中央大学大学院理工学研究科

数学特別講義第三

微分形式の可積分性

田崎博之

1997 年度後期

目 次

第 1 章　微分形式

1.1　交代形式

定義 1.1.1 V, Wを実ベクトル空間とし p を自然数とする。Vの p 個の積 V^pから Wへの多重線形写像ω(各成分について線形) が任意の $i \neq j$について

$$\omega(\ldots, \overset{i}{\breve{v}_i}, \ldots, \overset{j}{\breve{v}_j}, \ldots) + \omega(\ldots, \overset{i}{\breve{v}_j}, \ldots, \overset{j}{\breve{v}_i}, \ldots) = 0 \qquad (v_k \in V)$$

を満たすとき、ωを W**に値を持つ** V**上の** p **次交代形式**と呼ぶ。Wに値を持つ V上の p 次交代形式の全体を$\wedge^p(V, W)$ で表す。$\wedge^p(V, W)$ に Wの実ベクトル空間の構造から定まる実ベクトル空間の構造を入れることにする。$W = \mathbf{R}$ のとき、$\wedge^p(V, \mathbf{R}) = \wedge^p V^*$と書き、$\wedge^p V^*$の元を単に V上の p 次交代形式と呼ぶ。$\wedge^0(V, W) = W$としておく。

補題 1.1.2 pを自然数とし S_pを p 次対称群 ($\{1, \ldots, p\}$ の置換全体のつくる群) とする。$\sigma \in S_p$の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で表すことにする。V, Wを実ベクトル空間とすると、$\omega \in \wedge^p(V, W), \sigma \in S_p$に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。

証明　σが互換のときは定義より

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = -\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。偶置換は互換の偶数個の積で表され奇置換は互換の奇数個の積で表されるので一般の$\sigma \in S_p$に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。

定義 1.1.3 V_1, V_2, Wを実ベクトル空間とし p を自然数とする。線形写像 $f : V_1 \to V_2$による引戻し $f^* : \wedge^p(V_2, W) \to \wedge^p(V_1, W)$ を$\omega \in \wedge^p(V_2, W)$ に対して

$$(f^*\omega)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \qquad (v_i \in V_1)$$

と定める。$f^* : \wedge^0(V_2, W) = W \to \wedge^0(V_1, W) = W$は恒等写像とする。上の定め方より、$f^* : \wedge^p(V_2, W) \to \wedge^p(V_1, W)$ は線形写像になる。

定義 1.1.4 V, W_1, W_2, W_3を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_2 \to W_3$を双線形写像とする。このとき$\omega \in \wedge^p(V, W_1)$ と$\eta \in \wedge^q(V, W_2)$ の**外積** $A(\omega \wedge \eta) \in \wedge^{p+q}(V, W_3)$ を $v_i \in V$に対して

$$\begin{aligned} & A(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ = \ & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}), \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \end{aligned}$$

と定義する。定義式より、$A(\omega \wedge \eta)$ は$\wedge^{p+q}(V, W_3)$ の元になり、

$$A(\wedge) : \wedge^p(V, W_1) \times \wedge^q(V, W_2) \to \wedge^{p+q}(V, W_3)$$

は双線形写像になることがわかる。双線形写像 A が明かな場合は $A(\omega \wedge \eta)$ を単に$\omega \wedge \eta$とも書く。(本や論文によって外積の定義式の係数がことなるので注意を要する。)

命題 1.1.5 V, V', W_1, W_2, W_3を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_2 \to W_3$を双線形写像とする。線形写像 $f : V \to V'$に対して

$$f^*(A(\omega \wedge \eta)) = A((f^*\omega) \wedge (f^*\eta)) \qquad (\omega \in \wedge^p(V', W_1), \eta \in \wedge^q(V', W_2))$$

が成り立つ。

証明 $v_i \in V$に対して

$$\begin{aligned} & f^*(A(\omega \wedge \eta))(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ = \ & (A(\omega \wedge \eta))(f(v_1), \ldots, f(v_{p+q})) \\ = \ & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(f(v_{\sigma(1)}), \ldots, f(v_{\sigma(p)})), \eta(f(v_{\sigma(p+1)}), \ldots, f(v_{\sigma(p+n)}))) \\ = \ & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A((f^*\omega)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}), (f^*\eta)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\ = \ & A((f^*\omega) \wedge (f^*\eta))(v_1, \ldots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

命題 1.1.6 V, W_1, W_2を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_1 \to W_2$を双線形写像とする。$A$ が対称ならば (すなわち、$A(X, Y) = A(Y, X)$)、

$$A(\omega \wedge \eta) = (-1)^{pq} A(\eta \wedge \omega) \qquad (\omega \in \wedge^p(V, W_1), \eta \in \wedge^q(V, W_1))$$

が成り立ち、A が交代ならば (すなわち、$A(X, Y) = -A(Y, X)$)、

$$A(\omega \wedge \eta) = (-1)^{pq+1} A(\eta \wedge \omega) \qquad (\omega \in \wedge^p(V, W_1), \eta \in \wedge^q(V, W_1))$$

が成り立つ。

証明　S_{p+q}の元τを

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ q+1 & \cdots & p+q & 1 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

によって定める。$\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^{pq}$に注意しておく。$v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$に対して

$$\begin{aligned}
& A(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\
= & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) A(\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}), \eta(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)})) \\
= & \frac{1}{p!q!} \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}), \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})).
\end{aligned}$$

ここで、A が対称の場合は

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{p!q!} (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}), \omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\
= & (-1)^{pq} A(\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{p+q})
\end{aligned}$$

となり、A が交代の場合は

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{p!q!} (-1)^{pq+1} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}), \omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\
= & (-1)^{pq+1} A(\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{p+q})
\end{aligned}$$

となる。

定理 1.1.7 Vを実ベクトル空間としWを代数とする。Wの積を$W \times W$からWへの双線形写像とみなしてWに値を持つV上の交代形式の外積を定めると、$\omega \in \wedge^p(V, W)$, $\eta \in \wedge^q(V, W)$, $\zeta \in \wedge^r(V, W)$ に対して

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

が成り立つ。

証明　以下の計算では、

$$S_{p+q} = \{\tau \in S_{p+q+r} \mid \tau(i) = i \ (p+q+1 \le i \le p+q+r)\}$$

とみなすことにする。$v_1, \ldots, v_{p+q+r} \in V$をとる。

$$\begin{aligned}
& ((\omega \wedge \eta) \wedge \zeta)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
= & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma)(\omega \wedge \eta)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \cdot \zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p+q)!r!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \\
&\quad \left\{\frac{1}{p!q!}\sum_{\tau\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_{\sigma\tau(1)},\dots,v_{\sigma\tau(p)})\cdot\eta(v_{\sigma\tau(p+1)},\dots,v_{\sigma\tau(p+q)})\right\} \\
&\quad \cdot\zeta(v_{\sigma(p+q+1)},\dots,v_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\sum_{\tau\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\cdot \\
&\quad (\omega(v_{\sigma\tau(1)},\dots,v_{\sigma\tau(p)})\cdot\eta(v_{\sigma\tau(p+1)},\dots,v_{\sigma\tau(p+q)}))\cdot\zeta(v_{\sigma(p+q+1)},\dots,v_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \\
&\quad (\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\cdot\eta(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)}))\cdot\zeta(v_{\sigma(p+q+1)},\dots,v_{\sigma(p+q+r)}).
\end{aligned}
$$

同様の計算で

$$
\begin{aligned}
&(\omega\wedge(\eta\wedge\zeta))(v_1,\dots,v_{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \\
&\quad \omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\cdot(\eta(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)})\cdot\zeta(v_{\sigma(p+q+1)},\dots,v_{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}
$$

となることもわかる。したがって $(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta=\omega\wedge(\eta\wedge\zeta)$。

注意 1.1.8 Vを実ベクトル空間とし Wを代数とする。定理 1.1.7より、$\omega\in\wedge^p(V,W)$, $\eta\in\wedge^q(V,W)$, $\zeta\in\wedge^r(V,W)$ に対して $(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta=\omega\wedge(\eta\wedge\zeta)$ が成り立つので、これを単に $\omega\wedge\eta\wedge\zeta$と書くことにする。$W=\mathbf{R}$ の場合、双線形写像 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は実数の積を考えて交代形式の外積をとる。

補題 1.1.9 Vを実ベクトル空間とし、$\omega^1,\dots,\omega^p\in\wedge^1V^*$と $v_1,\dots,v_p\in V$をとると

$$
(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p)(v_1,\dots,v_p)=\sum_{\tau\in S_p}\mathrm{sgn}(\tau)\omega^1(v_{\sigma(1)})\cdots\omega^p(v_{\sigma(p)})=\det(\omega^i(v_j))
$$

が成り立つ。

証明 p に関する数学的帰納法で証明しよう。$p=1$ のときは明か。$p=q$のときに上の式が成り立つと仮定して、$p=q+1$ のときも成り立つことを示そう。

$$
\begin{aligned}
&(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{q+1})(v_1,\dots,v_{q+1}) \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_{q+1}}\mathrm{sgn}(\sigma)(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^q)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)})\cdot\omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)}) \\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_{q+1}}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{\tau\in S_q}\mathrm{sgn}(\tau)\omega^1(v_{\sigma\tau(1)})\cdots\omega^q(v_{\sigma\tau(q)})\cdot\omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_{q+1}}\sum_{\tau\in S_q}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\omega^1(v_{\sigma\tau(1)})\cdots\omega^q(v_{\sigma\tau(q)})\cdot\omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)})\\
&= \sum_{\sigma\in S_{q+1}}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega^1(v_{\sigma(1)})\cdots\omega^q(v_{\sigma(q)})\cdot\omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)})\\
&= \det(\omega^i(v_j)).
\end{aligned}
$$

定理 1.1.10 Vを n 次元実ベクトル空間とする。$e_1,\dots,e_n$を Vの基底とし、$\omega^1,\dots,\omega^n$をその双対基底とする。このとき、$\wedge^0 V^* = \mathbf{R}$ で $n < p$ のとき$\wedge^p V^* = \{0\}$ が成り立ち、$1 \le p \le n$ のとき

$$
(*) \qquad \omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p} \qquad (1\le j_1<\cdots<j_p\le n)
$$

が$\wedge^p V^*$の基底になる。特に $\dim\wedge^p V^* = \binom{n}{p}$である。さらに$\omega\in\wedge^p V^*$をとり $1\le j_1<\cdots< j_p\le n$ に対して

$$
a_{j_1\dots j_p} = \omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p})
$$

とおくと

$$
\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\dots j_p}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}
$$

と表すことができる。

証明 定義 1.1.1より$\wedge^0 V^* = \mathbf{R}$。$p>0$ とし$\omega\in\wedge^p V$について考える。$v_1,\dots,v_p\in V$をとり $v_i = \sum_{j=1}^n b_i^j e_j$とおく。

$$
\omega(v_1,\dots,v_p) = \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} b_1^{j_1}\cdots b_p^{j_p}\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p})
$$

において $j_k = j_l$ならば$\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = 0$ になる。$n<p$ のときは必ずこのような k,lが存在するので、$\omega = 0$ となり$\wedge^p V^* = \{0\}$。

$1\le p\le n$ の場合を考えよう。上の式において和は $j_1,\dots,j_p$がすべて異なる項だけをとればよいので、

$$
\begin{aligned}
\omega(v_1,\dots,v_p) &= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{\sigma\in S_p} b_1^{j_{\sigma(1)}}\cdots b_p^{j_{\sigma(p)}}\omega(e_{j_{\sigma(1)}},\dots,e_{j_{\sigma(p)}})\\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma) b_1^{j_{\sigma(1)}}\cdots b_p^{j_{\sigma(p)}}\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p}).
\end{aligned}
$$

ここで $b_{ij_{\sigma(i)}} = \omega^{j_{\sigma(i)}}(v_i)$ だから、補題 1.1.9より

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma) b_1^{j_{\sigma(1)}}\cdots b_p^{j_{\sigma(p)}} &= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{j_{\sigma(1)}}(v_1)\cdots\omega^{j_{\sigma(p)}}(v_p)\\
&= (\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p})(v_1,\dots,v_p).
\end{aligned}
$$

したがって

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\dots j_p}(\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p})(v_1, \dots, v_p)$$

となり

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\dots j_p}\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p}.$$

以上で $(*)$ が$\wedge^p V^*$を生成することがわかった。そこで $(*)$ が線形独立になることを示そう。ある $c_{j_1\dots j_p} \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\dots j_p}\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} = 0$$

と仮定する。両辺を $(e_{k_1}, \dots, e_{k_p})$ $(k_1 < \cdots < k_p)$ に作用させると補題 1.1.9より

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\dots j_p}\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p}(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\dots j_p} \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{j_{\sigma(1)}}(e_{k_1}) \cdots \omega^{j_{\sigma(p)}}(e_{k_p}) \\ &= c_{k_1\dots k_p}. \end{aligned}$$

したがって $(*)$ は線形独立になり$\wedge^p V^*$の基底になる。$(*)$ の元の全体の個数は n 個から p 個とる組合せの数に等しいので $\dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}$。

系 1.1.11 Vを n 次元実ベクトル空間とし、Wを m 次元実ベクトル空間とする。$e_1, \dots, e_n$ を Vの基底とし、$\omega^1, \dots, \omega^n$をその双対基底とする。$f_1, \dots, f_m$を Wの基底とする。このとき$\wedge^0(V, W) = W$で $n < p$ のとき$\wedge^p(V, W) = \{0\}$ が成り立ち、$1 \leq p \leq n$ のとき

$$(*) \qquad \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k \qquad (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n,\ 1 \leq k \leq m)$$

を $v_i \in V$に対して

$$(\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k)(v_1, \dots, v_p) = (\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p})(v_1, \dots, v_p) f_k$$

によって定義すると、$(*)$ は$\wedge^p(V, W)$ の基底になる。特に $\dim \wedge^p(V, W) = \binom{n}{p} m$ である。さらに$\omega \in \wedge^p(V, W)$ をとり、$1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ に対して

$$\sum_{k=1}^m a^k_{j_1\dots j_p} f_k = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \in W$$

とおくと

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{k=1}^m a^k_{j_1\dots j_p}\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k$$

と表すことができる。

証明 $\wedge^p V^*$の m 個の直和$\overset{m}{\oplus}\wedge^p V^*$から$\wedge^p(V,W)$ への写像 Sを

$$S(\phi_1,\ldots,\phi_m)=\sum_{k=1}^{m}\phi_k f_k \qquad ((\phi_1,\ldots,\phi_m)\in\overset{m}{\oplus}\wedge^p V)$$

によって定める。Sの定義式より Sが線形写像であることがわかる。$f_1,\ldots,f_m$は Wの基底だから Sは単射になる。任意の$\omega\in\wedge^p(V,W)$ に対して

$$\omega(v_1,\ldots,v_p)=\sum_{k=1}^{m}\xi^k(v_1,\ldots,v_p)f_k \qquad (v_1,\ldots,v_p\in V)$$

とおくと、$\omega\in\wedge^p(V,W)$ だから、各 kについて$\xi^k\in\wedge^p V^*$が成り立つ。$S(\xi^1,\ldots,\xi^m)=\omega$ だから、Sは全射になり、線形同型写像になる。定理 1.1.10を$\overset{m}{\oplus}\wedge^p V^*$の各直和因子に適用すると、$(*)$ が$\wedge^p(V,W)$ の基底になることがわかり、$\dim\wedge^p(V,W)=\binom{n}{p}m$ が成り立つ。

また $j_1<\cdots<j_p$に対して

$$\omega(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})=\sum_{k=1}^{m}\xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})f_k$$

となり $a^k_{j_1\cdots j_p}=\xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})$。したがって定理 1.1.10より

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{k=1}^{m}\xi^k f_k\\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1<\cdots<j_p}\xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}f_k\\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{k=1}^{m}a^k_{j_1\cdots j_p}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}f_k.\end{aligned}$$

1.2 微分形式

定義 1.2.1 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを n 次元多様体とする。Mの各点 x に対して$\wedge^p(T_x(M),V)$ の元ω_xを対応させる対応ωが次の条件を満たすとき、ωを V**に値を持つ** M**上の** p **次微分形式**と呼ぶ。$\mathbf{R}$ に値を持つ微分形式を単に**微分形式**と呼ぶ。(条件)Mの任意の局所座標近傍 $(U;x^1,\ldots,x^n)$ に対して、

$$x\longmapsto\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)$$

がすべての $i_1,\ldots,i_p$について Uから Vへの C^∞級写像になる。

注意 1.2.2 有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ多様体 M上の 0 次微分形式は Mから Vへの C^∞級写像にほかならない。

例 1.2.3 fを多様体 Mから有限次元実ベクトル空間 Vへの C^∞級写像とする。このとき、fの微分 dfはVに値を持つ M上の 1 次微分形式になる。

証明 $n = \dim M$とし Mの局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとる。fは C^∞級写像だから

$$x \to df_x \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

も Uから Vへの C^∞級写像になる。よって dfは Vに値を持つ M上の 1 次微分形式である。

注意 1.2.4 ωを有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ n 次元多様体 M上の p 次微分形式とする。Mの局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとると、$x \in U$に対して$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ $(1 \leq i \leq n)$ は $T_x(M)$ の基底になり $(dx^i)_x$ $(1 \leq i \leq n)$ はその双対基底になる。そこで系 1.1.11を使うと、$x \in U$に対して$\omega_x \in \wedge^p(T_x(M), V)$ は

$$\omega_x = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \omega_x \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \right|_x \right) (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$$

と表すことができるので、ω_xを $(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$を使って表したときの係数がすべて Vに値を持つ C^∞級写像になることと、定義 1.2.1の (条件) は同値である。上のような微分形式ωの $(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$を使った表示を微分形式の**局所表示**という。

命題 1.2.5 有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ多様体 M上の p 次微分形式の全体を $\Omega^p(M; V)$ で表し、$f, g \in C^\infty(M)$, $\omega, \eta \in \Omega^p(M; V)$ と $x \in M$に対して

$$(f\omega + g\eta)_x = f(x)\omega_x + g(x)\eta_x \quad (\text{右辺の演算は}\wedge^p(T_x(M), V)\text{ での演算})$$

として演算を定義すると$\Omega^p(M; V)$ は代数 $C^\infty(M)$ 上の加群、つまり $C^\infty(M)$ 加群になる。また V_1, V_2, V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A : V_1 \times V_2 \to V_3$を双線形写像とする。$\phi \in \Omega^p(M; V_1), \psi \in \Omega^q(M; V_2)$ と $x \in M$に対して

$$\begin{aligned} &A(\phi \wedge \psi)_x = A(\phi_x \wedge \psi_x) \\ &(\text{右辺の } A(\wedge) \text{ は}\wedge^p(T_x(M), V_1) \times \wedge^q(T_x(M), V_2)\text{ での外積}) \end{aligned}$$

として微分形式の外積を定義すると、$A(\phi \wedge \psi) \in \Omega^{p+q}(M; V_3)$ となり

$$A(\wedge) : \Omega^p(M; V_1) \times \Omega^q(M; V_2) \to \Omega^{p+q}(M; V_3)$$

は $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像である。

証明 $\Omega^p(M; V)$ が $C^\infty(M)$ 加群であることを示すためには $f, g \in C^\infty(M)$, $\omega, \eta \in \Omega^p(M; V)$ に対して $f\omega + g\eta \in \Omega^p(M; V)$ を示せば十分で、他の条件は$\wedge^p(T_x(M); V)$ が

ベクトル空間であることを使えばわかる。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を Mの任意の局所座標近傍とする。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}\omega_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x, \\ \eta_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x\end{aligned}$$

とおくと、注意 1.2.4より、$a_{i_1\cdots i_p}, b_{i_1\cdots i_p}$は$U$から$V$への C^∞級写像になり

$$(f\omega + g\eta)_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} (f(x)a_{i_1\cdots i_p}(x) + g(x)b_{i_1\cdots i_p}(x))(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.$$

$fa_{i_1\cdots i_p} + gb_{i_1\cdots i_p}$は$U$から$V$への C^∞級写像だから、$f\omega + g\eta$は微分形式になる。

$\phi \in \Omega^p(M; V_1), \psi \in \Omega^q(M; V_2)$ に対して $A(\phi\wedge\psi) \in \Omega^{p+q}(M; V_3)$ を示す。$A(\wedge)$ が $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像であることは、交代形式の外積の双線形性から使えばわかる。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x, \\ \psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

とおくと、注意 1.2.4より、$c_{i_1\cdots i_p}$と $d_{j_1\cdots j_q}$はそれぞれUからV_1と V_2への C^∞級写像になる。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}& A(\phi \wedge \psi)_x \\ = & \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} A((c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x) \wedge \\ & \qquad (d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x)) \\ = & \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} A(c_{i_1\cdots i_p}(x), d_{j_1\cdots j_q}(x)) \cdot \\ & \qquad (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

