数学研究科

微分幾何学 I

理工学研究科

微分幾何学 II

Morse 理論と
その部分多様体への応用

田崎博之

1998 年度前期

目 次

1 Morse 理論 **1**
1.1 多様体論からの準備 1
1.2 代数的位相幾何学からの準備 8
1.3 関数の特異値とホモトピー型 16
1.4 Morse の不等式 20
1.5 例 26

2 Riemann 部分多様体 **31**
2.1 第二基本形式と法接続 31
2.2 基本的な方程式 34
2.3 Gauss 曲率とその一般化 38

3 Chern-Lashof の定理 **40**
3.1 Riemann 多様体上の積分 40
3.2 Γ関数 47
3.3 全曲率 50
3.4 Chern-Lashof の定理 57

4 最小全曲率と凸超曲面 **61**
4.1 最小全曲率 61
4.2 凸集合 67
4.3 凸集合の位相 75
4.4 凸集合と超平面 81
4.5 凸包 85
4.6 凸超曲面 89

第 1 章　Morse 理論

この講義では、断らない限り可算開基を持つ C^∞級多様体を単に多様体と呼ぶことにする。特に、多様体上にはいつでも Riemann 計量をとることができる。この章では、多様体上定義された C^∞級関数の挙動と多様体の位相の間の関係を記述する Morse 理論の解説をする。

1.1　多様体論からの準備

定義 1.1.1 多様体 Mの点 p における接ベクトル空間を T_pMで表し、多様体間の C^∞級写像 $F : M \to N$の p での微分写像を $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$で表す。

$f : M \to \mathbf{R}$ を多様体 M上の C^∞級関数とする。fの $p \in M$における微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R} = \mathbf{R}$ が 0 になるとき、p を fの**特異点**と呼ぶ。また、実数 $f(p)$ を fの**特異値**と呼ぶ。すなわち、実数 a が fの特異値であるとは、fの特異点 p が存在し $a = f(p)$ となることである。

注意 1.1.2 多様体 M上の C^∞級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ を考える。$p \in M$のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ をとると、

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i$$

と表せ、$dx_p^1, \ldots, dx_p^n$は余接ベクトル空間 T_p^*M (T_pMの双対空間) の基底になるので、p が fの特異点であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

が成り立つことである。

注意 1.1.3 多様体 M上の C^∞級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ が定まっているとき、実数 a に対して

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$$

とおく。a が fの特異値ではないとき、$f(x) = a$ となる任意の $x \in M$に対して、$df_x : T_xM \to \mathbf{R}$ は全射になるので、陰関数定理より、$f^{-1}(a)$ は Mの部分多様体になる。よって、M^aは部分多様体を境界として持つ境界付き多様体になる。

補題 1.1.4 多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ が特異点 $p \in M$ を持っていると仮定する。接ベクトル $X, Y \in T_pM$ を p のまわりのベクトル場 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ に拡張し、

$$(\nabla^2 f)_p(X, Y) = (\tilde{X}\tilde{Y}f)(p)$$

によって $(\nabla^2 f)_p(X, Y)$ を定めると、これは X, Y の拡張のとり方によらずに定まり、

$$(\nabla^2 f)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

は対称二次形式になる。

証明 まず、

$$(\tilde{X}\tilde{Y}f)(p) = \tilde{X}_p(\tilde{Y}f) = X(\tilde{Y}f)$$

だから、これは X の拡張のとり方には依存しない。

$$(\tilde{X}\tilde{Y}f)(p) - (\tilde{Y}\tilde{X}f)(p) = ([\tilde{X}, \tilde{Y}]f)(p) = df_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = 0$$

より $(\nabla^2 f)_p$ の対称性がわかる。さらに、対称性より $(\tilde{X}\tilde{Y}f)(p)$ は Y の拡張のとり方にも依存しないことがわかる。

定義 1.1.5 点 $p \in M$ を多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の特異点とする。補題 1.1.4 の $(\nabla^2 f)_p$ を f の p における **Hessian** と呼ぶ。$(\nabla^2 f)_p$ が非退化のとき、p を f の**非退化特異点**と呼ぶ。

注意 1.1.6 多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ が特異点 $p \in M$ を持つと仮定する。p のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ をとると、注意 1.1.2より、

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

が成り立つ。接ベクトル $X, Y \in T_pM$ を

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

と表す。Y を p のまわりのベクトル場に拡張したものを

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で表す。このとき、

$$(\nabla^2 f)_p(X, Y) = X(\tilde{Y}f) = \sum_{i=1}^n X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \sum_{j=1}^n \tilde{Y}^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p).$$

これより、行列 $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right]$ は、基底 $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ に関する $(\nabla^2 f)_p$ の表現行列になる。したがって、p が f の非退化特異点になるための必要十分条件は、行列 $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right]$ が非退化行列になることである。

定義 1.1.7 実ベクトル空間 V 上の対称二次形式 $H: V \times V \to \mathbf{R}$ に対して、H を制限すると負定値になる部分ベクトル空間の次元の最大値を H の**指数**と呼び、$\mathrm{index}(H)$ で表す。H の零化部分ベクトル空間

$$V_0 = \{v \in V \mid H(v,w) = 0 \ (\forall w \in V)\}$$

の次元を H の **nullity** と呼び、$\mathrm{nullity}(H)$ で表す。

多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f: M \to \mathbf{R}$ の特異点 p における f の Hessian$(\nabla^2 f)_p$ の指数と nullity を単に f の p における指数と nullity と呼ぶことにする。

補題 1.1.8 実ベクトル空間 V 上の対称二次形式 H を V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ により対角化したとき、H の指数は負の対角成分の個数に一致する。

証明 V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ の内で、必要ならばこれらを並べ換えることにより、負の対角成分に対応する元を $v_1, \ldots, v_\lambda$ とし、0 以上の対角成分に対応する元を $v_{\lambda+1}, \ldots, v_n$ とすることができる。$v_1, \ldots, v_\lambda$ の張る部分ベクトル空間を V_1 で表し、$v_{\lambda+1}, \ldots, v_n$ の張る部分ベクトル空間を V_2 で表すと、V は V_1 と V_2 の直和になる。H を V_1 に制限すると負定値になるので、H の指数は λ 以上になる。もし H を制限して負定値になり次元が λ より大きい部分ベクトル空間 W が存在すると仮定すると、

$$\dim(W \cap V_2) = \dim W + \dim V_2 - n \geq (\lambda + 1) + (n - \lambda) - n \geq 1.$$

よって、0 ではない $v \in W \cap V_2$ をとることができ、$v \in V_2$ より $H(v,v) \geq 0$ であるが、$v \in W$ より $H(v,v) < 0$ となり、矛盾。したがって、H の指数は λ に一致する。

補題 1.1.9 f を $\mathbf{R}^n$ の原点 0 を含む凸開集合 V 上で定義された C^∞ 級関数とする。このとき、V 上定義された C^∞ 級関数 g_i $(1 \leq i \leq n)$ が存在し、

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x) \qquad (x = (x^1, \ldots, x^n) \in V)$$
$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$$

を満たす。

証明 $x \in V$ に対して $tx \in V$ $(t \in [0,1])$ であり、

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i dt \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)dt \right). \end{aligned}$$

そこで、$g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)dt$ とおけばよい。

補題 1.1.10 (Morse) 多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f: M \to \mathbf{R}$ が非退化特異点 $p \in M$ を持つと仮定する。このとき、p のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ が存在し、

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

が成り立ち、λ は f の p における指数に一致する。

証明 まず、p のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ が存在し、

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

となるとき、λ は f の p における指数に一致することを示す。この表示より、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) = \begin{cases} -2 & (i = j \leq \lambda) \\ 2 & (i = j > \lambda) \\ 0 & (\text{他の場合}) \end{cases}$$

を得る。よって、f の p における Hessian $(\nabla^2 f)_p$ の $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ に関する表現行列は、

$$\begin{bmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

よって、補題 1.1.8より、$\mathbf{R}^n$ は $(\nabla^2 f)_p$ の指数は λ に一致する。

次に補題の局所座標系の存在を示す。p のまわりの局所座標系 $(y^1, \ldots, y^n)$ で $y^j(p) = 0$ $(1 \leq j \leq n)$ を満たすものをとると、補題 1.1.9より、

$$f(y) = f(p) + \sum_{j=1}^n y^j g_j(y), \qquad g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(0) = 0$$

を満たす C^∞ 級関数 g_j が存在する。各 g_j に再び補題 1.1.9を適用すると、

$$g_j(y) = \sum_{i=1}^n y^i h_{ij}(y)$$

を満たす C^∞ 級関数 h_{ij} が存在する。よって、

$$f(y) = f(p) + \sum_{i,j=1}^n y^i y^j h_{ij}(y)$$

となる。

$$\bar{h}_{ij}(y) = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$$

とおくと、

$$f(y) = f(p) + \sum_{i,j=1}^{n} y^i y^j \bar{h}_{ij}(y), \qquad \bar{h}_{ij}(y) = \bar{h}_{ji}(y)$$

が成り立つので、h_{ij}を$\bar{h}_{ij}$に置き換えることによって、$h_{ij} = h_{ji}$が成り立つとしてよい。
　以下では、

$$f(u) = f(p) + \sum_{i \leq r-1} \pm (u^i)^2 + \sum_{r \leq i,j} u^i u^j H_{ij}(u), \qquad [H_{ij}(u)] \text{ は対称行列}$$

となる p を含む局所座標近傍 $(U_1; u^1, \ldots, u^n)$ が存在することを仮定して、

$$f(v) = f(p) + \sum_{i \leq r} \pm (v^i)^2 + \sum_{r+1 \leq i,j} v^i v^j H'_{ij}(u) \qquad [H'_{ij}(v)] \text{ は対称行列}$$

となる p を含む局所座標近傍 $(U_2; v^1, \ldots, v^n)$ が存在することを示す。

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(0)\right] = \begin{bmatrix} \pm 2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 2 & & & \\ & & & 2H_{rr}(0) & \cdots & 2H_{rn}(0) \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 2H_{nr}(0) & \cdots & 2H_{nn}(0) \end{bmatrix}$$

となり、p は fの非退化特異点だから、$H_{ij}(0)$ がすべて 0 になることはない。局所座標系を線形変換することにより、$H_{rr}(0) \neq 0$ とできる。よって、p のある開近傍 $U_2 \subset U_1$が存在し、$H_{rr}(u)$ は U_2上 0 にならない。そこで、

$$g(u) = \sqrt{|H_{rr}(u)|} \qquad (u \in U_2)$$

とおくと、gは U_2上の C^∞級関数になる。この gを使って、新しい局所座標系 $v^1, \ldots, v^n$を次のように定める。

$$\begin{aligned} v^i &= u^i \qquad (i \neq r) \\ v^r(u) &= g(u) \left[u^r + \sum_{r+1 \leq i} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)} \right]. \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial v^r}{\partial u^r}(0) = g(0) \neq 0$$

となるので、

$$\det\left[\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(0)\right] = g(0) \neq 0.$$

逆関数定理より、p のある開近傍 $U_3 \subset U_2$上で、$v^1,\dots,v^n$は局所座標系になる。

$$\begin{aligned}
\pm(v^r)^2 &= H_{rr}(u)\left[u^r + \sum_{r+1\le i} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)}\right]^2 \\
&= H_{rr}(u)\left[(u^r)^2 + 2u^r \sum_{r+1\le i} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)} + \left(\sum_{r+1\le i} u^i \frac{H_{ir}(u)}{H_{rr}(u)}\right)^2\right] \\
&= (u^r)^2 + 2u^r \sum_{r+1\le i} u^i H_{ir}(u) + \sum_{r+1\le i,j} u^i u^j \frac{H_{ir}(u)H_{jr}(u)}{H_{rr}(u)}.
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
f &= f(p) + \sum_{i\le r-1} \pm(u^i)^2 + \sum_{r\le i,j} u^i u^j H_{ij}(u) \\
&= f(p) + \sum_{i\le r-1} \pm(v^i)^2 + (u^r)^2 H_{rr}(u) + 2\sum_{r+1\le i} u^i u^r H_{ir}(u) + \sum_{r+1\le i,j} u^i u^j H_{ij}(u) \\
&= f(p) + \sum_{i\le r} \pm(v^i)^2 + \sum_{r+1\le i,j} u^i u^j \left(H_{ij}(u) - \frac{H_{ir}(u)H_{jr}(u)}{H_{rr}(u)}\right).
\end{aligned}$$

したがって、

$$f(v) = f(p) + \sum_{i\le r} \pm(v^i)^2 + \sum_{r+1\le i,j} v^i v^j H'_{ij}(v)$$

となる。$H'_{ij}(v)$ は

$$H_{ij}(u) - \frac{H_{ir}(u)H_{jr}(u)}{H_{rr}(u)}$$

を座標変換し、行と列を一つずつ減らしただけなので、対称行列になる。

上の $r = 1$ の場合の局所座標系の存在はすでに示したので、rに関する数学的帰納法により、

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \pm(x^i)^2 \qquad (x \in U)$$

となる p を含む局所座標近傍 $(U; x^1,\dots,x^n)$ の存在がわかる。

系 1.1.11 多様体上の C^∞級関数の非退化特異点は孤立する。

証明 補題 1.1.10より、C^∞級関数 fは非退化特異点 p の近傍で、

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

と表せるので、この局所座標近傍内の fの特異点は p のみになる。

補題 1.1.12 多様体上 M のコンパクトな台を持つ C^∞ 級ベクトル場は、M の微分同型の一径数部分群を生成する。

証明 X を M 上のコンパクトな台を持つ C^∞ 級ベクトル場とする。X が M の微分同型の一径数部分群 ϕ_t を生成するための条件は、

$$\begin{aligned} &\frac{d\phi_t(p)}{dt} = X_{\phi_t(p)} \qquad (t \in \mathbf{R},\ p \in M) \\ &\phi_0(p) = p \qquad (p \in M) \end{aligned}$$

が成り立つことである。M の各点 p で局所座標近傍をとり、局所座標によって上の条件を書くと常微分方程式系になるので、常微分方程式の解の存在と一意性より、p の開近傍 U_p と $\epsilon_p > 0$ が存在し、

$$\begin{aligned} &\frac{d\phi_t(q)}{dt} = X_{\phi_t(q)} \qquad (|t| < \epsilon_p,\ q \in U_p) \\ &\phi_0(q) = q \qquad (q \in U_p) \end{aligned}$$

の解が一意的に存在する。

$\{U_p\}_{p\in M}$ は M の開被覆になり、X の台はコンパクトだから、有限個の $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_k}\}$ で X の台は被覆される。そこで、

$$\epsilon_0 = \min\{\epsilon_{p_1}, \ldots, \epsilon_{p_k}\}$$

とおく。X の台に含まれていない点 p に対しては、$X_p = 0$ だから、任意の $t \in \mathbf{R}$ について $\phi_t(p) = p$ が成り立つ。M の任意の点についても、$|t| < \epsilon_0$ となる t について ϕ_t の作用が定まる。常微分方程式の解の一意性より、$|s|, |t|, |s+t| < \epsilon_0$ となる s, t について $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ が成り立つ。

以下で、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して ϕ_t を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して

$$t = k(\epsilon_0/2) + r, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad |r| < \epsilon_0/2$$

となるように k, r をとる。$k \geq 0$ のときは、

$$\phi_t = \overbrace{\phi_{\epsilon_0/2} \circ \cdots \circ \phi_{\epsilon_0/2}}^{k} \circ \phi_r$$

によって ϕ_t を定め、$k < 0$ のときは、

$$\phi_t = \overbrace{\phi_{-\epsilon_0/2} \circ \cdots \circ \phi_{-\epsilon_0/2}}^{-k} \circ \phi_r$$

によって ϕ_t を定める。これによって、すべての t について ϕ_t が定まり、$\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ が成り立つこともわかる。ϕ_t は M の微分同型の一径数部分群になり、ϕ_t の定め方から、X は ϕ_t を生成することもわかる。

注意 1.1.13 多様体 M に Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する場合は、M 上の C^∞ 級関数 f の微分 df の双対ベクトル場を f の**勾配ベクトル場**と呼び、$\mathrm{grad} f$ で表す。すなわち、M 上のベクトル場 X に対して、

$$\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = df(X)$$

となる。$\mathrm{grad} f$ の零点は、f の特異点に一致する。勾配ベクトル場 $\mathrm{grad} f$ は f の一階微分を表している。f の二階微分は、Riemann 計量から定まる共変微分 ∇ を使って、$\nabla^2 f$ で表現できる。M 上のベクトル場 X, Y に対して、

$$\begin{aligned}
(\nabla f)(Y) &= Yf \\
(\nabla^2 f)(X,Y) &= X((\nabla f)(Y)) - (\nabla f)(\nabla_X Y) \\
&= XYf - (\nabla_X Y)f
\end{aligned}$$

となるので、f の特異点では、$\nabla^2 f$ は定義 1.1.5で定めた f の Hessian に一致する。M 全体で定義される $\nabla^2 f$ も f の **Hessian** と呼ばれる。

1.2 代数的位相幾何学からの準備

定義 1.2.1 X, Y を位相空間とし、$A \subset X$ とする。$f, g : X \to Y$ を $f|_A = g|_A$ を満たす連続写像とする。次の条件 (1) から (3) を満たす連続写像 $F : X \times [0,1] \to Y$ が存在するとき、

$$f \sim g \quad \mathrm{rel} A$$

と書き、f, g は A を固定して**ホモトピック**であるという。

(1) $F(x,0) = f(x)$ $(x \in X)$,

(2) $F(x,1) = g(x)$ $(x \in X)$,

(3) $F(x,t) = f(x) = g(x)$ $(x \in A,\ t \in [0,1])$.

A が空集合のときは、単に $f \sim g$ と書く。

定義 1.2.2 位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対してある連続写像 $f' : Y \to X$ が存在し

$$f' \circ f \sim 1_X, \quad f \circ f' \sim 1_Y$$

を満たすとき、f を**ホモトピー同値**と呼び、X と Y は**ホモトピー同値**である、または同じ**ホモトピー型**を持つという。

定義 1.2.3 位相空間 X の部分集合 A に対して、連続写像 $F : X \times [0,1] \to X$ が存在し、

(1) $F(x,0) = x$ $(x \in X)$

(2) $F(x,t)=x\ (x\in A,\ t\in[0,1])$

(3) $F(x,1)\in A\ (x\in X)$

を満たすとき、A を Xの**強変形レトラクト**と呼ぶ。

注意 1.2.4 A が Xの強変形レトラクトのとき、包含写像 $i:A\to X$はホモトピー同値になる。

定義 1.2.5 $\mathbf{R}^1\subset\mathbf{R}^2\subset\cdots\subset\mathbf{R}^k\subset\cdots\subset\mathbf{R}^\infty$とみなして、

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & (0,\ldots,0,\ldots) \\ E_1 & = & (1,0,\ldots,0,\ldots) \\ E_2 & = & (0,1,0,\ldots,0,\ldots) \\ & \vdots & \\ E_q & = & (0,\ldots,0,\overset{q}{\breve{1}},0,\ldots,0,\ldots) \\ & \vdots & \end{array}$$

によって、$E_0,E_1,E_2,\ldots,E_q,\ldots$ を定める。$E_0,\ldots,E_q$の張る q次元単体をΔ_qで表す。すなわち、

$$\Delta_q=\left\{(t_1,\ldots,t_q,0,\ldots)\ \middle|\ t_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{q}t_i\leq 1\right\}.$$

$q>0$ に対してアファイン写像 $F_q^i:\Delta_{q-1}\to\Delta_q$を

$$F_q^i(E_j)=\begin{cases} E_j & (j<i) \\ E_{j+1} & (j\geq i)\end{cases}$$

によって定義する。

定義 1.2.6 Xを位相空間とする。連続写像$\sigma:\Delta_q\to X$を Xの**特異 q単体**と呼ぶ。体 Fを一つとり、固定しておく。Xの特異 q単体全体の生成する Fベクトル空間を $S_q(X;F)$ で表し、$S_q(X;F)$ の元を**特異 q鎖**と呼ぶ。すなわち、Xの特異 q鎖は$\sum_\sigma a_\sigma\sigma$と表せる。ここで、$a_\sigma$は有限個の$\sigma$を除いて 0 になる。

定義 1.2.7 Xを位相空間とする。Xの特異 q単体σと $0\leq i\leq q$に対して

$$\sigma^{(i)}=\sigma\circ F_q^i:\Delta_{q-1}\to X$$

によって、Xの特異 $q-1$ 単体$\sigma^{(i)}$を定め、

$$\partial(\sigma)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma^{(i)}\in S_{q-1}(X;F)$$

とおく。∂をベクトル空間の間の線形写像に拡張したものも$\partial : S_q(X;F) \to S_{q-1}(X;F)$ で表す。(空間を明示したいときは、∂_Xと書く。) すると、$\partial \circ \partial = 0$ が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} B_q(X;F) &= \{\partial(c) \in S_q(X;F) \mid c \in S_{q+1}(X;F)\} \\ Z_q(X;F) &= \{c \in S_q(X;F) \mid \partial(c) = 0\} \end{aligned}$$

とおくと、これらは $S_q(X;F)$ の部分ベクトル空間になり、$\partial \circ \partial = 0$ より、$B_q(X;F) \subset Z_q(X;F)$ が成り立つ。商ベクトル空間 $Z_q(X;F)/B_q(X;F)$ を Xの**特異** q**ホモロジー空間**と呼び、$H_q(X;F)$ で表す。

ホモロジー空間の定義より、比較的容易に次の例を得る。

例 1.2.8 一点だけからなる位相空間 Xのホモロジーは

$$H_q(X;F) = \begin{cases} F & (q = 0) \\ \{0\} & (q \geq 1) \end{cases}$$

となる。

証明 $X = \{x\}$ としておく。任意の qについて Xの特異 q単体は

$$\sigma_q(t) = x \quad (t \in \Delta_q)$$

のみになる。

$$\partial(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{q-1}$$

だから、

$$\partial(\sigma_q) = \begin{cases} \sigma_{q-1} & (q\text{は偶数で正}) \\ 0 & (q\text{は奇数}). \end{cases}$$

これより、

$$Z_q(X;F) = B_q(X;F) = \begin{cases} \{0\} & (q\text{は偶数で正}) \\ S_q(X;F) & (q\text{は奇数}). \end{cases}$$

したがって、$q > 0$ のとき、

$$H_q(X;F) = \{0\}.$$

$q = 0$ のときは、$Z_0(X;F) = S_0(X;F) = F\sigma_0$であり、$B_0(X;F) = \{0\}$ だから、

$$H_0(X;F) = Z_0(X;F)/B_0(X;F) = F$$

となる。

命題 1.2.9 位相空間 Xの弧状連結成分への分解を $X = \cup_k X_k$とする。このとき、各 qについて

$$H_q(X;F) \cong \oplus_k H_q(X_k;F)$$

が成り立つ。

証明　q次元単体Δ_qは弧状連結だから、Xの特異q単体$\sigma:\Delta_q\to X$の像は、Xのある弧状連結成分X_kに含まれる。よって

$$S_q(X;F)=\oplus_k S_q(X_k;F)$$

となり、さらに、∂_Xの定め方より$\partial_X(S_q(X;F))\subset S_q(X_k;F)$となる。したがって、

$$Z_q(X;F)=\oplus_k Z_q(X_k;F),\quad Z_q(X_k;F)=Z_q(X;F)\cap S_q(X_k;F)$$
$$B_q(X;F)=\oplus_k B_q(X_k;F),\quad B_q(X_k;F)=B_q(X;F)\cap S_q(X_k;F)$$

が成り立ち、

$$H_q(X;F)\cong\oplus_k H_q(X_k;F)$$

を得る。

命題 1.2.10 位相空間Xの 0 ホモロジー空間$H_0(X;F)$の次元は、Xの弧状連結成分の個数に一致する。

証明　命題 1.2.9より、Xが弧状連結のときに、$H_0(X;F)$が 1 次元になることを示せばよい。

Xの特異 0 単体は自然にXの元と同一視できる。Xの特異 1 単体σに対して、

$$\partial(\sigma)=\sigma(1)-\sigma(0)$$

となる。特異 0 鎖$c=\sum_x a_x x$に対して、$c\in B_0(X;F)$ならば、$\sum_x a_x=0$となる。逆に$\sum_x a_x=0$と仮定する。x_0をとる。Xは弧状連結だから、任意の$x\in X$に対してXの特異 1 単体σ_xであって

$$\sigma_x(0)=x_0,\quad \sigma_x(1)=x$$

を満たすものをとることができる。

$$c=\sum_x a_x x-\left(\sum_x a_x\right)x_0=\sum_x(\sigma_x(1)-\sigma_x(0))=\partial\left(\sum_x a_x\sigma_x\right)$$

となるので、$c\in B_0(X;F)$が成り立つ。よって

$$B_0(X;F)=\left\{\sum_x a_x x\;\middle|\;\sum_x a_x=0\right\}.$$

他方、

$$\partial^{\#}:S_0(X;F)\to F\;;\sum_x a_x x\mapsto\sum_x a_x$$

とおくと、$\partial^{\#}$は全射線形写像になり、

$$S_0(X;F)/\ker(\partial^{\#})\cong F.$$

上で示したことより、$\ker(\partial^{\#})$は$B_0(X;F)$に一致するので、$H_0(X;F)\cong F$となり、特に、1 次元になる。

次の例も知られている。

例 1.2.11

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

とおく。S^nは n **次元球面**と呼ばれている。$n \geq 1$ のとき、

$$H_q(S^n; F) = \begin{cases} F & (q = 0 \text{ または } n) \\ \{0\} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が成り立つ。

定義 1.2.12 $f : X \to Y$を位相空間の間の連続写像とする。Xの特異 q単体σに対して、$f \circ \sigma$はYの特異 q単体になる。そこで、対応$\sigma \mapsto f \circ \sigma$をベクトル空間の間の線形写像

$$S_q(f) : S_q(X; F) \to S_q(Y; F)\ ; \sum_\sigma a_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma a_\sigma f \circ \sigma$$

に拡張する。すると、$\partial_Y \circ S_q(f) = S_{q-1}(f) \circ \partial_X$が成り立つ。これより、

$$S_q(f) B_q(X; F) \subset B_q(Y; F), \quad S_q(f) Z_q(X; F) \subset Z_q(Y; F)$$

となり、$S_q(f)$ は線形写像

$$H_q(f) : H_q(X; F) \to H_q(Y; F)\ ; [z] \mapsto [S_q(f) z]$$

を誘導する。$H_q(f)$ を fの**誘導する線形写像**と呼ぶ。

$$S_q(1_X) = 1_{S_q(X;F)}, \quad S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f)$$

が成り立つので、

$$H_q(1_X) = 1_{H_q(X;F)}, \quad H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$$

が成り立つ。特に、fが位相同型ならば、$H_q(f)$ は線形同型になる。

定理 1.2.13 位相空間の間の二つの連続写像 $f, g : X \to Y$がホモトピックならば、f, gの誘導する線形写像 $H_q(f), H_q(g) : H_q(X; F) \to H_q(Y; F)$ は等しくなる。

定理 1.2.14 位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$がホモトピー同値ならば、fの誘導する線形写像 $H_q(f) : H_q(X; F) \to H_q(Y; F)$ は線形同型になる。

