

数学研究科

微分幾何学 III

理工学研究科

微分幾何学 I

面積最小部分多様体

田崎博之

1999 年度

目次

1	平面の面積最小性	1
1.1	直線の長さ最小性	1
1.2	平面の面積最小性	4
2	外積代数の内積とノルム	7
2.1	外積代数	7
2.2	体積量と余体積量	20
2.3	二次元体積量と二次余体積量	30
3	多様体上の測度と積分	36
3.1	測度と積分	36
3.2	微分形式の積分と Riemann 測度	41
3.3	余面積公式と面積非増加写像	43
3.4	Lie 群上の不変測度	51
3.5	等質空間上の不変測度	60
4	積分幾何学	65
4.1	アファイン部分空間の全体	65
4.2	Crofton の公式	67
4.3	位相ベクトル空間	70
4.4	カレント	73
4.5	キャリブレーション	76

第 1 章 平面の面積最小性

1.1 直線の長さ最小性

定理 1.1.1 平面 \mathbf{R}^2 内の異なる二点 a, b を結ぶ長さ最小の曲線は二点 a, b を結ぶ線分に限る。

長さ非増加レトラクションによる証明 $a = 0$ とし、 $b = (u, 0)$ としても一般性は失われない。

$$P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \times \{0\}; (x, y) \mapsto (x, 0)$$

によって写像 P を定める。任意のベクトル $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$|P(x, y)| = |(x, 0)| = |x| \leq |(x, y)|$$

となり、等号成立のための必要十分条件は $y = 0$ となることである。すなわち、 (x, y) が x 軸と平行になることである。 a と b を結ぶ曲線 $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ をとる。 Pc は a と b を結ぶ線分 \overline{ab} を含むことに注意しておく。 c の長さ $L(c)$ は

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt \geq \int_0^1 |Pc'(t)| dt = \int_0^1 |(Pc)'(t)| dt = L(Pc) \geq L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 $c'(t)$ はつねに x 軸に平行になり c は線分 \overline{ab} に一致する。 P が長さ非増加レトラクションである。長さ非増加レトラクションを特別な場合として含む面積非増加レトラクションの一般的定義は後で与える。

キャリブレーションによる証明 前の証明と同様に $a = 0$ とし、 $b = (u, 0)$ とする。 \mathbf{R}^2 上の一次微分形式 dx は閉微分形式になっている。任意のベクトル $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$dx(x, y) = x \leq |(x, y)|$$

となり、等号成立のための必要十分条件は $y = 0$ となりかつ $x > 0$ が成り立つことである。 a と b を結ぶ曲線 $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対して、 c と \overline{ab} の端点は一致しているので Stokes の定理より

$$\int_c dx = \int_{\overline{ab}} dx.$$

したがって

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt \geq \int_0^1 dx(c'(t)) dt = \int_c dx = \int_{\overline{ab}} dx = L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 $c'(t)$ はつねに x 軸に平行になり x 軸の正の方向を向くことになり、 c は線分 \overline{ab} に一致する。一次閉微分形式 dx がキャリブレーションである。キャリブレーションの一般的定義は後で与える。

Crofton の公式による証明 この証明では次の Crofton の公式を利用する。

定理 1.1.2 (Crofton の公式) 平面 \mathbf{R}^2 内の直線全体の集合にある測度 ϕ が存在し、平面上の曲線 c に対して $l \mapsto i_c(l) = \text{card}(c \cap l)$ は \mathbf{R}^2 内の直線全体の集合上の ϕ 可測関数になり、

$$L(c) = \int i_c d\phi$$

が成り立つ。ただし $\text{card}X$ は集合 X の元の個数を表す。

この定理の証明は後で与えることにする。 a と b の間を通る直線に限って線分 \overline{ab} と交点を一つだけ持ち、 a, b を結ぶ曲線 c とは一点以上の交点を持つので、 $i_{\overline{ab}} \leq i_c$ が成り立つ。これより、

$$L(c) = \int i_c d\phi \geq \int i_{\overline{ab}} d\phi = L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 ϕ に関してほとんどすべての直線に関して $i_c = i_{\overline{ab}}$ が成り立つことになり c は線分 \overline{ab} に一致する。

平面 \mathbf{R}^2 内の二点を結ぶ曲線に関する考察に若干の修正をすれば、 \mathbf{R}^n 内の二点を結ぶ曲線に関する結果を得る。

定理 1.1.3 \mathbf{R}^n 内の異なる二点 a, b を結ぶ長さ最小の曲線は二点 a, b を結ぶ線分に限る。

長さ非増加レトラクションによる証明 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ とみなすことにする。 $a = 0$ とし、 $b = (u, 0)$ としても一般性は失われない。

$$P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \times \{0\}; (x, y) \mapsto (x, 0)$$