だから $A(\phi\wedge\psi)_x$の $(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x$による表示の係数は、$A(c_{i_1\cdots i_p}(x), d_{j_1\cdots j_q}(x))$ の線形結合になりUからV_3への C^∞級写像になる。したがって、$A(\phi\wedge\psi)$ はV_3に値を持つM上の $p+q$次微分形式になる。

命題 1.2.6 Vを有限次元実ベクトル空間としFを多様体Mから多様体Nへの C^∞級写像とする。$x \in M$におけるFの微分写像 $dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ と定義 1.1.5の交代形式の引き戻しを使って、$\omega \in \Omega^p(N; V)$ に対して

$$(F^*\omega)_x = (dF_x)^*\omega_{F(x)}$$

として $(F^*\omega)_x \in \wedge^p(T_x(M); V)$ を定義すると $F^*\omega \in \Omega^p(M; V)$ が成り立つ。

証明 $m=\dim M, n=\dim N$としておく。$F^*\omega\in\Omega^p(M;V)$を示すためには、$F(U)\subset U'$を満たす$M$と$N$の局所座標近傍$(U;x^1,\dots,x^m)$と$(U';y^1,\dots,y^n)$をとったときに

$$x\longmapsto (F^*\omega)_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)$$

がすべての$i_1,\dots,i_p$についてUからVへのC^∞級写像になることを示せばよい。$x\in U$に対して

$$dF_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}(x)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}&(F^*\omega)_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)\\ =\ &\omega_{F(x)}\left(dF_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x\right),\cdots,dF_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)\right)\\ =\ &\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^n\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\,\omega_{F(x)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_{F(x)},\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_{F(x)}\right)\end{aligned}$$

となるので、これはUからVへのC^∞級写像になる。よって$F^*\omega\in\Omega^p(M;V)$が成り立つ。

定義 1.2.7 命題 1.2.6で定めた$F^*\omega$を、微分形式ωのFによる**引戻し**と呼ぶ。

命題 1.2.8 Vを有限次元実ベクトル空間とし$F:M\to M'$, $G:M'\to M''$を多様体の間のC^∞級写像とする。このとき$\omega\in\Omega^p(M'',V)$に対して、

$$(G\circ F)^*\omega=F^*(G^*\omega)$$

が成り立つ。

証明 微分写像は、$d(G\circ F)_x=dG_{F(x)}\circ dF_x$を満たす。よって$v\in T_x(M)$に対して

$$\begin{aligned}((G\circ F)^*\omega)_x(v)&=\omega_{G\circ F(x)}(d(G\circ F)_x(v))=\omega_{G(F(x))}(dG_{F(x)}\circ dF_x(v))\\&=(G^*\omega)_{F(x)}(dF_x(v))=(F^*(G^*\omega))_x(v)\end{aligned}$$

となり、$(G\circ F)^*\omega=F^*(G^*\omega)$がわかる。

命題 1.2.9 V_1,V_2,V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A:V_1\times V_2\to V_3$を双線形写像とする。Fを多様体Mから多様体NへのC^∞級写像とする。このとき$\phi\in\Omega^p(N;V_1),\psi\in\Omega^q(N;V_2)$に対して

$$F^*(A(\phi\wedge\psi))=A((F^*\phi)\wedge(F^*\psi))$$

が成り立つ。

証明 命題 1.1.5より各 $x \in M$に対して

$$\begin{aligned} F^*(A(\phi\wedge\psi))_x &= (dF_x)^*(A(\phi\wedge\psi)_{F(x)}) \\ &= (dF_x)^*(A(\phi_{F(x)}\wedge\psi_{F(x)})) \\ &= A(((dF_x)^*\phi_{F(x)})\wedge((dF_x)^*\psi_{F(x)})) \\ &= A((F^*\phi)_x\wedge(F^*\psi)_x) \\ &= A((F^*\phi)\wedge(F^*\psi))_x \end{aligned}$$

となるので、$F^*(A(\phi\wedge\psi)) = A((F^*\phi)\wedge(F^*\psi))$ が成り立つ。

1.3 微分形式とベクトル場

定義 1.3.1 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。M上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群であり、Vに値を持つ M上の 0 次微分形式の全体$\Omega^0(M;V)$ も $C^\infty(M)$ 加群だから (命題 1.2.5)、$\mathfrak{X}(M)^p$から$\Omega^0(M;V)$ への $C^\infty(M)$ 多重線形写像 (各成分について $C^\infty(M)$ 加群の線形写像) を考えることができる。$\mathfrak{X}(M)^p$から$\Omega^0(M;V)$ への $C^\infty(M)$ 多重線形写像ωが、任意の $i \neq j$について

$$\omega(\ldots,\overset{i}{\breve{X_i}},\ldots,\overset{j}{\breve{X_j}},\ldots)+\omega(\ldots,\overset{i}{\breve{X_j}},\ldots,\overset{j}{\breve{X_i}},\ldots)=0 \qquad (X_l\in\mathfrak{X}(M))$$

を満たすときωを$\Omega^0(M;V)$ に値を持つ $\mathfrak{X}(M)$ 上の p 次 $C^\infty(M)$ 交代形式と呼び、それらωの全体を$\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ で表す。$\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ に、$\Omega^0(M;V)$ の $C^\infty(M)$ 加群の構造から定まる $C^\infty(M)$ 加群の構造を入れることにする。

$$\wedge^0_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V)) = \Omega^0(M;V)$$

としておく。

例 1.3.2 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。$l = \dim V$とし Vの基底 $v_1,\ldots,v_l$をとると$\Omega^0(M,V)$ の元ωは

$$\omega=\sum_{i=1}^{l}\omega^i v_i \quad (\omega^i\in C^\infty(M))$$

と表すことができる。M上のベクトル場 Xは $C^\infty(M)$ に作用し $X\omega^i \in C^\infty(M)$ となる。そこで

$$X\omega=\sum_{i=1}^{l}(X\omega^i)v_i$$

として $X\omega \in \Omega^0(M,V)$ を定める。$X\omega$の定義は Vの基底のとり方によらないことがわかる。これによって、$\mathfrak{X}(M)$ の元は$\Omega^0(M;V)$ に作用する。この作用は $\mathfrak{X}(M)$ の $C^\infty(M) = \Omega^0(M;\mathbf{R})$ への作用の拡張である。$\omega \in \Omega^0(M;V)$ をとり

$$(D\omega)(X) = X\omega \qquad (X\in\mathfrak{X}(M))$$

として写像

$$D\omega : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^0(M;V)$$

を定めると $D\omega$は実線形写像になる。さらに $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(D\omega)(fX) = \sum_{i=1}^{l}(fX\omega^i)v_i = f\sum_{i=1}^{l}(X\omega^i)v_i = f(D\omega)(X)$$

となるので $D\omega$は $C^\infty(M)$ 加群の線形写像になり $D\omega \in \wedge^1_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V))$ である。

補題 1.3.3 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。p を自然数とすると、$\omega \in \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V)), \sigma \in S_p$に対して

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_1, \dots, X_p) \qquad (X_i \in \mathfrak{X}(M))$$

が成り立つ。

証明 命題 1.1.2の証明と同様。

定義 1.3.4 V_1, V_2, V_3を実ベクトル空間とし双線形写像 $A : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_3$があるとする。このとき$\omega \in \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_1))$ と$\eta \in \wedge^q_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_2))$ の外積 $A(\omega \wedge \eta) \in \wedge^{p+q}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_3))$ を $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} & A(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{p+q}) \\ = \ & \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}), \eta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})) \end{aligned}$$

と定義する。ただし右辺の $A(\ ,\ )$ は、$\phi \in \Omega^0(M;V_1), \psi \in \Omega^0(M;V_2)$ と $x \in M$に対して

$$A(\phi, \psi)_x = A(\phi_x, \psi_x)$$

で定める。すると、$A(\phi, \psi) \in \Omega^0(M;V_3)$ となる。

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \in \Omega^0(M;V_1), \quad \eta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \in \Omega^0(M;V_2)$$

だから、

$$A(\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}), \eta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})) \in \Omega^0(M;V_3).$$

よって、

$$A(\omega \wedge \eta) \in \wedge^{p+q}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_3))$$

となり、

$$\begin{aligned} A(\wedge) \ : \ & \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_1)) \times \wedge^q_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_2)) \\ & \longrightarrow \wedge^{p+q}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V_3)) \end{aligned}$$

は $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像になる。双線形写像 A が明かな場合は $A(\omega \wedge \eta)$ を単に$\omega \wedge \eta$ とも書く。

補題 1.3.5 Mを多様体とし x を Mの点とする。

(1) $v \in T_x(M)$ に対して $Y_x = v$となる $Y \in \mathfrak{X}(M)$ が存在する。

(2) x の開近傍 Uと $X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して x の開近傍 $W \subset U$と $Y \in \mathfrak{X}(M)$ が存在し $X_y = Y_y$ $(y \in W)$ を満たす。

定理 1.3.6 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M;V),\ X_i \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p))(x) = \omega_x((X_1)_x,\ldots,(X_p)_x) \quad (x \in M)$$

として Mから Vへの写像$\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p)$ を定める。すると$\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p) \in \Omega^0(M;V)$ となり、写像$\bar{\omega} : \mathfrak{X}(M)^p \to \Omega^0(M;V)$ は$\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ の元になる。さらに

$$\bar{\ } : \Omega^p(M;V) \to \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$$

は $C^\infty(M)$ 加群の同型写像になる。また V_1,V_2,V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A : V_1 \times V_2 \to V_3$を双線形写像とする。このとき$\phi \in \Omega^p(M;V_1)$ と$\psi \in \Omega^q(M;V_2)$ に対して

$$A(\bar{\phi} \wedge \bar{\psi}) = \overline{A(\phi \wedge \psi)}$$

が成り立つ。ただし左辺の $A(\wedge)$ は定義 1.3.4で定めた外積であり、右辺の $A(\wedge)$ は命題 1.2.5の中で定めた外積である。

証明 $n = \dim M$とおく。$(U;x^1,\ldots,x^n)$ を Mの任意の局所座標近傍とする。$X_i \in \mathfrak{X}(M)$ の Uにおける局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^n a_i^j(x)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \qquad (x \in U)$$

とすると、a_i^jは U上の C^∞級関数になる。$\omega \in \Omega^p(M;V)$ をとると $x \in U$に対して

$$\begin{aligned} & (\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p))(x) \\ = \ & \omega_x((X_1)_x,\ldots,(X_p)_x) \\ = \ & \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^n a_1^{j_1}(x)\cdots a_p^{j_p}(x)\,\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right|_x,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right|_x\right) \end{aligned}$$

だから、写像$\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p)$ は Uにおいて C^∞級写像になり、$\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p)$ は Mから Vへの C^∞級写像である。つまり$\bar{\omega}(X_1,\ldots,X_p) \in \Omega^0(M;V)$ が成り立つ。

$\omega \in \Omega^p(M;V)$ に対して$\bar{\omega}$が$\wedge^p(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ の元であることは微分形式の定義からわかる。$\bar{\omega}$が$\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ の元になることを示すためには、$\bar{\omega}$が $C^\infty(M)$ 加群

の多重線形写像になることを示せばよい。$X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$, $f_1,\dots,f_p \in C^\infty(M)$, $x \in M$ に対して

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(f_1X_1,\dots,f_pX_p)(x) &= \omega_x((f_1X_1)_x,\dots,(f_pX_p)_x) \\
&= \omega_x(f_1(x)(X_1)_x,\dots,f_p(x)(X_p)_x) \\
&= f_1(x)\cdots f_p(x)\omega_x((X_1)_x,\dots,(X_p)_x) \\
&= \{f_1\cdots f_p\bar{\omega}(X_1,\dots,X_p)\}(x)
\end{aligned}$$

だから

$$\bar{\omega}(f_1X_1,\dots,f_pX_p) = f_1\cdots f_p\bar{\omega}(X_1,\dots,X_p).$$

したがって$\bar{\omega}$は $C^\infty(M)$ 加群の多重線形写像になり、$\bar{\omega} \in \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$。

$\omega,\eta \in \Omega^p(M;V)$, $f,g \in C^\infty(M)$, $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$に対して

$$\begin{aligned}
&\overline{(f\omega+g\eta)}(X_1,\dots,X_p)(x) \\
=\ & (f\omega+g\eta)_x((X_1)_x,\dots,(X_p)_x) \\
=\ & f(x)\omega_x((X_1)_x,\dots,(X_p)_x) + g(x)\eta_x((X_1)_x,\dots,(X_p)_x) \\
=\ & f(x)\bar{\omega}(X_1,\dots,X_p)(x) + g(x)\bar{\eta}(X_1,\dots,X_p)(x) \\
=\ & (f\bar{\omega}+g\bar{\eta})(X_1,\dots,X_p)(x)
\end{aligned}$$

だから

$$\overline{(f\omega+g\eta)} = f\bar{\omega}+g\bar{\eta}.$$

したがって$^- : \Omega^p(M;V) \to \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ は $C^\infty(M)$ 加群の線形写像になる。

この写像が同型写像になることを以下で示そう。$\omega \in \Omega^p(M;V)$, $\bar{\omega}=0$ とすると、任意の $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$ に対して$\bar{\omega}(X_1,\dots,X_p)=0$ が成り立つ。したがって任意の $x \in M$ に対して

$$0 = \bar{\omega}(X_1,\dots,X_p)(x) = \omega_x((X_1)_x,\dots,(X_p)_x).$$

$v_1,\dots,v_p \in T_x(M)$ を任意にとると、補題 1.3.5より $Y_1,\dots,Y_p \in \mathfrak{X}(M)$ が存在し、$(Y_i)_x = v_i$ $(1 \le i \le p)$ を満たす。よって

$$\omega_x(v_1,\dots,v_p) = \omega_x((Y_1)_x,\dots,(Y_p)_x) = 0$$

となりω_xは$\wedge^p(T_x(M),V)$ の元として 0 である。したがって$\omega=0$ が成り立ち、$^-$は単射になる。

次に$^-$が全射になること、つまり$\phi \in \wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ に対して、$\bar{\omega}=\phi$となる $\omega \in \Omega^p(M;V)$ が存在することを示す。そのためには $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$ と $x \in M$をとったときに $(\phi(X_1,\dots,X_p))(x)$ がベクトル場 X_iの x での値 $(X_i)_x$だけに依存していることが重要になる。(ϕは $\mathfrak{X}(M)^p$から$\Omega^0(M;V)$ への写像である。) 以下でこのことを証明しよう。

まず $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$ のうちの 1 つ X_rが Mの開集合 U上で 0 であるときに、

$$\phi(X_1,\dots,X_p)(x) = 0 \qquad (x \in U)$$

となることを示す。各 $x \in U$について x の開近傍 W_0, W_1と $h \in C^\infty(M)$ が存在し

$$\bar{W}_1 \subset W_0, \quad \bar{W}_0 \subset U$$
$$h(y) = \begin{cases} 1 & (y \in W_1) \\ 0 & (y \notin W_0) \end{cases}$$

を満たす。したがって X_rの仮定より $(1-h)X_r = X_r$が成り立つ。ϕは $C^\infty(M)$ 多重線形だから

$$\begin{aligned} \phi(X_1, \ldots, X_p) &= \phi(X_1, \ldots, (1-h)X_r, \ldots, X_p) \\ &= (1-h)\phi(X_1, \ldots, X_p) \end{aligned}$$

となり

$$\phi(X_1, \ldots, X_p)(x) = (1-h(x))\phi(X_1, \ldots, X_p)(x) = 0.$$

さらに $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$ のうちの 1 つ X_rが Mの 1 点 x において 0 であるときに、

$$\phi(X_1, \ldots, X_p)(x) = 0$$

となることを示す。x を含む局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとり、Uにおける X_rの局所表示を

$$(X_r)_y = \sum_{i=1}^n a^i(y) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y \qquad (a^i \in C^\infty(U))$$

とおく。X_rの仮定より $a^i(x) = 0$ である。U上のベクトル場$\frac{\partial}{\partial x^i}$に補題 1.3.5の (2) を適用すると、$x$ の開近傍 $U' \subset U$と $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ が存在し$\frac{\partial}{\partial x^i}|_y = (Y_i)_y$ $(y \in U')$ を満たす。したがって

$$(X_r)_y = \sum_{i=1}^n a^i(y)(Y_i)_y \qquad (y \in U')$$

が成り立つ。さらに、x の開近傍 Wと $f^i \in C^\infty(M)$ が存在し $a^i(y) = f^i(y)$ $(y \in W)$ を満たす。よって

$$(X_r)_y = \sum_{i=1}^n f^i(y)(Y_i)_y \qquad (y \in W)$$

となり M上のベクトル場 $X_r - \sum_{i=1}^n f^i Y_i$は W上で 0 になる。先に示したことより $y \in W$に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(X_1, \ldots, X_r - \sum_{i=1}^n f^i Y_i, \ldots, X_p)(y) \\ &= \phi(X_1, \ldots, X_r, \ldots, X_p)(y) - \sum_{i=1}^n a^i(y)\phi(X_1, \ldots, \overset{r}{\breve{Y_i}}, \ldots, X_p)(y). \end{aligned}$$

特に

$$\phi(X_1, \ldots, X_p)(x) = \sum_{i=1}^n a^i(x)\phi(X_1, \ldots \overset{r}{\breve{Y_i}}, \ldots, X_p)(x) = 0.$$

今度は $X_1,\dots,X_p,Y_1,\dots,Y_p\in\mathfrak{X}(M)$ が Mの 1 点 x に対して $(X_i)_x=(Y_i)_x$ $(1\le i\le p)$ を満たせば

$$\phi(X_1,\dots,X_p)(x)=\phi(Y_1,\dots,Y_p)(x)$$

となることを示す。X_i,Y_iの仮定と上で示したことより

$$\begin{aligned}
&\phi(X_1,\dots,X_p)(x)-\phi(Y_1,\dots,Y_p)(x)\\
=\ &(\phi(X_1,\dots,X_p)(x)-\phi(Y_1,X_2,\dots,X_p)(x))\\
&+(\phi(Y_1,X_2,\dots,X_p)(x)-\phi(Y_1,Y_2,X_3,\dots,X_p)(x))\\
&+\cdots\cdots\\
&+(\phi(Y_1,\dots,Y_{p-1},X_p)(x)-\phi(Y_1,\dots,Y_{p-1},Y_p)(x))\\
=\ &\sum_{r=1}^{p}\phi(Y_1,\dots,Y_{r-1},X_r-Y_r,X_{r+1},\dots,X_p)(x)\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

以上の結果を使って、各 $x\in M$に対して$\wedge^p(T_x(M),V)$ の元ω_xが対応する対応を構成する。$v_1,\dots,v_p\in T_x(M)$ に対して、補題 1.3.5の (1) より、$(X_i)_x=v_i$となる $X_i\in\mathfrak{X}(M)$ をとることができる。そこで

$$\omega_x(v_1,\dots,v_p)=\phi(X_1,\dots,X_p)(x)$$

としてω_xを定める。上で示したことより、このω_xの定め方は v_iのベクトル場への拡張のし方によらず矛盾なく定まっている。$\phi\in\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ より$\omega_x\in\wedge^p(T_x(M),V)$ となることがわかる。各 $x\in M$に対して x を含む局所座標近傍 $(U;x^1,\dots,x^n)$ をとる。U 上のベクトル場$\frac{\partial}{\partial x^i}$に補題 1.3.5の (2) を適用すると、$x$ の開近傍 $U'\subset U$と $Y_i\in\mathfrak{X}(M)$ が存在し$\frac{\partial}{\partial x^i}|_y=(Y_i)_y$ $(y\in U')$ を満たす。したがって $y\in U'$に対して

$$\omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x,\dots\left.\frac{\partial}{\partial x^p}\right|_y\right)=\phi(Y_1,\dots,Y_p)(y)$$

となり、これは U'から Vへの C^∞級写像である。よってωは M上の Vに値を持つ p 次微分形式になる。またωの定め方より$\bar{\omega}=\phi$となることもわかる。以上で$^-:\Omega^p(M;V)\to\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ が $C^\infty(M)$ 加群の同型写像になることがわかった。

最後に$\phi\in\Omega^p(M;V_1)$ と$\psi\in\Omega^q(M;V_2)$ に対して

$$A(\bar{\phi}\wedge\bar{\psi})=\overline{A(\phi\wedge\psi)}$$

が成り立つことを示そう。$X_1,\dots,X_{p+q}\in\mathfrak{X}(M)$ と $x\in M$に対して

$$\begin{aligned}
&A(\overline{\phi}\wedge\overline{\psi})(X_1,\dots,X_{p+q})(x)\\
=\ &\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\sigma)A(\bar{\phi}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(p)}),\bar{\psi}(X_{\sigma(p+1)},\dots,X_{\sigma(p+q)}))(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)A(\bar{\phi}(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)})(x),\bar{\psi}(X_{\sigma(p+1)},\ldots,X_{\sigma(p+q)})(x))\\
&= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \mathrm{sign}(\sigma)A(\phi_x((X_{\sigma(1)})_x,\ldots,(X_{\sigma(p)})_x),\psi_x((X_{\sigma(p+1)})_x,\ldots,(X_{\sigma(p+q)})_x))\\
&= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \mathrm{sign}(\sigma)A(\phi_x((X_{\sigma(1)})_x,\ldots,(X_{\sigma(p)})_x),\psi_x((X_{\sigma(p+1)})_x,\ldots,(X_{\sigma(p+q)})_x))\\
&= A(\phi_x\wedge\psi_x)((X_1)_x,\ldots,(X_{p+q})_x)\\
&= A(\phi\wedge\psi)_x((X_1)_x,\ldots,(X_{p+q})_x)\\
&= \overline{A(\phi\wedge\psi)}(X_1,\ldots,X_{p+q})(x).
\end{aligned}
$$