例 1.2.15 Xを一点だけからなる位相空間とホモトピー同値な位相空間とする。このとき、

$$H_q(X; F) = \begin{cases} F & (q = 0) \\ \{0\} & (q \geq 1) \end{cases}$$

となる。特に、

$$B^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

とおくと、B^nは一点とホモトピー同値になり、

$$H_q(B^n; F) = \begin{cases} F & (q = 0) \\ \{0\} & (q \geq 1) \end{cases}$$

が成り立つ。

定義 1.2.16 A を位相空間 Xの部分空間とする。$\partial : S_q(X;F) \to S_{q-1}(X;F)$ は

$$\partial(S_q(A;F)) \subset S_{q-1}(A;F)$$

を満たすので、商ベクトル空間の間の線形写像

$$\bar{\partial} : S_q(X;F)/S_q(A;F) \to S_{q-1}(X;F)/S_{q-1}(A;F)$$

を誘導する。$\partial \circ \partial = 0$ より、$\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ が成り立ち、

$$\begin{aligned} & \mathrm{Im}[\bar{\partial} : S_{q+1}(X;F)/S_{q+1}(A;F)) \to S_q(X;F)/S_q(A;F)] \\ \subset \ & \mathrm{Ker}[\bar{\partial} : S_q(X;F)/S_q(A;F) \to S_{q-1}(X;F)/S_{q-1}(A;F)] \end{aligned}$$

となる。商ベクトル空間

$$\frac{\mathrm{Ker}[\bar{\partial} : S_q(X;F)/S_q(A;F) \to S_{q-1}(X;F)/S_{q-1}(A;F)]}{\mathrm{Im}[\bar{\partial} : S_{q+1}(X;F)/S_{q+1}(A;F)) \to S_q(X;F)/S_q(A;F)]}$$

を Xの A に関する q**相対ホモロジー空間**と呼び、$H_q(X,A;F)$ で表す。$A = \emptyset$ のときは、$H_q(X,\emptyset;F) = H_q(X;F)$ となることに注意しておく。

補題 1.2.17 A を位相空間 Xの部分空間とする。

$$\begin{aligned} Z_q(X,A;F) &= \{c \in S_q(X;F) \mid \partial c \in S_{q-1}(A;F)\} \\ B_q(X,A;F) &= S_q(A;F) + \partial S_{q+1}(X;F) \end{aligned}$$

とおくと、

$$H_q(X,A;F) \cong Z_q(X,A;F)/B_q(X,A;F)$$

が成り立つ。

証明 定め方より、

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ker}[\bar{\partial} : S_q(X;F)/S_q(A;F) \to S_{q-1}(X;F)/S_{q-1}(A;F)] \\ = \ & Z_q(X,A;F)/S_q(A;F) \\ & \mathrm{Im}[\bar{\partial} : S_{q+1}(X;F)/S_{q+1}(A;F)) \to S_q(X;F)/S_q(A;F)] \\ = \ & B_q(X,A;F)/S_q(A;F) \end{aligned}$$

となるので、

$$H_q(X,A;F) \cong Z_q(X,A;F)/B_q(X,A;F)$$

を得る。

例 1.2.18 A を弧状連結位相空間 Xの空でない部分空間とすると、$H_0(X,A;F) = \{0\}$ が成り立つ。

証明 $x_0 \in A$ を一つとっておく。任意の $c = \sum_x a_x x \in S_0(X;F) = Z_0(X,A;F)$ に対して、X弧状連結だから、Xの特異 1 単体σ_xであって、

$$\sigma_x(0) = x_0, \quad \sigma_x(1) = x$$

を満たすものが存在する。このとき、

$$\partial\left(\sum_x a_x \sigma_x\right) = \sum_x a_x x - \sum_x a_x x_0 = c - \sum_x a_x x_0.$$

よって、$c \in S_0(A;F) + \partial S_1(X;F) = B_0(X,A;F)$ となり、$Z_0(X,A;F) = B_0(X,A;F)$。したがって、補題 1.2.17より、

$$H_0(X,A;F) = Z_0(X,A;F)/B_0(X,A;F) = \{0\}.$$

定義 1.2.19 $f : X \to Y$を位相空間の間の連続写像とし、A, Bをそれぞれ X, Yの部分空間とする。fが $f(A) \subset B$を満たすとき、

$$S_q(f)(S_q(A;F)) \subset S_q(B;F)$$

となるので、$S_q(f)$ は

$$\bar{S}_q(f) : S_q(X;F)/S_q(A;F) \to S_q(Y;F)/S_q(B;F)$$

を誘導し、さらに$\bar{S}_q(f)$ は

$$H_q(f) : H_q(X,A;F) \to H_q(Y,B;F)$$

を誘導する。$H_q(f)$ を fの**誘導する線形写像**と呼ぶ。

定理 1.2.20 $Z \subset Y \subset X$を位相空間とする。包含写像 $i : Y \to X$は線形写像

$$H_q(i) : H_q(Y,Z;F) \to H_q(X,Z;F)$$

を誘導し、恒等写像 $j : X \to X$は線形写像

$$H_q(j) : H_q(X,Z;F) \to H_q(X,Y;F)$$

を誘導する。さらに、ある線形写像

$$\delta_q : H_q(X,Y;F) \to H_{q-1}(Y,Z;F)$$

が存在し、

$$\begin{array}{lllllll}
\cdots & & & & & & \\
\xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(Y,Z;F) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X,Z;F) & \xrightarrow{H_q(j)} & H_q(X,Y;F) \\
\xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(Y,Z;F) & \xrightarrow{H_{q-1}(i)} & H_{q-1}(X,Z;F) & \xrightarrow{H_{q-1}(j)} & H_{q-1}(X,Y;F) \\
\xrightarrow{\delta_{q-1}} & \cdots & & & & \\
\xrightarrow{\delta_1} & H_0(Y,Z;F) & \xrightarrow{H_0(i)} & H_0(X,Z;F) & \xrightarrow{H_0(j)} & H_0(X,Y;F) \\
\longrightarrow & \{0\} & & & &
\end{array}$$

は完全系列になる。この系列を**ホモロジー完全系列**と呼ぶ。特に、$Z=\emptyset$ とすると、次のホモロジー完全系列を得る。

$$\begin{array}{lccccc}
\cdots & & & & & \\
\xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(Y;F) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X;F) & \xrightarrow{H_q(j)} & H_q(X,Y;F) \\
\xrightarrow{\delta_q} & \cdots & & & & \\
\xrightarrow{\delta_1} & H_0(Y;F) & \xrightarrow{H_0(i)} & H_0(X;F) & \xrightarrow{H_0(j)} & H_0(X,Y;F) \\
\longrightarrow & \{0\} & & & &
\end{array}$$

例 1.2.21 相対ホモロジー $H_q(B^n,S^{n-1};F)$ を求める。B^nは弧状連結だから、例1.2.18より、

$$H_0(B^n,S^{n-1};F)=\{0\}.$$

(B^n,S^{n-1}) に関するホモロジー完全系列より、完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_1(B^n;F) & \to & H_1(B^n,S^{n-1};F) & \to & H_0(S^{n-1};F) & \to & H_0(B^n;F) & \to & H_0(B^n,S^{n-1};F) \\
\| & & & & & & & & \| \\
\{0\} & & & & & & & & \{0\}
\end{array}$$

を得る。さらに、$n=1$ のときは例 1.2.10より、上の完全系列は

$$\{0\}\to H_1(B^1,S^0;F)\to F\oplus F\to F\to\{0\}$$

となるので、

$$H_1(B^1,S^0;F)=F.$$

$n\geq 2$ のときは、

$$\{0\}\to H_1(B^n,S^{n-1};F)\to F\to F\to\{0\}$$

となるので、

$$H_1(B^n,S^{n-1};F)=\{0\}.$$

$q\geq 2$ のとき、完全系列

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(B^n;F) & \to & H_q(B^n,S^{n-1};F) & \to & H_{q-1}(S^{n-1};F) & \to & H_{q-1}(B^n;F) \\
\| & & & & & & \| \\
\{0\} & & & & & & \{0\}
\end{array}$$

を得る。よって、$H_q(B^n,S^{n-1};F)\cong H_{q-1}(S^{n-1};F)$ となり、例 1.2.11より、

$$H_q(B^n,S^{n-1};F)=\begin{cases} F & (q=n) \\ \{0\} & (q\neq n,\ q\geq 2)\end{cases}$$

を得る。以上の結果をまとめる。

$$H_q(B^n,S^{n-1};F)=\begin{cases} F & (q=n) \\ \{0\} & (q\neq n)\end{cases}$$

定理 1.2.22 $U \subset A \subset X$を位相空間とする。Uの閉包が A の内部に含まれるならば、包含写像 $i : X - U \to X$は線形同型

$$H_q(i) : H_q(X - U, A - U; F) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A; F)$$

を誘導する。

1.3 関数の特異値とホモトピー型

この節を通して、fを多様体 M上の C^∞級関数とし、実数 a に対して

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$$

とおく。

定理 1.3.1 fを多様体 M上の C^∞級関数とする。$a < b$となる実数 a, b をとり、$f^{-1}[a, b]$ がコンパクトであって、fの特異点を持たないと仮定する。このとき、M^aと M^bは微分同型になる。さらに、M^aは M^bの強変形レトラクトになり、包含写像 $M^a \to M^b$はホモトピー同値になる。

証明 Mに Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入しておく。fの勾配ベクトル場 $\mathrm{grad} f$は $f^{-1}[a, b]$ で零点を持たないので、$f^{-1}[a, b]$ を含む開集合 Uが存在し、$\bar{U}$はコンパクトになり、Uに $\mathrm{grad} f$の零点は存在しない。$f^{-1}[a, b]$ はコンパクトだから、$f^{-1}[a, b]$ 上恒等的に 1 であって台が Uに含まれる M上の C^∞級関数ρをとることができる。そこで、M上のベクトル場 X を

$$X = \frac{\rho}{|\mathrm{grad} f|^2} \mathrm{grad} f$$

で定めると、Xは $f^{-1}[a, b]$ 上で $\mathrm{grad} f / |\mathrm{grad} f|^2$に一致し、台は Uに含まれる。特に、Xの台はコンパクトになる。補題 1.1.12より、Xの生成する Mの微分同型の一径数部分群ϕ_tが存在する。$p \in M$をとり、$\phi_t(p) \in f^{-1}[a, b]$ とすると、注意 1.1.13より、

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(p)) = df\left(\frac{d}{dt}\phi_t(p)\right) = \left\langle \mathrm{grad} f, \frac{d}{dt}\phi_t(p)\right\rangle = 1.$$

したがって、$t \mapsto f(\phi_t(p))$ は$\phi_t(p) \in f^{-1}[a, b]$ のとき、傾き 1 の一次関数になる。これより、$\phi_{b-a} : M^a \to M^b$は微分同型写像になる。

さらに、ϕ_tの作用を fの値が b になると止めるようにする。すなわち、$r_t : M^b \to M^b$を

$$r_t(p) = \begin{cases} p & (f(p) \leq a) \\ \phi_{t(a-f(p))}(p) & (a \leq f(p) \leq b) \end{cases}$$

で定める。すると、M^aは M^bの強変形レトラクトになる。

定義 1.3.2 Mを境界∂Mを持つ多様体とし、連続写像$\phi : S^{k-1} \to \partial M$が存在するとき、$x \in S^{k-1}$と$\phi(x) \in \partial M$を同一視することによって位相空間 $M \cup B^k$の同値関係を定め、商集合 $M \cup_\phi B^k$に商位相を入れたものを、Mに B^kを**境界で接着した位相空間**と呼ぶ。

定理 1.3.3 fを多様体 M上の C^∞級関数とする。p を fの指数λの非退化特異点とする。$f(p) = c$ とおき、ある$\epsilon > 0$ に対して $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ はコンパクトであり、p 以外の fの特異点を含まないと仮定する。このとき、十分小さな$\epsilon > 0$ に対して $M^{c+\epsilon}$は $M^{c-\epsilon}$に B^λを境界で接着した位相空間 $M^{c-\epsilon} \cup B^\lambda$と同じホモトピー型を持つ。

証明　補題 1.1.10より、p のまわりの局所座標系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ が存在し、

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n} (x^i(x))^2 \leq 2\epsilon \quad (x \in U)$$

としておくことができる。

$$\left\{ x \in U \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i(x))^2 \leq \epsilon,\ x^{\lambda+1}(x) = \cdots = x^n(x) = 0 \right\}$$

は B^λと位相同型になり、B^λと同一視できる。このとき、B^λの境界 S^{k-1}は $f^{-1}(c-\epsilon) = \partial M^{c-\epsilon}$に含まれている。したがって、$M^{c-\epsilon} \cup B^\lambda$は、$M^{c-\epsilon}$に B^λを境界で接着した位相空間になっている。

次の条件を満たす C^∞級関数$\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ をとる。

$$\begin{aligned} &\mu(0) > \epsilon \\ &\mu(r) = 0 \quad (r \geq 2\epsilon) \\ &-1 < \mu'(r) \leq 0 \quad (r \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

このμを使って、

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \mu((x^1)^2 + \cdots + (x^\lambda)^2 + 2(x^{\lambda+1})^2 + \cdots + 2(x^n)^2) & (x \in U) \\ f(x) & (x \notin U) \end{cases}$$

によって、M上の関数 Fを定める。$x \in U$が Uの境界に近づくと$\sum (x^i)^2$は 2ϵを超えるので、$\mu((x^1)^2 + \cdots + (x^\lambda)^2 + 2(x^{\lambda+1})^2 + \cdots + 2(x^n)^2) = 0$ になり、Fは M上の C^∞級関数になる。

U上の C^∞級関数

$$\xi, \eta : U \to \mathbf{R}$$

を次の式で定める。

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (x^1(x))^2 + \cdots + (x^\lambda(x))^2 \quad (x \in U) \\ \eta(x) &= (x^{\lambda+1}(x))^2 + \cdots + (x^n(x))^2 \quad (x \in U). \end{aligned}$$

すると、U上で $f = c - \xi + \eta$が成り立ち、Fは U上で、

$$F = c - \xi + \eta + \mu(\xi + 2\eta)$$

となる。

主張 1　$F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = M^{c+\epsilon} = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$

証明　Uの外では Fと fは一致しているので、U内で考えればよい。μの定め方より、U内の$\xi + 2\eta \geq 2\epsilon$を満たす点でも、$F$と fは一致している。$\xi + 2\eta < 2\epsilon$を満たす点においては、

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta = c + \frac{1}{2}(\xi + 2\eta) \leq c + \epsilon$$

これより、$U \subset F^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$ となり、$F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$ が成り立つ。

主張 2　Fの特異点と fの特異点は一致する。

証明　Uの外では Fと fは一致するので、U内で考えればよい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1 \end{aligned}$$

となるので、特にこれらは 0 にはならない。また、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

となり、原点以外では $d\xi$と $d\eta$は同時には 0 にならないので、Fの特異点は、原点すなわち p のみになる。したがって、Fの特異点と fの特異点は一致する。

主張 3　$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ は $M^{c+\epsilon}$の強変形レトラクトになる。

証明　既に示したことより、$F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$。$x \in M$に対して

$$F(x) \leq f(x)$$

だから、$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon] \subset f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$。仮定より $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ はコンパクトだから、$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ もコンパクトになる。仮定より $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ 内の fの特異点は p のみであり、fの特異点は Fの特異点と一致している。だから、$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ 内の Fの特異点は、あるとすれば p のみである。ところが、

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$$

となり、$p \notin F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$。よって、$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ 内に Fの特異点は存在しない。以上より、定理 1.3.1を適用することができ、$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ は $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = M^{c+\epsilon}$の強変形レトラクトになる。

ここで、

$$H = \overline{F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] - M^{c-\epsilon}}$$

とおくと、$F^{-1}(-\infty, c-\epsilon] = M^{c-\epsilon} \cup H$ と表すことができる。

主張 4　$M^{c-\epsilon} \cup B^{\lambda}$は $M^{c-\epsilon} \cup H$の強変形レトラクトになる。

証明　強変形レトラクション $r_t : M^{c-\epsilon} \cup H \to M^{c-\epsilon} \cup H$ を次のように構成する。まず、Uの補集合上では r_tは恒等写像にする。U内を次の三つの場合に分けて考える。

$\xi \le \epsilon$となる領域 R_1では、

$$r_t(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{\lambda}, tu^{\lambda+1}, \ldots, tu^n)$$

によって、r_tを定める。すると、r_1は R_1の恒等写像になり、r_0は R_1を B^{λ}に写す。また、$\frac{\partial F}{\partial \eta} \ge 1$ だから、$r_t(F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]) \subset F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$。

$\epsilon \le \xi \le \eta + \epsilon$となる領域 R_2では、

$$r_t(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{\lambda}, s_t u^{\lambda+1}, \ldots, s_t u^n)$$

によって、r_tを定める。ただし、

$$s_t = \begin{cases} t + (1-t)\left(\frac{\xi-\epsilon}{\eta}\right)^{1/2} & (\eta \ne 0) \\ 1 & (\eta = 0). \end{cases}$$

$\epsilon \le \xi \le \eta + \epsilon$だから、$\eta \ne 0$ のとき、

$$0 \le \frac{\xi - \epsilon}{\eta} \le 1$$

となり、$s_t \in [0,1]$。r_tが連続になることを示すには、$\lambda + 1 \le i \le n$ に対して

$$\lim_{\eta \to 0} s_t u^i = u^i$$

を示せばよい。これは次の不等式からわかる。$\eta \ne 0$ のとき、

$$\begin{aligned} (u^i - s_t u^i)^2 &= (1-s_t)^2 (u^i)^2 \\ &= \left(1 - t - (1-t)\left(\frac{\xi-\epsilon}{\eta}\right)^{1/2}\right)^2 (u^i)^2 \\ &= (1-t)^2 \left(1 - \left(\frac{\xi-\epsilon}{\eta}\right)^{1/2}\right)^2 (u^i)^2 \\ &\le (u^i)^2 \\ &\le \eta. \end{aligned}$$

r_1は R_2の恒等写像になり、$t=0$ とすると、

$$s_1 = \left(\frac{\xi-\epsilon}{\eta}\right)^{1/2}$$

となり、

$$\begin{aligned} & f(u^1,\ldots,u^\lambda,s_1u^{\lambda+1},\ldots,s_1u^n) \\ = \ & c-((u^1)^2+\cdots+(u^\lambda)^2)+s_1^2((u^{\lambda+1})^2+\cdots+(u^n)^2) \\ = \ & c-\xi+\frac{\xi-\epsilon}{\eta}\eta \\ = \ & c-\epsilon. \end{aligned}$$

これより、$r_0(R_2)\subset f^{-1}(c-\epsilon)$。$R_1$の場合と同様に、$r_t(F^{-1}(-\infty,c-\epsilon])\subset F^{-1}(-\infty,c-\epsilon]$。また、$R_1\cap R_2$は$\xi=\epsilon$となる領域になるので、$s_t=t$ となり、R_1での r_tと R_2での r_tは一致する。

$\eta+\epsilon\le\xi$となる領域 R_3では、r_tを R_3の恒等写像として定める。R_3では $f\le c-\epsilon$となるので、$R_3\subset M^{c-\epsilon}$。$R_2\cap R_3$は$\xi=\eta+\epsilon$となる領域になり、$R_2$において、$s_t=1$ となるので、r_tは恒等写像になり R_3での r_tに一致する。

以上によって強変形レトラクション $r_t: M^{c-\epsilon}\cup H\to M^{c-\epsilon}\cup H$ が構成され、$M^{c-\epsilon}\cup B^\lambda$は $M^{c-\epsilon}\cup H$の強変形レトラクトになる。

主張 1、3、4 より、$M^{c-\epsilon}\cup B^\lambda$は $M^{c+\epsilon}$の強変形レトラクトになり、特に、これらは同じホモトピー型を持つ。

1.4 Morse の不等式

定義 1.4.1 包含関係を持つ位相空間の組 $X\supset Y$に対して整数 $S(X,Y)$ が対応する関数 S について、

$$X\supset Y\supset Z\Rightarrow S(X,Z)\le S(X,Y)+S(Y,Z)$$

が成り立つとき、Sを**準加法的**という。

$$X\supset Y\supset Z\Rightarrow S(X,Z)=S(X,Y)+S(Y,Z)$$

が成り立つとき、Sを**加法的**という。

命題 1.4.2 Fを体とする。位相空間 $X\supset Y$に対して

$$b_q(X,Y;F)=\dim H_q(X,Y;F),\quad \chi(X,Y;F)=\sum_{q\ge 0}(-1)^q b_q(X,Y;F)$$

によって、$b_q(X,Y;F)$ と$\chi(X,Y;F)$ を定める。$b_q(X,Y;F)$ を組 (X,Y) の q**次 Betti 数**と呼び、$\chi(X,Y;F)$ を組 (X,Y) の **Euler 数**と呼ぶ。これらが定義できる位相空間の組に対して、q次 Betti 数は準加法的になり、Euler 数は加法的になる。

証明　定理 1.2.20より、

$$H_q(Y,Z;F) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X,Z;F) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,Y;F)$$

は完全系列になるので、

$$\begin{aligned}\dim H_q(X,Z;F) &= \dim \mathrm{Im} H_q(j) + \dim \mathrm{Ker} H_q(j)\\ &= \dim \mathrm{Im} H_q(j) + \dim \mathrm{Im} H_q(i)\\ &\leq \dim H_q(X,Y;F) + \dim H_q(Y,Z;F).\end{aligned}$$

よって、

$$b_q(X,Z;F) \leq b_q(X,Y;F) + b_q(Y,Z;F)$$

を得る。すなわち、q次 Betti 数は準加法的になる。

定理 1.2.20より、

$$\begin{array}{cccccccc} \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(Y,Z;F) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X,Z;F) & \xrightarrow{H_q(j)} & H_q(X,Y;F) \\ \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(Y,Z;F) & \xrightarrow{H_{q-1}(i)} & H_{q-1}(X,Z;F) & \xrightarrow{H_{q-1}(j)} & H_{q-1}(X,Y;F) \end{array}$$

は完全系列になるので、

$$\begin{aligned} r_q &= \dim \mathrm{Im} H_q(i) = \dim \mathrm{Ker} H_q(j)\\ s_q &= \dim \mathrm{Im} H_q(j) = \dim \mathrm{Ker} \delta_q\\ t_q &= \dim \mathrm{Im} \delta_q = \dim \mathrm{Ker} H_{q-1}(i)\end{aligned}$$

とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned} b_q(X,Z;F) &= \dim H_q(X,Z;F) = r_q + s_q\\ b_q(X,Y;F) &= \dim H_q(X,Y;F) = s_q + t_q\\ b_q(Y,Z;F) &= \dim H_q(Y,Z;F) = t_{q+1} + r_q.\end{aligned}$$

これらより、

$$\begin{aligned}\chi(X,Z;F) &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q(r_q+s_q)\\ &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q(s_q+t_q) + \sum_{q\geq 0}(-1)^q(t_{q+1}+r_q)\\ &= \chi(X,Y;F) + \chi(Y,Z;F)\end{aligned}$$

となり、Euler 数は加法的になる。

補題 1.4.3 Sを包含関係を持つ位相空間の組に整数を対応させる関数とする。$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$を位相空間の系列とする。$S$が準加法的ならば、

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$$

が成り立つ。Sが加法的ならば、

$$S(X_n, X_0) = \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$$

が成り立つ。

証明 n に関する数学的帰納法で証明する。Sを準加法的と仮定する。$n=1$ のときは、等式になる。$n-1$ のとき、

$$S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$$

が成り立つと仮定する。すると、

$$S(X_n, X_0) \leq S(X_n, X_{n-1}) + S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$$

となる。

Sが加法的のときは、上の不等式をすべて等式にすることにより示すことができる。

定理 1.4.4 (Morse の不等式) Mをコンパクト多様体とし、fを M上定義された C^∞関数で非退化特異点のみを持つものとする。指数 qの特異点の個数を C_qで表すと、

$$b_q(M;F) \leq C_q, \quad \chi(M;F) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q C_q$$

が成り立つ。

証明 $c_1 < \ldots < c_k$を fの特異値の全体とし、

$$a_0 < c_1 < a_1 < \ldots < c_i < a_i < \ldots < c_k < a_k$$

を満たす実数 $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$をとる。$f^{-1}(c_i)$ 内に指数λ_jの特異点 p_j $(1 \leq j \leq l)$ が存在するとき、定理 1.3.3の証明を各 p_jの近傍で行うことにより、$M^{c_i+\epsilon}$は $M^{c_i-\epsilon}$に B^{λ_j} $(1 \leq j \leq l)$ を境界で接着した位相空間 $M^{c_i-\epsilon} \cup B^{\lambda_1} \cup \cdots \cup B^{\lambda_l}$と同じホモトピー型を持つことがわかる。よって、定理 1.2.22を使うと、

$$\begin{aligned}
H_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) &= H_q(M^{c_i+\epsilon}, M^{c_i-\epsilon}; F) \\
&= H_q(M^{c_i-\epsilon} \cup B^{\lambda_1} \cup \cdots \cup B^{\lambda_l}, M^{c_i-\epsilon}; F) \\
&= H_q(B^{\lambda_1}, \partial B^{\lambda_1}; F) \oplus \cdots \oplus H_q(B^{\lambda_l}, \partial B^{\lambda_l}; F) \\
&= f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q \text{の特異点の個数だけ } F \text{を直和したもの}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
b_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) &= \dim H_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) \\
&= f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q \text{の特異点の個数}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

補題 1.4.3を$\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$と $S = b_q$に適用すると、

$$\begin{array}{rcl} b_q(M;F) & = & b_q(M^{a_k}, M^{a_0}; F) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q\text{の特異点の個数}) \\ & = & C_q \end{array}$$

となり、

$$b_q(M;F) \leq C_q$$

を得る。

補題 1.4.3を$\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$と $S = \chi$に適用すると、

$$\begin{array}{rcl} \chi(M;F) & = & \chi(M^{a_k}, M^{a_0}; F) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{q \geq 0} (-1)^q b_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \, (f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q\text{の特異点の個数}) \\ & = & \displaystyle\sum_{q \geq 0} (-1)^q C_q \end{array}$$

となり、

$$\chi(M;F) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q C_q$$

を得る。

補題 1.4.5 位相空間 $X \supset Y$に対して

$$S_q(X,Y) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i b_{q-i}(X,Y;F)$$

とおくと、S_qは準加法的になる。

証明 命題 1.4.2の証明中の記号をそのまま使うことにする。

$$S_q(Y,Z) - S_q(X,Z) + S_q(X,Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(b_{q-i}(Y,Z;F) - b_{q-i}(X,Z;F) + b_{q-i}(X,Y;F)) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(t_{q-i+1} + r_{q-i} - r_{q-i} - s_{q-i} + s_{q-i} + t_{q-i}) \\
&= t_{q+1} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

したがって、

$$S_q(X,Z) \leq S_q(Y,Z) + S_q(X,Y)$$

となり、S_qは準加法的になる。

定理 1.4.6 (Morse の不等式 (強い形)) 定理 1.4.4と同じ設定のもとに、

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i b_{q-i}(M;F) \leq \sum_{i=0}^{q}(-1)^i C_{q-i}$$

が成り立つ。

証明 定理 1.4.4の証明中の記号をそのまま使うことにする。定理 1.4.4の証明中に示したように、

$$b_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) = f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q \text{の特異点の個数}$$

が成り立っていることに注意しておく。また、補題 1.4.5の S_q準加法的だから、補題 1.4.3を$\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$と $S = S_q$に適用することができる。

$$\begin{aligned}
S_q(M) &= S_q(M^{a_k}, M^{a_0}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} S_q(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{q}(-1)^j b_{q-j}((M^{a_i}, M^{a_{i-1}}; F) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{q}(-1)^j \,(f^{-1}(c_i) \text{ 内の指数 } q-j \text{の特異点の個数}) \\
&= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j C_{q-j}
\end{aligned}$$

