、

$$\begin{aligned}
t_1 &= \sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2 t_1 + \sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 t_2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_{pi}^2 t_1 + \sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 (t_2-t_1) \\
&= t_1 + \sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 (t_2-t_1)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 (t_2-t_1) = 0.$$

よって

$$\sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 = 0$$

となり、$1\le p\le l,\ l+1\le j\le n$ のとき、$k_{pj}=0$ が成り立つ。$l+1\le p\le n$ については、

$$\begin{aligned}
t_2 &= \sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2 t_1 + \sum_{j=l+1}^{n} k_{pj}^2 t_2 \\
&= \sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2 (t_1-t_2) + \sum_{j=1}^{n} k_{pj}^2 t_2 \\
&= \sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2 (t_1-t_2) + t_2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2(t_1 - t_2) = 0.$$

よって

$$\sum_{i=1}^{l} k_{pi}^2 = 0$$

となり、$l+1 \leq p \leq n,\ 1 \leq i \leq l$のとき、$k_{pi} = 0$ が成り立つ。以上より、kは

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \qquad k_1 \in O(l),\ k_2 \in O(n-l)$$

が成り立つ。そこで、

$$S(O(l) \times O(n-l)) = \left\{ \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \in SO(n) \,\middle|\, k_1 \in O(l),\ k_2 \in O(n-l) \right\}$$

とおくと、$K_{A_0} \subset S(O(l) \times O(n-l))$ が成り立つ。逆に

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \in S(O(l) \times O(n-l))$$

をとると、

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(k)A_0 &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 1_l & 0 \\ 0 & t_2 1_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_1 t_1 1_l k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2 t_2 1_{n-l} k_2^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_1 1_l & 0 \\ 0 & t_2 1_{n-l} \end{bmatrix} \\ &= A_0 \end{aligned}$$

となり、$k \in K_{A_0}$が成り立つ。したがって、

$$K_{A_0} = S(O(l) \times O(n-l))$$

となる。

$SO(n)$ の軌道 $M = \mathrm{Ad}(SO(n))A_0$は、等質空間としては $SO(n)/S(O(l) \times O(n-l))$ に一致する。特に、実 Grassmann 多様体になっていることがわかった。fが等長写像になっていることから、軌道 Mは $\mathfrak{p}$ から誘導された Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になる。

参考文献

[1] W. Ambrose and I.M. Singer, A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1953), 428 – 443.

[2] B.-Y. Chen, Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, Singapore, 1984.

[3] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, Trans. A.M.S., **288** (1985), 125 – 137.

[4] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[5] E. Heintze and C. Olmos, Normal holonomy groups and s-representations, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992), 869 – 874.

[6] E. Heintze, C. Olmos and G. Thorbergsson, Submanifolds with constant principal curvatures and normal holonomy groups, Intern. J. Math., **2** (1991), 167 – 175.

[7] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry I, Interscience Publishers, New York, 1963.

[8] C. Olmos, The normal holonomy group, Proc. Amer. Math. Soc., **110** (1990), 813 – 818.

[9] * C. Olmos, Isoparametric submanifolds and their homogeneous structures, J. Diff. Geom., **38** (1993), 225 – 234.

[10] * C. Olmos, Homogeneous submanifolds of higher rank and parallel mean curvature, J. Diff. Geom., **39** (1994), 605 – 627.

[11] * C. Olmos, Orbits of rank one and parallel mean curvature, Trans. A.M.S., **347** (1995), 2927 – 2939.

[12] C. Olmos and C. Sánchez, A geometric characterization of the orbit of s-representations, J. reine angew. Math., **420** (1991), 195 – 202.

[13] * C. Olmos and M. Salvai, Holonomy of homogeneous vector bundles and polar representations, Indiana Univ. Math. J., **44** (1995), 1007 – 1015.

[14] R.S. Palais and C.-L. Terng, A general theory of canonical forms, Trans. A.M.S., **300** (1987), 771 – 789.

[15] J. Simons, On the transitivity of holonomy systems, Ann. Math., **76** (1962), 213 – 234.

[16] * G. Thorbergsson, Isoparametric foliations and their buildings, Ann. Math., **133** (1991), 429 – 446.

[17] H. Yamabe, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math. J., **2** (1950), 13 – 14.