したがって

$$A(\bar{\phi}\wedge\bar{\psi}) = \overline{A(\phi\wedge\psi)}$$

が成り立つ。

注意 1.3.7 定理1.3.6で示した $C^\infty(M)$ 加群の同型対応によって、今後は V に値を持つ M 上の p 次微分形式 $\omega\in\Omega^p(M;V)$ を $\wedge^p_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Omega^0(M;V))$ の元と同一視することにする。

1.4 外微分

定理 1.4.1 V を有限次元実ベクトル空間とし M を n 次元多様体とする。$\omega\in\Omega^p(M;V)$ に対して次の条件を満たす $d\omega\in\Omega^{p+1}(M;V)$ が一意的に存在する。(条件) M の局所座標近傍 $(U;x^1,\ldots,x^n)$ における ω の局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

とすると

$$(d\omega)_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

証明 局所表示

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

によって定まる $\wedge^{p+1}(T_x(M),V)$ の元が局所座標近傍のとり方によらないことを示す。系1.1.11より、$a_{i_1\cdots i_p}(x)$ は ω_x から

$$a_{i_1\cdots i_p}(x) = \omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right) \qquad (1\le i_1<\cdots<i_p\le n)$$

によって定まっている。$i_1, \ldots, i_p$に括弧内のような大小関係がない場合も上の式によって $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ を定めておく。$(V; y^1, \ldots, y^n)$ を Mのもう 1 つの局所座標近傍とし、

$$b_{i_1\cdots i_p}(x) = \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{i_p}}\right|_x \right)$$

とおくと

$$\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)(dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x$$

となる。$x \in U \cap V$に対して $T_x(M)$ の 2 つ基底$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$と$\frac{\partial}{\partial y^i}|_x$の間の変換行列は

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x$$

となっているので、双対基底の間の変換行列は

$$(dy^i)_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

となり、また

$$b_{i_1\cdots i_p}(x) = \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^n \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x) a_{j_1\cdots j_p}(x)$$

が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x) = \delta_{jk}$$

に注意しておく。

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x \wedge (dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^n \frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x \wedge (dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^n \sum_{\substack{j,j_1,\ldots,j_p=1 \\ k,k_1,\ldots,k_p=1}}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x) a_{j_1\cdots j_p}(x) \right\} \cdot \\
& \qquad \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x \wedge \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^n \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ k,k_1,\ldots,k_p=1}}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x) a_{j_1\cdots j_p}(x) \right\} \cdot \\
& \qquad (dx^k)_x \wedge \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{i_r}}(x) \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_t}}(x) = \delta_{j_s k_t}$$

だから

$$\begin{aligned}\sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{i_r}}(x) \right) \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_t}}(x) &= -\sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{i_r}}(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_t}}(x) \right) \\ &= -\sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{i_r}}(x) \frac{\partial^2 y^{i_r}}{\partial x^k \partial x^{k_t}}(x)\end{aligned}$$

となり、これは k と k_tに関して対称である。他方、$(dx^k)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_p})_x$ は kと k_tに関して交代的だから

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ k,k_1,\ldots,k_p=1}}^{n} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x) \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_p}}{\partial x^k}(x) \cdot \\ &\qquad (dx^k)_x \wedge \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k,k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial a_{k_1 \cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_p})_x \\ &= \sum_{k_1 < \cdots < k_p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{k_1 \cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_p})_x.\end{aligned}$$

以上で $d\omega$の表示が局所座標近傍のとり方によらないことがわかった。$d\omega$の一意性もこのことからわかる。また $d\omega$が $p+1$ 次微分形式になることも $d\omega$の表示からわかる。

注意 1.4.2 定理 1.3.6において、$p = 0$ の場合を考えると$\omega \in \Omega^0(M;V)$ は Mから Vへの C^∞級写像になり、例 1.3.2で考えた $d\omega$と定理 1.4.1で存在を示した $d\omega$は一致する。

証明 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。例 1.3.2で考えた Vに値を持つ 1 次微分形式 $d\omega$の Uにおける局所表示は、例 1.3.2の証明中に示したことより

$$(d\omega)_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x$$

となり定理 1.4.1の $d\omega$の表示と一致する。

定義 1.4.3 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。定理 1.4.1より定まる写像 $d : \Omega^p(M;V) \to \Omega^{p+1}(M;V)$ を微分形式の**外微分**と呼ぶ。

定理 1.4.4 Vを有限次元実ベクトル空間とし Fを多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。このとき、Fによる微分形式の引き戻し $F^* : \Omega^p(N;V) \to \Omega^p(M;V)$ は外微分と可換になる。

証明 $m = \dim M$, $n = \dim N$としておく。$\omega \in \Omega^p(N;V)$ とする。$F(U) \subset U'$を満たすMと Nの局所座標近傍 $(U;x^1,\ldots,x^m)$ と $(U';y^1,\ldots,y^n)$ をとる。

$$a_{j_1\cdots j_p}(y) = \omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_y,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_y\right)$$

とおくとωの U'における局所表示は

$$\omega_y = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\cdots j_p}(y)(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y$$

となる。命題 1.2.6の証明中の計算より $x \in U$に対して

$$\begin{aligned}&(F^*\omega)_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)\\ =\ &\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x)).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&(d(F^*\omega))_x\\ =\ &\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x))\right\}\cdot\\ &(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x.\end{aligned}$$

ここで$\dfrac{\partial^2(y^{j_r}\circ F)}{\partial x^i\partial x^{i_r}}(x)$ は i と i_rに関して対称で、$(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$は i と i_rに関して交代的だから

$$\begin{aligned}&(d(F^*\omega))_x\\ =\ &\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}\cdot\\ &(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\\ =\ &\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}\cdot\\ &(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x.\end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned}(d\omega)_y &= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y\wedge(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y\wedge(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y\end{aligned}$$

だから命題 1.1.5より

$$\begin{aligned}(F^*(d\omega))_x &= (dF_x)^*(d\omega)_{F(x)} \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)}\wedge \\ &\quad (dF_x)^*(dy^{j_1})_{F(x)}\wedge\cdots\wedge(dF_x)^*(dy^{j_p})_{F(x)}.\end{aligned}$$

ここで

$$(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} = (dy^j)_{F(x)}\circ dF_x = d(y^j\circ F)_x = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x$$

でさらに

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} \\ =\ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \\ =\ &\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&(F^*(d\omega))_x \\ =\ &\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x)\cdot \\ &(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\ =\ &(d(F^*\omega))_x.\end{aligned}$$

したがって $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ が成り立つ。

注意 1.4.5 定理 1.4.4において Mが Nの部分多様体で $F : M \to N$が包含写像のとき、N上の微分形式を外微分してから Mに制限しても先に Mに制限してから M上の微分形式として外微分しても結果は等しくなる。特別な場合として Mが Nの開集合の場合がある。これらの場合は包含写像を省略して記述することもある。

補題 1.4.6 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M;V) \to \Omega^{p+1}(M;V)$$

は実線形写像になる。

証明 定理 1.4.1の外微分の定め方より d は実線形写像になる。

定理 1.4.7 V_1, V_2, V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A : V_1 \times V_2 \to V_3$を双線形写像とする。$M$を多様体とすると$\phi \in \Omega^p(M; V_1), \psi \in \Omega^q(M; V_2)$ に対して

$$dA(\phi \wedge \psi) = A(d\phi \wedge \psi) + (-1)^p A(\phi \wedge d\psi)$$

が成り立つ。

証明 $n = \dim M$とし $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。Uにおけるϕとψの局所表示を

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
\psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x
\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}
A(\phi \wedge \psi)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} A(a_{i_1\cdots i_p}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x)) \cdot \\
&\quad (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x
\end{aligned}$$

となる。そこで $k_1 < \cdots < k_{p+q}$に対して、$\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} \neq \{k_1, \ldots, k_{p+q}\}$ のときは

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} = 0$$

としておくと

$$\begin{aligned}
& A(\phi \wedge \psi)_x \\
= & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot \\
& A(a_{i_1\cdots i_p}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x))(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
& dA(\phi \wedge \psi)_x \\
= & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot \\
& \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A(a_{i_1\cdots i_p}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x))}{\partial x^i} (dx^i)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x \\
= & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\left\{A\left(\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x)\right)+A\left(a_{i_1\cdots i_p}(x), \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right)\right\}\cdot \\
& (dx^i)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x \\
= & \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\sum_{i=1}^{n}\left\{A\left(\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x)\right)+A\left(a_{i_1\cdots i_p}(x), \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right)\right\}\cdot \\
& (dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x \\
= & A(d\phi\wedge\psi)_x+(-1)^pA(\phi\wedge d\psi)_x.
\end{aligned}
$$

よって、$dA(\phi\wedge\psi)=A(d\phi\wedge\psi)+(-1)^pA(\phi\wedge d\psi)$ が成り立つ。

定理 1.4.8 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。外微分

$$d:\Omega^p(M;V)\longrightarrow\Omega^{p+1}(M;V)$$

は $d\circ d=0$ を満たす。

証明 $n=\dim M$としておく。まず$\omega\in\Omega^0(M;V)$ について $d^2\omega=0$ が成り立つことを示そう。$(U;x^1,\ldots,x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。$x\in U$に対して

$$(d\omega)_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

だから

$$(d^2\omega)_x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^i\partial x^j}(x)(dx^i)_x\wedge(dx^j)_x.$$

ここで$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^i\partial x^j}(x)$ は i と jに関して対称的で $(dx^i)_x\wedge(dx^j)_x$は i と jに関して交代的である。したがって $(d^2\omega)_x=0$ となり $d^2\omega=0$。

次に $p>0$ のとき$\omega\in\Omega^p(M;V)$ の Uにおける局所表示を

$$\omega_x=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

とすると

$$
\begin{aligned}
(d\omega)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p}(da_{i_1\cdots i_p})_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x
\end{aligned}
$$

となるので、定理 1.4.1より

$$
\begin{aligned}
(d^2\omega)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}(d^2a_{i_1\cdots i_p})_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\
&\quad + \sum_{i_1<\cdots<i_p}(da_{i_1\cdots i_p})_x\wedge\sum_{j=1}^{p}(-1)^j(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(d^2x^{i_j})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

したがって $(d^2\omega)_x=0$ となり $d^2\omega=0$。

補題 1.4.9 Mを多様体とする。$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y]$$

が成り立つ。

証明 $h \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
[fX, gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
&= fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - gfY(X(h)) \\
&= (f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y])(h)
\end{aligned}$$

となるので、$[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y]$ が成り立つ。

定理 1.4.10 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M; V)$ に対して次の公式が成り立つ。$p = 0$ のとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = X\omega.$$

$p = 1$ のとき $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

証明 $p = 0$ のとき $l = \dim V$とし Vの基底 $v_1, \ldots, v_l$をとるとωは

$$\omega = \sum_{i=1}^{l} \omega^i v_i \quad (\omega^i \in C^\infty(M))$$

と表すことができる。$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = \sum_{i=1}^{l} d\omega^i v_i(X) = \sum_{i=1}^{l} d\omega^i(X) v_i = \sum_{i=1}^{l} (X\omega^i) v_i = X\omega.$$

このことと、$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$X(f\omega) = d(f\omega)(X) = (df\omega + fd\omega)(X) = df(X)\omega + fd\omega(X) = (Xf)\omega + f(X\omega)$$

が成り立つことに注意しておく。

$p = 1$ のとき $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$D(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

とおいて写像 $D : \mathfrak{X}(M)^2 \to \Omega^0(M; V)$ を定める。Dは定義式より実双線形写像になっている。

$$D(Y, X) = Y(\omega(X)) - X(\omega(Y)) - \omega([Y, X]) = -D(X, Y)$$

となり、さらに上で注意したことと補題 1.4.9を使うと $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} D(fX, gY) &= fX(\omega(gY)) - gY(\omega(fX)) - \omega([fX, gY]) \\ &= fX(g)\omega(Y) + fgX(\omega(Y)) - gY(f)\omega(X) - gfY(\omega(X)) \\ &\quad -\omega(f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]) \\ &= fgD(X,Y) \end{aligned}$$

となるので、Dは $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像になり $D \in \wedge^2_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \Omega^0(M;V))$。したがって定理 1.3.6、または注意 1.3.7より、Dを Vに値を持つ M上の 2 次微分形式とみなすことができる。

$\Omega^2(M;V)$ の元として Dが $d\omega$に等しいことを証明しよう。任意の $x \in M$に対して x を含む局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとり、U上のベクトル場$\frac{\partial}{\partial x^i}$に補題 1.3.5(2) を適用すると、$x$ の開近傍 $U' \subset U$と $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ が存在し$\frac{\partial}{\partial x^i}|_y = (Y_i)_y$ $(y \in U')$ を満たす。U'におけるωの局所表示を

$$\omega_y = \sum_{i=1}^n a_j(y)(dx^j)_y \quad (y \in U')$$

とおくと

$$\begin{aligned} (d\omega)_y &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x^i}(y)(dx^i)_y \wedge (dx^j)_y \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i}(y) - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}(y) \right) (dx^i)_y \wedge (dx^j)_y. \end{aligned}$$

したがって $k < l$に対して

$$\begin{aligned} (d\omega)_y((Y_k)_y, (Y_l)_y) &= (d\omega)_y \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_y, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_y \right) \\ &= \frac{\partial a_l}{\partial x^k}(y) - \frac{\partial a_k}{\partial x^l}(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_y \right) - \frac{\partial}{\partial x^l}\omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_y \right) \\ &= Y_k(\omega(Y_l))(y) - Y_l(\omega(Y_k))(y). \end{aligned}$$

ここで $y \in U'$と $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[Y_k, Y_l]_y(f) = (Y_k(Y_l f))(y) - (Y_l(Y_k f))(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}(y) = 0$$

だから U'において $[Y_k, Y_l] = 0$ である。したがって

$$(d\omega)(Y_k, Y_l)(y) = Y_k(\omega(Y_l))(y) - Y_l(\omega(Y_k))(y) - \omega([Y_k, Y_l])(y) = D(Y_k, Y_l)(y)$$

となるので、特に $d\omega_x$と D_xは$\wedge^2(T_x(M), V)$ の元として等しい。これが任意の $x \in M$について成り立つので $d\omega = D$となる。

注意 1.4.11 定理 1.4.10の条件下で $p > 0$ のとき $X_1, \ldots X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
& d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) \\
= \ & \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})) \\
& + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}).
\end{aligned}
$$

が成り立つことが知られている。

第 2 章　Lie 群と Lie 環

2.1　Lie 群と Lie 環

定義 2.1.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 2.1.2 定義 2.1.1では、Lie 群は可算開基を持つと仮定しなかったが、連結 Lie 群は可算開基を持つことが知られている。

例 2.1.3 Vを有限次元実ベクトル空間とすると、Vの正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。

証明　$\dim V = n$とする。$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V | f$は線形写像$\}$とおく。$V$の基底をとり、$\mathrm{End}(V)$ の元を行列で表現したときの行列の成分を考えれば、$\mathrm{End}(V)$ と n^2次元 Euclid 空間の間の微分同型写像になる。表現行列の成分が $\mathrm{End}(V)$ の座標になる。$\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ は $\mathrm{End}(V)$ の座標の多項式で表されるので連続であり、

$$GL(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) | \det f \neq 0\}$$

だから、$GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合である。特に、$GL(V)$ は n^2次元多様体になる。群演算

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V); (x, y) \mapsto xy$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の二次式で表されるので C^∞級写像であり、

$$GL(V) \to GL(V); x \mapsto x^{-1}$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の分数式で表されるので C^∞級写像である (Cramer の公式)。

定義 2.1.4 Lie 群 G の元 gに対して微分同型写像 L_g, R_gを

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ gによる**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 Xは、G の任意の元 gに対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

注意 2.1.5 Lie 群 G の単位元 e を含む局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとっておけば、各 $g \in G$ に対して $(L_g(U); x^1 \circ L_g^{-1}, \dots, x^n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。右移動を使っても同様にできる。

定義 2.1.6 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

例 2.1.7 多様体 M上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 2.1.8 Vをベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Yに対して $[X, Y] = XY - YX$と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

証明 定め方より $[\ ,\ ] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ は双線形写像である。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y, Zに対して

$$\begin{aligned}
& [X, Y] = XY - YX = -[Y, X], \\
& [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
= \ & [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
= \ & XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY \\
& + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{End}(V)$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

定理 2.1.9 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表す。すると、$\mathfrak{g}$ は Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

証明 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{X}(G)$ の部分ベクトル空間になることは定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (dL_g)_x(Y_x) = Y_{gx} \quad (x \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係より

$$(dL_g)_x([X, Y]_x) = [X, Y]_{gx} \quad (x \in G)$$

となり、$[X, Y] \in \mathfrak{g}$。よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環である。

αが線形写像になることは定義からわかる。$X \in \mathfrak{g}, \alpha(X) = 0$ とすると、任意の $g \in G$ に対し

$$X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$$

だから、$X = 0$。よって $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ となり、αは単射。他方 $X \in T_e(G)$ に対して$\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ とおき、$\tilde{X}$が左不変ベクトル場になることを示せば、αが全射になることがわかる。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を G の単位元 e を含む局所座標近傍とする。$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy$ は連続だから、e を含む開近傍 Vで $VV = \{xy | x, y \in V\} \subset U$を満たすものをとることができる。

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$$

とおく。注意 2.1.5より任意の $g \in G$ に対して、$(L_g(V); x^1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x^n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。そこで $y^i = x^i \circ L_g^{-1}$とおくと $gx \in L_g(V)$ $(x \in V)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{gx} &= (dL_{gx})_e(X) = d(L_g \circ L_x)_e(X) = (dL_g)_x(dL_x)_e(X) \\
&= (dL_g)_x \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x .
\end{aligned}$$

ここで

$$\left((dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) y^k = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) (y^k \circ L_g) = \delta_{jk}$$

だから

$$(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{gx}$$

となり

$$\tilde{X}_{gx} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{gx} .$$

$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy = L_x(y)$ は C^∞級写像だから、各 i, jに対して

$$V \to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)$$

は C^∞級写像になる。よって、各 jについて

$$L_g(V) \to \mathbf{R}; gx \mapsto \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)$$

は C^∞級写像である。したがって$\tilde{X}$は G 上のベクトル場である。$\tilde{X}$は定め方より左不変。したがってαは線形同型写像である。

定義 2.1.10 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群** G **の Lie 環**と呼ぶ。

定義 2.1.11 Lie 群の間の C^∞級写像 $f : G \to H$が群の準同型写像でもあるとき、fを **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持ち、f^{-1}も Lie 群の準同型写像であるとき、fを **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と Hは**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、fを **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持つとき、fを **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

2.2 指数写像

定義 2.2.1 Mを多様体とし、Xを M上のベクトル場とする。Iを実数の開区間とし、M上の曲線 $c : I \to M$が

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

を満たすとき、c を Xの**積分曲線**と呼ぶ。

補題 2.2.2 Mを多様体とし、Xを M上のベクトル場とする。実数 t_0と Mの各点 $x \in M$ に対して、Xの積分曲線 $c : I \to M$で $t_0 \in I,\ c(t_0) = x$ を満たすものが存在する。また $c_1, c_2 : I \to M$が $c_1(t_0) = c_2(t_0) = x$ を満たす Xの積分曲線ならば $c_1 = c_2$が成り立つ。

証明 x を含む Mの局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。Xの Uにおける局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^n a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \quad (x \in U)$$

とする。Uにおいて問題になっている等式

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

の局所表示は

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^n a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}$$

となる。したがって c は

$$\frac{d(x^i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)), \quad x^i \circ c(t_0) = x^i(x) \quad (1 \leq i \leq n)$$

を満たせばよい。これは Euclid 空間の開集合における常微分方程式であり a_iは C^∞級関数だから t_0を含む開区間 Iと $c : I \to U$が存在し上の常微分方程式を満たす。この曲線 c が求めるものである。

次に積分曲線の一意性を示そう。Mの局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ で $c_1(I), c_2(I) \subset U$を満たすものが存在する場合は、局所座標 $x^1, \ldots, x^n$を使うと

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_{c_1(t)}, \quad \frac{dc_2}{dt}(t) = X_{c_2(t)} \quad (t \in I)$$