となり、

$$S_q(M) \leq \sum_{j=0}^{q}(-1)^j C_{q-j}$$

を得る。

注意 1.4.7 定理 1.4.6の結論から定理 1.4.4を導くことは次のようにしてできる。各 qについて、

$$\begin{aligned} b_q(M;F) - b_{q-1}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) &\leq C_q - C_{q-1} + \cdots \pm C_0 \\ b_{q-1}(M;F) - b_{q-2}(M;F) + \cdots \mp b_0(M;F) &\leq C_{q-1} - C_{q-2} + \cdots \mp C_0 \end{aligned}$$

の両辺を加えると $b_q(M;F) \leq C_q$を得る。

$n = \dim M$とすると、

$$\begin{aligned} b_n(M;F) - b_{n-1}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) &\leq C_n - C_{n-1} + \cdots \pm C_0 \\ b_{n+1}(M;F) - b_n(M;F) + \cdots \mp b_0(M;F) &\leq C_{n+1} - C_n + \cdots \mp C_0 \end{aligned}$$

となるが、$b_{n+1}(M;F) = C_{n+1} = 0$ だから、

$$b_n(M;F) - b_{n-1}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) = C_n - C_{n-1} + \cdots \pm C_0$$

が成り立つ。したがって、

$$\chi(M;F) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i(M;F) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i C_i$$

を得る。

系 1.4.8 定理 1.4.4と同じ設定で、さらに、ある qについて $C_{q+1} = C_{q-1} = 0$ が成り立つとき、$b_{q+1}(M;F) = b_{q-1}(M;F) = 0$ と $b_q(M;F) = C_q$が成り立つ。

証明　定理 1.4.4より、

$$\begin{aligned} 0 \leq b_{q+1}(M;F) \leq C_{q+1} = 0 \\ 0 \leq b_{q-1}(M;F) \leq C_{q-1} = 0 \end{aligned}$$

だから、$b_{q+1}(M;F) = b_{q-1}(M;F) = 0$ が成り立つ。

定理 1.4.6より、

$$\begin{aligned} b_q(M;F) - b_{q-1}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) &\leq C_q - C_{q-1} + \cdots \pm C_0 \\ b_{q+1}(M;F) - b_q(M;F) + \cdots \mp b_0(M;F) &\leq C_{q+1} - C_q + \cdots \mp C_0 \end{aligned}$$

となるが、$b_{q+1}(M;F) = C_{q+1} = 0$ だから、

$$b_q(M;F) - b_{q-1}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) = C_q - C_{q-1} + \cdots \pm C_0$$

を得る。同様にして、$b_{q-1}(M;F) = C_{q-1} = 0$ より、

$$b_{q-2}(M;F) - b_{q-3}(M;F) + \cdots \pm b_0(M;F) = C_{q-2} - C_{q-3} + \cdots \pm C_0$$

を得る。以上より、

$$b_q(M;F) = b_q(M;F) - b_{q-1}(M;F) = C_q - C_{q-1} = C_q$$

となり、$b_q(M;F) = C_q$が成り立つ。

1.5 例

定理 1.5.1 (Reeb) Mをコンパクト n 次元多様体とし、$f : M \to \mathbf{R}$ を二つの特異点のみ持ち、それらはどちらも非退化であるような C^∞級関数とする。このとき、Mは n 次元球面と位相同型になる。

証明 fの二つの特異点は最小値と最大値を与える点になる。

$p \in M$を最小値を与える非退化特異点とし、$q \in M$を最大値を与える非退化特異点とする。$f(p) = a,\ f(q) = b$ とおく。p の指数は 0 になるので、補題 1.1.10より、p のまわりの局所座標系 $(U; x^1, \dots, x^n)$ が存在し、

$$f(x) = f(p) + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$$

が成り立つ。よって、十分小さい$\epsilon > 0$ をとると $f^{-1}[a, a+\epsilon]$ は B^nと微分同型になる。他方、qの指数は n になるので、補題 1.1.10より、p のまわりの局所座標系 $(V; y^1, \dots, y^n)$ が存在し、

$$f(y) = f(q) - (y^1)^2 - \cdots - (y^n)^2$$

が成り立つ。よって、さらに小さい$\epsilon > 0$ をとると $f^{-1}[b-\epsilon, b]$ は B^nと微分同型になる。$f^{-1}[a+\epsilon, b-\epsilon]$ はコンパクトで fの特異点を持たないので、定理 1.3.1より、$f^{-1}[a, a+\epsilon]$ は $f^{-1}[a, b-\epsilon]$ と微分同型になり、$f^{-1}[a, b-\epsilon]$ も B^nと微分同型になる。

$$M = f^{-1}[a, b-\epsilon] \cup f^{-1}[b-\epsilon, b]$$

だから、Mは n 次元球面と位相同型になる。

例 1.5.2 複素射影空間上に非退化特異点しか持たない C^∞級関数を定め、その特異点の指数を調べることで、複素射影空間の Betti 数、ホモロジー空間を決定する。

n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$は、$\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} - \{0\}$ の自然な $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ への作用による $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ の商空間 $(\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ として定義される。$\mathbf{C}P^n$の元の代表元は単位ベクトルをとることができるので、$\mathbf{C}P^n$は、

$$U(1) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$$

の自然な

$$S^{2n+1} = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |z| = 1\}$$

への作用による S^{2n+1}の商空間 $S^{2n+1}/U(1)$ とみなすことができ、特に、

$$\mathbf{C}P^n = S^{2n+1}/U(1)$$

はコンパクトになる。$(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1}$に対して、対応する $\mathbf{C}P^n$の元を $[z_0, z_1, \dots, z_n]$ で表す。$0 \leq i \leq n$ に対して

$$U_i = \{[z_0, z_1, \dots, z_n] \in \mathbf{C}P^n \mid z_i \neq 0\}$$

とおく。$[z]=[z_0,z_1,\dots,z_n]\in U_i$に対して、

$$w_j=|z_i|\frac{z_j}{z_i}$$

とおくと、$\lambda\in U(1)$ に対して

$$|\lambda z_i|\frac{\lambda z_j}{\lambda z_i}=|z_i|\frac{z_j}{z_i}$$

となるので、w_jは代表元のとり方によらずに定まる。$|w_j|=|z_j|$ となっていることに注意しておく。さらに、

$$[z]\mapsto(w_0,\dots,\hat{w}_i,\dots,w_n)\in\mathbf{C}^n\cong\mathbf{R}^{2n}$$

は U_iの局所座標系になる。ただし、$\hat{w}_i$は w_iを取り除くことを意味するものとする。

$c_0<c_1<\cdots<c_n$をとり、$\mathbf{C}P^n$上の C^∞級関数 fを

$$f[z_0,\dots,z_n]=\sum_{j=0}^n c_j|z_j|^2$$

で定める。$\lambda\in U(1)$ に対して

$$\sum_{j=0}^n c_j|\lambda z_j|^2=\sum_{j=0}^n c_j|z_j|^2$$

だから、fは代表元のとり方によらずに定まる。fの局所座標近傍系 $(U_i;w_0,\dots,\hat{w}_i,\dots,w_n)$ における局所表示を求める。$[z_0,\dots,z_n]\in U_i$に対して

$$|z_i|^2=1-\sum_{j\neq i}|z_j|^2$$

となるので、

$$\begin{aligned} f &= c_i\left(1-\sum_{j\neq i}|z_j|^2\right)+\sum_{j\neq i}c_j|z_j|^2 \\ &= c_i+\sum_{j\neq i}(c_j-c_i)|z_j|^2 \\ &= c_i+\sum_{j\neq i}(c_j-c_i)|w_j|^2 \end{aligned}$$

を得る。この局所表示より、fが $\mathbf{C}P^n$上の C^∞級関数であることがわかる。さらに、U_i内では $p_i=[0,\dots,\overset{i}{\breve{1}},\dots,0]$ のみが fの特異点であり、p_iは指数

$$2\#\{c_j\mid c_j-c_i<0\}=2i$$

の非退化特異点になる。よって、fの特異点は非退化特異点のみになる。fの指数 kの非退化特異点の個数を C_kで表すと、

$$C_k=\begin{cases}1 & (k\text{は偶数、}0\le k\le 2n)\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

となる。系 1.4.8を適用することができ、

$$b_k(\mathbf{C}P^n; F) = \begin{cases} 1 & (k\text{は偶数、}0 \le k \le 2n) \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

したがって、

$$H_k(\mathbf{C}P^n; F) = \begin{cases} F & (k\text{は偶数、}0 \le k \le 2n) \\ \{0\} & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

例 1.5.3 四元数射影空間上に非退化特異点しか持たない C^∞級関数を定め、その特異点の指数を調べることで、四元数射影空間の Betti 数、ホモロジー空間を決定する。

n 次元四元数射影空間 $\mathbf{H}P^n$は、$\mathbf{H}^\times = \mathbf{H} - \{0\}$ の自然な $\mathbf{H}^{n+1} - \{0\}$ への右からの積の作用による $\mathbf{H}^{n+1} - \{0\}$ の商空間 $(\mathbf{H}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{H}^\times$ として定義される。$\mathbf{H}P^n$の元の代表元は単位ベクトルをとることができるので、$\mathbf{H}P^n$は、

$$Sp(1) = \{\lambda \in \mathbf{H} \mid |\lambda| = 1\}$$

の自然な

$$S^{4n+1} = \{z \in \mathbf{H}^{n+1} \mid |z| = 1\}$$

への右からの積の作用による S^{4n+1}の商空間 $S^{4n+1}/Sp(1)$ とみなすことができ、特に、

$$\mathbf{H}P^n = S^{4n+1}/Sp(1)$$

はコンパクトになる。$(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in S^{4n+1}$に対して、対応する $\mathbf{H}P^n$の元を $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ で表す。$0 \le i \le n$ に対して

$$U_i = \{[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbf{H}P^n \mid z_i \ne 0\}$$

とおく。$[z] = [z_0, z_1, \ldots, z_n] \in U_i$に対して、

$$w_j = |z_i| z_j z_i^{-1}$$

とおくと、$\lambda \in Sp(1)$ に対して

$$|z_i\lambda| z_j \lambda (z_i\lambda)^{-1} = |z_i| z_j \lambda\lambda^{-1} z_i = |z_i| z_j z_i^{-1}$$

となるので、w_jは代表元のとり方によらずに定まる。$|w_j| = |z_j|$ となっていることに注意しておく。さらに、

$$[z] \mapsto (w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n) \in \mathbf{H}^n \cong \mathbf{R}^{4n}$$

は U_iの局所座標系になる。

$c_0 < c_1 < \cdots < c_n$をとり、$\mathbf{H}P^n$上の C^∞級関数 fを

$$f[z_0, \ldots, z_n] = \sum_{j=0}^{n} c_j |z_j|^2$$

で定める。$\lambda \in Sp(1)$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n} c_j |z_j \lambda|^2 = \sum_{j=0}^{n} c_j |z_j|^2$$

だから、fは代表元のとり方によらずに定まる。fの局所座標近傍系 $(U_i; w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)$ における局所表示を求める。$[z_0, \ldots, z_n] \in U_i$に対して

$$|z_i|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} |z_j|^2$$

となるので、

$$\begin{aligned} f &= c_i \left(1 - \sum_{j \neq i} |z_j|^2 \right) + \sum_{j \neq i} c_j |z_j|^2 \\ &= c_i + \sum_{j \neq i} (c_j - c_i) |z_j|^2 \\ &= c_i + \sum_{j \neq i} (c_j - c_i) |w_j|^2 \end{aligned}$$

を得る。この局所表示より、fが $\mathbf{H}P^n$上の C^∞級関数であることがわかる。さらに、U_i内では $p_i = [0, \ldots, \overset{i}{\breve{1}}, \ldots, 0]$ のみが fの特異点であり、p_iは指数

$$4\#\{c_j \mid c_j - c_i < 0\} = 4i$$

の非退化特異点になる。よって、fの特異点は非退化特異点のみになる。fの指数 kの非退化特異点の個数を C_kで表すと、

$$C_k = \begin{cases} 1 & (k\text{は 4 の倍数、}0 \leq k \leq 4n) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる。系 1.4.8を適用することができ、

$$b_k(\mathbf{H}P^n; F) = \begin{cases} 1 & (k\text{は 4 の倍数、}0 \leq k \leq 4n) \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

したがって、

$$H_k(\mathbf{H}P^n; F) = \begin{cases} F & (k\text{は 4 の倍数、}0 \leq k \leq 4n) \\ \{0\} & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

例 1.5.4 $0 < b < a$ をとり、2 次元トーラス T^2を

$$T^2 = \{((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \mid u, v \in \mathbf{R}\}$$

によって定める。u, vは T^2の局所座標系になっている。T^2の第一成分を対応させる関数を fとする。すなわち、

$$f(u, v) = (a + b\cos u)\cos v$$

である。この表示からわかるように、fはT^2上のC^∞級関数になる。fの特異点を求めるために、fの一階微分を計算する。

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -b\sin u\cos v, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -(a+b\cos u)\sin v.$$

両方とも同時に 0 になる点は、$(u,v)=(0,0),(\pi,0),(0,\pi),(\pi,\pi)$ である。これらが fの特異点になる。fの特異点における Hessian を調べるため、fの二階微分を計算する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -b\cos u\cos v, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -(a+b\cos u)\cos v,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = b\sin u\sin v.$$

fの各特異点における Hessian の表現行列の成分が上の二階偏微分で表され、

$$\begin{aligned}\det\nabla^2 f &= b(a+b\cos u)\cos u\cos^2 v - b^2\sin^2 u\sin^2 v\\ \mathrm{tr}\nabla^2 f &= -(a+2b\cos u)\cos v.\end{aligned}$$

fの各特異点の非退化であることと指数を以下で示す。

$(u,v)=(0,0)$ に対応する T^2の点は $(a+b,0,0)$。$\det(\nabla^2 f)_{(0,0)} = b(a+b) > 0$ だから、この特異点は非退化になり、$(\nabla^2 f)_{(0,0)}$の二つの固有値の符号は一致する。$\mathrm{tr}(\nabla^2 f)_{(0,0)} = -(a+2b) < 0$ だから、$(\nabla^2 f)_{(0,0)}$の二つの固有値はともに負になり、特異点の指数は 2 になる。

$(u,v)=(\pi,0)$ に対応する T^2の点は $(a-b,0,0)$。$\det(\nabla^2 f)_{(\pi,0)} = -b(a-b) < 0$ だから、この特異点は非退化になり、$(\nabla^2 f)_{(\pi,0)}$の二つの固有値は逆符号を持つ。よって、特異点の指数は 1 になる。

$(u,v)=(0,\pi)$ に対応する T^2の点は $(-(a+b),0,0)$。$\det(\nabla^2 f)_{(0,\pi)} = b(a+b) > 0$ だから、この特異点は非退化になり、$(\nabla^2 f)_{(0,\pi)}$の二つの固有値の符号は一致する。$\mathrm{tr}(\nabla^2 f)_{(0,\pi)} = a+2b > 0$ だから、$(\nabla^2 f)_{(0,\pi)}$の二つの固有値はともに正になり、特異点の指数は 0 になる。

$(u,v)=(\pi,\pi)$ に対応する T^2の点は $(-(a-b),0,0)$。$\det(\nabla^2 f)_{(\pi,\pi)} = -b(a-b) < 0$ だから、この特異点は非退化になり、$(\nabla^2 f)_{(\pi,0)}$の二つの固有値は逆符号を持つ。よって、特異点の指数は 1 になる。

以上より、fの指数 0 の特異点の個数は $C_0=1$、fの指数 1 の特異点の個数は $C_1=2$、fの指数 2 の特異点の個数は $C_2=1$ となる。定理 1.4.4より、

$$\chi(T^2;F) = C_0 - C_1 + C_2 = 0.$$

他方 T^2は連結でコンパクト向き付け可能 2 次元多様体だから、$b_0(T^2;F)=b_2(T^2;F)=1$ となる。よって、

$$0 = \chi(T^2;F) = b_0(T^2;F) - b_1(T^2;F) + b_2(T^2;F) = 2 - b_1(T^2;F)$$

となり、$b_1(T^2;F)=2$ が成り立つ。したがって、

$$H_0(T^2;F)=F, \quad H_1(T^2;F)=F\oplus F, \quad H_2(T^2;F)=F.$$

第 2 章 Riemann 部分多様体

2.1 第二基本形式と法接続

定義 2.1.1 $\iota : M \to \tilde{M}$を多様体 Mから Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への挿入とする。すなわち Mの各点 x でのιの微分写像 $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$が単射であるとする。このとき、$\tilde{M}$上の Riemann 計量$\tilde{g}$の $d\iota$による引き戻し $g = \iota^*\tilde{g}$は M上の Riemann 計量になる。この (M, g) を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。各 $x \in M$に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)}\tilde{M} \mid \langle u, d\iota_x(T_xM)\rangle = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x \in M} T_x^\perp M$$

で $T^\perp M$を定める。$u \in T^\perp M$に対して $u \in T_x^\perp M$となる $x \in M$が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \to M$$

が定まる。このとき、$\pi : T^\perp M \to M$はベクトル束になる。これを、Riemann 部分多様体 Mの**法ベクトル束**と呼ぶ。法ベクトル束 $T^\perp M$の C^∞級断面を M上の**法ベクトル場**と呼ぶ。

注意 2.1.2 定義 2.1.1では、$\tilde{M}$の Riemann 計量から Mの Riemann 計量を誘導したが、M の Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体 (M, g) から $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への C^∞級写像ιが、Mの各点 x に対して $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$は等長線形写像になるという条件を満たすとき、$\iota$を**等長的挿入**と呼び、$(M, g)$ を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

この節では、今後$\iota : M \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の Riemann 部分多様体として議論する。

命題 2.1.3 $\tilde{M}$の Levi-Civita 接続を$\tilde{\nabla}$で表す。M上のベクトル場 $X, Y \in C^\infty(TM)$ に対して、$\tilde{\nabla}_X Y$はベクトル束 $T\tilde{M}|_M$の C^∞級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \qquad (\nabla_X Y \in TM,\ h(X, Y) \in T^\perp M)$$

と分解すると、∇ は Riemann 部分多様体の Levi-Civita 接続に一致し、h は $L^2(TM, T^\perp M)$ の C^∞級断面になる。さらに、h は対称になる。

証明 $x \in M$に対して、$c(0) = x$ と $c'(0) = X_x$を満たす Mの曲線 c をとる。曲線 c に沿った $c(t)$ から $c(0)$ までの$\tilde{\nabla}$に関する平行移動をτ_0^tで表すと、

$$(\tilde{\nabla}_X Y)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。よって、$\tilde{\nabla}_X Y$はベクトル束 $T\tilde{M}|_M$の C^∞級断面として定まる。

a, b を M上の C^∞級関数とする。

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{aX}(bY) &= a((Xb)Y + b\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= (a(Xb)Y + ab\nabla_X Y) + abh(X, Y) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \nabla_{aX}(bY) &= a(Xb)Y + ab\nabla_X Y \\ h(aX, bY) &= abh(X, Y) \end{aligned}$$

を得る。これより、∇ は TM上の線形接続になり、h は $L^2(TM, T^\perp M)$ の C^∞級断面になることがわかる。

$\tilde{M}$の Levi-Civita 接続の性質より、

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + h(X, Y) - \nabla_Y X - h(Y, X) - [X, Y] \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + (h(X, Y) - h(Y, X)). \end{aligned}$$

上の等式の TM成分と $T^\perp M$成分をみることにより、

$$\begin{gathered} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \\ h(X, Y) - h(Y, X) = 0 \end{gathered}$$

を得る。第二式より、h は対称になる。第一式は、∇ が Mの Levi-Civita 接続になるための条件である。

$\tilde{\nabla}$は$\tilde{M}$の Riemann 計量$\tilde{g}$を保つので、M上のベクトル場 $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ に対して、

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

よって、∇ は Mの Riemann 計量 gを保つ。Mの Levi-Civita は一意的に定まるので、∇ は Mの Levi-Civita に一致する。

定義 2.1.4 命題2.1.3で定めたhをMの**第二基本形式**と呼ぶ。ベクトル場$X, Y \in C^\infty(TM)$に対する$\tilde{\nabla}_X Y$の分解

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \qquad (\nabla_X Y \in TM,\ h(X,Y) \in T^\perp M)$$

を **Gauss の公式**と呼ぶ。

命題 2.1.5 $\tilde{M}$の Levi-Civita 接続を$\tilde{\nabla}$で表す。M上のベクトル場$X \in C^\infty(TM)$と法ベクトル場$\xi \in C^\infty(T^\perp M)$に対して、$\tilde{\nabla}_X \xi$はベクトル束$T\tilde{M}|_M$の$C^\infty$級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \qquad (A_\xi X \in TM,\ \nabla^\perp_X \xi \in T^\perp M)$$

と分解すると、$\nabla^\perp$は$T\tilde{M}$の Riemann 計量から自然に誘導される$T^\perp M$の計量を保つ$T^\perp M$の接続になり、Aは$L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$の$C^\infty$級断面になる。ここで、$\mathrm{Sym}(TM)$は$TM$の各ファイバーの対称線形変換全体の成すベクトル束である。

証明 $\tilde{\nabla}_X \xi$がベクトル束$T\tilde{M}|_M$のC^∞級断面として定まることは、命題2.1.3の証明と同様。

a, bをM上のC^∞級関数とする。

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{aX}(b\xi) &= a((Xb)\xi + b\tilde{\nabla}_X \xi) \\ &= -abA_\xi X + (a(Xb)\xi + ab\nabla^\perp_X \xi) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \nabla^\perp_{aX}(b\xi) &= a(Xb)\xi + ab\nabla^\perp_X \xi \\ A_{b\xi}(aX) &= abA_\xi X \end{aligned}$$

を得る。$\nabla^\perp$は$T^\perp M$上の線形接続になり、Aは$L(T^\perp M, \mathrm{End}(TM))$の$C^\infty$級断面になることがわかる。

$\tilde{\nabla}$は$\tilde{M}$の Riemann 計量$\tilde{g}$を保つので、M上の法ベクトル場$\xi, \eta \in C^\infty(T^\perp M)$に対して、

$$\begin{aligned} X(\tilde{g}(\xi,\eta)) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X \eta) \\ &= \tilde{g}(\nabla^\perp_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \nabla^\perp_X \eta). \end{aligned}$$

よって、$\nabla^\perp$は$T^\perp M$の$\tilde{g}$を保つ。

$A_\xi \in \mathrm{Sym}(TM)$となることは、次の補題から従う。

補題 2.1.6 M上のベクトル場$X, Y \in C^\infty(TM)$と法ベクトル場$\xi \in C^\infty(T^\perp M)$に対して、

$$\tilde{g}(h(X,Y), \xi) = \tilde{g}(A_\xi X, Y)$$

が成り立つ。

証明　YはMの接ベクトル場でありξはMの法ベクトル場だから$\tilde{g}(Y,\xi)=0$となり、

$$\begin{aligned} 0 &= X(\tilde{g}(Y,\xi)) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)+\tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X\xi) \\ &= \tilde{g}(h(X,Y),\xi)+\tilde{g}(Y,-A_\xi X). \end{aligned}$$

したがって、

$$\tilde{g}(h(X,Y),\xi)=\tilde{g}(A_\xi X,Y)$$

が成り立つ。

命題 2.1.5の証明の続き　補題 2.1.6と命題 2.1.3より、

$$\tilde{g}(A_\xi X,Y)=\tilde{g}(h(X,Y),\xi)=\tilde{g}(h(Y,X),\xi)=\tilde{g}(A_\xi Y,X).$$

したがって、A_ξは対称線形変換になる。

定義 2.1.7 命題2.1.5で定めた$\nabla^\perp$をMの**法接続**と呼び、AをMの**シェイプ作用素**と呼ぶ。ベクトル場$X\in C^\infty(TM)$と法ベクトル場$\xi\in C^\infty(T^\perp M)$に対する$\tilde{\nabla}_X\xi$の分解

$$\tilde{\nabla}_X\xi=-A_\xi X+\nabla^\perp_X\xi \qquad (A_\xi X\in TM,\ \nabla^\perp_X\xi\in T^\perp M)$$

を **Weingarten の公式**と呼ぶ。法接続$\nabla^\perp$の曲率テンソル$R^{\nabla^\perp}$を$R^\perp$で表し、**法曲率テンソル**と呼ぶ。法ベクトル場$\xi\in C^\infty(T^\perp M)$が$\nabla^\perp\xi=0$を満たすとき、すなわち、任意の$X\in C^\infty(TM)$に対して$\nabla^\perp_X\xi=0$を満たすとき、$\xi$を**平行法ベクトル場**と呼ぶ。

定義 2.1.8 $h=0$となる Riemann 部分多様体Mを、**全測地的部分多様体**と呼ぶ。Mが全測地的になるための必要十分条件は、Mの任意の測地線が$\tilde{M}$の測地線になるもことが知られている。

$$H=\mathrm{tr}(h)=\sum_{i=1}^n h(e_i,e_i) \qquad (\{e_i\}\ \text{は}\ TM\text{の正規直交基底})$$

によってHを定めると、Hは$T^\perp M$のC^∞級断面になる。HをMの**平均曲率ベクトル**と呼ぶ。$H=0$となる Riemann 部分多様体Mを、**極小部分多様体**と呼ぶ。特に、全測地的部分多様体は極小部分多様体になる。

2.2 基本的な方程式

この節では、Riemann 部分多様体の三つの基本的な方程式、Gauss の方程式、Codazzi の方程式、Ricci の方程式を導く。前節と同様に、この節でも、$\iota: M\to\tilde{M}$を Riemann 多様体$\tilde{M}$の Riemann 部分多様体として議論する。ただし、Mと$\tilde{M}$の Riemann 計量は、どちらも$\langle\ ,\ \rangle$で表すことにする。また、前節で導入した他の記号はそのまま使うことにする。

命題 2.2.1 (Gauss の方程式) $\tilde{M}$と Mの曲率テンソルをそれぞれ$\tilde{R}$と Rで表すと、Mのベクトル場 X, Y, Z, Wに対して、

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

が成り立つ。

証明 曲率テンソルの定義と Gauss の公式、Weingarten の公式より、

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}(X,Y)Z \\
= \ & \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
= \ & \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]} Z + h([X,Y],Z)) \\
= \ & \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)} X + \nabla^{\perp}_X (h(Y,Z)) \\
& -\nabla_Y \nabla_X Z - h(Y, \nabla_X Z) + A_{h(X,Z)} Y - \nabla^{\perp}_Y (h(X,Z)) \\
& -\nabla_{[X,Y]} Z - h([X,Y],Z) \\
= \ & R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y \\
& +h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X,Y],Z) \\
& +\nabla^{\perp}_X (h(Y,Z)) - \nabla^{\perp}_Y (h(X,Z)).
\end{aligned}$$

よって、補題 2.1.6より、

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle \\
= \ & \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle A_{h(Y,Z)} X, W\rangle + \langle A_{h(X,Z)} Y, W\rangle \\
= \ & \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle + \langle h(Y,W), h(X,Z)\rangle.
\end{aligned}$$

Codazzi の方程式を定式化するために、ベクトル束 $L^2(TM, T^{\perp}M)$ に接続を導入する。

補題 2.2.2 $a \in C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M))$ と $X, Y, Z \in C^{\infty}(TM)$ に対して

$$(\bar{\nabla}_X a)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X (a(Y,Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)$$