は Euclid 空間の開集合における常微分方程式になり、常微分方程式の解の一意性から $c_1 = c_2$ となる。$c_1(I), c_2(I)$ が Mの 1 つの局所座標近傍に含まれない場合を考えよう。$t_0 < s, s \in I$ に対して $0 < \varepsilon$と $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s$ を次の条件を満たすようにとる。$I_i = (t_{i-1} - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ $(1 \leq i \leq k)$ とおくと各 i について $c_1(I_i), c_2(I_i)$ は Mの 1 つの局所座標近傍に含まれる。先に示したことを使うと $c_1(t_1) = c_2(t_1), \ldots, c_1(t_k) = c_2(t_k)$ を帰納的に示すことができる。特に $c_1(s) = c_2(s)$。$t_0 > s, s \in I$に対しても同様にして $c_1(s) = c_2(s)$ となり、$c_1 = c_2$が成り立つ。

定義 2.2.3 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 2.2.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 2.1.9によって$\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xを c に対応させる。

証明 次の (1),(2) のステップにわけて定理を証明する。

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものが存在し、c は G の一径数部分群である。

(2) 定理で定めた 2 つの対応はお互いの逆対応になる。

(1) 補題 2.2.2より、$\delta > 0$ と Xの積分曲線 $a : (-\delta, \delta) \to G$ で $a(0) = e$ を満たすものが存在する。$|s| < \delta/2$ となる s を 1 つ固定して

$$b_1(t) = a(s + t),\ b_2(t) = a(s)a(t) \quad (|s| < \delta/2)$$

とおく。すると、$t \mapsto b_1(t)$ は Xの積分曲線になり、

$$\frac{d}{dt} b_2(t) = (dL_{a(s)})_{a(t)} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = (dL_{a(s)})_{a(t)}(X_{a(t)}) = X_{a(s)a(t)}$$

だから $t \mapsto b_2(t)$ も Xの積分曲線になる。さらに、

$$b_1(0) = a(s) = a(s)e = a(s)a(0) = b_2(0)$$

だから補題 2.2.2の一意性より、

$$b_1(t) = b_2(t) \quad (|t| < \delta/2).$$

結局

$$a(s+t) = a(s)a(t) = a(t)a(s) \quad (|s|, |t| < \delta/2)$$

が成り立つ。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となるように自然数 kをとり

$$c(t) = a\left(\frac{t}{k}\right)^k$$

として写像 $c : \mathbf{R} \to G$ を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$|t/k| < \delta/2, |t/l| < \delta/2$ となる自然数 k, lをとったとき、

$$a\left(\frac{t}{k}\right)^k = a\left(\frac{t}{kl}\right)^{kl} = a\left(\frac{t}{l}\right)^l$$

が成り立つので、上の c は kのとり方によらずに定まっている。$c(0) = a(0) = e$ は明らか。以下で、c が G の一径数部分群であることを示そう。$t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となる自然数 kをとる。t を含む開集合 Iで $s \in I$ならば $|s/k| < \delta/2$ となるものをとる。すると $s \in I$ に対して $c(s) = a(s/k)^k$となるので、c は Iにおいて C^∞級写像である。よって $c : \mathbf{R} \to G$ は C^∞級写像になる。任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $|s/k|, |t/k| < \delta/4$ となる自然数 kをとると、$|s/k|, |t/k|, |(s+t)/k| < \delta/2$ となり、

$$\begin{aligned} c(s)c(t) &= a\left(\frac{s}{k}\right)^k a\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(a\left(\frac{s}{k}\right) a\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \\ &= a\left(\frac{s+t}{k}\right)^k = c(s+t). \end{aligned}$$

したがって $c : \mathbf{R} \to G$ は G の一径数部分群になる。

次に c が Xの積分曲線であることを示そう。$s \in \mathbf{R}$ に対して、$t \in (s-\delta, s+\delta)$ とすると、$c(t) = c(s)c(t-s) = L_{c(s)}(c(t-s))$ だから、

$$\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=s} = (dL_{c(s)})_e \left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) = (dL_{c(s)})_e(X_e) = X_{c(s)}.$$

したがって c は Xの積分曲線である。

(2) $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群 c は$\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たすので、c に対応する $\mathfrak{g}$ の元は Xになる。逆に G の一径数部分群 c に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xは $X_e = \frac{dc}{dt}(0)$ を満たす。(1) の最後で示したことは $\mathfrak{g}$ の元 Xと G の一径数部分群 c が$\frac{dc}{dt}(0) = X_e$を満たせば c は X の積分曲線になることである。したがって Xに対応する G の一径数部分群は c になる。

例 2.2.5 $GL(n,\mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n,\mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の元と同一視する。$X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})\cong T_e(GL(n,\mathbf{R}))$ に対応する $GL(n,\mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を$\tilde{X}$で表すと、定理 2.1.9の証明中の計算より$\tilde{X}_g=gX$ $(g\in GL(n,\mathbf{R}))$ となる。したがって、Xに対応する $GL(n,\mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt}=c(t)X\quad(t\in\mathbf{R}),\quad c(0)=e$$

を満たす。行列の指数関数: $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$を使うと $c(t)=e^{tX}$となる。

例 2.2.6 行列の指数関数の射影分解による計算法について述べる。n 次複素正方行列 A の固有多項式を$\gamma_A(t)$ で表す。$\gamma_A(t)$ を因数分解し$\gamma_A(t)=(t-\lambda_1)^{p_1}\ldots(t-\lambda_k)^{p_k}$ とする。次に部分分数展開:

$$\frac{1}{\gamma_A(t)}=\frac{h_1(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}}+\ldots+\frac{h_k(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

を行う。

$$1=h_1(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}}+\ldots+h_k(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

となり、$\gamma_A(t)$ は $(t-\lambda_i)^{p_i}$を因子に持っているので$\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$は t の多項式である。そこで $\pi_i(t)=h_i(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ とおくと$\pi_i(t)$ も t の多項式になり

$$1=\pi_1(t)+\ldots+\pi_k(t),\quad(t-\lambda_i)^{p_i}\pi_i(t)=h_i(t)\gamma_A(t)$$

が成り立つ。$P_i=\pi_i(A)$ とおくと

$$I_n=P_1+\ldots+P_k.$$

これを射影分解と呼ぶ。Cayley-Hamilton の定理より

$$(A-\lambda_iI_n)^{p_i}P_i=h_i(A)\gamma_A(A)=0.$$

以上の結果を使うと

$$\begin{aligned}e^{tA}&=\sum_{i=1}^k e^{tA}P_i=\sum_{i=1}^k e^{t\lambda_iI_n+t(A-\lambda_iI_n)}P_i\\&=\sum_{i=1}^k e^{\lambda_itI_n}e^{t(A-\lambda_iI_n)}P_i=\sum_{i=1}^k e^{\lambda_it}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_iI_n)^jP_i\\&=\sum_{i=1}^k e^{\lambda_it}\sum_{j=0}^{p_i-1}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_iI_n)^jP_i.\end{aligned}$$

定義 2.2.7 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.2.4で存在を示した Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 2.2.8 例 2.2.5で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 Xに対応する一径数部分群は e^{tX}になるので、$GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 2.2.9 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.2.4の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.2.4の対応で対応する G の一径数部分群を $t \mapsto c(t, X)$ と書くことにする。$s \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{d}{dt} c(st, X) = sX_{c(st,X)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

となるので、$t \mapsto c(st, X)$ は $sX \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群になる。よって $c(st, X) = c(t, sX)$ となり $t = 1$ とおくと

$$c(s, X) = c(1, sX) = \exp sX.$$

これより $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$に一致する。

命題 2.2.10 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

証明 $X_1, \dots, X_n$を $\mathfrak{g}$ の基底とし $u_1, \dots, u_n$をその双対基底とすると、$u_1, \dots, u_n$は $\mathfrak{g}$ の座標になる。G の局所座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ で $e \in U,\ x_1(e) = \dots = x_n(e) = 0$ を満たすものをとっておく。$\sum_{i=1}^{n} u_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群を $c(t; u_1, \dots, u_n)$ と書くことにする。

$$\frac{d}{dt} c(t; u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i (X_i)_{c(t;u_1,\dots,u_n)}$$

だから、各 X_iの Uにおける局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x$$

とすると $c(t; u_1, \dots, u_n)$ は

$$\frac{d}{dt} x_j(c(t; u_1, \dots, u_n)) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji}(c(t; u_1, \dots, u_n))$$

を満たす。常微分方程式の解はパラメーターに関して滑らかだから、写像:

$$(t, u_1, \dots, u_n) \mapsto (x_1(c(t; u_1, \dots, u_n)), \dots, x_n(c(t; u_1, \dots, u_n)))$$

は 0 の近傍で C^∞級写像になる。

$$\exp(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i) = c(1; u_1, \ldots, u_n)$$

だから、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は 0 のある開近傍 Nで C^∞級写像である。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対してある自然数 p が存在し$\frac{1}{p}X \in N$となる。そこで Xの開近傍 Oを$\frac{1}{p}O \subset N$となるようにとると

$$\exp(Z) = \exp\left(\frac{1}{p}Z\right)^p \quad (Z \in O)$$

だから exp は Oにおいて C^∞級写像である。したがって、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞級写像になる。

定理 2.2.11 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明　$X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d\exp_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)\bigg|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d\exp_e = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$。定理 2.1.9より $d\exp_e$は線形同型写像になる。逆関数定理を使うと、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

定義 2.2.12 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。定理 2.2.11より exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍 Uの間の微分同型写像になるので、$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$をとると $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$ は Uにおける局所座標系になり $u_1(e) = \ldots = u_n(e) = 0$ を満たす。$(u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$に関する G の**標準座標系**と呼び、$(U; u_1, \ldots, u_n)$ を G の**標準座標近傍**と呼ぶ。

命題 2.2.13 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(Xf)(g) &= \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0} \\ ([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明　接ベクトル X_gは曲線 $t \mapsto g\exp tX$の $t = 0$ における速度ベクトルになっているので

$$(Xf)(g) = X_g(f) = \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0}$$

が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(XYf)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY)\Big|_{s=t=0} \quad (\text{先に示したことより}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1} \exp sX)\Big|_{s=0} \right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial s} f(g \exp tY \exp sX)\Big|_{s=0} \right)\Big|_{t=0} \quad (\text{Leibniz の法則より}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\
&\quad +(YXf)(g).
\end{aligned}
$$

したがって

$$([X,Y]f)(g) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0}.$$

系 2.2.14 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y]=0$ となる。

証明 $f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\Big|_{s=t=0} = 0.
\end{aligned}
$$

したがって $[X,Y]=0$ となる。

定義 2.2.15 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y]=0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 2.2.14は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

2.3 準同型写像

命題 2.3.1 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 2.3.2 G, Hを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$を Lie 群の準同型写像とする。定理 2.1.9の線形同型写像を$\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、$df_e(X_e) \in T_e(H)$ を H上の左不変ベクトル場に拡張したものが $df(X)$ になる。任意の $g \in G$ に対して、

$$df_g(X_g) = df_g \circ (dL_g)_e(X_e) = d(f \circ L_g)_e(X_e).$$

ここで $x \in G$ に対して

$$(f \circ L_g)(x) = f(gx) = f(g)f(x) = (L_{f(g)} \circ f)(x)$$

だから、

$$\begin{aligned} df_g(X_g) &= d(f \circ L_g)_e(X_e) = d(L_{f(g)} \circ f)(X_e) \\ &= (dL_{f(g)})_e \circ df_e(X_e) = df(X)_{f(g)}. \end{aligned}$$

よって $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$df_g(X_g) = df(X)_{f(g)}, \quad df_g(Y_g) = df(Y)_{f(g)} \quad (g \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係を使うと

$$df_g([X,Y]_g) = [df(X), df(Y)]_{f(g)} \quad (g \in G)$$

となる。特に

$$df_e([X,Y]_e) = [df(X), df(Y)]_e$$

が成立し、定理 2.1.9より $[df(X), df(Y)]$ は H上の左不変ベクトル場だから、

$$df([X,Y]) = [df(X), df(Y)].$$

したがって $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型になる。

定義 2.3.3 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を fの**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 2.3.2は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 2.3.4 A, B, Cを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} d(id_A) &= \alpha_A^{-1} \circ d(id_A)_e \circ \alpha_A = \alpha_A^{-1} \circ id_{T_e(A)} \circ \alpha_A = id \\ d(g \circ f) &= \alpha_C^{-1} \circ d(g \circ f)_e \circ \alpha_A = \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ df_e \circ \alpha_A \\ &= \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ \alpha_B \circ \alpha_B^{-1} \circ df_e \circ \alpha_A = dg \circ df \end{aligned}$$

系 2.3.5 A, Bを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

証明

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) = d(id_B) = id$$

同様にして $d(f^{-1}) \circ df = id$ となり $d(f^{-1}) = df^{-1}$。したがって dfは Lie 環の同型写像になる。

命題 2.3.6 G, Hを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は Hの指数写像である。

証明 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になるので (命題 2.3.1)、$t \mapsto f(\exp tX)$ は Hの一径数部分群になる。定理 2.2.4よりある $Y \in \mathfrak{h}$ が存在して、

$$f(\exp tX) = \exp tY \quad (t \in \mathbf{R})$$

となる。$t = 0$ で両辺を微分すると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left.\frac{d}{dt} f(\exp tX)\right|_{t=0} = df_e(X_e) \\ (\text{右辺}) &= \left.\frac{d}{dt} \exp tY\right|_{t=0} = Y_e.\end{aligned}$$

したがって、$df_e(X_e) = Y_e$となり $df(X) = Y$。これより、$f(\exp tX) = \exp(tdf(X))$ が成り立つ。特に $t = 1$ とすると、$f(\exp X) = \exp(df(X))$。

定義 2.3.7 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 Vに対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 Vに対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 2.3.8 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

証明 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) &= \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] \quad (\text{Jacobi 律}) \\ &= \mathrm{ad}([X, Y])(Z)\end{aligned}$$

となるので $[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) = \mathrm{ad}([X, Y])$ が成り立ち、ad は Lie 環の表現になる。

定義 2.3.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 2.3.10 Lie 群 G の元 gに対して $\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

証明 $L_g \circ R_{g^{-1}}$は G の自己同型写像だから、系 2.3.5より $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像になる。特に $\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となる。命題 2.3.6より

$$g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。命題 2.3.4を使うと $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(gh) &= d(L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}}) = d(L_g \circ L_h \circ R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}}) \\ &= d(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}}) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) \circ d(L_h \circ R_{h^{-1}}) \\ &= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h)\end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。

次に Ad が C^∞級写像になることを示そう。$GL(\mathfrak{g})$ における座標は $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ とその双対基底$\theta_1, \ldots, \theta_n$を使って $GL(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R};\ u \mapsto \theta_i(u(X_j))$ と表すことができる。したがって $G \to \mathbf{R};\ g \mapsto \theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j))$ が C^∞級関数になることを示せばよい。定理 2.1.9の証明と同様、

$$\theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j)) = \theta_i(\alpha_G^{-1} \circ dL_g \circ dR_{g^{-1}} \circ \alpha_G(X_j))$$

は gに関する C^∞級関数になる。

最後に Ad の微分が $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致することを示そう。命題 2.2.13より、$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)tY))\right|_{t=0}\right)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)f(g)\right)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)\right)\right|_{s=0} f(g)\end{aligned}$$

したがって

$$\left.\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\right|_{s=0} = [X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$$

となり

$$\left.\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)\right|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)$$

が成り立つので、Ad の微分は ad になる。

定義 2.3.11 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(V)$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 2.3.12 有限次元ベクトル空間Vに対する一般線形群$GL(V)$の随伴表現を求めてみよう。例 2.2.8より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\bigg|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

2.4 線形 Lie 群

定義 2.4.1 Lie 群 Hが Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、Hが G の部分多様体であり同時に Hが G の部分群であることをいう。

補題 2.4.2 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の Lie 部分群 Hの包含写像を $\iota : H \to G$ とすると $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

証明 ιの微分 $d\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は定理 2.3.2より Lie 環の準同型写像になり、Hが G の部分多様体であることから単射になる。したがって $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

定義 2.4.3 補題 2.4.2において、$d\iota(\mathfrak{h})$ を **Lie 部分群** H**に対応する Lie 部分環** と呼ぶ。今後、$d\iota$によって $\mathfrak{h}$ と $d\iota(\mathfrak{h})$ を同一視する。

命題 2.4.4 G を Lie 群とし、Hを G の Lie 部分群とする。G, Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、指数写像を $\exp_G, \exp_H$とする。このとき $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\exp_G(X) = \exp_H(X)$ が成り立つ。

証明 包含写像を$\iota : H \to G$ とするとιは Lie 群の準同型写像になる。命題 2.3.6より $X \in \mathfrak{h}$ に対して$\iota(\exp_H(X)) = \exp_G(d\iota(X))$ が成り立つ。ιと $d\iota$による同一視をすると $\exp_G(X) = \exp_H(X)$。

定理 2.4.5 G を Lie 群とし Hを G の部分群とする。Hが G の閉集合ならば、Hは相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 2.4.6 定理 2.4.5より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

命題 2.4.7 Lie 群 G とその Lie 部分群 Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続}\}$$

が成り立つ。Hが閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

証明

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は} H \text{の位相に関して連続}\}$$

とおいておく。$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$は補題 2.4.2と定義 2.4.3よりわかる。$X \in \mathfrak{h}',\ s \in \mathbf{R}$ に対して、$\exp sX$ を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は Hにおける $\exp sX$の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$のそこへの制限は Hの局所座標系になる。$t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続だから s を含む開区間 Iが存在し $\exp tX \in V\ (t \in I)$ となる。$I \to W; t \mapsto \exp tX$は$C^\infty$級写像になるので $t \mapsto x_i(\exp tX)$ は I上の C^∞級関数になる。したがって $t \mapsto \exp tX$は Hの多様体構造に関して C^∞級写像である。これで $X \in \mathfrak{h}$ がわかり、$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ である。以上より $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$である。さらに Hが閉 Lie 部分群の場合は Hの位相は相対位相だから $X \in \mathfrak{g}$ が $\exp tX \in H(t \in \mathbf{R})$ を満たせば $t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続になり $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

系 2.4.8 Lie 群 G の閉 Lie 部分群 H, Kの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とおくと $H \cap K$は G の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ である。

定義 2.4.9 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

定理 2.4.10 $GL(n, \mathbf{R})$ は、例 2.1.3の証明中に示したように、$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して$\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を$\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)\ (g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

証明 定理 2.1.9を $GL(n, \mathbf{R})$ に適用すると$\tilde{} = \alpha^{-1}$となるので、$\tilde{}$は線形同型写像である。あとは$\tilde{}$が Lie 環の準同型写像になることを示せばよい。(i, j)-成分のみが 1 で他の成分は 0 になる n 次正方行列を E_{ij}で表すと、$\{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の基底になる。その双対基底を $\{x_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ で表すと、x_{ij}は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の座標になる。$GL(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合で $e \in GL(n, \mathbf{R})$ だから、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と十分小さい $t \in \mathbf{R}$ に対して $e + tX \in GL(n, \mathbf{R})$ となることに注意しておく。$g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_g &= (dL_g)_e(X) = (dL_g)_e \left(\left. \frac{d}{dt}(e + tX) \right|_{t=0} \right) \\
&= \left. \frac{d}{dt} L_g(e + tX) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(g + tgX) \right|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gX) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g .
\end{aligned}$$

したがって、$X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
& [\tilde{X}, \tilde{Y}]_g \\
= & \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(X) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(Y) \right)}{\partial x_{pq}} \right. \\
& \left. - \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(Y) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \right)}{\partial x_{pq}} \right\} \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(X) x_{kj}(Y) - \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(Y) x_{kj}(X) \right\} \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gXY - gYX) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(g[X, Y]) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
= & \widetilde{[X, Y]}_g .
\end{aligned}
$$

よって、

$$
[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}
$$

となり、$\tilde{}$ は Lie 環の準同型である。

命題 2.4.11 Vを n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n, \mathbf{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ は同型になる。

証明 $v_1, \ldots, v_n$を Vの基底とし、$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して fの $v_1, \ldots, v_n$に関する表現行列を $R(f)$ で表す。つまり、

$$
f[v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_n] R(f)
$$

となる。このとき、

$$
R : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)
$$

は代数の同型写像になる。Rは線形同型写像だから特に微分同型写像である。

以上のことから、Rは Lie 環の同型写像

$$
R : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})
$$

を与え、Rの $GL(V)$ への制限は Lie 群の同型写像

$$
R|_{GL(V)} : GL(V) \to GL(n, \mathbf{R})
$$

を与える。

注意 2.4.12 定理 2.4.10の Lie 環の同型写像 $\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ を $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環とみなすことにする。命題 2.4.11の同型より、有限次元ベクトル空間 Vに対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

補題 2.4.13 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ と $v \in V$に対して $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \rho(X)v = 0\}$ とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環になる。

証明 $a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(aX + bY)v &= a\rho(X)v + b\rho(Y)v = 0, \\ \rho([X, Y])v &= \rho(X)\rho(Y)v - \rho(Y)\rho(X)v = 0 \end{aligned}$$

だから $aX + bY, [X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。

補題 2.4.14 Lie 群 G の表現$\rho : G \to GL(V)$ と $v \in V$に対して

$$H = \{g \in G | \rho(g)v = v\}$$

とおくと Hは G の閉 Lie 部分群になる。$\mathfrak{h}$ を Hの Lie 環とすると

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | d\rho(X)v = 0\}$$

が成り立つ。

証明 $g, h \in H$に対して$\rho(gh^{-1})v = \rho(g)\rho(h^{-1})v = v$だから $gh^{-1} \in H$となり Hは G の部分群である。次に$\rho : G \to GL(V)$ は C^∞級写像だから$\rho_v : G \to V; g \mapsto \rho(g)v$ とおくとρ_vも C^∞級写像になる。よって $H = \rho_v^{-1}(v)$ は G の閉集合である。したがって Hは G の閉 Lie 部分群である (定理 2.4.5と定義 2.4.6)。

命題 2.4.7より、$X \in \mathfrak{h}$ をとると、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\exp tX \in H$となるので $\rho(\exp tX)v = v$。両辺を $t = 0$ で微分し命題 2.3.6を使うと

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)v\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{td\rho(X)}v\bigg|_{t=0} = d\rho(X)v.$$

逆に $d\rho(X)v = 0$ となる $X \in \mathfrak{g}$ をとると任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho(\exp tX)v = \exp(td\rho(X))v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(td\rho(X))^n v = v$$

だから $\exp tX \in H$となり命題 2.4.7より $X \in \mathfrak{h}$。

補題 2.4.15 有限次元実ベクトル空間 Vに対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、det の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

証明 行列式の性質より $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になる。$X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $X : V \to V$の固有値をλ_i $(1 \le i \le k)$ とし、各固有値の重複度を p_iとすると、例 2.2.6より、

$$\det(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{k}(e^{\lambda_i t})^{p_i} = \prod_{i=1}^{k} e^{p_i\lambda_i t}.$$

したがって、

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k} e^{p_i\lambda_i t}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k} p_i\lambda_i = \mathrm{tr}(X)$$

となり、det の微分は tr になる。

定義 2.4.16 Vを有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) | \det g = 1\}$ と表すと、補題 2.4.14と補題 2.4.15より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 2.4.14と補題 2.4.15より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

命題 2.4.17 Vを有限次元ベクトル空間とし $A : V \times V \to \mathbf{R}$ を双線形写像とする。

$$G = \{g \in GL(V) | A(gu, gv) = A(u, v)\ (u, v \in V)\}$$

とおくと G は線形 Lie 群になる。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

が成り立つ。

証明 $V \times V$から $\mathbf{R}$ への双線形写像の全体を $M^2(V, \mathbf{R})$ で表す。$b, c \in \mathbf{R},\ B, C \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して $(bB + cC)(u, v) = bB(u, v) + cC(u, v)\ (u, v \in V)$ によって $bB + cC \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めるとこの演算によって $M^2(V, \mathbf{R})$ はベクトル空間になる。$g \in GL(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して

$$(\rho(g)B)(u, v) = B(g^{-1}u, g^{-1}v) \qquad (u, v \in V)$$

として$\rho(g)B \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めると$\rho(g) \in GL(M^2(V, \mathbf{R}))$。$g, h \in GL(V),\ u, v \in V$について

$$\begin{aligned}(\rho(gh)B)(u, v) &= B((gh)^{-1}u, (gh)^{-1}v) = B(h^{-1}g^{-1}u, h^{-1}g^{-1}v) \\ &= (\rho(h)B)(g^{-1}u, g^{-1}v) = (\rho(g)(\rho(h)B))(u, v)\end{aligned}$$

だから$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり$\rho : GL(V) \to GL(M^2(V, \mathbf{R}))$ は群の準同型写像である。各 $u, v \in V,\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ について $g \mapsto (\rho(g)B)(u, v)$ はC^∞級関数だからρはC^∞級写像にな

る。したがってρは Lie 群の準同型写像である。ρの定義より $G=\{g\in GL(V)|\rho(g)A=A\}$。補題 2.4.14を適用すると G は線形 Lie 群になる。

G の Lie 環を求めるためにρの微分を計算する。$X\in\mathfrak{gl}(V),\ B\in M^2(V,\mathbf{R}),\ u,v\in V$について

$$\begin{aligned}(d\rho(X)B)(u,v) &= \frac{d}{dt}(\rho(e^{tX})B)(u,v)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}B(e^{-tX}u,e^{-tX}v)\bigg|_{t=0}\\ &= -B(Xu,v)-B(u,Xv)\end{aligned}$$

だから補題 2.4.14より

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{X\in\mathfrak{gl}(V)|d\rho(X)A=0\}\\ &= \{X\in\mathfrak{gl}(V)|A(Xu,v)+A(u,Xv)=0\ (u,v\in V)\}.\end{aligned}$$

定義 2.4.18 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V上の正定値内積とする。Vの A に関する直交変換の全体を $O(V)=O(V;A)$ で表すと命題 2.4.17より $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V)=\mathfrak{o}(V;A)$ で表すと命題 2.4.17より

$$\mathfrak{o}(V)=\{X\in\mathfrak{gl}(V)|A(Xu,v)+A(u,Xv)=0\ (u,v\in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n),\mathfrak{o}(n)$ とも書く。

注意 2.4.19 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 2.4.20 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V上の正定値内積とする。

$$SO(V)=SO(V;A)=SL(V)\cap O(V;A)$$

と表すと、系 2.4.8より $SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V)=\mathfrak{so}(V;A)$ で表すと系 2.4.8より $\mathfrak{so}(V)=\mathfrak{sl}(V)\cap\mathfrak{o}(V)=\mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n),\mathfrak{so}(n)$ とも書く。$SO(n)$ は連結になり、$O(n)$ の単位元の連結成分になることが知られている。したがって、$O(n)$ は二つの連結成分を持つ。

命題 2.4.21

$$E(n)=\left\{\left[\begin{array}{cc}A & x\\ 0 & 1\end{array}\right]\ \middle|\ A\in O(n),x\in\mathbf{R}^n\right\}$$

とおくと $E(n)$ は $GL(n+1,\mathbf{R})$ の閉 Lie 部分群になる。$E(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{e}\ (n)$ で表すと

$$\mathfrak{e}(n)=\left\{\left[\begin{array}{cc}X & x\\ 0 & 0\end{array}\right]\ \middle|\ X\in\mathfrak{o}(n),x\in\mathbf{R}^n\right\}$$

が成り立つ。

証明　まず $E(n)$ が $GL(n{+}1,\mathbf{R})$ の部分群になることを示そう。$A,B\in O(n)$ と $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AB & Ay+x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in E(n),$$

$$\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tA & -{}^tAx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので、$E(n)$ は $GL(n+1,\mathbf{R})$ の部分群である。

次に $GL(n+1,\mathbf{R})$ の元 gを

$$g=\begin{bmatrix} A & x \\ {}^ty & z \end{bmatrix}\qquad (A\in\mathrm{End}(\mathbf{R}^n),\ x,y\in\mathbf{R}^n,\ z\in\mathbf{R})$$

と表して、写像 Eを

$$E:GL(n+1,\mathbf{R})\to\mathrm{End}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\ ;\ \begin{bmatrix} A & x \\ {}^ty & z \end{bmatrix}\mapsto({}^tAA,y,z)$$

で定めると、Eは C^∞級写像になる。よって $E(n)=E^{-1}(1_n,0,1)$ だから、$E(n)$ は $GL(n+1,\mathbf{R})$ の閉集合になる。

以上で $E(n)$ は $GL(n{+}1,\mathbf{R})$ の閉部分群になることがわかったので、定理 2.4.5より $E(n)$ は $GL(n+1,\mathbf{R})$ の閉 Lie 部分群になる。

$X\in\mathfrak{o}(n),\ x\in\mathbf{R}^n$と自然数 kに対して

$$\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} X^k & X^{k-1}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので

$$\exp\left(t\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} e^{tX} & \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}X^{k-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in E(n).$$

逆に $A\in\mathrm{End}(\mathbf{R}^n),\ x,y\in\mathbf{R}^n,\ z\in\mathbf{R}$ に対して

$$\exp\left(t\begin{bmatrix} A & x \\ {}^ty & z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} A(t) & x(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in E(n)\qquad (t\in\mathbf{R})$$

とすると

$$\begin{bmatrix} A & x \\ {}^ty & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{dA}{dt}(0) & \frac{dx}{dt}(0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、$y=0,\ z=0$ で $A=\frac{dA}{dt}(0)\in\mathfrak{o}(n)$ が成り立つ。$E(n)$ は $GL(n+1,\mathbf{R})$ の閉 Lie 部分群だから命題 2.4.7より

$$\mathfrak{e}(n)=\left\{\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ \middle|\ X\in\mathfrak{o}(n),\ x\in\mathbf{R}^n\right\}.$$

定義 2.4.22 命題 2.4.21で定めた Lie 群 $E(n)$ を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$の**運動群**と呼ぶ。

注意 2.4.23 簡単のために単に

$$\begin{aligned} E(n) &= \{[A\ x] \mid A \in O(n),\ x \in \mathbf{R}^n\} \\ \mathfrak{e}(n) &= \{[X\ x] \mid X \in \mathfrak{o}(n),\ x \in \mathbf{R}^n\} \end{aligned}$$

とも書くことにする。このとき $E(n)$ の元 $[A\ x],\ [B\ y]$ に対して

$$\begin{aligned} [A\ x]\,[B\ y] &= [AB\ Ay + x] \\ [A\ x]^{-1} &= \left[{}^tA\ \ -{}^tAx\right] \end{aligned}$$

となる。また $\mathfrak{e}(n)$ の Lie ブラケットは

$$\left[\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} [X,Y] & Xy - Yx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので $\mathfrak{e}(n)$ の元を $[X\ x]$ で表せば

$$[[X\ x], [Y\ y]] = [[X, Y]\ Xy - Yx]$$

となる。

命題 2.4.24

$$E(n) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n\ ;\ ([A\ x], u) \mapsto [A\ x] \cdot u = Au + x$$

によって $E(n)$ は $\mathbf{R}^n$に推移的に作用する変換群になる。

証明 $GL(n+1, \mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^{n+1}$への自然な作用によって、$GL(n+1, \mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n+1}$の変換群になっている。$\mathbf{R}^{n+1}$の元で第 $n+1$ 成分が 1 になるものの全体を $\mathbf{R}^n$と同一視すると、

$$\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au + x \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (A \in O(n),\ x, u \in \mathbf{R}^n)$$

となるので $E(n)(\subset GL(n+1, \mathbf{R}))$ の $\mathbf{R}^n(\subset \mathbf{R}^{n+1})$ への作用は命題で定めた作用に一致する。したがって $E(n)$ は $\mathbf{R}^n$の変換群である。さらに任意の $u, v \in \mathbf{R}^n$に対して

$$\begin{bmatrix} 1_n & v - u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in E(n), \qquad \begin{bmatrix} 1_n & v - u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり、$E(n)$ は $\mathbf{R}^n$に推移的に作用している。

第 3 章　微分形式の可積分性

3.1　Maurer-Cartan 形式

定義 3.1.1 ωを有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ Lie 群 G 上の p 次微分形式とする。すべての $g \in G$ について $L_g^*\omega = \omega$ となるときωを左不変という。

補題 3.1.2 G を Lie 群とし、任意の $g \in G$ と $v \in T_g(G)$ に対して $X_g = v$となる G 上の左不変ベクトル場 Xがただ 1 つ存在する。

証明　$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると、定理 2.1.9より$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$と $(dL_g)_e : T_e(G) \to T_g(G)$ は線形同型写像なので、$(dL_g)_e \circ \alpha$も線形同型写像になる。$Y \in \mathfrak{g}$ に対して $(dL_g)_e \circ \alpha(Y) = Y_g$だから、補題が証明される。

補題 3.1.3 ωを有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ Lie 群 G 上の p 次微分形式とする。このときωが左不変になるための必要十分条件は G 上の任意の左不変ベクトル場 $X_1, \ldots, X_p$ に対して$\omega(X_1, \ldots, X_p) \in \Omega^0(G; V)$ が一定値をとる写像になることである。

証明　まずωが左不変であると仮定する。任意の $g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
\omega(X_1, \ldots, X_p)(g) &= \omega_g((X_1)_g, \ldots, (X_p)_g) \\
&= \omega_e((dL_{g^{-1}})_g(X_1)_g, \ldots, (dL_{g^{-1}})_g(X_p)_g) \\
&= \omega_e((X_1)_e, \ldots, (X_p)_e)
\end{aligned}
$$

となるので$\omega(X_1, \ldots, X_p)$ は一定値$\omega_e((X_1)_e, \ldots, (X_p)_e)$ をとる。

今度は逆に G 上の任意の左不変ベクトル場 $X_1, \ldots, X_p$に対して$\omega(X_1, \ldots, X_p) \in \Omega^0(G; V)$ が一定値をとる写像になると仮定する。$g \in G$ と $v_1, \ldots, v_p \in T_g(G)$ に対して補題 3.1.2より $(X_i)_g = v_i$ $(1 \leq i \leq p)$ となる G 上の左不変ベクトル場 $X_1, \ldots, X_p$が存在する。任意の $h \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
(L_h^*\omega)_g(v_1, \ldots, v_p) &= (L_h^*\omega)_g((X_1)_g, \ldots, (X_p)_g) \\
&= \omega_{hg}((dL_h)_g(X_1)_g, \ldots, (dL_h)_g(X_p)_g) \\
&= \omega_{hg}((X_1)_{hg}, \ldots, (X_p)_{hg})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_g((X_1)_g, \dots, (X_p)_g) \qquad (\text{仮定より}) \\
&= \omega_g(v_1, \dots, v_p).
\end{aligned}
$$

したがって $L_h^*\omega = \omega$となりωは左不変である。

定理 3.1.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{X}(G)$ と $g \in G$ に対して補題 3.1.2 より $X_g = \overline{X}_g$となる G 上の左不変ベクトル場$\overline{X}$がただ 1 つ存在する。そこで $(\omega(X))(g) = \overline{X}$ として写像$\omega(X) : G \to \mathfrak{g}$ を定めると$\omega(X) \in \Omega^0(G;\mathfrak{g})$ となり、ωは $\mathfrak{g}$ に値を持つ G 上の左不変 1 次微分形式になる。さらにωは

$$(*) \qquad d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0$$

を満たす。

証明 $n = \dim G$ としておく。$X_1, \dots, X_n$を $\mathfrak{g}$ の基底とすると任意の $X \in \mathfrak{X}(G)$ は

$$X_g = \sum_{i=1}^{n} f^i(g)(X_i)_g \qquad (f^i \in C^\infty(M))$$

と表すことができる。したがって

$$(\omega(X))(g) = \sum_{i=1}^{n} f^i(g) X_i \in \mathfrak{g}$$

となるので$\omega(X) : G \to \mathfrak{g}$ は C^∞級写像になる。$f \in C^\infty(M)$ に対して $fX = \sum_{i=1}^n ff^iX_i$だから

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{n} ff^i\omega(X_i) = f\omega(X)$$

となり注意 1.3.7よりωは $\mathfrak{g}$ に値を持つ G 上の 1 次微分形式である。Xを G 上の左不変ベクトル場とすると $X_g = \sum_{i=1}^n a^i(X_i)_g$ $(a^i \in \mathbf{R})$ と表すことができ、$\omega(X)(g) = \sum_{i=1}^n a^iX_i$となるので$\omega(X)$ は一定値をとる写像である。よって補題 3.1.3よりωは左不変である。

最後に $(*)$ を証明する。そのためには $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$d\omega(X,Y) + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](X,Y) = 0$$

を証明すれば十分である。補題 3.1.3より$\omega(Y)$ は一定値をとる写像なので $X(\omega(Y)) = 0$ になる。同様に $Y(\omega(X)) = 0$ になる。定理 1.4.10と、$Z \in \mathfrak{g}$ に対しては$\omega(Z) = Z$となることを使うと

$$
\begin{aligned}
d\omega(X,Y) &= -\omega([X,Y]) = -[X,Y] = -[\omega(X), \omega(Y)] \\
&= -\frac{1}{2}\left([\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)]\right) \\
&= -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](X,Y).
\end{aligned}
$$

定義 3.1.5 定理 3.1.4で構成したωを Lie 群 G の **Maurer-Cartan 形式**と呼び、$(*)$ を **Maurer-Cartan の方程式**と呼ぶ。

注意 3.1.6 定理 3.1.4では Lie 群 G の Maurer-Cartan 形式を$\wedge^1_{C^\infty(G)}(\mathfrak{X}(G), \Omega^0(G;\mathfrak{g}))$ の元として構成し、定理 1.3.6によって$\Omega^1(G;\mathfrak{g})$ の元とみなした。G の Maurer-Cartan 形式ωの各点 $g \in G$ における値$\omega_g \in \wedge^1(T_g(G), \mathfrak{g})$ は次のようになる。$v \in T_g(G)$ に対して補題 3.1.2より $X_g = v$となる G 上の左不変ベクトル場 Xがただ 1 つ存在し$\omega_g(v) = X$となる。つまり$\omega_g : T_g(G) \to \mathfrak{g}$ は接ベクトルを左不変ベクトル場に拡張する写像である。

命題 3.1.7 G を Lie 群 Hの Lie 部分群とし、G と Hの Lie 環を $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ とおく。ω_Gとω_Hをそれぞれ G と Hの Maurer-Cartan 形式とする。このとき包含写像$\iota : G \to H$によるω_Hの引き戻し$\iota^*\omega_H$は $\mathfrak{g}$ に値を持ち$\iota^*\omega_H = \omega_G$が成り立つ。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}$ の元とみなすと H上の左不変ベクトル場になり、それを G に制限するともとの $\mathfrak{g}$ の元としての Xに等しくなるので、$\iota^*\omega_H$は $\mathfrak{g}$ に値を持ち$\iota^*\omega_H = \omega_G$が成り立つ。

例 3.1.8 線形 Lie 群の Maurer-Cartan 形式を求めてみよう。そのためにまず $GL(n,\mathbf{R})$ の Maurer-Cartan 形式ωを求める。$i : GL(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ で包含写像を表すことにする。$i \in \Omega^0(GL(n,\mathbf{R}); \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}))$ だから $di \in \Omega^1(GL(n,\mathbf{R}); \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}))$ である。各 $x \in G$ と $v \in T_x(GL(n,\mathbf{R}))$ に対して $di_x(v)$ を左不変ベクトル場に拡張したときの e での値が$\omega_x(v)$になる。よって

$$\omega_x(v) = (dL_{x^{-1}})_x di_x(v) = x^{-1} di_x(v) = i(x)^{-1} di_x(v)$$

となるので

$$\omega = i^{-1}di.$$

次に線形 Lie 群 $G \subset GL(n,\mathbf{R})$ の Maurer-Cartan 形式ω_Gは$\iota : G \to GL(n,\mathbf{R})$ を包含写像とし $g = i \circ \iota$とおくと、命題 3.1.7より

$$\omega_G = \iota^*(i^{-1}di) = g^{-1}dg.$$

ここで G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると$\omega_G \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ ではあるが、$dg \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ となるとは限らないことに注意しておく。

命題 3.1.9 G を Lie 群としωを G の Maurer-Cartan 形式とする。多様体 Mから G への 2 つの C^∞級写像 $f_1, f_2 : M \to G$ に対して、$h(x) = f_1(x)f_2(x)^{-1}$とおくと

$$h^*\omega = \mathrm{Ad}(f_2)(f_1^*\omega - f_2^*\omega)$$

が成り立つ。

証明 C^∞級写像 Fと p を

$$F : M \to G \times G; x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$
$$p : G \times G \to G; (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

と定めると $h = p \circ F$となる。$dF_x(v) = ((df_1)_x(v), (df_2)_x(v))$ が任意の $x \in M$と $v \in T_x(M)$ に対して成り立つ。また $(g_1, g_2) \in G \times G$ と $(X, Y) \in T_{(g_1,g_2)}(G \times G)$ に対して

$$\begin{aligned}
& dp_{(g_1,g_2)}(X, Y) \\
= \ & dp_{(g_1,g_2)}(X, 0) + dp_{(g_1,g_2)}(0, Y) \\
= \ & dp_{(g_1,g_2)} \left(\left. \frac{d}{dt} g_1 \exp(t\omega_{g_1}(X)) \right|_{t=0}, 0 \right) + dp_{(g_1,g_2)} \left(0, \left. \frac{d}{dt} g_2 \exp(t\omega_{g_2}(Y)) \right|_{t=0} \right) \\
= \ & \left. \frac{d}{dt} g_1 \exp(t\omega_{g_1}(X)) g_2^{-1} \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} g_1 \exp(-t\omega_{g_2}(Y)) g_2^{-1} \right|_{t=0} \\
= \ & \left. \frac{d}{dt} g_1 g_2^{-1} \exp(t\mathrm{Ad}(g_2)\omega_{g_1}(X)) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} g_1 g_2^{-1} \exp(-t\mathrm{Ad}(g_2)\omega_{g_2}(Y)) \right|_{t=0} \\
= \ & dL_{g_1 g_2^{-1}}(\mathrm{Ad}(g_2)\omega_{g_1}(X))_e + dL_{g_1 g_2^{-1}}(-\mathrm{Ad}(g_2)\omega_{g_2}(Y))_e \\
= \ & dL_{g_1 g_2^{-1}}(\mathrm{Ad}(g_2)(\omega_{g_1}(X) - \omega_{g_2}(Y)))_e
\end{aligned}$$