によって

$$\bar{\nabla} : C^{\infty}(TM) \times C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M)) \to C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M))$$

が定まり、$\bar{\nabla}$は $L^2(TM, T^{\perp}M)$ 上の接続になる。

証明 $f, g \in C^{\infty}(M)$ に対して、

$$\begin{aligned}
& (\bar{\nabla}_X a)(fY, gZ) \\
= \ & \nabla^{\perp}_X (a(fY, gZ)) - a(\nabla_X (fY), gZ) - a(fY, \nabla_X (gZ)) \\
= \ & X(fg) a(Y,Z) + fg \nabla^{\perp}_X (a(Y,Z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(Xf)ga(Y,Z) - fga(\nabla_X Y, Z) \\
&-f(Xg)a(Y,Z) - fga(Y, \nabla_X Z) \\
= \;& fg(\nabla^\perp_X(a(Y,Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)) \\
= \;& fg(\bar\nabla_X a)(Y,Z)
\end{aligned}$$

となるので、$\bar\nabla_X a$ は $C^\infty(L^2(TM, T^\perp M))$ の元になる。

∇ は TMの接続であることと、$\nabla^\perp$は $T^\perp M$の接続であることから、

$$\bar\nabla_{fX} a = f\bar\nabla_X a$$

が従う。

さらに、

$$\begin{aligned}
&(\bar\nabla_X(fa))(Y,Z) \\
= \;& \nabla^\perp_X(fa(Y,Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\
= \;& (Xf)a(Y,Z) + f\nabla^\perp_X(a(Y,Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\
= \;& (Xf)a(Y,Z) + (\bar\nabla_X a)(Y,Z)
\end{aligned}$$

より、

$$\bar\nabla_X(fa) = (Xf)a + f\bar\nabla_X a$$

となり、$\bar\nabla$は $L^2(TM, T^\perp M)$ 上の接続になる。

命題 2.2.3 (Codazzi の方程式) Mのベクトル場 $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ に対して、$\tilde R(X,Y)Z$ の法成分は

$$(\tilde R(X,Y)Z)^\perp = (\bar\nabla_X h)(Y,Z) - (\bar\nabla_Y h)(X,Z)$$

を満たす。

証明　命題 2.2.1の証明中に得た等式

$$\begin{aligned}
\tilde R(X,Y)Z \;=\;& R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y \\
&+h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X,Y], Z) \\
&+\nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - \nabla^\perp_Y(h(X,Z)).
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
(\tilde R(X,Y)Z)^\perp \;=\;& h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X,Y], Z) \\
&+\nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - \nabla^\perp_Y(h(X,Z)) \\
=\;& h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h(\nabla_X Y, Z) + h(\nabla_Y X, Z) \\
&+\nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - \nabla^\perp_Y(h(X,Z)) \\
=\;& (\bar\nabla_X h)(Y,Z) - (\bar\nabla_Y h)(X,Z).
\end{aligned}$$

命題 2.2.4 (Ricci の方程式) Mのベクトル場 $X,Y \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場$\xi,\eta \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、

$$\langle \tilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle$$

が成り立つ。

証明 Weingarten の公式より、

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle \\
=\ &\langle \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\xi - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\xi - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
=\ &\langle \tilde{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla^\perp_Y\xi) - \tilde{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi) - (-A_\xi[X,Y] + \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi),\eta\rangle \\
=\ &\langle h(X,-A_\xi Y) + \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - h(Y,-A_\xi X) - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
=\ &\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle h(X,A_\xi Y),\eta\rangle + \langle h(Y,A_\xi X),\eta\rangle \\
=\ &\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle A_\eta X,A_\xi Y\rangle + \langle A_\eta Y,A_\xi X\rangle \\
=\ &\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle A_\xi A_\eta X,Y\rangle + \langle Y,A_\eta A_\xi X\rangle \\
=\ &\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

命題 2.2.5 $\tilde{M}$を曲率 Kの定曲率空間とすると、Riemann 部分多様体 Mの Gauss, Codazzi, Ricci の方程式は、次のようになる。Mのベクトル場 $X,Y,Z,W \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場$\xi,\eta \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、

$$\begin{aligned}
&K(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\
&= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle, \\
&(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z), \\
&\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

証明 $\tilde{M}$の曲率テンソル$\tilde{R}$は、$\tilde{M}$の接ベクトル S,T,Uに対して、

$$\tilde{R}(S,T)U = K(\langle T,U\rangle S - \langle S,U\rangle T)$$

を満たしている。命題 2.2.1(Gauss の方程式) より、

$$\begin{aligned}
&K(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\
&= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle
\end{aligned}$$

を得る。命題 2.2.3(Codazzi の方程式) より、

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z) &= (\tilde{R}(X,Y)Z)^\perp \\
&= K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)^\perp \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって、

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z)$$

を得る。命題 2.2.4(Ricci の方程式) より、

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle &= \langle \tilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle \\ &= K(\langle Y,\xi\rangle\langle X,\eta\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Y,\eta\rangle) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって、

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

を得る。

2.3 Gauss 曲率とその一般化

この節では、$\mathbf{R}^3$内の 2 次元 Riemann 部分多様体 (曲面) の Gauss 曲率を一般化し、$\mathbf{R}^{n+r}$内の n 次元 Riemann 部分多様体の曲率を定義する。

まず、平面 $\mathbf{R}^2$内の 1 次元 Riemann 部分多様体 (曲線) の曲率を見直しておく。$c(s)$ を $\mathbf{R}^2$内の曲線とし、s を弧長パラメータとする。すなわち、$c'(s)$ の長さは 1 である。$e_1(s) = c'(s)$ とおき、$e_1(s)$ を反時計回りに$\pi/2$ 回転させた単位ベクトルを $e_2(s)$ で表す。このとき、$c(s)$ の曲率$\kappa(s)$ は

$$e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s)$$

によって定義され、Frenet-Serret の公式より

$$e_2'(s) = -\kappa(s)e_1(s)$$

が成り立つ。

$c(s)$ のシェイプ作用素 A は、

$$e_2'(s) = \tilde{\nabla}_{e_1(s)}e_2(s) = -A_{e_2(s)}e_s(s)$$

を満たす。よって、

$$A_{e_2(s)}e_1(s) = \kappa(s)e_1(s).$$

このように、平面曲線の場合は、曲率は第二基本形式またはシェイプ作用素の大きさを表している。

定義 2.3.1 $\iota : M \to \mathbf{R}^3$を 2 次元 Riemann 部分多様体とする。$x \in M$をとる。単位法ベクトル$\xi \in T_x^{\perp}M$に対して、シェイプ作用素 $A_\xi : T_xM \to T_xM$の固有値を Mの x におけるξに関する**主曲率**と呼ぶ。二つの主曲率の積を Mの x における **Gauss 曲率**と呼び、$G(x)$ で表す。$G(x) = \det A_\xi$で定義してもよい。

注意 2.3.2 定義 2.3.1において、$T_x^\perp M$は 1 次元だから、単位法ベクトルξのとり方には二通りある。ξの代りに$-\xi$をとると、$A_{-\xi} = -A_\xi$となるので、主曲率の符号は逆になる。ところが、Gauss 曲率は二つの主曲率の積だから、$-\xi$に対しても変わらない。

主曲率は Mの挿入ιに依存するが、Gauss 曲率は Mの Riemann 計量だけから定まることが以下のようにわかる。Gauss の方程式 (命題 2.2.1または命題 2.2.5) より、Mの接ベクトル X, Y, Z, Wに対して

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

となるが、$\mathbf{R}^3$の曲率テンソル$\tilde{R}$は 0 だから、

$$0 = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle.$$

よって、補題 2.1.6より

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y, X\rangle &= \langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle - \langle h(X,Y), h(X,Y)\rangle \\ &= \langle h(X,X), \xi\rangle\langle h(Y,Y), \xi\rangle - \langle h(X,Y), \xi\rangle\langle h(X,Y), \xi\rangle \\ &= \langle A_\xi X, X\rangle\langle A_\xi Y, Y\rangle - \langle A_\xi X, Y\rangle\langle A_\xi X, Y\rangle.\end{aligned}$$

そこで、X, Yを Mの接ベクトル空間の正規直交基底にすると、Mの断面曲率 Kは

$$K = \langle R(X,Y)Y, X\rangle = \det A_\xi$$

となり、Gauss 曲率に一致する。Kは Mの Riemann 計量だけから定まる。

定義 2.3.3 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+1}$を n 次元 Riemann 部分多様体とする。$x \in M$をとる。単位法ベクトル$\xi \in T_x^\perp M$に対して、シェイプ作用素 $A_\xi : T_xM \to T_xM$の固有値を Mの x におけるξに関する**主曲率**と呼ぶ。n 個の主曲率の積を Mの x におけるξに関する **Gauss-Kronecker 曲率**と呼び、$G(x,\xi)$ で表す。$G(x,\xi) = \det A_\xi$で定義してもよい。

注意 2.3.4 定義 2.3.3において、$T_x^\perp M$は 1 次元だから、単位法ベクトルξのとり方には二通りある。ξの代りに$-\xi$をとると、$A_{-\xi} = -A_\xi$となるので、

$$G(x,-\xi) = \det A_{-\xi} = \det(-A_\xi) = (-1)^n \det A_\xi = (-1)^n G(x,\xi).$$

よって、Mが偶数次元のとき、Gauss-Kronecker 曲率 $G(x,\xi)$ は単位法ベクトルξのとり方に依存しない。Mが奇数次元のとき、単位法ベクトルを-1 倍すると対応する Gauss-Kronecker 曲率も-1 倍になる。

主曲率は Mの挿入ιに依存するが、Mが偶数次元のとき、Gauss-Kronecker 曲率は Mの Riemann 計量だけから定まることが以下のようにわかる。$\det A_\xi$は 2 次小行列式の多項式で表され、$\det A_\xi$の 2 次小行列式は注意 2.3.2で示したように Mの断面曲率になる。したがって、Mの Riemann 計量だけから定まる。

定義 2.3.5 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$を n 次元 Riemann 部分多様体とする。$x \in M$をとる。単位法ベクトル$\xi \in T_x^\perp M$に対して、シェイプ作用素 $A_\xi : T_xM \to T_xM$の固有値を Mの x におけるξに関する**主曲率**と呼ぶ。n 個の主曲率の積を Mの x におけるξに関する **Lipschitz-Killing 曲率**と呼び、$G(x,\xi)$ で表す。$G(x,\xi) = \det A_\xi$で定義してもよい。

第 3 章　Chern-Lashof の定理

3.1　Riemann 多様体上の積分

補題 3.1.1 Vを有限次元実ベクトル空間とする。このとき $V^* \otimes V^*$の元 A と Vから V^*への線形写像αは

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

によって一対一に対応する。この対応によって $V^* \otimes V^*$と、Vから V^*への線形写像全体の成すベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対応する $V^* \otimes V^*$の元 A が対称になっていて、さらに、0 でない $x \in V$に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき A は V上の内積になる。

証明　$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対して

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

で定まる A は二重線形になり、$V^* \otimes V^*$の元になる。

逆に、$A \in V^* \otimes V^*$に対して、上の等式で定まるαは $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元になる。

定め方より、この対応は一対一になり、$V^* \otimes V^*$と $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。

Aが対称になっていて、0 でない $x \in V$に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき、$A(x, x) > 0$ となり、A は V上の内積になる。

命題 3.1.2 Vを内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に補題 3.1.1によって対応する $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元をαで表す。$\wedge^p V^*$は自然に $(\wedge^p V)^*$と同一視され、$\alpha : V \to V^*$ が誘導する線形写像

$$\alpha^{(p,0)} : \wedge^p V \to \wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$$

に対応する $(\wedge^p V)^* \otimes (\wedge^p V)^*$の元は、$\wedge^p V$上の内積になる。

証明　まず、$\wedge^p V^*$と $(\wedge^p V)^*$を同一視する対応を述べておく。$\wedge^p V^*$の元ϕと $(\wedge^p V)^*$の元Φは

$$\phi(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \qquad (v_1, \ldots, v_p \in V)$$

によって対応している。

$\alpha^{(p,0)}$に対応する$(\wedge^p V)^* \otimes (\wedge^p V)^*$の元を$A$で表すと、$V$の元$u_1, \ldots, u_p$と$v_1, \ldots, v_p$に対して、

$$\begin{aligned}
& A(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \;& (\alpha^{(p,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \;& (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \;& (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \;& \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \alpha(u_{\sigma(p)}))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \;& \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}))(v_1) \cdots (\alpha(u_{\sigma(p)}))(v_p) \\
= \;& \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\langle u_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle u_{\sigma(p)}, v_p \rangle \\
= \;& \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}.
\end{aligned}$$

そこで、$u_1, \ldots, u_n$をVの正規直交基底とすると、

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は$\wedge^p V$の基底になる。さらに、上の計算より、$1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$と$1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$をとると

$$A(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}$$

が成り立つ。したがって、Aは$\wedge^p V$上の内積になり、上の基底はこの内積に関する正規直交基底になる。

注意 3.1.3 以後、特に断わらない限り、内積$\langle\ ,\ \rangle$を持つ有限次元実ベクトル空間Vの外積代数$\wedge^p V$の内積は命題3.1.2で示したAを考えることとし、Aも$\langle\ ,\ \rangle$で表すことにする。また、これらの内積から定まるノルムは$|\quad|$で表す。すなわち、$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$。

系 3.1.4 命題3.1.2の条件のもとで、Vの元$u_1, \ldots, u_p$と$v_1, \ldots, v_p$に対して、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$$

が成り立つ。さらに、Vの正規直交基底$u_1, \ldots, u_n$をとると、

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は$\wedge^p V$の正規直交基底になる。

注意 3.1.5 Vの元u_1, u_2のなす角をθとおくと

$$\langle u_1, u_2 \rangle = |u_1||u_2| \cos\theta$$

となる。上の系 3.1.4より、

$$|u_1 \wedge u_2|^2 = |u_1|^2|u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2 = |u_1|^2|u_2|^2 - |u_1|^2|u_2|^2 \cos^2\theta = |u_1|^2|u_2|^2 \sin^2\theta$$

となるので、$|u_1 \wedge u_2| = |u_1||u_2|\sin\theta$は、$u_1$と u_2の張る平行四辺形の面積になる。このように$\wedge^2 V$の内積によって、V内の平行四辺形の面積を求めることができる。3 個以上の元の外積の長さについても同様である。

補題 3.1.6 Vと Wをともに内積を持つ n 次元実ベクトル空間とし、$F : V \to W$を線形写像とする。Vの基底 $v_1, \ldots, v_n$をとり、

$$JF = \frac{|F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

とおくと、JFは基底 $v_1, \ldots, v_n$のとり方に依存しない。

証明 $v'_1, \ldots, v'_n$を Vの基底とする。基底 $v_1, \ldots, v_n$との間の変換行列を (a_{ij}) で表す。すなわち、

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n &= \det(a_{ij}) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \\ F(v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n) &= \det(a_{ij}) F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|F(v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n)|}{|v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})||F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|\det(a_{ij})||v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \\ &= \frac{|F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}. \end{aligned}$$

定義 3.1.7 集合 Xの部分集合全体 2^X上で定義された $[0, \infty]$ に値を持つ関数μが次の条件を満たすとき、μを X上の**測度**と呼ぶ。

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) Xの部分集合の可算族 $\{A_i\}$ と $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$を満たす $A \in 2^X$に対して

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定義 3.1.8 μを集合 X上の測度とする。Xの部分集合 A に対して、

$$\mu(T) = \mu(T - A) + \mu(T \cap A)$$

が任意の $T \in 2^X$について成り立つとき、A を Xのμ**可測部分集合**という。

定義 3.1.9 fを測度μを持つ集合 Xの部分集合 S上で定義された $[-\infty,\infty]$ に値を持つ関数とする。さらに$\mu(X-S)=0$ を仮定する。$[-\infty,\infty]$ の任意の開集合 Oに対して $f^{-1}(O)$ が Xのμ可測部分集合になるとき、fをμ**可測関数**と呼ぶ。

注意 3.1.10 以上の概念を使って集合上の測度に関する積分論を $\mathbf{R}^n$における Lebesgue 積分論と同様に展開することができ、Lebesgue の収束定理や Fubini の定理等が成り立つ。

定義 3.1.11 位相空間 Xの開集合全体が生成するσ集合族の元を **Borel 集合**と呼ぶ。μを X上の測度とする。Xの Borel 集合がすべてμ可測になり、任意の $A\subset X$に対して Borel 集合 Bが存在し、$A\subset B$と$\mu(A)=\mu(B)$ を満たすとき、μを **Borel 正則測度**と呼ぶ。

定義 3.1.12 Xを局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X上の Borel 正則測度μが、任意のコンパクト集合 $K\subset X$に対して$\mu(K)<\infty$ を満たすとき、μを **Radon 測度**と呼ぶ。

定理 3.1.13 (Riesz の表現定理) Xを局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X上の台がコンパクトになる実数値連続関数の全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す。$\mathcal{K}(X)$ 上の実数値線形汎関数 $L:\mathcal{K}(X)\longrightarrow\mathbf{R}$ が、

(1) $f\geq 0$ となる $f\in\mathcal{K}(X)$ に対して $L(f)\geq 0$

(2) コンパクト集合 $K\subset X$に対して

$$\sup\{L(f)\mid f\in\mathcal{K}(X),\ |f|\leq 1,\ \mathrm{supp}f\subset K\}<\infty$$

を満たすとき、Radon 測度μが X上に存在し、

$$L(f)=\int_X f d\mu \qquad (f\in\mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。

注意 3.1.14 この講義では多様体は可算開基を持つ C^∞級多様体のみ考察の対象にしていて、可算開基を持つ多様体は可分になるので、ここでの多様体は定理 3.1.13の仮定を満たしている。

定義 3.1.15 (M,g) を Riemann 多様体とする。Mの局所座標系 $(U;x_1,\ldots,x_n)$ をとる。各 $x\in U$に対して$\wedge^n T_x(M)$ に Riemann 計量から自然に定まる内積を入れておく。$\mathrm{supp}f\subset U$ となる $f\in\mathcal{K}(M)$ に対して

$$L(f)=\int_U f(x_1,\ldots,x_n)\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right|dx_1\cdots dx_n$$

によって $L(f)$ を定める。右辺は Euclid 空間における Lebesgue 積分である。被積分関数はコンパクトな台を持つ連続関数だから、Riemann 積分に一致している。この値 $L(f)$ は

積分の変数変換の公式から、局所座標系のとり方に依存しないことがわかる。さらに一つの局所座標近傍に台が含まれない $\mathcal{K}(M)$ の元に対しては、単位の分割を使うことによって $L : \mathcal{K}(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ を定義することができる。これも単位の分割のとり方に依存しないことがわかる。さらに L は定理 3.1.13の仮定を満たすので、Radon 測度μが M上に存在し、

$$L(f) = \int_M f d\mu \qquad (f \in \mathcal{K}(M))$$

が成り立つ。この測度μを Mの **Riemann 測度**と呼ぶ。今後 Riemann 多様体上の測度は Riemann 測度のみを考えることにする。μを$\mu_{(M,g)}$と記したり、Riemann 計量がわかっているときはμ_Mと記したりする。$\mathrm{vol}(M) = \mu_M(M)$ と表し、$\mathrm{vol}(M)$ を Mの**体積**と呼ぶ。通常 Mの次元が 1 のときは、体積を**長さ**と呼び、Mの次元が 2 のときは、体積を**面積**と呼ぶ。

注意 3.1.16 n 次元多様体上のコンパクトな台を持つ n 次連続微分形式の積分の定義をするためには、多様体に向きがついていることが必要になるが、Riemann 多様体上のコンパクトな台を持つ連続関数の積分を定義するためには、多様体の向きは必要ない。

命題 3.1.17 Mを Riemann 多様体とし、$(U; x_1, \ldots, x_n)$ を Mの局所座標近傍とする。U上定義されたμ_M可測関数ϕが、μ_M可積分であるかまたは$\phi \geq 0$ であるとき、

$$\int_U \phi d\mu_M = \int_U \phi(x_1, \ldots, x_n) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

が成り立つ。

定義 3.1.18 $f : M \longrightarrow N$を多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。$x \in M$に対して、$df_x : T_x(M) \longrightarrow T_{f(x)}(N)$ が全射になるとき、x を fの**正則点**と呼ぶ。Mの正則点ではない点を**特異点**と呼ぶ。$y \in N$に対して、$f(x) = y$となる fの特異点 x が存在するとき、y を fの**特異値**と呼ぶ。Nの特異値ではない点を**正則値**と呼ぶ。

定理 3.1.19 (Sard の定理) Uを $\mathbf{R}^n$内の開集合とし、$f : U \to \mathbf{R}^p$を C^∞級写像とする。fの特異点の全体を Cで表し、$\mathbf{R}^p$の Lebesgue 測度をμで表すと、$\mu(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定理 3.1.20 $f : M \longrightarrow N$を Riemann 多様体 Mから Riemann 多様体 Nへの C^∞級写像とする。fの特異点の全体を Cで表すと、$\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

証明 Mと Nは可算開基を持っているので、Mと Nの可算開被覆 $\{U_i\}$ と $\{V_i\}$ を、各 i について

(1) U_iは Mの局所座標近傍に含まれる、

(2) $\bar{V}_i$はコンパクトで、Nの局所座標近傍に含まれる、

(3) $f(U_i) \subset V_i$を満たす

が成り立つようにとることができる。$C_i = C \cap U_i$とおいて、$\bar{V}_i$を含むNの局所座標近傍を$(V_i'; x_1, \ldots, x_p)$で表す。$V_i' \subset \mathbf{R}^p$とみなし、$\mathbf{R}^p$の Lebesgue 測度を$\mu$と書くことにすると、定理 3.1.19より、$\mu(f(C_i)) = 0$ が成り立つ。

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

はV_i'上の連続関数になり、$\bar{V}_i (\subset V_i')$ はコンパクトだから

$$A = \sup_{\bar{V}_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

が存在する。したがって、命題 3.1.17より、

$$0 \leq \mu_N(f(C_i)) \leq A\mu(f(C_i)) = 0$$

となり、$\mu_N(f(C_i)) = 0$。これより、

$$0 \leq \mu_N(f(C)) \leq \sum_i \mu_N(f(C_i)) = 0,$$

つまり、$\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定義 3.1.21 $f : M \longrightarrow N$をn次元 Riemann 多様体Mからn次元 Riemann 多様体NへのC^∞級写像とする。$x \in M$に対して補題 3.1.6のJを使って、$Jf(x) = Jdf_x$とおく。

定理 3.1.22 (余積公式) $f : M \longrightarrow N$をn次元 Riemann 多様体Mからn次元 Riemann 多様体NへのC^∞級写像とし、ϕをM上のμ_M可測関数とする。このとき、Nの元yに対して $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x)$ を対応させる関数はN上のμ_N可測関数になる。さらに、ϕJfがM上μ_M可積分であるか、または$\phi \geq 0$のとき、

$$\int_N \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

証明 JfはM上の連続関数になるので、

$$O = \{x \in M \mid Jf(x) \neq 0\}$$

はMの開集合になる。したがって、Oはμ_M可測集合になり、

$$\int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x) = \int_O \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。各 $x \in O$に対して、逆関数定理より x の局所座標近傍 U_xが存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f : U_x \to f(U_x)$ は微分同型写像になる。そこで、f自身が Euclid 空間の開集合から Euclid 空間の開集合への微分同型写像になっている場合に、まず定理の公式を証明する。

Mと Nがともに $\mathbf{R}^n$の開集合になっていて、$f : M \to N$が微分同型写像になっているとする。$x_1, \ldots, x_n$を $M \subset \mathbf{R}^n$の座標とし、$y_1, \ldots, y_n$を $N \subset \mathbf{R}^n$の座標とする。ϕは M上の可測関数だから、

$$\phi \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f$$

も M上の可測になる。さらに、fは微分同型写像だから、

$$y \mapsto \phi(f^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N$$

は N上の可測関数になり、命題 3.1.17と積分の変数変換の公式を使うと

$$\begin{aligned}
\int_M \phi J f d\mu_M &= \int_M \phi \frac{\left| df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right|} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_M \phi \left| df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right| dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_M \phi \left| \det\left(\frac{\partial y_i \circ f}{\partial x_j}\right) \right| \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right| dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_N \phi \circ f^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right| dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int_N \phi \circ f^{-1} d\mu_N
\end{aligned}$$

を得る。これで fが Euclid 空間の開集合から Euclid 空間の開集合への微分同型写像になっている場合に、定理の証明ができた。

一般の場合にもどる。各 $x \in O$に対して、x の局所座標近傍 U_xが存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f : U_x \to f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合から Euclid 空間の開集合への微分同型写像とみなすことができる。そこで、このような開集合を Oの各点でとると、$\{U_x\}_{x \in O}$ は Oの開被覆になる。Mは可算開基を持つので、Oも可算開基を持つ。したがって Oの開被覆 $\{U_x\}_{x \in O}$から可算個 $\{U_k\}$ をとり、$\{U_k\}$ が Oの開被覆になるようにできる。$\{U_k\}$ に付随する単位の分割 $\{\psi_k\}$ をとる。fの U_kへの制限を

$$f_k : U_k \to V_k = f(U_k)$$

で表すことにして、すでに示したことを$\psi_k \phi$に適用すると、

$$y \mapsto (\psi_k \phi)(f_k^{-1}(y))$$

は V_k上のμ_N可測関数になり、

$$\int_{V_k}(\psi_k\phi)(f_k^{-1}(y))d\mu_{V_k}(y)=\int_{U_k}\psi_k\phi Jfd\mu_{U_k}.$$

よって

$$y\mapsto\sum_k(\psi_k\phi)(f_k^{-1}(y))$$

は N上のμ_N可測関数になる。$\{\psi_k\}$ は単位の分割なので、

$$\sum_k(\psi_k\phi)(f_k^{-1}(y))=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\phi(x)$$

となる。これより

$$y\mapsto\sum_{x\in f^{-1}(y)}\phi(x)$$

は N上のμ_N可測関数になる。ϕJfが M上μ_M可積分のときは Lebesgue の有界収束定理を使い、$\phi\geq 0$ のときは Lebesgue の単調収束定理を使うと、

$$\begin{aligned}\int_M\phi Jfd\mu_M &= \sum_k\int_{U_k}\psi_k\phi Jfd\mu_{U_k}\\ &= \sum_k\int_{V_k}(\psi_k\phi)(f_k^{-1}(y))d\mu_{V_k}(y)\\ &= \int_N\left(\sum_k(\psi_k\phi)(f_k^{-1}(y))\right)d\mu_N(y)\\ &= \int_N\left(\sum_{x\in f^{-1}(y)}\phi(x)\right)d\mu_N(y)\end{aligned}$$

となり、

$$\int_M\phi Jfd\mu_M=\int_N\left(\sum_{x\in f^{-1}(y)}\phi(x)\right)d\mu_N(y)$$

を得る。

注意 3.1.23 定理 3.1.22において、写像 fが微分同型写像のときは、余積公式は積分の変数変換の公式に他ならない。

3.2 Γ関数

単位球面の体積はこの節で定義するΓ関数を使って表示することができる。次の節以降で Euclid 空間内の Riemann 部分多様体の全曲率 (定義 3.3.2) は Lipschitz-Killing 曲率 (定義 2.3.5) を単位球面の体積で割ることによって定義されるので、全曲率の性質を詳しく調べる上でΓ関数のいくつかの性質が必要になる。その準備として、この節ではΓ関数を定義しその性質を調べておく。