となる。$h = p \circ F$だから、$x \in M$と $v \in T_x(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
dh_x(v) &= dp_{(f_1(x), f_2(x))} \circ dF_x(v) \\
&= dL_{f_1(x) f_2(x)^{-1}}(\mathrm{Ad}(f_2(x))(\omega_{f_1(x)}((df_1)_x(v)) - \omega_{f_2(x)}((df_2)_x(v))))_e \\
&= dL_{f_1(x) f_2(x)^{-1}}(\mathrm{Ad}(f_2(x))((f_1^*\omega)_x(v) - (f_2^*\omega)_x(v)))_e \\
&= dL_{f_1(x) f_2(x)^{-1}}((\mathrm{Ad}(f_2)(f_1^*\omega - f_2^*\omega))_x(v))_e.
\end{aligned}$$

したがって

$$(h^*\omega)_x(v) = \omega_{h(x)}(dh_x(v)) = (\mathrm{Ad}(f_2)(f_1^*\omega - f_2^*\omega))_x(v)$$

となり $h^*\omega = \mathrm{Ad}(f_2)(f_1^*\omega - f_2^*\omega)$ が成り立つ。

定理 3.1.10 G を Lie 群としωを G の Maurer-Cartan 形式とする。連結多様体 Mから G への 2 つの C^∞級写像 $f_1, f_2 : M \to G$ に対して、$f_1 = L_g \circ f_2$となる $g \in G$ が存在するための必要十分条件は $f_1^*\omega = f_2^*\omega$となることである。

証明 $f_1 = L_g \circ f_2$となる $g \in G$ が存在すると仮定すると命題 1.2.8より

$$f_1^*\omega = (L_g \circ f_2)^*\omega = f_2^*(L_g^*\omega) = f_2^*\omega$$

が成り立つ (以上の議論では Mの連結性は必要ない)。

今度は逆に $f_1^*\omega = f_2^*\omega$と仮定する。$h(g) = f_1(g) f_2(y)^{-1}$とおくと命題 3.1.9より

$$h^*\omega = \mathrm{Ad}(f_2)(f_1^*\omega - f_2^*\omega) = 0$$

となる。したがって任意の $x \in M$ と $v \in T_x(M)$ に対して

$$dh_x(v) = \omega_{h(x)}(dh_x(v)) = (h^*\omega)_x(v) = 0.$$

Mは連結だから、写像 h は定値写像になる。その定値を $g \in G$ とすると任意の $x \in M$に対して $f_1(x)f_2(x)^{-1} = g$となるので $f_1(x) = gf_2(x) = L_g \circ f_2(x)$ が成り立つ。

命題 3.1.11 写像 $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ を

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{A} & : & E(n) \to O(n) & ; \quad [A\ x] \mapsto A \\ \mathbf{x} & : & E(n) \to \mathbf{R}^n & ; \quad [A\ x] \mapsto x \end{array}$$

で定めると

$$(\mathbf{A}, \mathbf{x}) : E(n) \to O(n) \times \mathbf{R}^n$$

は微分同型写像になる。$E(n)$ の Maurer-Cartan 形式を $[\omega\ \theta]$ とし、$O(n) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ だから $\mathbf{A}$ を $E(n)$ から $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ への写像とみなすと

$$\begin{gathered} \omega = {}^t\mathbf{A} d\mathbf{A}, \quad \theta = {}^t\mathbf{A} d\mathbf{x} \\ d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0, \quad d\theta + \omega \wedge \theta = 0 \end{gathered}$$

が成り立つ。

証明 $E(n)$ の定め方より $(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ は微分同型写像になる。

$E(n)$ の $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbf{R})$ への包含写像を$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$と表すと、例 3.1.8より $E(n)$ の Maurer-Cartan 形式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d\mathbf{A} & d\mathbf{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{A} & -{}^t\mathbf{A}\mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{A} & d\mathbf{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{A}d\mathbf{A} & {}^t\mathbf{A}d\mathbf{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\omega = {}^t\mathbf{A} d\mathbf{A}, \quad \theta = {}^t\mathbf{A} d\mathbf{x}$$

が成り立つ。また Maurer-Cartan の方程式より

$$d[\omega\ \theta] + \frac{1}{2}[[\omega\ \theta] \wedge [\omega\ \theta]] = 0.$$

ここで $d[\omega\ \theta] = [d\omega\ d\theta]$。また $E(n)$ の接ベクトル X, Yに対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[[\omega\ \theta] \wedge [\omega\ \theta]](X, Y) &= [[\omega\ \theta](X), [\omega\ \theta](Y)] \\ &= [[\omega(X)\ \theta(X)], [\omega(Y)\ \theta(Y)]] \\ &= [[\omega(X), \omega(Y)]\ \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)] \\ &= \left[\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](X, Y)\ (\omega \wedge \theta)(X, Y)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\ \omega \wedge \theta\right](X, Y) \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{2}[[\omega\ \theta] \wedge [\omega\ \theta]] = \left[\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\ \omega \wedge \theta\right].$$

したがって

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0, \quad d\theta + \omega \wedge \theta = 0.$$

注意 3.1.12 $O(n)$ は連結成分を 2 つ持ち $\mathbf{R}^n$は連結である。命題 3.1.11 より $E(n)$ は $O(n) \times \mathbf{R}^n$と微分同型になるので、$E(n)$ も連結成分を 2 つ持つ。

$$SE(n) = \{[A\ x] \in E(n) | A \in SO(n)\}$$

とおくと $SE(n)$ は $E(n)$ の単位元の連結成分である。

3.2 微分形式の可積分条件

補題 3.2.1 ωを有限次元実ベクトル空間 Vに値を持つ多様体 M上の 1 次微分形式とし各 $x \in M$に対して$\omega_x : T_x(M) \to V$が全射であるとする。このとき $\mathfrak{B}_x = \{v \in T_x(M) | \omega_x(v) = 0\}$ とおくと $\mathfrak{B}$ は M上の分布になる。さらに $\mathfrak{B}$ が完全積分可能になるための必要十分条件は $\mathfrak{B}$ に属する任意のベクトル場 X, Yに対して $d\omega(X, Y) = 0$ となることである。

証明 $\dim M = m, \dim V = n$ とおくと、各 $x \in M$に対して $\dim \mathfrak{B}_x = m - n$ となっていることに注意しておく。Mの x を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ をとる。Uの点 yにおける接ベクトルは$\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_y$と一意的に表せるので、$U$における接ベクトルの全体 $T(U)$ は$\tilde{T}(U) = (x_1, \ldots, x_m)(U) \times \mathbf{R}^m (\subset \mathbf{R}^{2m})$ と 1 対 1 に対応する。

$$\omega_y = \sum_{i=1}^m \omega_i(y)(dx_i)_y \qquad (y \in U)$$

とおくと$\omega_i \in \Omega^0(U; V)$ となる。仮定より各 $y \in U$に対して$\omega_1(y), \ldots, \omega_m(y)$ は Vを生成する。ω_iを $(x_1, \ldots, x_m)(U)$ から Vへの C^∞級写像ともみなす。ωの Uへの制限は $T(U)$ から Vへの写像になり、対応する$\tilde{T}(U)$ から Vへの写像を$\tilde{\omega}$で表すと

$$\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_m, \xi^1, \ldots, \xi^m) = \sum_{i=1}^m \omega_i(x_1, \ldots, x_m)\xi^i$$

となるので$\tilde{\omega}$は C^∞級写像になる。さらに

$$d\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_m)\xi^i,$$
$$d\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = \omega_j(x_1, \ldots, x_m).$$

よって $d\tilde{\omega}_* : T_*(\tilde{T}(U)) \to V$は全射になる。したがって陰関数定理より

$$\{(x_1, \ldots, x_m, \xi^1, \ldots, \xi^m) \in \tilde{T}(U) | \tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_m, \xi^1, \ldots, \xi^m) = 0\}$$

は$\tilde{T}(U)$ の $2m-n$ 次元部分多様体になる。対応する $T(U)$ の部分集合は $\cup_{y\in U}\mathfrak{B}_y$になるので $\mathfrak{B}$ は Mの $m-n$ 次元分布になることがわかる。

定理 1.4.10より $\mathfrak{B}$ に属する任意のベクトル場 X, Yに対して

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = -\omega([X,Y]).$$

$\mathfrak{B}$ が完全積分可能であると仮定すると $[X,Y]$ も $\mathfrak{B}$ に属するので $d\omega(X,Y) = 0$。逆に $d\omega(X,Y) = 0$ と仮定すると$\omega([X,Y]) = -d\omega(X,Y) = 0$。したがって $[X,Y]$ も $\mathfrak{B}$ に属し、$\mathfrak{B}$ は完全積分可能である。

系 3.2.2 補題 3.2.1と同じ条件で、さらに $\mathfrak{B}$ に属する任意のベクトル場 X,Yに対して $d\omega(X,Y) = 0$ が成り立っているとする。このとき各 $p \in M$に対して p を含む $\mathfrak{B}$ の極大連結積分多様体 Nがただ 1 つ存在する。さらに p を含む $\mathfrak{B}$ の連結積分多様体は Nに含まれる。

証明 補題 3.2.1と極大連結積分多様体の存在定理からわかる。

定理 3.2.3 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。ωで G の Maurer-Cartan 形式を表す。また Mを連結で単連結な多様体とし、ϕを $\mathfrak{g}$ に値を持つ M上の 1 次微分形式とする。このとき $f^*\omega = \phi$を満たす C^∞級写像 $f : M \to G$ が存在するための必要十分条件はϕが

$$d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0$$

を満たすことである。さらにϕが上の方程式を満たすとき任意の $x_0 \in M,\ g_0 \in G$ に対して $f^*\omega = \phi$と $f(x_0) = g_0$を満たす C^∞級写像 $f : M \to G$ が一意的に存在する。

証明 まず $f^*\omega = \phi$を満たす C^∞級写像 $f : M \to G$ が存在すると仮定しよう。

$$\begin{aligned} & d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = d(f^*\omega) + \frac{1}{2}[(f^*\omega) \wedge (f^*\omega)] \\ = \ & f^*(d\omega) + \frac{1}{2}f^*[\omega \wedge \omega] = f^*\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \qquad (\text{命題 1.2.9と定理 1.4.4}) \\ = \ & 0 \qquad (\text{Maurer-Cartan の方程式 (定理 3.1.4)}) \end{aligned}$$

となる (以上の議論では Mの連結性、単連結性は必要ない)。

今度は逆にϕが

$$d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0$$

を満たすと仮定しよう。

$$\begin{aligned} p_1 &: M \times G \to M; (x,g) \mapsto x \\ p_2 &: M \times G \to G; (x,g) \mapsto g \end{aligned}$$

とおいて、$\theta = p_1^*\phi - p_2^*\omega$によって$\theta \in \Omega^1(M \times G; \mathfrak{g})$ を定める。各 $(x,g) \in M \times G$ に対して$\theta_{(x,g)} : T_{(x,g)}(M \times G) \to \mathfrak{g}$ は全射になり

$$\mathfrak{B}_{(x,g)} = \{(A,X) \in T_{(x,g)}(M \times G) | \theta(A,X) = 0\}$$

とおくと、$\mathfrak{B}$ は $M \times G$ 上の分布になる。θの外微分は

$$\begin{aligned} d\theta &= p_1^* d\phi - p_2^* d\omega \qquad (\text{定理 } 1.4.4) \\ &= -\frac{1}{2} p_1^*[\phi \wedge \phi] + \frac{1}{2} p_2^*[\omega \wedge \omega] \qquad (\text{Maurer-Cartan の方程式 (定理 } 3.1.4)) \\ &= -\frac{1}{2}[(p_1^*\phi) \wedge (p_1^*\phi)] + \frac{1}{2}[(p_2^*\omega) \wedge (p_2^*\omega)] \qquad (\text{命題 } 1.2.9) \end{aligned}$$

となる。$\mathfrak{B}$ に属するベクトル場 (A,X) と (B,Y) を $d\theta$に代入すると

$$\begin{aligned} & d\theta((A,X),(B,Y)) \\ =& -\frac{1}{2}[(p_1^*\phi) \wedge (p_1^*\phi)]((A,X),(B,Y)) + \frac{1}{2}[(p_2^*\omega) \wedge (p_2^*\omega)]((A,X),(B,Y)) \\ =& -[(p_1^*\phi)(A,X),(p_1^*\phi)(B,Y)] + [(p_2^*\omega)(A,X),(p_2^*\omega)(B,Y)] \\ =& \ 0 \end{aligned}$$

となるので補題3.2.1より分布 $\mathfrak{B}$ は完全積分可能になる。よって系3.2.2より $(x_0,g_0) \in M \times G$ に対して (x_0,g_0) を含む $\mathfrak{B}$ の極大連結積分多様体 Nがただ1つ存在する。各 $(x,g) \in M \times G$, $(A,X) \in T_{(x,g)}(M \times G)$ について $(A,X) \in \mathfrak{B}_{(x,g)}$となるための必要十分条件は$\phi_x(A) = \omega_g(X)$ だから $X = (\phi_x(A))_g$である。よって

$$T_{(x,g)}(N) = \{(A,(\phi_x(A))_g) \in T_{(x,g)}(M \times G) | A \in T_x(M)\}$$

が成り立つ。これより $d(p_1|_N)_{(x,g)} : T_{(x,g)}(N) \to T_x(M)$ は線形同型写像になり、逆関数定理より $p_1|_N$は局所的に微分同型写像になる。$p_1(x,g) = x$ だから $p_1|_N$の局所的な逆写像は $x \mapsto (x,h(x))$ となる。ただし h は Mから G への局所的な C^∞級写像である。したがって

$$T_{(x,h(x))}(N) = \{(A, dh_x(A)) \in T_{(x,h(x))}(M \times G) | A \in T_x(M)\}$$

となり、$A \in T_x(M)$ に対して

$$\phi_x(A) = \omega_{h(x)}(dh_x(A)) = (h^*\omega)_x(A).$$

これより$\phi = h^*\omega$が成り立つ。特に各 $(x,g) \in M \times G$ に対して x の開近傍で定義された G への C^∞級写像 h で $h(x) = g$と$\phi = h^*\omega$を満たすものが存在する。

次に $p_1|_N : N \to M$が被覆写像になることを示そう。まず $p_1|_N$が全射になることを示す。$p_1|_N$は局所的に微分同型写像なので $p_1(N)$ は Mの開集合になる。$x' \in \overline{p_1(N)}$と $g' \in G$ をとると、x'の連結な開近傍 Uを $h'(x') = g'$と$\phi = h'^*\omega$を満たす h'が U上で定まっているようにとることができる。$p_1(N) \cap U$の連結成分で x'を境界点に持つものの上で $(x, g) \in N$ となる点をとり、x の連結な開近傍 Vを $h(x) = g$と$\phi = h^*\omega$を満たす h が V上で定まっているようにとると、定理 3.1.10より G のある元 a が存在し V上で $h = L_a \circ h'$が成り立つ。したがって $N \cup \{(x, h'(x))|x \in U\}$ も $\mathfrak{B}$ の連結積分多様体になり、特に $(x', g') \in N$となり $x' \in p_1(N)$ が成り立つ。よって $p_1(N)$ は閉集合にもなり、Mは連結だから $p_1(N) = M$である。これより任意の $x_1 \in M$に対して $(x_1, g_1) \in N$となる点が存在する。そこで x_1のある連結開近傍 Uで定義された G への C^∞級写像 h で $x \mapsto (x, h(x))$ が $p_1|_N$の局所的な逆写像になり $h(x_1) = g_1$を満たすものをとる。もう 1 つ $(x_1, g_2) \in N$となる点があるとすると定理 3.1.10より $x \mapsto (x, L_{g_2}L_{g_1}^{-1}h(x))$ が $p_1|_N$の局所的な逆写像になり $h(x_1) = g_2$を満たす。したがって $p_1|_N : N \to M$は被覆写像になる。

Nと Mは連結で Mは単連結だから $p_1|_N : N \to M$は位相同型写像になり、さらに微分同型写像になる。$p_1|_N$の逆写像を $x \mapsto (x, f(x))$ とすると、fは Mから G への C^∞級写像になり $f(x_0) = g_0$と $f^*\omega = \phi$を満たす。この fの一意性は定理 3.1.10からわかる。

系 3.2.4 Mを連結で単連結な多様体とし、Vを有限次元実ベクトル空間とする。ϕを Vに値を持つ M上の 1 次微分形式とする。このとき $df = \phi$を満たす C^∞級写像 $f : M \to V$ が存在するための必要十分条件はϕが $d\phi = 0$ を満たすことである。さらにϕが上の方程式を満たすとき任意の $x_0 \in M,\ v_0 \in V$に対して $df = \phi$と $f(x_0) = v_0$を満たす C^∞級写像 $f : M \to V$が一意的に存在する。

証明 Vを加法に関して Lie 群とみなすと、V上のベクトル場はVからVへの C^∞級写像になり、V上の左不変ベクトル場はVからVへの定値写像になる。したがってVの Lie 環は V自身と同一視することができ、[,] は恒等的に 0 になる。Vの Maurer-Cartan 形式をωとすると $x \in V,\ v \in T_x(V) = V$に対して$\omega_x(v) = v$となる。これより C^∞級写像 $f : M \to V$に対して $f^*\omega = df$となる。したがって定理 3.2.3より $df = \phi$を満たす C^∞級写像 $f : M \to V$ が存在するための必要十分条件はϕが $d\phi = 0$ を満たすことであり、ϕが上の方程式を満たすとき任意の $x_0 \in M,\ v_0 \in V$に対して $df = \phi$と $f(x_0) = v_0$を満たす C^∞級写像 $f : M \to V$ が一意的に存在する。

3.3 Euclid 空間内の曲線

定義 3.3.1 Mを n 次元多様体とする。Mの各点 x に対して $T_x(M)$ 上の対称 2 次形式 a_xを対応させる対応 a が次の条件を満たすとき、a を M上の 2 次対称微分形式と呼ぶ。さらに各 $x \in M$に対して a_xが正定値であるとき、a を M上の Riemann 計量と呼び、Riemann 計量の定まっている多様体を Riemann 多様体と呼ぶ。(条件)Mの任意の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ に対して、

$$x \mapsto a_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right)$$

がすべての i, jについて U上の C^∞級関数になる。

例 3.3.2 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$に標準的な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をいれておく。各 $x \in \mathbf{R}^n$における $\mathbf{R}^n$の接ベクトル空間 $T_x(\mathbf{R}^n)$ は命題 2.3 より $\mathbf{R}^n$自身と同一視することができ、その同一視によって $T_x(\mathbf{R}^n)$ に内積が定まる。これも $\langle\ ,\ \rangle$ で表すと、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^n$上の Riemann 計量になる。

命題 3.3.3 Fを多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とし、a を N上の 2 次対称微分形式する。$x \in M$における Fの微分写像 $dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ を使って、

$$(F^*a)_x(u, v) = a_{F(x)}(dF_x(u), dF_x(v)) \qquad (u, v \in T_x(M))$$

として $T_x(M)$ 上の対称 2 次形式 $(F^*a)_x$を定めると F^*a は M上の 2 次対称微分形式になる。

証明　命題 1.2.6と同様に証明できる。

定義 3.3.4 命題 3.3.3で定めた F^*a を 2 次対称微分形式 a の Fによる**引戻し**と呼ぶ。

命題 3.3.5 Fを多様体 Mから Riemann 多様体 (N, g) への挿入とする。このとき F^*gは M上の Riemann 計量になる。

証明　各 $x \in T_x(M)$ について $dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ は単射だから、引き戻し $(F^*g)_x$も $T_x(M)$ 上の正定値対称 2 次形式になる。したがって、F^*gが M上の Riemann 計量になることがわかる。

注意 3.3.6 多様体 Mから Riemann 多様体 (N, g) への挿入 Fがあるときには特に断わらない限り F^*gを M上の Riemann 計量として考えることにする。

命題 3.3.7 Fを実数の開区間 Iから Riemann 多様体 (N, g) への挿入とすると、I上の座標 s が存在し $F^*g(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}) = 1$ が I上のすべての点で成り立つ。

証明　実数から定まる Iの自然な座標を t とすると $F^*g(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt})$ は I上の正の値をとる C^∞級関数になる。そこで $t_0 \in I$を 1 つ固定し

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} F^*g\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right)^{1/2} dt \quad (t \in I)$$

として I上の C^∞級関数 s を定める。

$$\frac{ds}{dt} = F^*g\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right)^{1/2} > 0$$