定義 3.2.1 $\Gamma(z)$ を

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (z > 0)$$

によって定める。$\Gamma(z)$ をΓ**関数**と呼ぶ。

補題 3.2.2 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (z > 0)$

証明 $z > 0$ のとき、

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_o^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

となるので、$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ が成り立つ。

命題 3.2.3 自然数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

が成り立つ。ただし、$0! = 1$ とする。

証明

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-1} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

より、$\Gamma(1) = 1$。補題 3.2.2より、$z > 0$ と自然数 n に対して

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)$$

となり、さらに$\Gamma(1) = 1$ より

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

を得る。

補題 3.2.4

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \qquad (z > 0)$$

証明 $\Gamma(z)$ の定義の積分変数を $t = s^2$と変数変換すると、

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-z^2} s^{2z-2} 2s ds = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2s-1} ds.$$

命題 3.2.5

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \qquad (p, q > 0)$$

証明　補題3.2.4より、

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2p-1}du$$
$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2q-1}dv$$

より

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u^2-v^2}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv.$$

そこで、$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$と変数変換すると、

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta rdrd\theta \\ &= 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta \\ &= \Gamma(p+q)2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

を得る。

系 3.2.6 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

証明　命題3.2.5において $p = q = 1/2$ とし、$\Gamma(1) = 1$ を使うと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\int_0^{\pi/2}d\theta = \pi.$$

よって、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

命題 3.2.7

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

証明　補題3.2.4より、

$$\Gamma(p_i) = 2\int_0^\infty e^{-u_i^2}u_i^{2p_i-1}du_i$$

だから、

$$\begin{aligned}&\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n) \\ =\ & 2^n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}u_1^{2p_1-1}\cdots u_n^{2p_n-1}du_1\cdots du_n.\end{aligned}$$

ここで、

$$\phi : (0,\infty) \times (S^{n-1} \cap (0,\infty)^n) \to (0,\infty)^n \,;(r,\xi) \mapsto r\xi$$

によってϕを定めると、ϕは微分同型写像になる。$J\phi(r,\xi) = r^{n-1}$となるので、余積公式より、

$$\begin{aligned}
& \Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n) \\
= \;& 2^n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}\cap(0,\infty)^n} e^{-r^2} r^{2(p_1+\cdots+p_n)-n} \xi_1^{2p_1-1}\cdots\xi_n^{2p_n-1} r^{n-1} d\mu_{S^{n-1}}(\xi) dr \\
= \;& 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p_1+\cdots+p_n)-1} dr 2^{n-1} \int_{S^{n-1}\cap(0,\infty)^n} \xi_1^{2p_1-1}\cdots\xi_n^{2p_n-1} d\mu_{S^{n-1}}(\xi) \\
= \;& \Gamma(p_1+\cdots+p_n) 2^{n-1} \int_{S^{n-1}\cap(0,\infty)^n} \xi_1^{2p_1-1}\cdots\xi_n^{2p_n-1} d\mu_{S^{n-1}}(\xi).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)} = 2^{n-1} \int_{S^{n-1}\cap(0,\infty)^n} \xi_1^{2p_1-1}\cdots\xi_n^{2p_n-1} d\mu_{S^{n-1}}(\xi).$$

特に $p_1 = \cdots = p_n = 1/2$ とおくと、

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2^{n-1}\frac{\mathrm{vol}(S^{n-1})}{2^n} = \frac{\mathrm{vol}(S^{n-1})}{2}.$$

よって、

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

を得る。

3.3 全曲率

定義 3.3.1 $\iota : M \to \tilde{M}$を多様体 Mから Riemann 多様体$\tilde{M}$への挿入とする。$x \in M$と$\xi \in T_x^\perp M$をとる。$X \in T_xM$に対して $c(0) = x,\ c'(0) = X$となる Mの曲線をとり、$c(t)$に沿った初期条件$\xi(0) = \xi$の平行法ベクトル場$\xi(t)$ をとる。$\xi(t)$ を $T^\perp M$の曲線とみると、速度ベクトル$\xi'(0)$ は曲線 $c(t)$ のとり方に依存しないことがわかる。$\xi'(0) \in T_\xi(T^\perp M)$ を $X \in T_xM$の**水平持ち上げ**と呼び、X^*で表す。定め方より、$d\pi_\xi X^* = X$となり、

$$T_xM \to T_\xi(T^\perp M)\,; X \mapsto X^*$$

は単射線形写像になる。

$$\mathcal{H}_\xi = \{X^* \mid X \in T_xM\}$$

とおき、$\mathcal{H}_\xi$をξにおける**水平部分空間**と呼ぶ。$d\pi_\xi : \mathcal{H}_\xi \to T_xM$は線形同型になる。

$$\mathcal{V}_\xi = \mathrm{Ker}(d\pi_\xi) \subset T_\xi(T^\perp M)$$

とおき、$\mathcal{V}_\xi$をξにおける**垂直部分空間**と呼ぶ。$\mathcal{V}_\xi$は自然に$T_x^\perp M$と同一視することができ、$T_\xi(T^\perp M) = \mathcal{H}_\xi + \mathcal{V}_\xi$は直和分解になる。そこで、$\mathcal{H}_\xi$には$d\pi_\xi : \mathcal{H}_\xi \to T_x M$によって$T_x M$の計量を引き戻し、$\mathcal{V}_\xi$には$T_x^\perp M$との同一視から定まる計量を入れ、$\mathcal{H}_\xi$と$\mathcal{V}_\xi$が直交するように$T_\xi(T^\perp M)$全体に計量を定める。これによって、$T^\perp M$に Riemann 計量が定まる。各$x \in M$に対して、

$$U_x^\perp M = \{u \in T_x^\perp M \mid |u| = 1\}$$

とおき、

$$U^\perp M = \bigcup_{x \in M} U_x^\perp M$$

で$U^\perp M$を定める。$\pi : T^\perp M \to M$の$U^\perp M$への制限もπで表すことにすると、$\pi : U^\perp M \to M$は球面束になる。上で定めた$T^\perp M$上の Riemann 計量は$U^\perp M$上の Riemann 計量を誘導する。今後$U^\perp M$はこの Riemann 計量を入れて考える。

定義 3.3.2 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト$n$次元多様体$M$から Euclid 空間への挿入とする。$M$の Lipschitz-Killing 曲率の絶対値の$U^\perp M$上の積分

$$\tau(M, \iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{U^\perp M} |\det A_\xi| d\mu_{U^\perp M}(\xi)$$

をMの**全曲率**と呼ぶ。

例 3.3.3 $\mathbf{R}^2$内の曲線$c(s)$の曲率を$\kappa(s)$とすると、2.3の最初に見たように、単位法ベクトル場$e_2(s)$に関するシェイプ作用素は、接ベクトルを$\kappa(s)$倍する線形写像になり、曲線の一点での単位法ベクトルは$e_2(s)$と$-e_2(s)$の二つある。さらに、$e_2(s)$は平行法ベクトル場だから、$\pi : U^\perp c \to c$は局所等長的な二重被覆写像になり、

$$\tau(c) = \frac{2}{\mathrm{vol}(S^1)} \int_c |\kappa(s)| ds = \frac{1}{\pi} \int_c |\kappa(s)| ds.$$

よって、通常の平面曲線の全曲率をπで割った値になっている。

例 3.3.4 $c(s)$を$\mathbf{R}^{1+r}$内の曲線とし、sを弧長パラメータとする。$e_1(s) = c'(s)$とおくと、$c(s)$の曲率$\kappa(s)$は$e_1'(s)$の長さとして定義される。cの第二基本形式をhで表すと、

$$e_1'(s) = \tilde{\nabla}_{e_1(s)} e_1(s) = h(e_1(s), e_1(s)).$$

よって、$\kappa(s) = |h(e_1(s), e_1(s))|$となる。他方、$\xi \in U^\perp c$に対して、

$$\langle h(e_1(s), e_1(s)), \xi \rangle = \langle A_\xi(e_1), e_1 \rangle$$

だから、

$$|\det A_\xi| = |\langle h(e_1(s), e_1(s)), \xi \rangle|$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}
\tau(c) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^r)}\int_{U^{\perp}c}|\det A_\xi|d\mu_{U^{\perp}c}(\xi) \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^r)}\int_c\int_{U^{\perp}_{c(s)}c}|\det A_\xi|d\mu_{U^{\perp}_{c(s)}c}(\xi)ds \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^r)}\int_c\int_{U^{\perp}_{c(s)}c}|\langle h(e_1(s),e_1(s)),\xi\rangle|d\mu_{U^{\perp}_{c(s)}c}(\xi)ds.
\end{aligned}$$

そこで、

$$\int_{U^{\perp}_{c(s)}c}|\langle h(e_1(s),e_1(s)),\xi\rangle|d\mu_{U^{\perp}_{c(s)}c}(\xi)$$

を計算するために、$\int_{S^{r-1}}|\xi^r|d\mu_{S^{r-1}}(\xi)$ を計算しておく。$p=(0,\ldots,0,1)\in S^{r-1}$とおいて

$$\phi : S^{r-2}\times(-\pi/2,\pi/2)\to S^{r-1}-\{\pm p\}\ ;(u,\theta)\mapsto(\cos\theta u,\sin\theta)$$

によってϕを定めると、ϕは微分同型写像になる。$J\phi(u,\theta)=\cos^{r-2}\theta$となるので、余積公式より、

$$\begin{aligned}
\int_{S^{r-1}}|\xi^r|d\mu_{S^{r-1}}(\xi) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{vol}(S^{r-2})|\sin\theta|\cos^{r-2}\theta d\theta \\
&= \mathrm{vol}(S^{r-2})2\int_0^{\pi/2}\cos^{r-2}\theta\sin\theta d\theta.
\end{aligned}$$

ここで、命題 3.2.7より

$$\mathrm{vol}(S^{r-2})=\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{r-1}}{\Gamma(\frac{r-1}{2})}$$

が成り立つ。また、Γ関数の満たす公式 (命題 3.2.5)

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

において、$p=\dfrac{r-1}{2},\ q=1$ とおくと、

$$2\int_0^{\pi/2}\cos^{r-2}\theta\sin\theta d\theta=\frac{\Gamma(\frac{r-1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{r+1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{r-1}{2})}{\Gamma(\frac{r+1}{2})}.$$

よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(S^{r-2})2\int_0^{\pi/2}\cos^{r-2}\theta\sin\theta d\theta. &= \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{r-1}}{\Gamma(\frac{r-1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{r-1}{2})}{\Gamma(\frac{r+1}{2})} \\
&= \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{r-1}}{\Gamma(\frac{r+1}{2})} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})^2}\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{r+1}}{\Gamma(\frac{r+1}{2})} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{vol}(S^r).
\end{aligned}$$

以上の計算より、

$$\begin{aligned}
&\int_{U^\perp_{c(s)}c} |\langle h(e_1(s), e_1(s)), \xi\rangle| d\mu_{U^\perp_{c(s)}c}(\xi) \\
= \ & \frac{1}{\pi}\mathrm{vol}(S^r)|h(e_1(s), e_1(s))| \\
= \ & \frac{1}{\pi}\mathrm{vol}(S^r)\kappa(s).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\tau(c) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^r)}\int_c\int_{U^\perp_{c(s)}c} |\langle h(e_1(s), e_1(s)), \xi\rangle| d\mu_{U^\perp_{c(s)}c}(\xi)ds \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^r)}\int_c \frac{1}{\pi}\mathrm{vol}(S^r)\kappa(s)ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_c \kappa(s)ds.
\end{aligned}$$

定理 3.3.5 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。$x \in M$に対して $T^\perp_x M \subset \mathbf{R}^{n+r}$とみなすと、$\xi \in U^\perp_x M$は$\xi \in S^{n+r-1}$とみなすことができる。これによって

$$\nu : U^\perp M \to S^{n+r-1}\ ; \xi \mapsto \xi$$

を定めると、νは C^∞級写像になる。νを挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$の **Gauss 写像**と呼ぶ。このとき、

$$\mathrm{Ker}(d\nu)_\xi = \{X^* \mid X \in \mathrm{Ker}A_\xi\}$$

となり、$\dim\mathrm{Ker}(d\nu)_\xi = \dim\mathrm{Ker}A_\xi$が成り立つ。さらに、$J\nu(\xi) = |\det A_\xi|$ となり、

$$\begin{aligned}
\tau(M, \iota) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}\int_{S^{n+r-1}} \#(\nu^{-1}(u))d\mu_{S^{n+r-1}}(u) \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}\int_{S^{n+r-1}} \#\{x \in M \mid u \perp T_x M\}d\mu_{S^{n+r-1}}(u)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 C^∞級写像$\nu : U^\perp M \to S^{n+r-1}$に余積公式 (定理 3.1.22) を適用するため、νの微分を計算する。$x \in M,\ \xi \in U^\perp_x M$をとる。$e_1, \ldots, e_n$を$T_x M$の正規直交基底とし、$\xi_1, \ldots, \xi_r = \xi$を$T^\perp_x M$の正規直交基底とする。このとき、定義 3.3.1より、$e_1^*, \ldots, e_n^*, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1}$は$T_\xi(U^\perp M)$の正規直交基底になる。$1 \le s \le r-1$ に対して

$$\begin{aligned}
d\nu_\xi(\xi_s) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu(\cos t\xi + \sin t\xi_s) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\cos t\xi + \sin t\xi_s) \\
&= \xi_s.
\end{aligned}$$

$1 \leq i \leq n$ に対して、$c(0) = x,\ c'(0) = X \in T_x M$ となる M の曲線 $c(t)$ をとり、$c(t)$ に沿った初期条件 $\xi(0) = \xi$ の平行法ベクトル場 $\xi(t)$ をとる。定義 3.3.1 より $X^* = \xi'(0)$ となるので、

$$\begin{aligned} d\nu_\xi(X^*) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu(\xi(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \xi(t) \\ &= \tilde{\nabla}_X \xi(t) \\ &= -A_\xi(X). \quad \text{(Weingarten の公式 (定義 2.1.7))} \end{aligned}$$

以上より、

$$\mathrm{Ker}(d\nu)_\xi = \{X^* \mid X \in \mathrm{Ker} A_\xi\}$$

となり、$\dim \mathrm{Ker}(d\nu)_\xi = \dim \mathrm{Ker} A_\xi$ も得る。さらに、定義 3.1.21 と、補題 3.1.6 より、

$$\begin{aligned} J\nu(\xi) &= \frac{|d\nu_\xi(e_1^*) \wedge \cdots \wedge d\nu_\xi(e_n^*) \wedge d\nu_\xi(\xi_1) \wedge \cdots \wedge d\nu_\xi(\xi_{r-1})|}{|e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{r-1}|} \\ &= |A_\xi(e_1) \wedge \cdots \wedge A_\xi(e_n) \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{r-1}| \\ &= |A_\xi(e_1) \wedge \cdots \wedge A_\xi(e_n)| \\ &= |(\det A_\xi) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n| \\ &= |\det A_\xi|. \end{aligned}$$

C^∞ 級写像 $\nu : U^\perp M \to S^{n+r-1}$ と S^{n+r-1} 上の関数 $\phi = 1$ に余積公式を適用すると、

$$\int_{S^{n+r-1}} \#(\nu^{-1}(u)) d\mu_{S^{n+r-1}}(u) = \int_{U^\perp M} |\det A_\xi| d\mu_{U^\perp M}(\xi)$$

を得る。したがって、

$$\tau(M, \iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{S^{n+r-1}} \#(\nu^{-1}(u)) d\mu_{S^{n+r-1}}(u)$$

が成り立つ。

$u \in S^{n+r-1}$ に対して

$$\#(\nu^{-1}(u)) = \#\{x \in M \mid u \perp T_x M\}$$

となるので、

$$\tau(M, \iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{S^{n+r-1}} \#\{x \in M \mid u \perp T_x M\} d\mu_{S^{n+r-1}}(u)$$

も成り立つ。

命題 3.3.6 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$ をコンパクト n 次元多様体 M から Euclid 空間への挿入とする。各 $u \in S^{n+r-1}$ に対して

$$f_u(x) = \langle x, u \rangle \qquad (x \in M)$$

によって M 上の C^∞ 級関数 $f_u : M \to \mathbf{R}$ を定める。$x \in M$ が f_u の特異点であるための必要十分条件は、$u \perp T_xM$ となることである。さらに $x \in M$ が f_u の特異点のとき、f_u の Hessian $(\nabla^2 f_u)_x$ は

$$(\nabla^2 f_u)_x(X, Y) = \langle A_u X, Y\rangle \qquad (X, Y \in T_xM)$$

を満たす。

証明　$x \in M$ をとる。$X \in T_xM$ に対して $c(0) = x,\ c'(0) = X$ となる M の曲線 $c(t)$ をとると、

$$\begin{aligned}(df_u)_x(X) &= (df_u)_x(c'(0)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_u(c(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle c(t), u\rangle \\ &= \langle X, u\rangle.\end{aligned}$$

よって、$x \in M$ が f_u の特異点であるための必要十分条件は、$u \perp T_xM$ となることである。

次ぎに f_u の特異点における Hessian を計算する。$x \in M$ を f_u の特異点とする。このとき、上で示したように、$u \in T_x^\perp M$ となる。さらに、$Y \in T_xM$ をとり、Y を x のまわりのベクトル場 $\tilde{Y}$ に拡張すると、

$$\tilde{Y} f_u = df_u(\tilde{Y}) = \langle \tilde{Y}, u\rangle.$$

$X \in T_xM$ に対して、Weingarten の公式 (定義 2.1.7)、$u \in T_x^\perp M$ と補題 2.1.6を使うと、

$$X\tilde{Y} f_u = X\langle \tilde{Y}, u\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, u\rangle = \langle h(X, Y), u\rangle = \langle A_u X, Y\rangle.$$

よって、f_u の特異点 $x \in M$ に対して

$$(\nabla^2 f_u)_x(X, Y) = \langle A_u X, Y\rangle \qquad (X, Y \in T_xM)$$

が成り立つ。

系 3.3.7 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$ をコンパクト n 次元多様体 M から Euclid 空間への挿入とする。このとき、$\tau(M, \iota) \geq 2$ が成り立つ。

証明　M はコンパクトだから、すべての $u \in S^{n+r-1}$ に対して、f_u は特異点を二点以上を持つ。命題 3.3.6より、$x \in M$ が f_u の特異点であるための必要十分条件は、$u \perp T_xM$ となることである。これより、すべての $u \in S^{n+r-1}$ に対して、

$$\#\{x \in M \mid u \perp T_xM\} = \#\{x \in M \mid x \text{ は } f_u \text{の特異点}\} \geq 2$$

となり、

$$\tau(M, \iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{S^{n+r-1}} \#\{x \in M \mid u \perp T_xM\} d\mu_{S^{n+r-1}}(u) \geq 2$$

を得る。

注意 3.3.8 系 3.3.7において、Mを $\mathbf{R}^{1+r}$内の閉曲線とすると、$\tau(c) \geq 2$ となる。例 3.3.4 より、

$$\tau(c) = \frac{1}{\pi}\int_c \kappa(s)ds$$

だから、

$$\int_c \kappa(s)ds \geq 2\pi$$

となり、これは閉曲線に関する Fenchel の定理に他ならない。

命題 3.3.9 コンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$が

$$\iota(x) = (\iota^1(x), \ldots, \iota^{n+r}(x)) \qquad (x \in M)$$

で与えられているとする。もう一つの挿入$\tilde{\iota} : M \to \mathbf{R}^{n+r'}$ $(r < r')$ が

$$\tilde{\iota}(x) = (\iota^1(x), \ldots, \iota^{n+r}(x), 0, \ldots, 0) \qquad (x \in M)$$

で与えられているとき、$\tau(M, \iota) = \tau(M, \tilde{\iota})$ が成り立つ。

証明 $r' = r + 1$ の場合が証明できれば、一般の場合は、それから帰納的に示すことができるので、以下では $r' = r + 1$ の場合に命題を証明する。

挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$に対して、定理 3.3.5で定めた Gauss 写像を$\nu : U^\perp M \to S^{n+r-1}$で表し、挿入$\tilde{\iota} : M \to \mathbf{R}^{n+r+1}$の Gauss 写像を$\tilde{\nu} : \tilde{U}^\perp M \to S^{n+r}$で表す。$u \in S^{n+r-1}$と $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ に対して、$(\cos\theta u, \sin\theta) \in S^{n+r}$となり、$(\cos\theta u, \sin\theta) \perp T_xM$となるための必要十分条件は、$u \perp T_xM$となることである。よって、

$$\#\{x \in M \mid (\cos\theta u, \sin\theta) \perp T_xM\} = \#\{x \in M \mid u \perp T_xM\}$$

が成り立つ。$p = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{n+r}$とおいて

$$\phi : S^{n+r-1} \times (-\pi/2, \pi/2) \to S^{n+r} - \{\pm p\}\ ; (u, \theta) \mapsto (\cos\theta u, \sin\theta)$$

によってϕを定めると、ϕは微分同型写像になる。$J\phi(u, \theta) = \cos^{n+r-1}\theta$となるので、余積公式と定理 3.3.5より、

$$\begin{aligned}
&\tau(M, \tilde{\iota}) \\
=\ & \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r})}\int_{S^{n+r}} \#\{x \in M \mid (\cos\theta u, \sin\theta) \perp T_xM\} d\mu_{S^{n+r}}(\cos\theta u, \sin\theta) \\
=\ & \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r})}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{S^{n+r-1}} \#\{x \in M \mid u \perp T_xM\} d\mu_{S^{n+r-1}}(u)\cos^{n+r-1}\theta d\theta \\
=\ & \frac{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}{\mathrm{vol}(S^{n+r})}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n+r-1}\theta d\theta \tau(M, \iota).
\end{aligned}$$

ここで、命題 3.2.7より

$$\mathrm{vol}(S^{n+r-1}) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n+r}}{\Gamma(\frac{n+r}{2})}, \quad \mathrm{vol}(S^{n+r}) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n+r+1}}{\Gamma(\frac{n+r+1}{2})}$$

が成り立つ。また、公式 (命題 3.2.5)

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$$

において、$p = \dfrac{n+r}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$とおくと、

$$\frac{\Gamma(\frac{n+r}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+r+1}{2})} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{n+r-1}\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+r-1}\theta d\theta.$$

以上より、

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}{\mathrm{vol}(S^{n+r})} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+r-1}\theta d\theta \\ = \ & \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n+r}\Gamma(\frac{n+r+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+r}{2})2\Gamma(\frac{1}{2})^{n+r+1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+r}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+r+1}{2})} \\ = \ & 1. \end{aligned}$$

したがって、$\tau(M, \tilde{\iota}) = \tau(M, \iota)$ を得る。

3.4 Chern-Lashof の定理

この節では、以下の論文の結果のいくつかを紹介する。

S. S. Chern and R. K. Lashof, On th total curvature of immersed manifolds, Amer. J. Math. **79** (1957), 306 – 318.

S. S. Chern and R. K. Lashof, On th total curvature of immersed manifolds, II, Mich. Math. J. **5** (1958), 5 – 12.

定理 3.4.1 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。このとき、任意の体 Fについて

$$\tau(M, \iota) \geq \sum_{q=0}^{n} b_q(M; F)$$

が成り立つ。

証明 系 3.3.7の証明中の記号を使うことにする。ほとんどすべての $u \in S^{n+r-1}$について、$f_u : M \to \mathbf{R}$ が非退化特異点のみを持つことを示せば、定理 1.4.4より、

$$\#\{x \in M \mid x \text{ は } f_u \text{の特異点}\} = \sum_{q=0}^{n} C_q \geq \sum_{q=0}^{n} b_q(M; F)$$

となり、

$$\begin{aligned}\tau(M,\iota) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}\int_{S^{n+r-1}} \#\{x\in M \mid x \text{ は } f_u\text{の特異点 }\}d\mu_{S^{n+r-1}}(u) \\ &\geq \sum_{q=0}^{n} b_q(M;F)\end{aligned}$$

を得る。

そこで、次の補題を示せば、定理の証明が完結する。

補題 3.4.2 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。このとき、測度 0 の集合を除く $u \in S^{n+r-1}$について、$f_u : M \to \mathbf{R}$ は非退化特異点のみを持つ。

証明 $x \in M$を f_uの特異点とすると、命題 3.3.6より、$u \in T_x^\perp M$となり、

$$(\nabla^2 f_u)_x(X,Y) = \langle A_u X, Y\rangle \qquad (X, Y \in T_x M)$$

が成り立つ。これより、f_uの特異点 x が非退化になるための必要十分条件は、$A_u : T_xM \to T_xM$が非退化になることである。すなわち、定理 3.3.5より、

$$0 \neq |\det A_u| = J\nu(u).$$

さらに、これは $u \in U_x^\perp M$がνの正則点になることと同値になる。よって、$u \in S^{n+r-1}$がνの正則値ならば、f_uのすべての特異点は非退化になる。Sard の定理 (定理 3.1.20) より、測度 0 の集合を除く $u \in S^{n+r-1}$について、u はνの正則値になり、$f_u : M \to \mathbf{R}$ が非退化特異点のみを持つ。

定理 3.4.3 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。このとき、$\tau(M,\iota) < 3$ が成り立つならば、Mは n 次元球面に位相同型になる。

証明 定理 3.3.5と系 3.3.7の証明中に示したことより、

$$\tau(M,\iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}\int_{U^\perp M} \#\{x\in M \mid x \text{ は } f_u\text{の特異点 }\}d\mu_{S^{n+r-1}}(u)$$

が成り立つ。また、

$$2 \leq \#\{x \in M \mid x \text{ は } f_u\text{の特異点 }\}$$

も成り立つので、S^{n+r-1}の部分集合

$$\{u \in S^{n+r-1} \mid 2 = \#\{x\in M \mid x \text{ は } f_u\text{の特異点 }\}\}$$

の測度が 0 ならば、$\tau(M,\iota) < 3$ という仮定に矛盾する。さらに、補題 3.4.2より、ある $u \in S^{n+r-1}$が存在し、f_uは二つの非退化特異点のみ持つ。したがって、Reeb の定理 (定理 1.5.1) より、Mは n 次元球面と位相同型になる。

定理 3.4.4 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。このとき、$\tau(M,\iota)=2$ が成り立つならば、Mはある $n+1$ 次元平面 $\mathbf{R}^{n+1}$に含まれる。

証明　$r=1$ のときは、Mは $\mathbf{R}^{n+1}$に含まれることになり、補題の結論が成り立つので、$r\geq 2$ の場合を考えればよい。まず、Mが $\mathbf{R}^{n+r}$の超平面に含まれることを示す。そのために、Mが $\mathbf{R}^{n+r}$の超平面に含まれないと仮定して、矛盾を導く。