だから s は単調増加関数になり $s : I \to s(I)$ は微分同型写像になる。つまり s も Iの座標になる。さらに、

$$F^*g\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}\right) = F^*g\left(\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}, \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 F^*g\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1.$$

注意 3.3.8 実数の開区間 Iから Riemann 多様体 (N, g) への挿入 Fがあるとき、一般性を失うことなく I上の座標 s は $F^*g(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}) = 1$ を満たすとしてよい。

定義 3.3.9 実数の開区間 Iから $\mathbf{R}^n$への挿入 $x : I \to \mathbf{R}^n$が $\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \rangle = 1$ を満たし、

$$\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{ds^{n-1}}$$

が Iのすべての点で線形独立になるとき、曲線 x を**正則曲線**と呼ぶ。

定理 3.3.10 実数の開区間 Iから $\mathbf{R}^n$への正則曲線 $x : I \to \mathbf{R}^n$に対して、曲線$\tilde{x} : I \to SE(n)$ と I上で定義された C^∞級関数$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$が一意的に存在し、$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2}$は正の値をとり、

$$x = \mathbf{x} \circ \tilde{x},$$

$$\tilde{x}^*[\omega\ \theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \kappa_{n-2} & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} ds$$

を満たす。

証明 $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{ds^{n-1}}$に Gram-Schmidt の直交化を行いその結果を $e_1, \ldots, e_{n-1}$で表す。e_nは $\det[e_1\ \cdots\ e_n] = 1$ を満たす単位ベクトルをとる。このような e_nは $e_1, \ldots, e_{n-1}$の成分の小行列式で一意的に表される。各 e_iは Iから $\mathbf{R}^n$への C^∞級写像になり、Iのすべての点で

$$\frac{dx}{ds} = e_1, \quad e_k \in \sum_{i=1}^{k} \mathbf{R} \frac{d^i x}{ds^i}$$

が成り立つ。したがって

$$dx = e_1 ds, \quad de_k \in \sum_{i=1}^{k} \mathbf{R} \frac{d^{i+1} x}{ds^{i+1}} ds \subset \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{R} e_i ds.$$

$\tilde{x} = [e_1\ \cdots\ e_n\ x]$ とおくと$\tilde{x}$は Iから $E(n)$ への C^∞級写像になる。$\tilde{x}$の定め方より $x = \mathbf{x} \circ \tilde{x}$ が成り立つ。

命題 3.1.11で得た $E(n)$ の Maurer-Cartan 形式 $[\omega\ \theta]$ の表示を使って、その$\tilde{x}$による引き戻しを求める。命題 3.1.11より$\theta = {}^t\mathbf{A} d\mathbf{x}$ だから

$$\tilde{x}^*\theta = \tilde{x}^*({}^t\mathbf{A} d\mathbf{x}) = ({}^t\mathbf{A} \circ \tilde{x})\tilde{x}^* d\mathbf{x} = ({}^t\mathbf{A} \circ \tilde{x}) dx = \begin{bmatrix} {}^t e_1 \\ \vdots \\ {}^t e_n \end{bmatrix} e_1 ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

また$\omega = {}^t\mathbf{A}d\mathbf{A}$ を使うと

$$\tilde{x}^*\omega = \tilde{x}^*({}^t\mathbf{A}d\mathbf{A}) = ({}^t\mathbf{A}\circ\tilde{x})\tilde{x}^*d\mathbf{A} = ({}^t\mathbf{A}\circ\tilde{x})d(\mathbf{A}\circ\tilde{x}) = \begin{bmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_n \end{bmatrix}[de_1 \ \cdots \ de_n].$$

そこで${}^te_ie_j$を求めよう。まず$\tilde{x}^*\omega$は$\mathfrak{o}\,(n)$ に値を持つ微分形式だから

$$ {}^te_ide_j + {}^te_jde_i = 0$$

が成り立つ。

$$ {}^te_1de_1 = 0, \quad de_1 \in \sum_{i=1}^{2}\mathbf{R}e_ids$$

だから、I上の C^∞級関数κ_1が存在して $de_1 = \kappa_1e_2ds$ となる。したがって

$$\begin{bmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_n \end{bmatrix} de_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

となり

$$ {}^te_1[de_1 \ \cdots \ de_n] = [0 \ -\kappa_1 \ 0 \ \cdots \ 0]ds$$

もわかる。これらよりさらに I上の C^∞級関数κ_2が存在して $de_2 = -\kappa_1e_1ds + \kappa_2e_3ds$ となる。したがって

$$\begin{bmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_n \end{bmatrix} de_2 = \begin{bmatrix} -\kappa_1 \\ 0 \\ \kappa_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

となり

$$ {}^te_2[de_1 \ \cdots \ de_n] = [\kappa_1 \ 0 \ -\kappa_2 \ 0 \ \cdots \ 0]ds$$

もわかる。以上の考察を繰り返すと

$$\tilde{x}^*\omega = \begin{bmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_n \end{bmatrix}[de_1 \ \cdots \ de_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \kappa_{n-2} & 0 & -\kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix} ds$$

を得る。ある $1 \leq k \leq n-2$ とある点で$\kappa_k = 0$ と仮定すると $de_k = -\kappa_{k-1}e_{k-1}$となり $\frac{d^{k+1}x}{ds^{k+1}} \in \sum_{i=1}^{k} \mathbf{R}\frac{d^i x}{ds^i}$。これは x が正則曲線であることに矛盾するのでκ_kは $1 \leq k \leq n-2$ のとき零点を持たない。そこで必要なら e_kを-1 倍することによって$\kappa_k > 0$ とできる。

最後に$\tilde{x}$と$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$の一意性を証明しよう。$\tilde{x}'$と$\kappa'_1, \ldots, \kappa'_{n-1}$を同じ性質を持つものと仮定する。$\tilde{x}' = [e'_1 \ \cdots \ e'_n \ x']$ とおくと $x' = \mathbf{x} \circ \tilde{x}' = x$。

$$\tilde{x}'^*\theta = \tilde{x}'^*({}^t\mathbf{A}d\mathbf{x}) = ({}^t\mathbf{A} \circ \tilde{x}')\tilde{x}'^*d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^te'_1 \\ \vdots \\ {}^te'_n \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

となるので $dx = e'_1 ds$ となり $e_1 = e'_1$が成り立つ。$\kappa_1 e_2 ds = de_1 = \kappa'_1 e'_2 ds$ となり$\kappa_1 = \kappa'_1, e_2 = e'_2$。以下同様にして $1 \leq k \leq n-1$ に対して$\kappa_{k-1} = \kappa'_{k-1}, e_k = e'_k$が成り立つ。したがって$\tilde{x}$と$\tilde{x}'$の像は $SE(n)$ に含まれるので $e_n = e'_n$が成り立ち、de'_{n-1}を考えると$\kappa_{n-1} = \kappa'_{n-1}$もわかる。

定義 3.3.11 定理 3.3.10の$\tilde{x}$を x の **Frenet 標構**と呼び、$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$を x の**曲率**と呼ぶ。

定理 3.3.12 Iを実数の開区間とし $x, x' : I \to \mathbf{R}^n$を 2 つの正則曲線とし、それぞれの曲率を$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$と$\kappa'_1, \ldots, \kappa'_{n-1}$とおく。このときある $g \in SE(n)$ が存在して $x' = gx$ となるための必要十分条件は$\kappa_i = \kappa'_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ である。

証明 x, x'の Frenet 標構をそれぞれ$\tilde{x}, \tilde{x}'$としておく。
まずある $g \in SE(n)$ が存在して $x' = gx$ となっていると仮定しよう。

$$\mathbf{x} \circ L_g \circ \tilde{x} = gx = x'$$
$$(L_g \circ \tilde{x})^*[\omega \ \theta] = \tilde{x}^*[\omega \ \theta] \qquad (\text{定理 } 3.1.10)$$

が成り立つので、$L_g \circ \tilde{x}$も x'の Frenet 標構になり定理 3.3.10の一意性より$\kappa_i = \kappa'_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ となる。

逆に$\kappa_i = \kappa'_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ と仮定しよう。すると$\tilde{x}'^*[\omega \ \theta] = \tilde{x}^*[\omega \ \theta]$ となり、定理 3.1.10よりある $g \in SE(n)$ が存在して$\tilde{x}' = L_g \circ \tilde{x}$。これより $x' = \mathbf{x} \circ \tilde{x}' = \mathbf{x} \circ L_g \circ \tilde{x} = gx$ となる。

定理 3.3.13 $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$を実数の開区間 I上で定義された C^∞級関数で$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2}$は正の値をとるとする。このとき曲率が$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$になるような正則曲線 $x : I \to \mathbf{R}^n$が存在する。

証明

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \kappa_{n-2} & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} ds$$

とおくとϕは$\mathfrak{e}\,(n)$に値を持つI上の1次微分形式になる。Iは1次元多様体だから系1.1.11よりI上の$\mathfrak{e}\,(n)$に値を持つI上の2次微分形式は0だけになる。したがってϕは$d\phi+\frac{1}{2}[\phi\wedge\phi]=0$を満たす。$I$は連結で単連結だから$g\in SE(n)$と$t_0\in I$をとると定理3.2.3より$\tilde{x}^*[\omega\ \theta]=\phi$と$\tilde{x}(t_0)=g$を満たす$C^\infty$級写像$\tilde{x}:I\to SE(n)$が存在する。$x=\mathbf{x}\circ\tilde{x}$とおくと$x$は正則曲線になる。さらに$\tilde{x}(I)\subset SE(n)$で$\phi$の定め方より$\tilde{x}$は$x$の Frenet 標構になり$x$の曲率は$\kappa_1,\ldots,\kappa_{n-1}$になる。

3.4 Euclid 空間内の超曲面

命題 3.4.1 Mをn次元 Riemann 多様体とし、

$$\begin{aligned} O_x(M) &= \{[e_1,\ldots,e_n] \mid e_1,\ldots,e_n \text{ は } T_x(M) \text{ の正規直交基底 }\} \qquad (x\in M) \\ O(M) &= \bigcup_{x\in M} O_x(M) \end{aligned}$$

とおく。$[e_1,\ldots,e_n]\in O(M)$に対して$e_i\in T_x(M)$となる$x\in M$が一つ定まるので、$\pi(e_1,\ldots,e_n)=x$とおくと、写像$\pi:O(M)\to M$が定まる。このとき、$O(M)$は多様体になり、$\pi:O(M)\to M$はM上の主$O(n)$束になる。

証明 Mの各点pに対してpを含む座標近傍系$(U;x^1,\ldots,x^n)$をとる。各$x\in U$に対して、

$$(*)\qquad \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

は$T_x(M)$の基底になっている。そこで、$(*)$に Gram-Schmidt の直交化法を施し、得られたものを$(e_1)_x,\ldots,(e_n)_x$とすると、

$$[(e_1)_x\cdots(e_n)_x]=\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x\cdots\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x\right]\begin{bmatrix} a_1^1(x) & \cdots & \cdots & a_n^1(x) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^n(x) \end{bmatrix}$$

となる。$a_j^i(x)$はU上定義されたC^∞級関数である。$(*)$はU上定義されたC^∞級ベクトル場だから、$(e_1)_x,\ldots,(e_n)_x$もU上定義されたC^∞級ベクトル場になる。さらに、$(e_1)_x,\ldots,(e_n)_x$は$T_x(M)$の正規直交基底になり、$e_x=[(e_1)_x,\ldots,(e_n)_x]\in O_x(M)$。これより、$\pi^{-1}(U)\subset O(M)$の各元$u=(u_1,\ldots,u_n)$は

$$[u_1,\ldots,u_n]=[(e_1)_{\pi(f)},\ldots,(e_n)_{\pi(u)}]g(u)\qquad (g(u)\in O(n))$$

と一意的に表すことができ、

$$\Phi_U(u)=(\pi(u),g(u))\qquad (u\in\pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times O(n)$$

を定める。$O(n)$ の局所座標系をとることにより、$U \times O(n)$ の局所座標系をとることができ、Φ_Uと合成すると$\pi^{-1}(U)$ の開集合上の局所座標系になる。

Mの他の座標近傍系 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとり、上と同様に Gram-Schmidt の直交化法によって、$y \in V$に対して正規直交系 $(f_1)_y, \ldots, (f_n)_y$を定めると、

$$[(f_1)_y \cdots (f_n)_y] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_y \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_y \right] \begin{bmatrix} b_1^1(y) & \cdots & \cdots & b_n^1(y) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n^n(y) \end{bmatrix}$$

となる。各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = f_{\pi(v)} h(v) \qquad (h(v) \in O(n))$$

と一意的に表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ での局所座標系を定める写像Φ_Vは

$$\Phi_V(v) = (\pi(v), h(v)) \qquad (v \in \pi^{-1}(V))$$

で定まる。

以下で、$U \cap V \neq \emptyset$ のときの$\pi^{-1}(U)$ と$\pi^{-1}(V)$ の間の変換を求める。まず、$x \in U \cap V$に対して、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x$$

となるので、

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_x \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}(x) \end{bmatrix}.$$

そこで、

$$J(x) = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x) \right]$$

とおく。さらに、

$$A(x) = [a_j^i(x)], \quad B(x) = [b_j^i(x)]$$

とおいておく。これらの行列を使って上で得た基底の変換を表すと、

$$\begin{aligned} [e_1 \cdots e_n] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n} \right] A \\ [f_1 \cdots f_n] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^n} \right] B \\ \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n} \right] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^n} \right] J. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}[e_1 \cdots e_n] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right] A \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^n}\right] JA \\ &= [f_1 \cdots f_n]\, B^{-1} JA\end{aligned}$$

となり、

$$[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_n]\, B^{-1} JA$$

を得る。$u \in \pi^{-1}(U \cap V)$ に対して

$$u = [f_1 \cdots f_n] h(u) = [e_1 \cdots e_n] g(u) = [f_1 \cdots f_n] B^{-1} JAg(u).$$

よって、

$$h(u) = B^{-1} JAg(u)$$

となり、変換

$$(U \cap V) \times O(n) \to (U \cap V) \times O(n)\ ;\ (x, g(u)) \mapsto (x, h(u))$$

は C^∞級微分同型写像になる。これによって、$O(M)$ は多様体になる。

$O(M)$ の多様体構造の定め方より、写像$\pi : O(M) \to M$は C^∞級写像になる。さらに、$a \in O(n)$ と $u \in \pi^{-1}(U)$ に対して、$ua = eg(u)a$ であり、かつ $ua = eg(ua)$ だから、

$$\Phi_U(ua) = (\pi(u), g(ua)) = (\pi(u), g(u)a)$$

となり、$\pi : O(M) \to M$は主 $O(n)$ 束になる。

定義 3.4.2 命題 3.4.1で定めた $O(M)$ を Mの**直交フレーム束**と呼ぶ。

注意 3.4.3 n 次元 Riemann 多様体の直交フレーム束 $O(M)$ の各元は Mの一点の接ベクトル空間 $T_x(M)$ の正規直交基底 $e = [e_1, \ldots, e_n]$ であるが、$\mathbf{R}^n$に標準正規直交基底 $e^0 = [e^0_1, \ldots, e^0_n]$ を定めておくと、各 e^0_iを e_iに写す等長線形同型写像を指定することと同等になる。そこで、$x \in M$に対して、

$$O_x(M) = \{e \mid e : \mathbf{R}^n \to T_x(M) \text{ は等長線形同型写像 } \}$$

とみなすこともできる。等長線形同型写像 $e : \mathbf{R}^n \to T_x(M)$ に対して、$e(e^0_1), \ldots, e(e^0_n)$ は $T_x(M)$ の正規直交基底になるので、命題 3.4.1での $O(M)$ の定め方と対応がつく。このとき、$O(n)$ の $O(M)$ への右からの作用は、等長線形同型写像の右からの合成になる。

定義 3.4.4 n 次元 Riemann 多様体 Mに対して、

$$\theta_M(X) = e^{-1}d\pi(X) = \begin{bmatrix} \langle e_1, d\pi(X)\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, d\pi(X)\rangle \end{bmatrix} \qquad (e = [e_1, \ldots, e_n] \in O(M),\ X \in T_e(O(M)))$$

によって、$\theta_M \in \Omega^1(O(M); \mathbf{R}^n)$ を定め、Mの**標準形式**と呼ぶ。

補題 3.4.5 n 次元 Riemann 多様体 Mの標準形式θ_Mは、

$$[e_1, \ldots, e_n]\theta_M(X) = d\pi(X) \qquad (X \in T(O(M)))$$

を満たし、各 $e \in O(M)$ において、$\theta_M : T_e(O(M)) \to \mathbf{R}^n$は全射になる。さらに、$a \in O(n)$ の $O(M)$ への右からの作用を R_aで表すと、$R_a^*\theta_M = a^{-1}\theta_M$が成り立つ。

証明 定義より、

$$[e_1, \ldots, e_n]\theta_M(X) = [e_1, \ldots, e_n] \begin{bmatrix} \langle e_1, d\pi(X)\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, d\pi(X)\rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n e_i\langle e_i, d\pi(X)\rangle = d\pi(X).$$

$e = [e_1, \ldots, e_n]$ を等長線形同型写像とみなせば、

$$[e_1, \ldots, e_n]\theta_M(X) = ee^{-1}d\pi(X) = d\pi(X)$$

となる。$d\pi$は全射だから、上の等式より、$\theta_M : T_e(O(M)) \to \mathbf{R}^n$も全射になる。

$e \in O(M)$ と $X \in T_e(O(M))$ に対して

$$\begin{aligned} (R_a^*\theta_M)(X) &= \theta_M(dR_aX) = (ea)^{-1}d\pi(dR_aX) \\ &= a^{-1}e^{-1}d(\pi \circ R_a)X = a^{-1}e^{-1}d\pi X \\ &= a^{-1}\theta_M(X). \end{aligned}$$

したがって、$R_a^*\theta_M = a^{-1}\theta_M$が成り立つ。

定義 3.4.6 $A \in \mathfrak{o}(n)$ に対して、n 次元 Riemann 多様体 Mの直交フレーム束 $O(M)$ 上のベクトル場 A^*を

$$A_e^* = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e \exp tA \qquad (e \in O(M))$$

で定める。A^*を A に対応する**基本ベクトル場**と呼ぶ。

補題 3.4.7 $A, B \in \mathfrak{o}(n)$ と n 次元 Riemann 多様体 Mの直交フレーム束 $O(M)$ 上のベクトル場 Xに対して、

$$\begin{aligned} (-A)^* &= -A^* \\ [A^*, X] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X - dR_{\exp tA}X) \\ [A^*, B^*] &= [A, B]^* \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 $O(M)$ 上の C^∞級関数 fを任意にとる。任意の $e \in O(M)$ に対して

$$(-A)^*_e f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(e\exp(-tA)) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(e\exp tA) = -A^*_e f$$

となるので、$(-A)^* = -A^*$が成り立つ。

次に

$$F(t,e) = f(e\exp tA) - f(e) \qquad ((t,e) \in \mathbf{R} \times O(M))$$

とおき、$F(t,e)$ の第一成分に関する微分を $F'(t,e)$ で表す。

$$E(t,e) = \int_0^1 F'(ts,e)ds \qquad ((t,e) \in \mathbf{R} \times O(M))$$

とおくと、

$$E(0,e) = F'(0,e) = A^*_e f.$$

$t \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} E(t,e) &= \int_0^1 F'(ts,e)ds = \left[\frac{1}{t}F(ts,e)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{t}(F(t,e) - F(0,e)) = \frac{1}{t}(f(e\exp tA) - f(e)). \end{aligned}$$

よって、

$$f(e\exp tA) = f(e) + tE(t,e), \qquad E(0,\cdot\,) = A^* f$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} (dR_{\exp tA}X)_e f &= (dR_{\exp tA}X_{e\exp(-tA)})f \\ &= X_{e\exp(-tA)}(f \circ dR_{\exp tA}) \\ &= X_{e\exp(-tA)}(f + tE(t,\cdot\,)). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X - (dR_{\exp tA}X))_e f &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X_e f - (dR_{\exp tA}X)_e f) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X_e f - X_{e\exp(-tA)}f) - \lim_{t\to 0} X_{e\exp(-tA)}E(t,\cdot\,) \\ &= A^*_e X f - X_e A^* f \\ &= [A^*, X]_e f. \end{aligned}$$

これが任意の $e \in O(M)$ と $f \in C^\infty(O(M))$ について成り立つので、

$$[A^*, X] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X - dR_{\exp tA}X)$$

を得る。

上の結果より、

$$[A^*, B^*] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B^* - dR_{\exp tA} B^*)$$