系 3.3.7より$\tau(M,\iota)\geq 2$ だから、すべての$\xi\in U^{\perp}M$について $|\det A_\xi|=0$ となることはない。そこで、$|\det A_{\bar\xi}|\neq 0$ となる$\bar\xi\in U^{\perp}M$をとることができる。$\bar p=\pi(\bar\xi)\in M$とおく、すなわち、$\bar\xi\in U^{\perp}_{\bar p}M\subset T^{\perp}_{\bar p}M$。$\bar p$の近傍で定義された正規直交法ベクトル場$\xi_1,\ldots,\xi_r$を$\xi_r(\bar p)=\bar\xi$を満たすようにとる。このとき、任意の$\xi\in U^{\perp}_{\bar p}M$は

$$\xi=\sum_{i=1}^{r}\xi^i\xi_i(\bar p)$$

と表すことができる。A_ξはξに関して線形だから、

$$A_\xi=\sum_{i=1}^{r}\xi^i A_{\xi(\bar p)}$$

となり、

$$\det A_\xi=\det\left(\sum_{i=1}^{r}\xi^i A_{\xi(\bar p)}\right)$$

が成り立つ。$r\geq 2$ だから

$$\xi(\theta)=\cos\theta\xi_r(\bar p)+\sin\theta\xi_{r-1}(\bar p)=\cos\theta\bar\xi+\sin\theta\xi_{r-1}(\bar p)$$

とおくことができる。このとき、$\xi(\theta)\in U^{\perp}_{\bar p}M$となり、

$$A_{\xi(\theta)}=\det\left(\cos\theta A_{\bar\xi}+\sin\theta A_{\xi_{r-1}(\bar p)}\right).$$

これを $f(\theta)$ とおくと、$f(\theta)$ は $\cos\theta$と $\sin\theta$の多項式になり、特に、θに関する実解析関数になる。$f(0)=\det A_{\bar\xi}\neq 0$ だから、$f(\theta)$ は恒等的に 0 にはならない。

H_θで$\bar p$をとおり$\nu(\theta)$ に直交する $\mathbf{R}^{n+r}$内の超平面とする。$\cap_\theta H_\theta$は$\bar p$をとおり$\xi_{r-1}(\bar p)$ と$\xi_r(\bar p)$の両方に直交する余次元 2 の平面になる。仮定より$\iota(M)\subset\cap_\theta H_\theta$となることはないので、ある $p_1\in M$が存在して$\iota(p_1)\notin\cap_\theta H_\theta$となる。他方 $\mathbf{R}^{n+r}=\cup_\theta H_\theta$だから、ある$\theta_1$が存在して$\iota(p_1)\in H_{\theta_1}$となる。$p_1$のとり方より、$H_\theta\neq H_{\theta_1}$となる H_θは$\iota(p_1)$ を含まない。仮定より$\iota(M)\subset H_{\theta_1}$となることはないので、ある $p_2\in M$が存在して$\iota(p_2)\notin H_{\theta_1}$となる。また $\mathbf{R}^{n+r}=\cup_\theta H_\theta$よりある$\theta_2$が存在して$\iota(p_2)\in H_{\theta_2}$となる。$\iota(p_2)\notin H_{\theta_1}$だから $H_{\theta_1}\neq H_{\theta_2}$となり、$\iota(p_1)\notin H_{\theta_2}$が成り立つ。$\iota(p_1)$ と$\iota(p_2)$ が超平面 H_θに関して反対側の点になるようなθであって、$f(\theta)\neq 0$ を満たすθをとり、θ_3としておく。このとき、$f_{\xi(\theta_3)}(p_1)<f_{\xi(\theta_3)}(\bar p)<f_{\xi(\theta_3)}(p_2)$ となるか、または、$f_{\xi(\theta_3)}(p_2)<f_{\xi(\theta_3)}(\bar p)<f_{\xi(\theta_3)}(p_1)$ となるので、必要なら番号を付け替え

ることにより $f_{\xi(\theta_3)}(p_1) < f_{\xi(\theta_3)}(\bar{p}) < f_{\xi(\theta_3)}(p_2)$ と仮定してよい。定理 3.3.5の証明中に示したことから、挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^{n+r}$の Gauss 写像

$$\nu : U^{\perp}M \to S^{n+r-1} \,; \xi \mapsto \xi$$

は $J\nu(\xi) = |A_\theta|$ を満たす。よって、

$$J\nu(\xi(\theta_3)) = |A_{\xi(\theta_3)}| = |f(\theta_3)| \neq 0.$$

逆写像定理より、$U^{\perp}M$における$\xi(\theta_3)$ のある開近傍 Wが存在して、Gauss 写像νは W上微分同型写像になる。Wを十分小さくとることによって、任意の $(p,\xi) \in W$に対して、$\iota(p_1)$と$\iota(p_2)$ が$\iota(p)$ をとおりξに直交する超平面の反対側になるようにすることができる。すなわち、任意の $(p,\xi) \in W$に対して、$f_\xi(p_1) < f_\xi(p) < f_\xi(p_2)$ が成り立つ。このとき、f_ξの Mにおける最大値は $f_\xi(p_2)$ 以上になり、特に最大値をとる点は p とは異なる。同様に f_ξの Mにおける最小値をとる点も p とは異なる。さらに、$\xi \in U_p^{\perp}M$だから、f_ξは三点以上の特異点を持つ。よって、S^{n+r-1}の開集合$\nu(W)$ の点ξに対して f_ξは三点以上の特異点を持つことになる。

他方、Mは$\tau(M,\iota) = 2$ を満たすので、定理 3.3.5とすべての$\xi \in S^{n+r-1}$に対して f_ξの特異点は二点以上になることから、ほとんどすべての$\xi \in S^{n+r-1}$に対して f_ξの特異点は二点になる。これは上で示したことに矛盾する。したがって、Mは $\mathbf{R}^{n+r}$の超平面に含まれる。

Mの超平面 $\mathbf{R}^{n+r-1} \subset \mathbf{R}^{n+r}$への挿入を$\iota'$で表すと、命題 3.3.9より、$\tau(M,\iota') = \tau(M,\iota) = 2$となる。これより、帰納的に Mが $\mathbf{R}^{n+r}$内の $n+1$ 次元平面に含まれることがわかる。

注意 3.4.5 定理 3.4.4において、$\tau(M,\iota) = 2$ を満たす Mはある $n+1$ 次元平面 $\mathbf{R}^{n+1}$内の凸超曲面になることが知られている。

定理 3.4.6 $\iota : M \to \mathbf{R}^{n+1}$をコンパクト n 次元多様体 Mから Euclid 空間への挿入とする。さらに、n は偶数で Mの各点 $x \in M$の Gauss-Kronecker 曲率 $G(x)$ が $G(x) \geq 0$ を満たすとき、Mの奇数次元の Betti 数は 0 になる。

証明 補題 3.4.2より、$u \in S^n$を $f_u : M \to \mathbf{R}$ が非退化特異点のみ持つようにとることができる。このとき、命題 3.3.6より、f_uの各特異点 $x \in M$において、

$$(\nabla^2 f_u)_x(X,Y) = \langle A_u X, Y \rangle \qquad (X, Y \in T_xM)$$

が成り立つ。よって、$A_u : T_xM \to T_xM$は非退化対称線形変換になる。仮定より、$G(x) = \det A_u \geq 0$ だから、$\det A_u > 0$ が成り立つ。これより、A_uの負の固有値の個数は偶数になり、f_uの特異点としての x の指数は偶数になる。以上より、f_uは偶数の指数の非退化特異点のみ持つことになり、系 1.4.8より、Mの奇数次元の Betti 数は 0 になる。

第 4 章　最小全曲率と凸超曲面

この章を書くにあたって、以下の文献を参考にした。
M. Berger, Geometry I, Springer 1987.
T. E. Cecil and P. J. Ryan, Tight and taut immersions of manifolds, Pitman 1985.
H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge University 1958.

4.1　最小全曲率

定義 4.1.1 Mをコンパクト多様体とする。M上の C^∞級関数 fの特異点がすべて非退化であるとき、fを **Morse 関数**と呼ぶ。系 1.1.11より fの特異点は孤立し、その全体は有限になる。そこで、Morse 関数 fの特異点の個数を $C(f)$ で表し、Mの **Morse 数** $\gamma(M)$ を

$$\gamma(M) = \min\{C(f) \mid f\text{は } M\text{上の Morse 関数 }\}$$

で定める。

補題 4.1.2 コンパクト多様体 Mと体 Fに対して

$$b(M;F) = \sum_{q\geq 0} b_q(M;F)$$

とおく。このとき、$b(M;F) \leq \gamma(M)$ が成り立つ。

証明　M上の Morse 関数 fに対して、fの指数 qの特異点の数を $C_q(f)$ で表す。Morse の不等式 (定理 1.4.4) より、

$$b(M;F) = \sum_{q\geq 0} b_q(M;F) \leq \sum_{q\geq 0} C_q(f) = C(f)$$

が成り立つ。これより $b(M;F) \leq \gamma(M)$ が成り立つ。

定理 4.1.3 コンパクト多様体 Mに対して

$$\gamma(M) = \inf\{\tau(M,\iota) \mid \iota : M \to \mathbf{R}^m\text{は挿入 }\}$$

が成り立つ。

証明 Whitney の定理より Mの Euclid 空間への挿入は存在するので、定理の等式の右辺の集合は空集合ではないことに注意しておく。

定理 3.4.1の証明と同様に、任意の挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^m$に対して

$$
\begin{aligned}
\tau(M,\iota) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{m-1})}\int_{S^{m-1}} C(f_u)d\mu_{S^{m-1}}(u) \\
&\geq \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{m-1})}\int_{S^{m-1}} \gamma(M)d\mu_{S^{m-1}}(u) \\
&= \gamma(M)
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$\gamma(M) \leq \tau(M,\iota).$$

次に Mの Euclid 空間への挿入 h_λ $(\lambda > 0)$ であって、

$$\gamma(M) = \lim_{\lambda\to\infty} \tau(M, h_\lambda)$$

を満たすものを構成する。$\iota : M \to \mathbf{R}^m$を挿入とし、$C(\phi) = \gamma(M)$ を満たす Mの Morse 関数ϕをとる。$\lambda > 0$ に対して

$$h_\lambda(x) = (\iota(x), \lambda\phi(x)) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{m+1} \qquad (x \in M)$$

によって C^∞級写像 $h_\lambda : M \to \mathbf{R}^{m+1}$を定める。定め方より、各 $x \in M$に対して

$$\mathrm{rank}(dh_\lambda)_x \geq \mathrm{rank} d\iota_x = \dim M$$

だから、$\mathrm{rank}(dh_\lambda)_x = \dim M$となり、$h_\lambda$も挿入になる。

$p = (0, 1) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{m+1}$とおくと、$x \in M$に対して

$$f_p(h_\lambda(x)) = \langle h_\lambda(x), p\rangle = \lambda\phi(x)$$

となる。ϕは M上の Morse 関数だから $f_p \circ h_\lambda$も M上の Morse 関数になり、定理 3.3.5と命題 3.3.6より、p は挿入 h_λの Gauss 写像の正則値になる。

単位ベクトルではない qに対しても f_qを考えることにする。$f_{\alpha q} = \alpha f_q$となるので、$f_{\alpha q}\circ h_\lambda$が M上の Morse 関数になることと、$f_q \circ h_\lambda$が M上の Morse 関数になることは同値になる。さらにこれらの特異点の数は一致する。$w \in \mathbf{R}^m$をとり、$q = w + p$ とおく。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $|w|^2 < \varepsilon$ならば、$f_q \circ h_1$は Mの Morse 関数になり、$C(f_q \circ h_1) = \gamma(M)$ となる。

$$f_q(h_\lambda(x)) = \langle h_\lambda(x), q\rangle = \langle \iota(x), w\rangle + \lambda\phi(x)$$

となるので、$w = \lambda u \in \mathbf{R}^m$とすると

$$f_q(h_\lambda(x)) = \langle \iota(x), \lambda u\rangle + \lambda\phi(x) = \lambda(\langle \iota(x), u\rangle + \phi(x)).$$

したがって、$|u|^2 < \varepsilon$のとき、すなわち、$|w|^2 < \lambda^2\varepsilon$のとき、$f_q \circ h_\lambda$は M上の Morse 関数になり、$C(f_q \circ h_\lambda) = \gamma(M)$ となる。

単位ベクトル $q=w+\beta p$ について $q'=w/\beta+p$ とおくと、$f_q\circ h_\lambda$と $f_{q'}\circ h_\lambda$は同じ特異点を持ち、特異点の非退化性も一致する。よって、$(|w|/\beta)^2<\lambda^2\varepsilon$のとき、$f_q\circ h_\lambda$は M上の Morse 関数になり、$C(f_q\circ h_\lambda)=\gamma(M)$ が成り立つ。qは単位ベクトルだから

$$1=|q|^2=|w+\beta p|^2=|w|^2+\beta^2$$

となり $|w|^2=1-\beta^2$。よって条件 $(|w|/\beta)^2<\lambda^2\varepsilon$は

$$\lambda^2\varepsilon>\frac{1-\beta^2}{\beta^2}=\frac{1}{\beta^2}-1,$$

すなわち、

$$\begin{aligned}&1+\lambda^2\varepsilon>\frac{1}{\beta^2}\\&\beta^2>(1+\lambda^2\varepsilon)^{-1}\\&|\beta|>(1+\lambda^2\varepsilon)^{-1/2}\end{aligned}$$

となる。そこで、$\alpha=(1+\lambda^2\varepsilon)^{-1/2}$して

$$W_\lambda=(\mathbf{R}^m\times[-\alpha,\alpha])\cap S^m$$

とおくと、$q\in S^m-W_\lambda$に対して $f_q\circ h_\lambda$は M上の Morse 関数になり、$C(f_q\circ h_\lambda)=\gamma(M)$ が成り立つ。ここで、全曲率を表す積分を分解して

$$\begin{aligned}\tau(M,h_\lambda)&=\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\int_{S^m}C(f_u\circ h_\lambda)d\mu_{S^m}(u)\\&=\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\int_{S^m-W_\lambda}C(f_u\circ h_\lambda)d\mu_{S^m}(u)+\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\int_{W_\lambda}C(f_u\circ h_\lambda)d\mu_{S^m}(u)\\&=\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\mathrm{vol}(S^m-W_\lambda)\gamma(M)+\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\int_{W_\lambda}C(f_u\circ h_\lambda)d\mu_{S^m}(u)\end{aligned}$$

とする。αの定め方より、$\lim_{\lambda\to\infty}\alpha=0$ だから、$W_\lambda=(\mathbf{R}^m\times[-\alpha,\alpha])\cap S^m$ は

$$W_0=(\mathbf{R}^m\times\{0\})\cap S^m=S^{m-1}$$

に近づく。これより

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathrm{vol}(S^m-W_\lambda)=\mathrm{vol}(S^m-S^{m-1})=\mathrm{vol}(S^m)$$

となるので

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)}\int_{S^m-W_\lambda}C(f_u\circ h_\lambda)d\mu_{S^m}(u)=\gamma(M)$$

が成り立つ。

そこで、

$$I_\lambda = \int_{W_\lambda} C(f_u \circ h_\lambda) d\mu_{S^m}(u)$$

とおいて、以下で $\lim_{\lambda \to \infty} I_\lambda = 0$ を証明する。

すべての $u \in S^m$ について $C(f_u \circ h_1) > 0$ だから、

$$0 \leq I_1 = \int_{W_1} C(f_u \circ h_1) d\mu_{S^m}(u) \leq \int_{S^m} C(f_u \circ h_1) d\mu_{S^m}(u) = \mathrm{vol}(S^m)\tau(M, h_1) < \infty.$$

よって $0 \leq I_1 < \infty$ となる。

I_λ の積分表示は W_λ 上の積分になっているが、これを $V = S^{m-1} \times [-\varepsilon^{-1/2}, \varepsilon^{1/2}]$ 上の積分として表す。S^m の元 $q = w + \beta p$ $(w \in \mathbf{R}^m)$ とする。$q \in W_\lambda$ となるための必要十分条件は、$|\beta| \leq \alpha$ である。$\alpha = (1 + \lambda^2 \varepsilon)^{-1/2}$ であり、$|w|^2 = 1 - \beta^2$ となるので、条件 $|\beta| \leq \alpha$ は、

$$\begin{aligned}
&|\beta|^2 \leq \frac{1}{1 + \lambda^2 \varepsilon} \\
&1 + \lambda^2 \varepsilon \leq \frac{1}{|\beta|^2} \\
&\lambda^2 \varepsilon \leq \frac{1}{|\beta|^2} - 1 = \frac{1 - |\beta|^2}{|\beta|^2} = \frac{|w|^2}{|\beta|^2} \\
&\frac{\lambda^2 \beta^2}{|w|^2} \leq \varepsilon^{-1} \\
&\left| \frac{\lambda \beta}{|w|} \right| \leq \varepsilon^{-1/2}
\end{aligned}$$

となる。そこで

$$w' = \frac{w}{|w|}, \quad \eta = \frac{\lambda \beta}{|w|}$$

とおいて、

$$q' = (w', \eta p)$$

とすると、$q \in W_\lambda$ となるための必要十分条件は、$q' \in V$ となることである。これより、C^∞ 級写像

$$F : W_\lambda \to V \; ; q = w + \beta p \mapsto q' = (w', \eta p)$$

を定める。すなわち、

$$F(w + \beta p) = \left(\frac{w}{|w|}, \frac{\lambda \beta}{|w|} p \right).$$

$F : W_\lambda \to V$ が微分同型写像になることを、まず示しておく。$(w', \eta) \in V$ に対して

$$\frac{w' + \frac{\eta}{\lambda} p}{\left| w' + \frac{\eta}{\lambda} p \right|} = \frac{w'}{\left| w' + \frac{\eta}{\lambda} p \right|} + \frac{\eta}{\lambda \left| w' + \frac{\eta}{\lambda} p \right|} p$$

を対応させる。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\eta}{\lambda\left|w'+\frac{\eta}{\lambda}p\right|}\right|^2 &= \frac{1}{\lambda^2\left|\frac{w'}{\eta}+\frac{1}{\lambda}p\right|^2}=\frac{1}{\lambda^2\left(\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)}=\frac{1}{\frac{\lambda^2}{\eta^2}+1}\\ &\le \frac{1}{\lambda^2\varepsilon+1}=\alpha^2.\end{aligned}$$

したがって、この対応はVからW_λへのC^∞級写像を与える。さらに簡単な計算から、この写像はFの逆写像になることがわかり、Fは微分同型写像になる。このFによってW_λ上の積分をV上の積分に変換するため、JFを計算しておく。$q=w+\beta p\in W_\lambda$に対して、S^{m-1}の曲線$c(t)$を$c(0)=w/|w|\in S^{m-1}$となるようにとる。$|w|c(t)+\beta p$はqを通るW_λの曲線になり、

$$F(|w|c(t)+\beta p)=c(t)+\frac{\lambda\beta}{|w|}p.$$

両辺を$t=0$で微分すると

$$|w|dF(c'(0))=c'(0)\quad \text{すなわち、}\quad dF(c'(0))=\frac{c'(0)}{|w|}$$

を得る。次に

$$\cos\theta=|w|,\quad \sin\theta=\beta$$

となるθをとり、W_λのqを通る曲線

$$d(t)=\cos(\theta+t)\frac{w}{|w|}+\sin(\theta+t)p$$

を考える。この曲線の速度ベクトルは、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}d(t)=-\sin\theta\frac{w}{|w|}+\cos\theta p=-\beta\frac{w}{|w|}+|w|p.$$

次に

$$F\left(\cos(\theta+t)\frac{w}{|w|}+\sin(\theta+t)p\right)=\frac{w}{|w|}+\frac{\lambda\sin(\theta+t)}{\cos(\theta+t)}p$$

となるので、

$$dF\left(-\beta\frac{w}{|w|}+|w|p\right)=\frac{\lambda}{\cos^2\theta}p=\frac{\lambda}{|w|^2}p$$

を得る。以上より、

$$JF=\frac{1}{|w|^{m-1}}\cdot\frac{\lambda}{|w|^2}=\frac{\lambda}{|w|^{m+1}}.$$

よって

$$J(F^{-1})=\frac{|w|^{m+1}}{\lambda}.$$

$q = w + \beta p \in W_\lambda$に対して、

$$q' = w' + \eta p = \frac{w}{|w|} + \frac{\lambda\beta}{|w|}p$$

とおく。さらに $q' = w' + \eta p \in V$に対して

$$w_\lambda(q') = \frac{w'}{\left|w' + \frac{\eta}{\lambda}p\right|}$$

とおくと

$$J(F^{-1})(q') = \frac{|w_\lambda(q')|^{m+1}}{\lambda}$$

となる。

$$\begin{aligned} f_q \circ h_\lambda(x) &= \langle w, \iota(x)\rangle + \lambda\beta\phi(x) \\ &= |w|\left(\langle w', \iota(x)\rangle + \frac{\lambda\beta}{|w|}\phi(x)\right) \\ &= |w|(\langle w', \iota(x)\rangle + \eta\phi(x)) \\ &= |w| f_{q'} \circ h_1(x) \end{aligned}$$

となるので、

$$C(f_q \circ h_\lambda) = C(f_{q'} \circ h_1)$$

が成り立つ。余積公式より

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int_{W_\lambda} C(f_q \circ h_\lambda) d\mu_{S^m}(q) \\ &= \int_V C(f_{q'} \circ h_1) J(F^{-1}) d\mu_{S^{m-1}} d\eta(q') \\ &= \int_V C(f_{q'} \circ h_1) \frac{|w_\lambda(q')|^{m+1}}{\lambda} d\mu_{S^{m-1}} d\eta(q') \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_V C(f_{q'} \circ h_1)|w_1(q')|^{m+1} \cdot \frac{|w_\lambda(q')|^{m+1}}{|w_1(q')|^{m+1}} d\mu_{S^{m-1}} d\eta(q'). \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{|w_\lambda(q')|}{|w_1(q')|} = \frac{|w' + \eta p|}{\left|w' + \frac{\eta}{\lambda}p\right|} \le |w' + \eta p| = (|w' + \eta p|^2)^{1/2} = (1 + \eta^2)^{1/2} \le \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

だから、

$$\begin{aligned} I_\lambda &\le \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{(m+1)/2} \int_V C(f_{q'} \circ h_1)|w_1(q')|^{m+1} d\mu_{S^{m-1}} d\eta(q') \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{(m+1)/2} I_1 \end{aligned}$$

となり、

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda = 0$$

を得る。以上で定理の証明が完結する。

定義 4.1.4 コンパクト多様体 Mの挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^m$が$\tau(M,\iota) = \gamma(M)$ を満たすとき、**最小全曲率**を持つという。

命題 4.1.5 コンパクト多様体 Mの挿入$\iota : M \to \mathbf{R}^m$が最小全曲率を持つための必要十分条件は、すべての Morse 関数 f_u $(u \in S^{m-1})$ が $C(f_u) = \gamma(M)$ を満たすことである。

証明 すべての Morse 関数 f_u $(u \in S^{m-1})$ が $C(f_u) = \gamma(M)$ を満たすとき、

$$\tau(M,\iota) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{m-1})} \int_{S^{m-1}} C(f_u) d\mu_{S^{m-1}}(u) = \gamma(M)$$

となり、$\iota : M \to \mathbf{R}^m$は最小曲率を持つ。

逆にある Morse 関数 f_v $(v \in S^{m-1})$ が $C(f_v) > \gamma(M)$ を満たすとすると、vのある近傍 U においても $u \in U$に対して $C(f_u) > \gamma(M)$ を満たす。すべての Morse 関数 f_u $(u \in S^{m-1})$ は $C(f_u) \geq \gamma(M)$ を満たすので、$\tau(M,\iota) > \gamma(M)$ となり、$\iota : M \to \mathbf{R}^m$は最小曲率を持たない。

4.2 凸集合

この節以降、$\mathbf{R}^n$内の部分集合 A の補集合を A^cで表すことにする。$y \in \mathbf{R}^n$と $r > 0$ に対して

$$\begin{aligned} U(y;r) &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x-y| < r\} \\ B(y;r) &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x-y| \leq r\} \end{aligned}$$

とおく。$\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合 A に対して

$$d(x,A) = \inf\{|x-y| \mid y \in A\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

によって点 x と部分集合 A の距離 $d(x,A)$ を定め、$r > 0$ に対して

$$U(A;r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x,A) < r\}$$

によって A の近傍 $U(A;r)$ を定める。

定義 4.2.1 $\mathbf{R}^n$の二点 x, yを結ぶ線分を$\overline{xy}$で表す。すなわち、

$$\overline{xy} = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1\}.$$

$\mathbf{R}^n$の空でない部分集合 Cが次の条件を満たすとき、Cを**凸集合**と呼ぶ。任意の $x, y \in C$に対して$\overline{xy} \subset C$が成り立つ。

例 4.2.2 $\mathbf{R}^n$内のアファイン部分空間は凸集合になる。$y \in \mathbf{R}^n$と $r > 0$ に対して $U(y;r)$ と $B(y;r)$ も凸集合になる。

命題 4.2.3 C_iを $\mathbf{R}^{n_i}$内の凸集合とすると、$C_1 \times C_2$は $\mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} = \mathbf{R}^{n_1+n_2}$ 内の凸集合になる。

証明 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2$と

$$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1$$

に対して C_1, C_2の凸性より

$$\lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \in C_1 \times C_2$$

となる。したがって、$C_1 \times C_2$も凸になる。

命題 4.2.4 kを 2 以上の整数とする。$\mathbf{R}^n$の空でない部分集合 Cが凸集合になるための必要十分条件は、任意の $x_1, \ldots, x_k \in C$と

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

に対して

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$$

が Cに含まれることである。

証明 kに関する帰納法で証明する。$k = 2$ のときは、凸集合の定義に一致する。$k = m$ のときに命題の主張が成り立つと仮定して、$m + 1$ の場合にも主張が成り立つことを示す。

任意の $x_1, \ldots, x_{m+1} \in C$と

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_{m+1} = 1$$

に対して

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1}$$

が Cに含まれると仮定する。特に$\lambda_3 = \cdots = \lambda_{m+1} = 0$ とすると、Cが凸になることがわかる。

逆に、Cが凸であると仮定する。任意の $x_1, \ldots, x_{m+1} \in C$と

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_{m+1} = 1$$

に対して、$\lambda_{m+1} = 1$ のときは、

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1} = x_{m+1} \in C.$$

そうでないときは、$\lambda_{m+1} < 1$ となり、

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1 - \lambda_{m+1} > 0.$$

これより、

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1} \\ = \ & (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m} x_m\right) + \lambda_{m+1} x_{m+1} \end{aligned}$$

と書き直すことができる。帰納法の仮定より、

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m} x_m \in C$$

となり、さらに、Cが凸であることから

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in C$$

を得る。

命題 4.2.5 fを $\mathbf{R}^m$から $\mathbf{R}^n$へのアファイン写像とする。$x, y \in \mathbf{R}^m$に対して、$f(\overline{xy}) = \overline{f(x)f(y)}$が成り立つ。さらに、$\mathbf{R}^m$の凸集合の fによる像も凸集合になる。また、$\mathbf{R}^n$の凸集合の fによる逆像も凸集合になる。

証明 アファイン写像 fを線形写像 L と定ベクトル $a \in \mathbf{R}^n$によって

$$f(x) = Lx + a \qquad (x \in \mathbf{R}^m)$$

で表す。$x, y \in \mathbf{R}^m$と

$$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1$$

に対して、

$$\lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda(Lx + a) + \mu(Ly + a) = L(\lambda x + \mu y) + a = f(\lambda x + \mu y)$$

となるので、$f(\overline{xy}) = \overline{f(X)f(y)}$が成り立つ。これより、$\mathbf{R}^m$内の凸集合 Cの任意の点 x, yに対して

$$\overline{f(X)f(y)} = f(\overline{xy}) \subset f(C)$$

となり、$f(C)$ も凸集合になる。

次に $\mathbf{R}^n$の凸集合 Cに対して、$x, y \in f^{-1}(C)$ をとる。$f(x), f(y) \in C$となり、

$$f(\overline{xy}) = \overline{f(x)f(y)} \subset C.$$

したがって、$\overline{xy} \subset f^{-1}(C)$ となり、$f^{-1}(C)$ も凸集合になる。

系 4.2.6 C_1, C_2を $\mathbf{R}^n$内の凸集合とし、実数λ, μをとると、

$$\lambda C_1 + \mu C_2 = \{\lambda x + \mu y \mid x \in C_1,\ y \in C_2\}$$

も凸集合になる。

証明 命題 4.2.3より、$C_1 \times C_2$は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$内の凸集合になる。

$$f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n\ ;\ (x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$$

によって写像 fを定めると、fは線形写像になり、特にアファイン写像になる。命題 4.2.5 より、$f(C_1 \times C_2) = \lambda C_1 + \mu C_2$も凸集合になる。

定義 4.2.7 C_1, C_2を $\mathbf{R}^n$内の凸集合とし、実数λ, μをとる。系 4.2.6で定めた$\lambda C_1 + \mu C_2$を C_1 と C_2の **Minkowski 和**と呼ぶ。

命題 4.2.8 $\{C_i\}_{i \in I}$を $\mathbf{R}^n$の凸集合の族とする。このとき、$\displaystyle\bigcap_{i \in I} C_i$ も $\mathbf{R}^n$の凸集合になる。

証明 $x, y \in \cap_{i \in I} C_i$とすると、各 $i \in I$について $x, y \in C_i$となり、$\overline{xy} \subset C_i$。よって $\overline{xy} \subset \cap_{i \in I} C_i$が成り立ち、$\cap_{i \in I} C_i$も凸集合になる。

定理 4.2.9 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とすると、$r > 0$ に対して $U(C; r)$ も凸集合になる。

証明 $x, y \in U(C; r)$ とすると、

$$d(x, C) < r, \quad d(y, C) < r$$

となるので、ある $x', y' \in C$が存在し

$$|x - x'| < r, \quad |y - y'| < r$$

を満たす。$\lambda + \mu = 1$ を満たす$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$ をとる。Cが凸であることより、$\lambda x' + \mu y' \in C$ となる。さらに、

$$\begin{aligned} |(\lambda x + \mu y) - (\lambda x' + \mu y')| &\leq |\lambda x - \lambda x'| + |\mu y - \mu y'| \\ &= \lambda |x - y| + \mu |y - y'| \\ &< r. \end{aligned}$$

これより、$\lambda x + \mu y \in U(C; r)$ となり、$\overline{xy} \subset U(C; r)$。したがって、$U(C; r)$ も凸集合になる。

系 4.2.10 $\mathbf{R}^n$内の凸集合の閉包は凸集合になる。

証明 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とする。Cの閉包$\bar{C}$は

$$\bar{C} = \bigcap_{r>0} U(C; r)$$

と表せるので、命題 4.2.8と定理 4.2.9より、$\bar{C}$も凸集合になる。

定理 4.2.11 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とし、その内部 C°も空ではないと仮定する。このとき、$x \in C$と $y \in C^\circ$に対して$\overline{xy} \cap \{x\}^c \subset C^\circ$が成り立つ。

証明 Cは凸だから、$\overline{xy} \subset C$はすぐにわかる。そこで、以下では x 以外の$\overline{xy}$の点は C°に含まれることを示す。

yは Cの内部 C°に含まれるので、ある $r > 0$ が存在し $U(y; r) \subset C$が成り立つ。$z \in \overline{xy} \cap \{x\}^c$とする。ある$\lambda \geq 0,\ \mu > 0$ が存在し、$\lambda + \mu = 1$ を満たし

$$z = \lambda x + \mu y$$

が成り立つ。そこで、$U(z; \mu r) \subset C$が成り立つことを示す。$z' \in U(z; \mu r)$ をとる。$|z' - z| < \mu r$ となるので、

$$|z' - (\lambda x + \mu y)| < \mu r.$$

両辺を$\mu > 0$ で割ると

$$\left| \frac{z' - \lambda x}{\mu} - y \right| < r.$$

これより、$(z' - \lambda x)/\mu \in U(y; r) \subset C$となる。よって、$(z' - \lambda x)/\mu \in C$となり、

$$z = \lambda x + \mu \frac{z' - \lambda x}{\mu} \in C.$$

つまり、$U(z; \mu r) \subset C$となり、$z \in C^\circ$。したがって、$\overline{xy} \cap \{x\}^c \subset C^\circ$が成り立つ。

系 4.2.12 $\mathbf{R}^n$内の凸集合 Cの内部が空でないならば、内部 C°も凸になる。

系 4.2.13 定理 4.2.11において、仮定の $x \in C$を $x \in \bar{C}$に置き換えても、同じ結論が成り立つ。

証明 $z \in \overline{xy} \cap \{x, y\}^c$が Cの内部 C°に含まれることを示せばよい。

x の近傍の点 z_1に対して z_1から出発し zを通って yの近傍の点 z_2にいたる線分を構成する。まず、

$$z = \frac{1}{|x - y|}(|y - z|x + |x - z|y)$$

に注意しておく。zが$\overline{z_1z_2}$上でこれと同じ比になるように z_2を定める。

$$\begin{aligned}
z_2 &= z_1+\frac{|x-y|}{|x-z|}(z-z_1) \\
&= z_1+\frac{|x-y|}{|x-z|}\left(\frac{1}{|x-y|}(|y-z|x+|x-z|y)-z_1\right) \\
&= z_1+\frac{1}{|x-z|}(|y-z|x+|x-z|y)-\frac{|x-y|}{|x-z|}z_1 \\
&= -\frac{|y-z|}{|x-z|}z_1+\frac{|y-z|}{|x-z|}x+y \\
&= y-\frac{|y-z|}{|x-z|}(z_1-x).
\end{aligned}$$

yは Cの内部に含まれているので、ある $r>0$ が存在し $U(y;r)\subset C^\circ$となる。そこで、z_1を

$$|z_1-x|<\frac{r|x-z|}{|y-z|}$$

を満たし、かつ、$z_1\in C$となるようにとる。$x\in\bar{C}$だから、このような z_1をとることができる。このとき、

$$|z_2-y|=\frac{|y-z|}{|x-z|}|z_1-x|<\frac{|y-z|}{|x-z|}\frac{r|x-z|}{|y-z|}=r$$

となるので、

$$z_2\in U(y;r)\subset C^\circ$$

が成り立つ。定理 4.2.11より、

$$z\in\overline{z_1z_2}\cap\{z_1\}^c\subset C^\circ$$

となり、zは C°に含まれる。

系 4.2.14 $\mathbf{R}^n$内の凸集合 Cの内部が空でないならば、$\overline{(C^\circ)}=\bar{C}$と $(\bar{C})^\circ=C^\circ$が成り立つ。

証明 $C^\circ\subset C$だから、$\overline{(C^\circ)}\subset\bar{C}$が成り立つ。以下で逆の包含関係を示す。$x\in\bar{C}$をとる。$x_1\in C^\circ$をとると、系 4.2.13より$\overline{xx_1}\cap\{x\}^c\subset C^\circ$となり、$x\in\overline{(C^\circ)}$が成り立つ。したがって、$\bar{C}\subset\overline{(C^\circ)}$となり、$\overline{(C^\circ)}=\bar{C}$を得る。

$C\subset\bar{C}$だから、$C^\circ\subset(\bar{C})^\circ$が成り立つ。以下で逆の包含関係を示す。$x\notin C^\circ$をとる。$x_1\in C^\circ$をとっておく。$x_1$から x への線分を少し延ばした点を yとすると、$x\in\overline{yx_1}\cap\{y\}^c$となる。もし、$y\in\bar{C}$ならば系 4.2.13より $x\in C^\circ$となり x のとり方に反する。よって $y\notin\bar{C}$となる。これより、x のどんな近傍にも$\bar{C}$に含まれない点がある。つまり、$x\notin(\bar{C})^\circ$となり、$(\bar{C})^\circ\subset C^\circ$が成り立つ。したがって、$C^\circ=(\bar{C})^\circ$を得る。

定義 4.2.15 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とする。

$$\max\{r \mid x_1, \ldots, x_{r+1} \in C,\ x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1 \text{は線形独立}\}$$

を凸集合 Cの**次元**と呼び、$\dim C$で表す。

補題 4.2.16 $\mathbf{R}^n$の元 $x_1, \ldots, x_{n+1}$を

$$x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1, x_{r+2} - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$$

が線形独立になるようにとる。このとき、任意の $x \in \mathbf{R}^n$に対して

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i = 1$$

を満たす$\chi_1, \ldots, \chi_{n+1}$が一意的に存在する。また、

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$$

と仮定すると、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$ が成り立つ。

証明　まず、

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

が $\mathbf{R}^{n+1}$の基底になることを示しておく。

$$\sum_{i=1}^{n+1} \chi_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

とすると、

$$\sum_{i=1}^{n+1} \chi_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i = 0.$$

よって

$$\chi_1 = -\sum_{i=2}^{n+1} \chi_i$$

となり、

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i x_i = \left(-\sum_{i=2}^{n+1} \chi_i\right) x_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \chi_i x_i = \sum_{i=2}^{n+1} \chi_i (x_i - x_1).$$

よって、$\chi_2 = \cdots = \chi_{n+1} = 0$ となり、$\chi_1 = 0$。以上より、$(*)$ は線形独立になり、$\mathbf{R}^{n+1}$の基底になる。

任意の $x \in \mathbf{R}^n$に対して、一意的に$\chi_1, \ldots, \chi_{n+1}$が存在し

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たす。すなわち、

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i = 1$$

となる。

次に

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$$

と仮定すると、

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

となり、$(*)$ が線形独立であることより、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$ が成り立つ。

定理 4.2.17 Cを $\mathbf{R}^n$内の r次元凸集合に対して、Cを含む r次元アファイン部分空間 $\mathcal{A}(C)$ が一意的に存在する。さらに、$\mathcal{A}(C)$ 内で Cは内部を持つ。

証明 $\dim C = r$とし、$x_1, \ldots, x_{r+1} \in C$を $x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1$が線形独立になるようにとる。さらに、

$$x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1, x_{r+2} - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$$

が $\mathbf{R}^n$の基底になるように $x_{r+2}, \ldots, x_{n+1}$をとる。このとき、補題 4.2.16より、$x \in C$に対して

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i = 1$$

となる$\chi_1, \ldots, \chi_{n+1}$が存在する。

以下で、$\chi_{r+2} = \cdots = \chi_{n+1} = 0$ となることを示す。$x_1, \ldots, x_{r+1}, x$ はすべて Cに含まれ、$\dim C = r$だから、凸集合の次元の定義から

$$x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1, x - x_1$$

は線形従属になる。よって、すべては 0 でない実数$\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}, \lambda$が存在し、

$$\lambda_2(x_2 - x_1) + \cdots + \lambda_{r+1}(x_{r+1} - x_1) + \lambda(x - x_1) = 0$$

となる。$x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1$は線形独立だから、$\lambda \neq 0$ であることに注意しておく。この等式に x の $x_1, \ldots, x_{n+1}$による表示を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_2(x_2 - x_1) + \cdots \lambda_{r+1}(x_{r+1} - x_1) + \lambda(x - x_1) \\ &= (\lambda(\chi_1 - 1) - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{r+1})x_1 \\ &\quad +(\lambda\chi_2 + \lambda_2)x_2 + \cdots + (\lambda\chi_{r+1} + \lambda_{r+1})x_{r+1} \\ &\quad +\lambda\chi_{r+2}x_{r+2} + \cdots + \lambda\chi_{n+1}x_{n+1}. \end{aligned}$$

ここで、これらの係数の和を考えると、

$$\begin{aligned}
&(\lambda(\chi_1-1)-\lambda_2-\cdots-\lambda_{r+1})+(\lambda\chi_2+\lambda_2)+\cdots+(\lambda\chi_{r+1}+\lambda_{r+1})\\
&+\lambda\chi_{r+2}+\cdots+\lambda\chi_{n+1}\\
=\ &\lambda(\chi_1+\cdots+\chi_{n+1}-1)\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

よって、補題 4.2.16より、

$$\lambda\chi_{r+2}=\cdots=\lambda\chi_{n+1}=0$$

となり、$\lambda\neq 0$ だから、$\chi_{r+2}=\cdots=\chi_{n+1}=0$ が成り立つ。
　以上より、任意の $x\in C$に対して

$$x=\sum_{i=1}^{r+1}\chi_i x_i,\qquad \sum_{i=1}^{r+1}\chi_i=1$$

となる$\chi_1,\ldots,\chi_{r+1}$が存在する。そこで、

$$\mathcal{A}(C)=\left\{\sum_{i=1}^{r+1}\chi_i x_i\ \middle|\ \sum_{i=1}^{r+1}\chi_i=1\right\}$$

とおくと、$\mathcal{A}(C)$ は r次元アファイン部分空間になり、Cを含む。
　Cを含む r次元アファイン部分空間の一意性を示す。もし、$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$が Cを含む異なる二つの r次元アファイン部分空間とすると、$\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$も Cを含み、次元は rよりも小さくなる。ところが、これは Cの次元が rであることに矛盾する。したがって、Cを含む r次元アファイン部分空間は一意である。
　最後に、$\mathcal{A}(C)$ 内で Cが内部を持つことを示す。命題 4.2.4より、

$$\left\{\sum_{i=1}^{r+1}\chi_i x_i\ \middle|\ \chi_i>0,\ \chi_1+\cdots+\chi_{r+1}=1\right\}$$

は Cに含まれ、$\mathcal{A}(C)$ の開集合になる。したがって、$\mathcal{A}(C)$ 内で Cは内部を持つ。

定義 4.2.18 $\mathbf{R}^n$内の凸集合 Cの $\mathcal{A}(C)$ における内部を Cの**相対内部**と呼び $C^{r\circ}$で表す。$\mathcal{A}(C)$ における境界を Cの**相対境界**と呼び$\partial^r C$で表す。

4.3 凸集合の位相

補題 4.3.1 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とする。Cの相対内部の点 p をとる。$\mathcal{A}(C)$ に平行な $\mathbf{R}^n$の部分ベクトル空間内の単位球面を Sで表す。各 $y\in S$に対して、p を出発する方向 yの半直線と Cとの共通部分は線分、または、半直線になる。その長さを$\sigma(y)$ で表すと、関数 $\sigma:S\to(0,\infty]$ は連続になる。

証明 $\dim C = n$ とし、$p = 0$ としても一般性は失われない。このとき、$\mathcal{A}(C) = \mathbf{R}^n$となる。各 $y \in S$に対して、0 を出発する方向 yの半直線を $l(y)$ で表すことにする。$l(y)$ は凸集合になるので、それと Cとの共通部分も凸集合になり、線分または半直線になる。0 はCの内部の点だから、ある $r > 0$ が存在し $B(0; r) \subset C^\circ$が成り立つ。σの連続性を$\sigma(y) < \infty$となる点 yと$\sigma(y) = \infty$ となる点 yに場合分けして示す。

$\sigma(y) < \infty$ のとき、$l(y)$ と Cの境界との共通部分は一点になるので、それを $f(y)$ で表す。

$$H(f(y), B(0; r)) = \cup\{\overline{f(y)x} \mid x \in B(0; r)\}$$

によって $H(f(y), B(0; r))$ を定める。$f(y) \in \bar{C}$だから、系 4.2.13より、$H(f(y), B(0; r)) \cap \{f(y)\}^c \subset C$が成り立つ。$z \in S$に対して、$l(z)$ と $H(f(y), B(0; r))$ との共通部分の長さを$\rho(z)$ で表すと、関数$\rho : S \to (0, \infty)$ は連続になり、$\rho \leq \sigma$が成り立つ。ρの連続性より、任意の$\varepsilon > 0$ に対してある$\delta_1 > 0$ が存在し、

$$|z - y| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |\rho(z) - \rho(y)| < \varepsilon.$$

ここで、$\rho(y) = \sigma(y)$ だから、$|z - y| < \delta_1$のとき、

$$-\varepsilon < \rho(z) - \rho(y) \leq \sigma(z) - \sigma(y).$$

次に $H(f(y), B(0; r))$ の境界の内で $f(y)$ を中心にした錐になっている部分を、$f(y)$ に関して点対称に写した錐を伸ばしたものの内部を Dとする。このとき、$D \cap C = \emptyset$ となる。なぜならば、$z \in D \cap C$とすると、$z_1 \in B(0; r)$ を $f(y) \in \overline{zz_1}$となるようにとることができ、定理 4.2.11より、$f(y) \in C^\circ$となり $f(y)$ が Cの境界の点であることに矛盾する。$\delta_2 > 0$ を十分小さくとると、$|z - y| < \delta_2$のとき $l(z)$ は Dと交わる。この半直線 $l(z)$ が Dに始めてぶつかる点までの距離を$\tau(z)$ で表すと、τは連続関数になり、$\sigma \leq \tau$が成り立つ。τの連続性より、ある$\delta_3 > 0$ が存在し、

$$|z - y| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad |\tau(z) - \tau(y)| < \varepsilon.$$

ここで、$\tau(y) = \sigma(y)$ だから、$|z - y| < \delta_3$のとき、

$$\varepsilon > \tau(z) - \tau(y) \geq \sigma(z) - \sigma(y).$$

以上より、$\delta = \max\{\delta_1, \delta_3\}$ とおくと、

$$|z - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(z) - \sigma(y)| < \varepsilon$$

となり、σは yにおいて連続になる。

$\sigma(y) = \infty$ の場合を考える。このとき、$l(y) \subset C$となる。

$$E = \cup\{\overline{z_1 z_2} \mid z_1 \in U(0; r),\ z_2 \in l(y)\}$$

とおくと、Cの凸性より $E \subset C$が成り立つ。Eの定め方より $E = U(l(y); r)$ が成り立つ。$z \in S$に対して、$l(z)$ と Eとの共通部分の長さを$\rho(z)$ で表すと、関数$\rho : S \to (0, \infty]$ は連続

になり、$\rho \le \sigma$が成り立つ。$\rho(y) = \sigma(y) = \infty$ だから、ρの連続性より、任意の $R > 0$ に対してある$\delta > 0$ が存在し、

$$|z - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad R < \rho(z).$$

$|z - y| < \delta$のとき、

$$R < \rho(z) \le \sigma(z)$$

となり、σは yで連続になる。

定理 4.3.2 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とする。このとき、$C^{r\circ}$は$\mathcal{A}(C)$ と位相同型になる。さらにCがコンパクトのときは、Cの相対境界は$\mathcal{A}(C)$ 内の単位球面に位相同型になる。

証明 $\dim C = n$ とし、0 が Cの内部に含まれると仮定しても一般性は失われない。このとき、$\mathcal{A}(C) = \mathbf{R}^n$となる。補題 4.3.1の記号をそのまま使うことにする。連続関数 $\sigma : S \to (0, \infty]$ を使って、写像 $f : C^\circ \to \mathbf{R}^n$を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x & (x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) = \infty) \\ \dfrac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - |x|} \cdot x & (x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty) \end{cases}$$

によって定める。以下で $f : C^\circ \to \mathbf{R}^n$が位相同型写像になることを示す。

$$\{x \in \mathbf{C}^\infty \mid x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty\}$$

は $\mathbf{R}^n$内の開集合になり、ここでは fは連続写像の合成だから連続になる。

0 における fの連続性を示す。任意の$\varepsilon > 0$ をとる。$B(0;\varepsilon) \subset C^\circ$となる場合を考えれば十分である。$\sigma(z/|z|) = \infty$ となる $z \in U(0;\varepsilon) \cap \{0\}^c$については

$$|f(z) - f(0)| = |z| < \varepsilon.$$

$\sigma(z/|z|) < \infty$ となる $z \in U(0;\varepsilon) \cap \{0\}^c$については、$B(0;\varepsilon) \subset C^\circ$だから $|z| < \sigma(z/|z|)$ となり、

$$|f(z) - f(0)| = \frac{\sigma(z/|z|)}{\sigma(z/|z|) - |z|}|z| < |z| < \varepsilon.$$

以上より fは 0 において連続になる。

$\sigma(x/|x|) = \infty$ となる $x \neq 0$ における fの連続性を示す。σの $x/|x|$ における連続性より、任意の$\varepsilon > 0$ に対して Sにおける $x/|x|$ の開近傍 Uが存在し、

$$y \in U \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon}\left(|x| + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + |x| + \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(y)$$

となる。

$$V = \{ty \mid y \in U,\ t > 0\}$$

とおくと V は $\mathbf{R}^n$ における x の開近傍になる。そこで、

$$U(x;\delta) \subset V, \qquad 0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, |x|\right\}$$

となるδをとる。このとき、$z \in U(x;\delta)$ に対して $z \neq 0$ となり、$\sigma(z/|z|) = \infty$ のときは、

$$|f(z) - f(x)| = |z - x| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\sigma(z/|z|) < \infty$ のときは、

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(x)| &= |f(z) - z + z - x| \\
&\leq |f(z) - z| + |z - x| \\
&= \left|\frac{\sigma(z/|z|)}{\sigma(z/|z|) - |z|}z - z\right| + |z - x| \\
&= \frac{\sigma(z/|z|) - (\sigma(z/|z|) - |z|)}{\sigma(z/|z|) - |z|}|z| + |z - x| \\
&= \frac{|z|^2}{\sigma(z/|z|) - |z|} + |z - x|.
\end{aligned}$$

ここで、$U(x;\delta) \subset V$だから、$z/|z| \in U$となり

$$\sigma(z/|z|) - |z| > \frac{2}{\varepsilon}\left(|x| + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + |x| + \frac{\varepsilon}{2} - |z| = \frac{2}{\varepsilon}\left(|x| + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

したがって、

$$|f(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって、fは x において連続になる。以上より、fは C°で連続になる。

次に fが位相同型写像になることを示すために、fの逆写像を構成する。写像 $g : \mathbf{R}^n \to C^\circ$ を

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x & (x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) = \infty) \\ \dfrac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |x|} \cdot x & (x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty) \end{cases}$$

によって定める。$x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty$ のとき、

$$|g(x)| = \frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |x|}|x| < \sigma(x/|x|)$$

となり、gが C°への写像であることがわかる。

まず、gが fの逆写像になることを示す。$gf(0) = 0$ となり、$x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) = \infty$ のとき、

$$gf(x) = g(x) = x.$$

$x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty$ のとき、$\sigma(f(x)/|f(x)|) = \sigma(x/|x|)$ となり

$$\begin{aligned} gf(x) &= g\left(\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - |x|}x\right) \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |f(x)|}\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - |x|}x \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + \dfrac{\sigma(x/|x|)|x|}{\sigma(x/|x|) - |x|}}\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - |x|}x \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)^2}{\sigma(x/|x|)(\sigma(x/|x|) - |x|) + \sigma(x/|x|)|x|}x \\ &= x. \end{aligned}$$

以上より gfは C°の恒等写像になる。

次に $fg(0) = 0$ となり、$x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) = \infty$ のとき、

$$fg(x) = f(x) = x.$$

$x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty$ のとき、$\sigma(g(x)/|g(x)|) = \sigma(x/|x|)$ となり

$$\begin{aligned} fg(x) &= f\left(\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |x|}x\right) \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - |g(x)|}\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |x|}x \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) - \dfrac{\sigma(x/|x|)|x|}{\sigma(x/|x|) + |x|}}\frac{\sigma(x/|x|)}{\sigma(x/|x|) + |x|}x \\ &= \frac{\sigma(x/|x|)^2}{\sigma(x/|x|)(\sigma(x/|x|) + |x|) - \sigma(x/|x|)|x|}x \\ &= x. \end{aligned}$$

以上より fgは $\mathbf{R}^n$の恒等写像になり、gは fの逆写像になる。

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid x \neq 0,\ \sigma(x/|x|) < \infty\}$$

は $\mathbf{R}^n$内の開集合になり、ここでは gは連続写像の合成だから連続になる。

0 における gの連続性を示す。任意の$\varepsilon > 0$ をとる。$\sigma(z/|z|) = \infty$ となる $z \in U(0;\varepsilon)\cap\{0\}^c$ については

$$|g(z) - g(0)| = |z| < \varepsilon.$$

$\sigma(z/|z|) < \infty$ となる $z \in U(0;\varepsilon) \cap \{0\}^c$については、

$$|g(z) - g(0)| = \frac{\sigma(z/|z|)}{\sigma(z/|z|) + |z|}|z| < |z| < \varepsilon.$$

以上より gは 0 において連続になる。

$\sigma(x/|x|)=\infty$ となる $x\neq 0$ における gの連続性を示す。σの $x/|x|$ における連続性より、任意の$\varepsilon>0$ に対して Sにおける $x/|x|$ の開近傍 Uが存在し、

$$y\in U\Rightarrow \frac{2}{\varepsilon}\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2<\sigma(y)$$

となる。

$$V=\{ty\mid y\in U,\ t>0\}$$

とおくと Vは $\mathbf{R}^n$における x の開近傍になる。そこで、

$$U(x;\delta)\subset V,\qquad 0<\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},|x|\right\}$$

となるδをとる。このとき、$z\in U(x;\delta)$ に対して $z\neq 0$ となり、$\sigma(z/|z|)=\infty$ のときは、

$$|g(z)-g(x)|=|z-x|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

$\sigma(z/|z|)<\infty$ のときは、

$$\begin{aligned}
|g(z)-g(x)| &= |g(z)-z+z-x| \\
&\leq |g(z)-z|+|z-x| \\
&= \left|\frac{\sigma(z/|z|)}{\sigma(z/|z|)+|z|}z-z\right|+|z-x| \\
&= \frac{\sigma(z/|z|)-(\sigma(z/|z|)+|z|)}{\sigma(z/|z|)+|z|}|z|+|z-x| \\
&= \frac{|z|^2}{\sigma(z/|z|)+|z|}+|z-x| \\
&< \frac{|z|^2}{\sigma(z/|z|)}+|z-x|.
\end{aligned}$$

ここで、$U(x;\delta)\subset V$だから、$z/|z|\in U$となり

$$\sigma(z/|z|)>\frac{2}{\varepsilon}\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

したがって、

$$|f(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

よって、gは x において連続になる。以上より、gは $\mathbf{R}^n$で連続になる。

Cがコンパクトのときは、すべての $y\in S$に対して$\sigma(y)<\infty$ となる。そこで、写像 $g:S\to\partial C$を

$$g(y)=\sigma(y)y\qquad (y\in S)$$

によって定める。σが連続だから、gも連続になる。さらに、gは全単射になる。Sはコンパクトで、∂Cは Hausdorff 位相空間だから、$g:S\to\partial C$は位相同型写像になる。

4.4 凸集合と超平面

定義 4.4.1 $\mathbf{R}^n$内の超平面 Pが部分集合 Xを**切断**するとは、Pを境界に持つ二つの開半空間がともに Xの元を持つことである。

定理 4.4.2 $\mathbf{R}^n$内の超平面 Pが凸集合 Cを切断するための必要十分条件は、Pと Cが次の (1) と (2) を満たすことである。

(1) $P \not\supset \mathcal{A}(C)$.