となるので、まず $dR_{\exp tA}B^*$を計算しておく。

$$\begin{aligned}
(dR_{\exp tA}B^*)_e &= dR_{\exp tA}B^*_{e\exp(-tA)} \\
&= dR_{\exp tA}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} e\exp(-tA)\exp sB\right) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} R_{\exp tA}(e\exp(-tA)\exp sB) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} e\exp(-tA)\exp sB\exp tA \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} e\exp(s\mathrm{Ad}(\exp(-tA))B) \qquad (\text{定理 } 2.3.10 \text{より}) \\
&= (\mathrm{Ad}(\exp(-tA))B)^*_e.
\end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
[A^*, B^*]_e &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(B^*_e - (dR_{\exp tA}B^*)_e) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(B^*_e - (\mathrm{Ad}(\exp(-tA))B)^*_e) \\
&= \left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(B - \mathrm{Ad}(\exp(-tA))B)\right)^*_e \\
&= \left(-\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp(-tA))B\right)^*_e \\
&= (-[-A, B])^*_e \qquad (\text{定理 } 2.3.10 \text{より}) \\
&= [A, B]^*_e.
\end{aligned}$$

したがって、$[A^*, B^*] = [A, B]^*$が成り立つ。

補題 3.4.8 $A \in \mathfrak{o}(n)$ と n 次元 Riemann 多様体 Mの直交フレーム束 $O(M)$ 上のベクトル場 Xに対して、

$$\begin{aligned}
\theta_M(A^*) &= 0 \\
d\theta_M(A^*, X) &= -A\theta_M(X)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明　各 $e \in O(M)$ に対して A^*_eはファイバーに接しているので、

$$\theta_M(A^*_e) = e^{-1}d\pi A^*_e = 0.$$

よって、$\theta_M(A^*)=0$ が成り立つ。定理 1.4.10より、

$$\begin{aligned} d\theta_M(A^*,X) &= A^*(\theta_M(X)) - X(\theta_M(A^*)) - \theta_M([A^*,X]) \\ &= A^*(\theta_M(X)) - \theta_M([A^*,X]). \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A^*_e(\theta_M(X)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_M(X_{e\exp tA}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (e\exp tA)^{-1} d\pi(X_{e\exp tA}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-tA)e^{-1} d\pi(X_{e\exp tA}) \\ &= -Ae^{-1}d\pi(X_e) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-1}d\pi(X_{e\exp tA}) \\ &= -A\theta_M(X_e) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-1}d\pi(X_{e\exp tA}). \end{aligned}$$

さらに、補題 3.4.7より

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-1}d\pi(X_{e\exp tA}) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{-1}d\pi(X_{e\exp tA}) - e^{-1}d\pi(X_e)) \\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}e^{-1}(d\pi(X_e) - d\pi dR_{\exp(-tA)}(X_{e\exp tA})) \\ &= -e^{-1}d\pi\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(X_e - dR_{\exp(-tA)}(X_{e\exp tA}))\right) \\ &= -e^{-1}d\pi([-A^*,X]_e) \\ &= -\theta_M(-[A^*,X]_e) \\ &= \theta_M([A^*,X]_e). \end{aligned}$$

したがって、

$$d\theta_M(A^*,X) = -A\theta_M(X)$$

が成り立つ。

定理 3.4.9 n 次元 Riemann 多様体 Mに対して、

$$d\theta_M + \omega_M \wedge \theta_M = 0$$

を満たす$\omega_M \in \Omega^1(O(M);\mathfrak{o}(n))$ が一意的に存在する。

証明 まず、一意性を示す。$\omega,\omega' \in \Omega^1(O(M);\mathfrak{o}(n))$ が

$$\begin{aligned} d\theta_M + \omega \wedge \theta_M = 0 \\ d\theta_M + \omega' \wedge \theta_M = 0 \end{aligned}$$

を満たすと仮定する。$\alpha = \omega' - \omega \in \Omega^1(O(M); \mathfrak{o}(n))$ とおくと、上の二つの等式より、$\alpha \wedge \theta_M = 0$ となる。$O(M)$ の任意の接ベクトル X, Y に対して

$$0 = (\alpha \wedge \theta_M)(X, Y) = \alpha(X)\theta_M(Y) - \alpha(Y)\theta_M(X)$$

となるので、$\alpha(X)\theta_M(Y) = \alpha(Y)\theta_M(X)$ が成り立つ。

$O(M)$ の任意の接ベクトル X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X)\theta_M(Y), \theta_M(Z) \rangle &= \langle \alpha(Y)\theta_M(X), \theta_M(Z) \rangle \\
&= -\langle \theta_M(X), \alpha(Y)\theta_M(Z) \rangle \\
&= -\langle \theta_M(X), \alpha(Z)\theta_M(Y) \rangle \\
&= \langle \alpha(Z)\theta_M(X), \theta_M(Y) \rangle \\
&= \langle \alpha(X)\theta_M(Z), \theta_M(Y) \rangle \\
&= -\langle \theta_M(Z), \alpha(X)\theta_M(Y) \rangle.
\end{aligned}$$

よって、

$$\langle \alpha(X)\theta_M(Y), \theta_M(Z) \rangle = 0$$

となる。ところが、補題 3.4.5より、各 $e \in O(M)$ において、$\theta_M : T_e(O(M)) \to \mathbf{R}^n$は全射になるので、$\alpha(X) = 0$ となり、$\alpha = 0$。したがって、$\omega = \omega'$となり、一意性が成り立つ。

次にω_Mの存在を証明する。$u, v \in \mathbf{R}^n$に対して補題 3.4.5より$\theta_M(Y) = u,\ \theta_M(Z) = v$となる $O(M)$ の接ベクトルY, Zが存在するので、$O(M)$ の接ベクトル Xに対して$\omega_M(X) \in \mathfrak{o}(n)$ を

$$\langle \omega_M(X)u, v \rangle = \frac{1}{2}(\langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z) \rangle - \langle d\theta_M(Z, X), \theta_M(Y) \rangle + \langle d\theta_M(Y, Z), \theta_M(X) \rangle)$$

によって定める。この定め方が Y, Zのとり方によらないことをまず示しておく。

$$\theta_M(Y) = \theta_M(Y') = u, \qquad \theta_M(Z) = \theta_M(Z') = v$$

となる Y', Z'をとると、$Y' - Y, Z' - Z$はファイバーに接するので、ある $A, B \in \mathfrak{o}(n)$ が存在し、

$$Y' - Y = A^*, \qquad Z' - Z = B^*$$

が成り立つ。補題 3.4.8より、

$$\begin{aligned}
\langle d\theta_M(Y', X), \theta_M(Z') \rangle &= \langle d\theta_M(Y + A^*, X), \theta_M(Z + B^*) \rangle \\
&= \langle d\theta_M(Y + A^*, X), \theta_M(Z) \rangle \\
&= \langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z) \rangle + \langle d\theta_M(A^*, X), \theta_M(Z) \rangle \\
&= \langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z) \rangle - \langle A\theta_M(X), \theta_M(Z) \rangle.
\end{aligned}$$

よって、

$$\langle d\theta_M(Y', X), \theta_M(Z') \rangle = \langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z) \rangle - \langle A\theta_M(X), \theta_M(Z) \rangle$$

となり、同様にして

$$\langle d\theta_M(Z', X), \theta_M(Y')\rangle = \langle d\theta_M(Z, X), \theta_M(Y)\rangle - \langle B\theta_M(X), \theta_M(Y)\rangle.$$

$\omega_M(X)$ の定義式の第三項について考える。

$$\begin{aligned} d\theta_M(Y', Z') &= d\theta_M(Y + A^*, Z + B^*) \\ &= d\theta_M(Y, Z) + d\theta_M(Y, B^*) + d\theta_M(A^*, Z) + d\theta_M(A^*, B^*). \end{aligned}$$

となり、補題 3.4.7、補題 3.4.8と定理 1.4.10より、

$$\begin{aligned} d\theta_M(Y, B^*) &= -d\theta_M(B^*, Y) = B\theta_M(Y) \\ d\theta_M(A^*, Z) &= -A\theta_M(Z) \\ d\theta_M(A^*, B^*) &= A^*(\theta_M(B^*)) - B^*(\theta_M(A^*)) - \theta_M([A^*, B^*]) \\ &= -\theta_M([A, B]^*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって、

$$d\theta_M(Y', Z') = d\theta_M(Y, Z) + B\theta_M(Y) - A\theta_M(Z)$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned} &\langle d\theta_M(Y', X), \theta_M(Z')\rangle - \langle d\theta_M(Z', X), \theta_M(Y')\rangle + \langle d\theta_M(Y', Z'), \theta_M(X)\rangle \\ =\ &\langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z)\rangle - \langle A\theta_M(X), \theta_M(Z)\rangle \\ &-\langle d\theta_M(Z, X), \theta_M(Y)\rangle + \langle B\theta_M(X), \theta_M(Y)\rangle \\ &+\langle d\theta_M(Y, Z) + B\theta_M(Y) - A\theta_M(Z), \theta_M(X)\rangle \\ =\ &\langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z)\rangle - \langle d\theta_M(Z, X), \theta_M(Y)\rangle + \langle d\theta_M(Y, Z), \theta_M(X)\rangle. \end{aligned}$$

これより、$\omega_M(X)$ の定め方は、Y, Zの選び方によらないことがわかる。

$\omega_M(X)$ の定義式において、右辺はYとZに関して交代的になっているので、$\omega_M(X) \in \mathfrak{o}(n)$ が成り立つ。したがって、$O(M)$ 上の 1 次微分形式$\omega_M \in \Omega^1(O(M); \mathfrak{o}(n))$ が定まる。

最後にω_Mが等式

$$d\theta_M + \omega_M \wedge \theta_M = 0$$

を満たすことを証明する。

$$\begin{aligned} &\langle (d\theta_M + \omega_M \wedge \theta_M)(X, Y), \theta_M(Z)\rangle \\ =\ &\langle d\theta_M(X, Y) + \omega_M(X)\theta_M(Y) - \omega_M(Y)\theta_M(X), \theta_M(Z)\rangle \\ =\ &\langle d\theta_M(X, Y), \theta_M(Z)\rangle \\ &+\frac{1}{2}(\langle d\theta_M(Y, X), \theta_M(Z)\rangle - \langle d\theta_M(Z, X), \theta_M(Y)\rangle + \langle d\theta_M(Y, Z), \theta_M(X)\rangle) \\ &-\frac{1}{2}(\langle d\theta_M(X, Y), \theta_M(Z)\rangle - \langle d\theta_M(Z, Y), \theta_M(X)\rangle + \langle d\theta_M(X, Z), \theta_M(Y)\rangle) \\ =\ &\langle d\theta_M(X, Y), \theta_M(Z)\rangle - \langle d\theta_M(X, Y), \theta_M(Z)\rangle \\ =\ &0. \end{aligned}$$

したがって、

$$d\theta_M + \omega_M \wedge \theta_M = 0$$

が成り立つ。

定義 3.4.10 定理 3.4.9のω_Mを Mの**接続形式**と呼ぶ。

補題 3.4.11 n 次元 Riemann 多様体 Mから $\mathbf{R}^{n+1}$への等長的挿入 $x : M \to \mathbf{R}^{n+1}$に対して、$C^\infty$級写像$\tilde{x} : O(M) \to SE(n+1)$ と$\omega \in \Omega^1(O(M); \mathbf{R}^n)$ が一意的に存在し、

$$x \circ \pi = \mathbf{x} \circ \tilde{x}, \qquad \tilde{x}^*\omega_G = \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}^*\theta_G = \begin{bmatrix} \theta_M \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす。ただし、$[\omega_G\ \theta_G]$ は $SE(n+1)$ の Maurer-Cartan 形式である。(命題 3.1.11参照)
さらにこのとき、

$$h = {}^t\omega \otimes \theta_M \qquad (\text{すなわち } h(X,Y) = {}^t\omega(X)\theta_M(Y)\ (X, Y \in TO(M)))$$

とおくと、h は $O(M)$ 上の対称二次形式になる。

証明 $e = [e_1, \ldots, e_n] \in O(M)$ に対して、$dx(e_1), \ldots, dx(e_n)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$は正規直交系になる。$\det(dx(e_1), \ldots, dx(e_n)、e_{n+1}) = 1$ を満たす単位ベクトル e_{n+1}をとる。このような e_{n+1}は $dx(e_1), \ldots, dx(e_n)$ の成分の小行列式で一意的に表される。$dx(e_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ と e_{n+1}は $O(M)$ から $\mathbf{R}^{n+1}$への C^∞級写像になる。そこで、

$$\tilde{x} : O(M) \to SE(n+1)\ ;\ [e_1, \ldots, e_n] \mapsto [dx(e_1), \ldots, dx(e_n)、e_{n+1}, x(\pi(e))]$$

によって写像$\tilde{x}$を定めると、$\tilde{x} : O(M) \to SE(n+1)$ は C^∞級写像になる。$e \in O(M)$ に対して$\tilde{x}$の定め方より、

$$\mathbf{x} \circ \tilde{x}(e) = x(\pi(e)) = x \circ \pi(e)$$

となり、$x \circ \pi = \mathbf{x} \circ \tilde{x}$が成り立つ。

命題 3.1.11より$\theta_G = {}^t\mathbf{A}d\mathbf{x}$ だから

$$\tilde{x}^*\theta_G = ({}^t\mathbf{A} \circ \tilde{x})d(x \circ \pi) = \begin{bmatrix} {}^t dx(e_1) \\ \vdots \\ {}^t dx(e_{n+1}) \end{bmatrix} d(x \circ \pi) = \begin{bmatrix} \langle dx(e_1), d(x \circ \pi) \rangle \\ \vdots \\ \langle dx(e_n), d(x \circ \pi) \rangle \\ \langle dx(e_{n+1}), d(x \circ \pi) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_M \\ 0 \end{bmatrix}.$$

命題 3.1.11より

$$d\theta_G + \omega_G \wedge \theta_G = 0$$

となるので、

$$d\tilde{x}^*\theta_G + \tilde{x}^*\omega_G \wedge \tilde{x}^*\theta_G = 0$$
$$\begin{bmatrix} d\theta_M \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}^*\omega_G \wedge \begin{bmatrix} \theta_M \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

そこで、

$$\tilde{x}^*\omega_G = \begin{bmatrix} \tilde{\omega} & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{\omega} \in \Omega^1(O(M); \mathfrak{o}(n)),\ \omega \in \Omega^1(O(M); \mathbf{R}^n))$$

と表すと、

$$d\theta_M + \tilde{\omega} \wedge \theta_M = 0, \qquad {}^t\omega \wedge \theta_M = 0$$

が成り立つ。定理 3.4.9の一意性より、$\tilde{\omega} = \omega_M$が成り立つ。よって、

$$\tilde{x}^*\omega_G = \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

次に$\tilde{x}$とωの一意性を示す。$x \circ \pi = \mathbf{x} \circ \tilde{x}$より、$\tilde{x}$の最後の成分は x に対して一意的に定まる。

$$\tilde{x}^*\theta_G = \begin{bmatrix} \theta_M \\ 0 \end{bmatrix}$$

より、$\tilde{x}$の第 1 成分から第 n 成分成分までは、$dx(e_1), \ldots, dx(e_n)$ になり、$\tilde{x}$は $SE(n+1)$ への写像であることから、e_{n+1}も一意的に定まる。命題 3.1.11より、

$$\tilde{x}^*\omega_G = \tilde{x}^*({}^t\mathbf{A}d\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{n+1} \end{bmatrix} [de_1 \ \cdots de_{n+1}]$$

となり、ωも一意的に定まる。

最後に $h = {}^t\omega \otimes \theta_M$が $O(M)$ 上の対称二次形式になることを示す。先に示したことより、${}^t\omega \wedge \theta_M = 0$ だから、

$$0 = ({}^t\omega \wedge \theta_M)(X, Y) = {}^t\omega(X)\theta_M(Y) - {}^t\omega(Y)\theta_M(X) = h(X, Y) - h(Y, X).$$

よって、h は対称二次形式になる。

定義 3.4.12 補題 3.4.11の$\tilde{x}$を x の **Darboux 標構**と呼び、h を x の**第二基本形式**と呼ぶ。

定理 3.4.13 Mを n 次元連結 Riemann 多様体とし、$x, x' : M \to \mathbf{R}^{n+1}$を 2 つの等長的挿入とし、それぞれの第二基本形式を h と h'とおく。このときある $g \in SE(n+1)$ が存在して $x' = gx$ となるための必要十分条件は $h = h'$である。

証明 x, x'の Darboux 標構をそれぞれ$\tilde{x}, \tilde{x}'$とし、

$$\tilde{x}^*\omega_G = \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}'^*\omega_G = \begin{bmatrix} \omega_M & \omega' \\ -{}^t\omega' & 0 \end{bmatrix}$$

としておく。

まずある $g \in SE(n+1)$ が存在して $x' = gx$ となっていると仮定しよう。

$$\mathbf{x} \circ L_g \circ \tilde{x} = gx = x'$$

となり、

$$(L_g \circ \tilde{x})^*[\omega_G \; \theta_G] = \tilde{x}^* L_g^*[\omega_G \; \theta_G] = \tilde{x}^*[\omega_G \; \theta_G] = [\tilde{x}^*\omega_G \; \tilde{x}^*\theta_G]$$

となるので、$L_g \circ \tilde{x}$も x'の Darboux 標構になる。したがって、補題 3.4.11の一意性より、$\omega = \omega'$となり、

$$h = {}^t\omega \otimes \theta_M = {}^t\omega' \otimes \theta_M = h'.$$

逆に $h = h'$と仮定しよう。任意の $X, Y \in TO(M)$ に対して

$$\langle \omega(X), \theta_M(Y) \rangle = h(X,Y) = h'(X,Y) = \langle \omega'(X), \theta_M(Y) \rangle$$

となるので、補題 3.4.5より$\omega(X) = \omega'(X)$ が成り立ち、$\omega = \omega'$を得る。これより、

$$\tilde{x}^*[\omega_G \; \theta_G] = \tilde{x}'^*[\omega_G \; \theta_G]$$

となり、定理 3.1.10よりある $g \in SE(n+1)$ が存在して$\tilde{x}' = L_g \circ \tilde{x}$。これより $x' = \mathbf{x} \circ \tilde{x}' = \mathbf{x} \circ L_g \circ \tilde{x} = gx$ となる。

命題 3.4.14 補題 3.4.11のωは次の等式を満たす。

(1) $d\omega_M + \omega_M \wedge \omega_M - \omega \wedge {}^t\omega = 0,$

(2) $d\omega + \omega_M \wedge \omega = 0.$

証明 命題 3.1.11より

$$d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G \wedge \omega_G] = 0$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&d\tilde{x}^*\omega_G + \frac{1}{2}[\tilde{x}^*\omega_G \wedge \tilde{x}^*\omega_G] = 0 \\
&\begin{bmatrix} d\omega_M & d\omega \\ -d{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix}\right] = 0 \\
&\begin{bmatrix} d\omega_M & d\omega \\ -d{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} d\omega_M & d\omega \\ -d{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_M \wedge \omega_M - \omega \wedge {}^t\omega & \omega_M \wedge \omega \\ -{}^t\omega \wedge \omega_M & 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&d\omega_M + \omega_M \wedge \omega_M - \omega \wedge {}^t\omega = 0 \\
&d\omega + \omega_M \wedge \omega = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。

定義 3.4.15 命題 3.4.14の (1) を **Gauss の方程式**と呼び、(2) を **Codazzi の方程式**と呼ぶ。

定理 3.4.16 単連結 n 次元 Riemann 多様体 M上の直交フレーム束 $O(M)$ 上の $\mathbf{R}^n$に値を持つ 1 次微分形式ωが

$$d\omega_M + \omega_M \wedge \omega_M - \omega \wedge {}^t\omega = 0$$
$$d\omega + \omega_M \wedge \omega = 0$$

を満たし、$h = {}^t\omega \otimes \theta_M$が対称になるとき、$h$ を第二基本形式に持つ等長的挿入 $x : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ が存在する。

証明 $O(M)$ 上の $\mathfrak{e}(n+1)$ に値を持つ 1 次微分形式ϕを

$$\phi = \begin{bmatrix} \omega_M & \omega & \theta_M \\ -{}^t\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める。すると、

$$d\phi = \begin{bmatrix} d\omega_M & d\omega & d\theta_M \\ -{}^t d\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] &= \phi \wedge \phi \\ &= \left[\begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} \omega_M & \omega \\ -{}^t\omega & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \theta_M \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \omega_M \wedge \omega_M - \omega \wedge {}^t\omega & \omega_M \wedge \omega & \omega_M \wedge \theta_M \\ -{}^t\omega \wedge \omega_M & 0 & -{}^t\omega \wedge \theta_M \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

定理の仮定と

$$d\theta_M + \omega_M \wedge \theta_M = 0$$

より、${}^t\omega \wedge \theta_M = 0$ を示せば、

$$d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] = 0$$

がわかる。ところが、h の対称性より、${}^t\omega \wedge \theta_M = 0$ が成り立つ。したがって、定理 3.2.3より、$\tilde{x}^*[\omega_G \; \theta_G] = \phi$を満たす C^∞級写像$\tilde{x} : O(M) \to SE(n+1)$ が存在する。$\mathbf{x} \circ \tilde{x} : O(M) \to \mathbf{R}^{n+1}$ は C^∞級写像 $x : M \to \mathbf{R}^{n+1}$を誘導し、$\tilde{x}$は x の Darboux 標構になり、h は第二基本形式になる。