(2) Pと Cの相対内部は共通部分を持つ。

証明 Pが Cを切断すると仮定する。超平面 Pを

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x\rangle = \alpha\}$$

と表すことにする。Pは Cを切断するので、$\langle a, x_1\rangle < \alpha$を満たす $x_1 \in C$と$\alpha < \langle a, x_2\rangle$ を満たす $x_2 \in C$が存在する。$x_1 \in C \subset \mathcal{A}(C)$ と $x_1 \notin P$が成り立つので、(1) の $P \not\supset \mathcal{A}(C)$ を得る。次に定理 4.2.11より、$x \in C^{r\circ}$に対して$\overline{x_1x} \cap \{x_1\}^c \subset C^{r\circ}$と$\overline{x_2x} \cap \{x_2\}^c \subset C^{r\circ}$が成り立つ。折線$\overline{x_1x} \cup \overline{x_2x}$上の連続関数

$$\overline{x_1x} \cup \overline{x_2x} \ni y \mapsto \langle a, y\rangle$$

は端点で

$$\langle a, x_1\rangle < \alpha < \langle a, x_2\rangle$$

となる。よって中間値の定理よりある $y \in \overline{x_1x} \cup \overline{x_2x}$が存在し、$\langle a, y\rangle = \alpha$となる。さらに $y \in C^\circ \cap P$が成り立ち、Pと Cの相対内部は共通部分を持つ。

逆に Pと Cが (1) と (2) を満たすと仮定する。(1) より $y \notin P$となる $y \in \mathcal{A}(C)$ をとることができる。(2) より Pと Cの相対内部の共通部分から点 x をとることができる。yと x を結ぶ直線を lとすると、lと Pの共通部分は一点になる。もし共通部分が二点以上あるとすると、$l \subset P$となり $y \notin P$に矛盾する。よって $l \cap P = \{x\}$ となる。$x, y \in \mathcal{A}(C)$ だから $l \subset \mathcal{A}(C)$ が成り立つ。x は Cの相対内部の点なので、l内の線分$\overline{x_1x_2} \subset C^{r\circ}$であって、$x$ を相対内部に含むものが存在する。このとき、Pを境界に持つ二つの開半空間にそれぞれ x_1 と x_2が含まれ、Pは Cを切断する。

系 4.4.3 $\mathbf{R}^n$内の超平面 Pが凸集合 Cを切断するとき、Pは Cの相対内部も切断する。

定理 4.4.4 (Hahn-Banach) Cを $\mathbf{R}^n$内の開凸集合とし、A を $\mathbf{R}^n$内の Cと共通部分を持たないアファイン部分空間とする。このとき、A を含む超平面であって Cと共通部分を持たないものが存在する。

証明 A を含み C と共通部分を持たないアファイン部分空間の内で最大次元のものを一つとり P とする。$\dim P = n-1$ ならば、定理の主張が成立する。そこで、$\dim P \leq n-2$ と仮定して矛盾を導く。

P の直交補空間の一つを Q とすると、仮定より $\dim Q \geq 2$ となる。$\mathbf{R}^n$ から Q への直交射影を $p : \mathbf{R}^n \to Q$ で表し、$P \cap Q = \{x\}$ とおく。すると、$p(P) = \{x\}$ となり、直交射影 p は開写像だから、$p(C)$ は Q 内の開集合になる。p はアファイン写像でもあるので、命題 4.2.5 より、$p(C)$ は Q 内の開凸集合になる。P と C は共通部分を持たないので、x は $p(C)$ に含まれない。x を通る Q 内の任意の直線 l をとると、$p^{-1}(l)$ は P を含み、よって A を含むアファイン部分空間になり、$\dim p^{-1}(l) = \dim P + 1$ だから、P の次元の最大性より、$p^{-1}(l)$ は C と交わる。これより、l は $p(C)$ と交わる。すなわち、x を通る Q 内の任意の直線と $p(C)$ は共通部分を持つ。よって、x を通る Q 内の 2 次元平面 R をとると、R と $p(C)$ も共通部分を持つ。このとき、$C_1 = R \cap p(C)$ は R 内の x を含まない開凸集合になる。

$$D = \{u \mid |u| = 1,\ x + tu\ (t \geq 0)\ \text{は}\ R\ \text{の半直線で}\ C_1\ \text{と共通部分を持つ}\ \}$$

とおくと、D は円 S^1 内の連結開集合になる。D の長さを $L(D)$ で表すと、C_1 が R の開凸集合であることから、$L(D) \leq \pi$ となる。なぜならば、もし、$L(D) > \pi$ とすると、ある $u \in D$ は $-u \in D$ を満たし、定理 4.2.11 より $x \in \overline{(x-u)(x+u)} \subset C_1$ となり、C_1 が x を含まないことに矛盾する。ところが、$L(D) \leq \pi$ は x を通る R 内の直線が C_1 と交わることに矛盾する。以上より、$\dim P = n-1$ となり、P は A を含む超平面であって C と共通部分を持たない。

定義 4.4.5 $\mathbf{R}^n$ 内の超平面 P が 0 でないベクトル a と実数 α によって

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\}$$

によって与えられているとする。$\mathbf{R}^n$ 内の部分集合 X_1, X_2 が

$$X_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}, \qquad X_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$$

または、

$$X_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}, \qquad X_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$$

を満たすとき、P は X_1 と X_2 を**分離する**という。さらに、X_1, X_2 が

$$X_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}, \qquad X_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle > \alpha\}$$

または、

$$X_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}, \qquad X_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle > \alpha\}$$

を満たすとき、P は X_1 と X_2 を**強く分離する**という。

系 4.4.6 C_1 を $\mathbf{R}^n$ 内の開凸集合とし、C_2 を $\mathbf{R}^n$ 内の凸集合とする。このとき、$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ならば、ある超平面 P が存在し、P は C_1 と C_2 を分離する。

証明　系 4.2.6より、$C_1 - C_2$は凸集合になる。さらに、

$$C_1 - C_2 = \bigcup_{x_2 \in C_2} (C_1 - \{x_2\})$$

となるので、$C_1 - C_2$は開凸集合になる。$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ より、$C_1 - C_2$は原点 0 を含まない。よって、定理 4.4.4より、原点を通る超平面 Pが存在し $(C_1 - C_2) \cap P = 0$ となる。超平面 Pは 0 でないベクトル a によって

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 0\}$$

で与えられるとする。必要なら a を-1 倍することにより、

$$x \in C_1 - C_2 \Rightarrow \langle a, x \rangle > 0$$

となる。よって、

$$x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2 \Rightarrow \langle a, x_1 \rangle > \langle a, x_2 \rangle$$

が成り立つ。これより特に $\{\langle a, x_1 \rangle \mid x_1 \in C_1\}$ は下に有界になり、下限αが存在する。C_1は開集合だから、

$$C_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle > \alpha\}$$

となり、上で示したことから、

$$C_2 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \alpha\}$$

となるので、超平面 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\}$ は C_1と C_2を分離する。

定義 4.4.7 Pを $\mathbf{R}^n$内の超平面とし、Xを $\mathbf{R}^n$内の部分集合とする。Pが Xの**支持超平面**であるとは、Pと Xの閉包$\bar{X}$が共通部分を持ち、Pが Xを切断しないことである。

系 4.4.8 Cを $\mathbf{R}^n$内の凸集合とする。∂Cの任意の点 x に対して、x を通る Cの支持超平面が存在する。

証明　$\dim C \leq n-1$ の場合は、$\mathcal{A}(C)$ を含む任意の超平面 Pは Cの支持超平面になり、$C \subset P$となるので、Pは Cの任意の点を通る。

以下では $\dim C = n$ の場合を考える。このとき、Cは内点を持ち、C°は空ではない。C°は開凸集合になるので、$x \in \partial C$を任意にとると、C°は x を含まない。系 4.4.6より C°と $\{x\}$ を分離する超平面 Pが存在する。Pは C°と共通部分を持たないことになり、定理 4.4.2より Pは Cを切断しない。系 4.2.14より、$\overline{(C^\circ)} = \bar{C} \ni x$ となり、Pは C°と $\{x\}$ を分離することから、x は Pに含まれる。したがって、Pは x を通る Cの支持超平面になる。

定理 4.4.9 Cを $\mathbf{R}^n$内の内点を持つ閉集合とし、$n \geq 2$ と仮定する。Cが凸集合になるための必要十分条件は、∂Cの任意の点 x に対して x を通る Cの支持超平面が存在することである。

証明 Cが凸集合のとき、系 4.4.8より∂Cの任意の点 x に対して x を通る Cの支持超平面が存在する。

次に Cが凸集合ではないとする。このとき、ある $x_1, x_2 \in C$が存在し $C \not\supset \overline{x_1x_2}$となる。つまり、$y \notin C$となる $y \in \overline{x_1x_2}$が存在する。$n \geq 2$ だから x_1, x_2を通る直線上にない C°の点 zが存在する。yは Cに含まれない点だから、線分$\overline{zy}$は相対内部に∂Cの点 p を持つ。よって、x_1, x_2, zを頂点に持つ三角形 Sは相対内部に p を持つ。以下で p を通る Cの支持超平面は存在しないことを示す。p を通る超平面 Pをとる。Pが Sを含むとすると Pは zを含むことになり、Pは Cを切断する。よって、Pは Cの支持超平面ではない。次に Pが Sを含まない場合を考える。このとき、$S \cap P$は Sの辺を結ぶ線分になり、Sの三頂点を切断する。したがって、Pは Cを切断し Cの支持超平面ではない。以上より、p を通る Cの支持超平面は存在しないことがわかった。

命題 4.4.10 C_1と C_2を $\mathbf{R}^n$内の共通部分を持たないコンパクト凸集合とする。このとき、C_1と C_2を強く分離する超平面が存在する。

証明 C_1と C_2はコンパクト凸集合であって共通部分を持たないので、

$$d(C_1, C_2) = \inf\{|x - y| \mid x \in C_1,\ y \in C_2\}$$

とおくと、$d(C_1, C_2) > 0$ となる。さらに、$|x_0 - y_0| = d(C_1, C_2)$ を満たす $x_0 \in C_1$と $y_0 \in C_2$が存在する。線分$\overline{x_0y_0}$の中点 zを通り、この線分に垂直な超平面を Pとする。

以下で Pが C_1と C_2を強く分離することを示す。$a = y_0 - x_0$とおき、

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x\rangle = \langle a, z\rangle\}$$

とする。

$$\langle a, x_0\rangle < \langle a, z\rangle < \langle a, y_0\rangle$$

が成り立つ。

$$C_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle\}$$

を示す。そのために

$$\langle a, x\rangle > \langle a, x_0\rangle$$

を満たす $x \in C_1$が存在すると仮定して矛盾を導く。C_1は凸集合だから$\overline{x_0x} \subset C_1$となり、仮定より$\overline{x_0x} \subset C_1$上に

$$|x_1 - y_0| < |x_0 - y_0|$$

を満たす点 x_1が存在する。これは $|x_0 - y_0| = d(C_1, C_2)$ に矛盾する。したがって、

$$C_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle\}$$

が成り立つ。同様にして、

$$C_1 \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x\rangle \geq \langle a, y_0\rangle\}$$

も成り立つ。以上より Pが C_1と C_2を強く分離することがわかった。

4.5 凸包

補題 4.5.1 Xを $\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合とすると、Xを含む凸集合の内で包含関係に関して最小になる凸集合が存在する。

証明 命題 4.2.8より、

$$H = \cap\{C \subset \mathbf{R}^n \mid X \subset C,\ C\text{は凸集合}\}$$

は凸集合になる。定め方から、Hは Xを含み、Xを含む凸集合の内で包含関係に関して最小になる。

定義 4.5.2 $\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合 Xに対して、Xを含む凸集合の内で包含関係に関して最小になる凸集合 (存在は補題 4.5.1) を Xの**凸包**と呼び、$H(C)$ で表す。$\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合 $X_1, \ldots, X_k$に対して、

$$H(X_1, \ldots, X_k) = H(X_1 \cup \cdots \cup X_k)$$

と表す。$X_i = \{x_i\}$ のときは、

$$H(x_1, \ldots, x_k) = H(X_1, \ldots, X_k) = H(\{x_1, \ldots, x_k\})$$

と表すことにする。すなわち、$H(x_1, \ldots, x_k)$ は $x_1, \ldots, x_k$の張る単体に一致する。

定理 4.5.3 (Carathéodory) Xを $\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合とする。このとき、

$$H(X) = \cup\{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X,\ s \leq n+1\}$$

が成り立つ。Xの連結成分の個数が n 個以下のときには、

$$H(X) = \cup\{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X,\ s \leq n\}$$

が成り立つ。

定理 4.5.3の証明の準備をしておく。

補題 4.5.4 $y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t \in \mathbf{R}^n$と実数 $0 \leq \chi \leq 1$ に対して

$$\chi H(y_1, \ldots, y_s) + (1-\chi) H(z_1, \ldots, z_t) \subset H(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t)$$

が成り立つ。

証明 $y \in H(y_1, \ldots, y_s)$ と $z \in H(z_1, \ldots, z_t)$ に対して、実数λ_j, μ_kが存在し、

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_s y_s \qquad (\lambda_j \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_s = 1) \\ z &= \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_t z_t \qquad (\mu_k \geq 0,\ \mu_1 + \cdots + \mu_t = 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、$x = \chi y + (1-\chi)z$とおくと

$$\begin{aligned} x &= \chi y + (1-\chi)z \\ &= \chi\lambda_1 y_1 + \cdots + \chi\lambda_s y_s + (1-\chi)\mu_1 z_1 + \cdots + (1-\chi)\mu_t z_t \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、$\chi\lambda_j, (1-\chi)\mu_k \geq 0$ であり、

$$\chi\lambda_1 + \cdots + \chi\lambda_s + (1-\chi)\mu_1 + \cdots + (1-\chi)\mu_t = \chi + (1-\chi) = 1$$

だから、$x \in H(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t)$ となり、

$$\chi H(y_1, \ldots, y_s) + (1-\chi)H(z_1, \ldots, z_t) \subset H(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t)$$

を得る。

補題 4.5.5 Xを $\mathbf{R}^n$内の空でない部分集合とする。このとき、

$$H(X) = \cup\{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X\}$$

が成り立つ。

証明 まず、

$$R(X) = \cup\{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X\}$$

とおく。$x_i \in X$に対して、$H(x_1, \ldots, x_s) \subset H(X)$ となるので、$R(X) \subset H(X)$ が成り立つ。

次に $R(X)$ が凸集合であることを示す。任意の $y, z \in R(X)$ に対して、ある $y_j, z_k \in X$が存在し、

$$y \in H(y_1, \ldots, y_s), \qquad z \in H(z_1, \ldots, z_t).$$

補題 4.5.4より、

$$\overline{yz} \subset H(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t) \subset R$$

となり、$R(X)$ は凸集合になる。

$R(X)$ の定め方より $X \subset R(X)$ であり、$R(X)$ は凸集合だから、凸包の最小性より $H(X) \subset R(X)$ が成り立つ。したがって、$H(X) = R(X)$ を得る。

定理 4.5.3の証明 補題 4.5.5の証明中の記号 $R(X)$ はそのまま使うことにする。まず、

$$R_1(X) = \{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X,\ s \leq n+1\}$$

とおくと、$R_1(X) \subset R(X)$ が成り立つ。補題 4.5.5より、$H(X) = R(X)$ となるので、$R_1(X) = R(X)$ を示せばよい。任意の $x \in R(X)$ に対してある $x_i \in X$と実数λ_iが存在し、

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \qquad (\lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1)$$

と表すことができる。$k \leq n+1$ のときは $x \in R(X)$ となる。そこで、以下では $k > n+1$ の場合を考える。

$$x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$$

は線形従属になるので、すべては 0 でない実数$\alpha_2, \ldots, \alpha_k$が存在し、

$$\alpha_2(x_2 - x_1) + \cdots + \alpha_k(x_k - x_1) = 0$$

となる。そこで、$\alpha_1 = -\alpha_2 - \cdots - \alpha_k$とおくと、

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

が成り立つ。

$$S = \{\tau \in \mathbf{R} \mid \tau\alpha_i \geq -\lambda_i\ (1 \leq i \leq k)\}$$

とおくと、$0 \in S$だから、Sは空集合ではない。よって、Sは $\mathbf{R}$ の凸集合になる。また、あるα_iは 0 ではないので、Sは $\mathbf{R}$ に一致することはない。そこで、Sの境界の点τ_0をとる。Sの定め方から、ある $1 \leq j \leq k$が存在して、$\tau_0\alpha_j = -\lambda_j$となる。$\beta_i = \lambda_i + \tau_0\alpha_i$とおくと、$\beta_i \geq 0$ が成り立ち、

$$\beta_1 + \cdots + \beta_k = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) + \tau_0(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) = 1$$

となる。さらに、

$$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k = (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) + \tau_0(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = x.$$

ここで、$\beta_j = 0$ だから、

$$x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \beta_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \beta_k x_k$$

となる。以下、帰納的に同様の操作を行うことにより、$x \in R_1(X)$ であることがわかり、$R_1(X) = R(X)$ が成り立つ。

Xの連結成分の個数が n 個以下の場合を考える。

$$R_0(X) = \{H(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i \in X,\ s \leq n\}$$

とおく。$R_0(X) = R_1(X)$ を示せばよい。$y \in R_1(X)$ をとると、ある $x_1, \ldots, x_s \in X$ $(s \leq n+1)$ が存在し $y \in H(x_1, \ldots, x_s)$ となる。すなわち、$\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = 1$ を満たす$\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geq 0$ が存在し、

$$y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s$$

が成り立つ。$s \leq n$ のときは $y \in R_0(X)$ となるので、$s = n+1$ の場合を考えればよい。さらに、あるλ_iが 0 になるときも $y \in R_0(X)$ となるので、$\lambda_i > 0$ の場合を考えればよい。$\dim H(x_1, \ldots, x_{n+1}) < n$ の場合は $y \in R_0(X)$ となるので、$\dim H(x_1, \ldots, x_{n+1}) = n$ の場合を考えればよい。yに関する x_iの対称点を x_i'で表す。すなわち、

$$x_i' = y + (y - x_i) = 2y - x_i.$$

このとき、yは $H(x_1', \ldots, x_{n+1}')$ の内部に含まれる。さらに

$$C_i = \{y + t(x - y) \mid x \in H(x_1', \ldots, \hat{x}_i', \ldots, x_{n+1}'),\ t \geq 0\}$$

とおく。ただし、$\hat{x}_i'$は x_i'を取り除くことを意味する。すると、

$$\mathbf{R}^n = C_1 \cup \cdots \cup C_{n+1}, \qquad C_i^\circ \cap C_j^\circ = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成り立つ。$1 \leq j \leq n+1$ を一つとる。

$$\frac{1}{\lambda_j} y = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i + x_j$$

となるので、

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{\lambda_j} y - \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i \\ &= y + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} y - \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i (2y - x_i') \\ &= y + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} y + \frac{1}{\lambda_j} \left(-2(1 - \lambda_j) y + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i' \right) \\ &= y + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} \left(\frac{1}{1 - \lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i' - y \right). \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{1}{1 - \lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i' \in H(x_1', \ldots, \hat{x}_j', \ldots, x_{n+1}')$$

であり、各λ_iは正だから、x_jは C_jの内部に含まれる。

$x_1, \ldots, x_{n+1}$は Xの点であり、Xの連結成分の個数は n 個以下だから、ある x_i, x_j $(i \neq j)$ は同じ連結成分に含まれる。つまり Xの x_iと x_jを含む連結成分は C_i°, C_j°と共通部分を持つ。$C_i^\circ \cap C_j^\circ = \emptyset$ だから、この連結成分は∂C_iとの共通部分を持つ。よって $X \cap \partial C_i \neq \emptyset$ となる。$z \in X \cap \partial C_i$をとると、$\displaystyle\sum_{k \neq i,j} \mu_k = 1$ を満たす$\mu_k \geq 0$ と $t \geq 0$ が存在し

$$z = y + t \left(\sum_{k \neq i,j} \mu_k x_k' - y \right)$$

を満たす。

$$\begin{aligned} z &= y + t\left(\sum_{k\neq i,j} \mu_k x'_k - y\right) \\ &= y + t\left(\sum_{k\neq i,j} \mu_k (2y - x_k) - y\right) \\ &= y + t\left(y - \sum_{k\neq i,j} \mu_k x_k\right) \\ &= (1+t)y - t\sum_{k\neq i,j} \mu_k x_k. \end{aligned}$$

よって

$$y = \frac{1}{1+t}z + \frac{t}{1+t}\sum_{k\neq i,j} \mu_k x_k$$

であり、

$$\frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t}\sum_{k\neq i,j} \mu_k = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t} = 1$$

となるので、$y \in R_0(X)$ がわかり、定理の証明が完結する。

定理 4.5.6 $\mathbf{R}^n$内の有界集合 Xの凸包 $H(X)$ は有界集合になる。さらに、Xがコンパクトならば、$H(X)$ はコンパクトになる。

証明 Xが有界のときは、ある $R > 0$ が存在して $X \subset B(0;R)$ となる。$B(0;R)$ は凸集合だから $H(X) \subset B(0;R)$ となり、$H(X)$ も有界集合になる。

$$\Phi : \mathbf{R}^{n+1} \times (\mathbf{R}^n)^{n+1} \to \mathbf{R}^n \ ; \ ((\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}), (x_1, \ldots, x_{n+1})) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

によって連続写像Φを定める。

$$S = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1\}$$

とおくと Sは n 次元単体になり、特にコンパクトである。よって、$S \times X^{n+1}$もコンパクトになる。定理 4.5.3より、$H(X) = \Phi(S \times X^{n+1})$ となり、$H(X)$ はコンパクトになる。

4.6 凸超曲面

定義 4.6.1 $\mathbf{R}^n$内の n 次元凸集合の境界を**凸超曲面**と呼ぶ。

命題 4.6.2 $f : M \to \mathbf{R}^{n+1}$を n 次元多様体 Mの埋め込みとする。$f(M)$ が $\mathbf{R}^{n+1}$の凸超曲面になるための必要十分条件は、任意の $x \in M$に対して $df_x(T_xM)$ が $f(M)$ の支持超平面になることである。

証明 任意の $x \in M$に対して $df_x(T_xM)$ が $f(M)$ の支持超平面になると仮定する。$df_x(T_xM)$ の定める閉半空間のうち $f(M)$ を含む方をとり、それらの共通部分を Cとすると、$\partial C = f(M)$ が成り立ち、定理 4.4.9より Cは凸集合になる。さらに $\dim C = n+1$ となり、$f(M)$ は凸超平面になる。

逆に、$f(M)$ が $\mathbf{R}^{n+1}$の凸超曲面になると仮定する。$\partial C = f(M)$ となる凸集合 Cをとる。$x \in M$に対して $f(x)$ の $f(M)$ での近傍は、陰関数定理より $df_x(T_xM)$ 上の関数φ のグラフとして表すことができる。関数φ の正の方向が Cの補集合の方向に一致するようにとる。Cが凸であることから、φ は凸関数になる。$d\varphi_x = 0$ であり、$\varphi \leq 0$ が成り立つ。よって $df_x(T_xM)$ は $f(M)$ における x の近傍の支持超平面になる。Cの凸性から $df_x(T_xM)$ は $f(M)$ 全体の支持超平面になる。

定理 4.6.3 $f: M \to \mathbf{R}^{n+1}$をコンパクト n 次元多様体 Mの挿入とする。このとき、次の (1) から (3) は同値になる。

(1) $f: M \to \mathbf{R}^{n+1}$は埋め込みであり、$f(M)$ は凸超曲面になる。

(2) $f: M \to \mathbf{R}^{n+1}$は埋め込みであり、$f(M) = \partial H(f(M))$ が成り立つ。

(3) 任意の $x \in M$に対して $df_x(T_xM)$ は $f(M)$ の支持超平面になる。

証明 (1) $\Rightarrow$ (3) 命題 4.6.2より成り立つ。

(3) $\Rightarrow$ (2) 各 $x \in M$について $df_x(T_xM)$ は $f(M)$ の支持超平面になるので、$H(f(M))$ の支持超平面になる。$f(x)$ を通る $H(f(M))$ の支持超平面が存在することから、$f(x)$ は $H(f(M))$ の内点にはなりえず、$f(x) \in \partial H(f(M))$ が成り立つ。よって $f(M) \subset \partial H(f(M))$ となる。$f(M)$ はコンパクトだから、$f(M)$ は$\partial H(f(M))$ の閉部分集合になる。

次に、$f(M)$ が$\partial H(f(M))$ の開部分集合になることを示す。$f(M)$ はコンパクトだから、定理 4.5.6より $H(f(M))$ もコンパクトになる。

$$f(M) \subset H(f(M)) \subset \mathcal{A}(H(f(M)))$$

であり、$f: M \to \mathbf{R}^{n+1}$は挿入だから、$A(H(f(M))) = \mathbf{R}^{n+1}$となり、$H(f(M))$ は $n+1$ 次元コンパクト凸集合になる。定理 4.3.2より、$\partial H(f(M))$ は n 次元球面に位相同型になる。$p = f(x) \in f(M)$ を任意にとる。fが挿入であることから、n 次元開円盤と位相同型になる x の開近傍 Uが存在し、$f|_U : U \to \mathbf{R}^{n+1}$は埋め込みになる。特に $f(U)$ は n 次元開円盤と位相同型になる$\partial H(f(M))$ の部分集合になる。ここで、位相幾何学の次の定理を使うと、$f(U)$ は$\partial H(f(M))$ の開部分集合になる。

定理 4.6.4 U_1, U_2を n 次元球面内の位相同型になる二つの部分集合とする。U_1が開部分集合ならば、U_2も開部分集合になる。(S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton 1952 Theorem 3.9(Invariance of domain) p.303 参照)

したがって、$f(U)$ は p の$\partial H(f(M))$ 内の開近傍になり、$f(M)$ は$\partial H(f(M))$ 内の開部分集合になる。

$\partial H(f(M))$ は n 次元球面と位相同型だから連結になり、開かつ閉部分集合 $f(M)$ は $\partial H(f(M))$ に一致する。上で示したことから、$f : M \to \partial H(f(M))$ は局所位相同型写像になり、被覆写像になる。$\partial H(f(M))$ は単連結だから、fは位相同型写像になり、埋め込みになる。

(2) ⇒ (1) 凸超曲面の定義からわかる。

定理 4.6.5 コンパクト n 次元多様体 Mの埋め込み$\iota : M \to \mathbf{R}^{n+1}$の像$\iota(M)$ が凸超曲面であると仮定する。このとき、$\tau(M, \iota) = 2$ が成り立つ。

証明 単位ベクトル u に対する M上の関数 f_uが Morse 関数になっているとする。f_uの特異点が三点以上あると仮定して矛盾を導く。f_uの特異点 x_1, x_2, x_3をとる。x_iにおける$\iota(M)$ の接ベクトル空間は u に直交するので、特に平行になる。定理 4.6.3より、これらの接ベクトル空間は、$\iota(M)$ の支持超平面になるので、$\iota(M)$ の凸性より三つのうちの二つは一致する。このとき接ベクトル空間の一致する点を x_1, x_2とすると、$f_u(x_1) = f_u(x_2)$ となる。$\overline{\iota(x_1)\iota(x_2)} \subset H(\iota(M))$ となるが、この線分は x_1, x_2の支持超平面に含まれ、$\overline{\iota(x_1)\iota(x_2)} \subset \partial H(\iota(M))$ が成り立つ。他方、定理 4.6.3より$\partial H(\iota(M)) = \iota(M)$ だから、$\overline{\iota(x_1)\iota(x_2)} \subset \iota(M)$ となり、この線分上の点はすべて f_uの特異点になる。これは f_uが Morse 関数であることに矛盾する。以上より Morse 関数の特異点は 2 になり、$\tau(M, \iota) = 2$ が成り立つ。