によって写像 P を定める。任意のベクトル $(x, y) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$|P(x, y)| = |(x, 0)| = |x| \leq |(x, y)|$$

となり、等号成立のための必要十分条件は $y = 0$ となることである。すなわち、 (x, y) が x^1 軸と平行になることである。 a と b を結ぶ曲線 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ をとる。 Pc は a と b を結ぶ線分 \overline{ab} を含むことに注意しておく。 c の長さ $L(c)$ は

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt \geq \int_0^1 |Pc'(t)| dt = \int_0^1 |(Pc)'(t)| dt = L(Pc) \geq L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 $c'(t)$ はつねに x^1 軸に平行になり c は線分 \overline{ab} に一致する。 P が長さ非増加レトラクションである。

キャリブレーションによる証明 前の証明と同様に $a = 0$ とし、 $b = (u, 0)$ とする。 \mathbb{R}^n 上の一次微分形式 dx^1 は閉微分形式になっている。任意のベクトル $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$dx^1(x, y) = x \leq |(x, y)|$$

となり、等号成立のための必要十分条件は $y = 0$ となりかつ $x > 0$ が成り立つことである。 a と b を結ぶ曲線 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、 c と \overline{ab} の端点は一致しているので Stokes の定理より

$$\int_c dx^1 = \int_{\overline{ab}} dx^1.$$

したがって

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt \geq \int_0^1 dx^1(c'(t)) dt = \int_c dx^1 = \int_{\overline{ab}} dx^1 = L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 $c'(t)$ はつねに x^1 軸に平行になり x^1 軸の正の方向を向くことになり、 c は線分 \overline{ab} に一致する。一次閉微分形式 dx^1 がキャリブレーションである。

Crofton の公式による証明 この証明では次の Crofton の公式を利用する。

定理 1.1.4 (Crofton の公式) \mathbb{R}^n 内の超平面全体の集合にある測度 ϕ が存在し、 \mathbb{R}^n の曲線 c に対して $h \mapsto i_c(h) = \text{card}(c \cap h)$ は \mathbb{R}^n 内の超平面全体の集合上の ϕ 可測関数になり、

$$L(c) = \int i_c d\phi$$

が成り立つ。

この定理の証明は後で与えることにする。 a と b の間を通る超平面に限って線分 \overline{ab} と交点の一つだけ持ち、 a, b を結ぶ曲線 c とは一点以上の交点を持つので、 $i_{\overline{ab}} \leq i_c$ が成り立つ。これより、

$$L(c) = \int i_c d\phi \geq \int i_{\overline{ab}} d\phi = L(\overline{ab}).$$

したがって、線分 \overline{ab} が最も短くなる。等号 $L(c) = L(\overline{ab})$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 ϕ に関してほとんどすべての超平面に関して $i_c = i_{\overline{ab}}$ が成り立つことになり c は線分 \overline{ab} に一致する。

注意 1.1.5 与えられた二点を結ぶ最も短い曲線を求める問題は、曲線の長さを定義できる空間で考えることができる。たとえば、完備 Riemann 多様体の与えられた二点を結ぶ最短曲線は、必ず存在し測地線になることが Hopf-Rinow の定理によって知られている。ただし、二点に対してそれらを結ぶ最短曲線がただ一つに決まるとは限らない。Euclid 空間内の標準的な球面の北極と南極を結ぶ最短曲線は、子午線の全体になり無数に存在する。断面曲率が非正の完備単連結 Riemann 多様体の二点を結ぶ最短曲線は、ただ一つの測地線になることが、Hadamard の定理によって知られている。

1.2 平面の面積最小性

定理 1.2.1 \mathbb{R}^3 内の平面 \mathbb{R}^2 の C^∞ 級単純閉曲線 c を境界に持つ面積最小の曲面は \mathbb{R}^2 内の c に囲まれた平面の領域 $H(c)$ に限る。

面積非増加レトラクションによる証明

$$P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}; (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

によって写像 P を定める。

$$|P(u)| \leq |u| \quad (u \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立ち、等号成立のための必要十分条件は u が \mathbb{R}^2 に含まれることである。任意のベクトル $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対して、 u, v の張る平行四辺形の面積を $A(u, v)$ で表すことにすると

$$A(u, v) = [|u|^2|v|^2 - (u \bullet v)^2]^{1/2}.$$

ここで \bullet は内積を表す。通常内積を表す記号は、 (\cdot, \cdot) または $\langle \cdot, \cdot \rangle$ がよく使われるが、これらの記号は別の意味で使うので、この講義では \bullet を内積を表す記号として使う。すると、

$$A(P(u), P(v)) \leq A(u, v) \quad (u, v \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立ち、 $A(u, v) \neq 0$ のときの等号成立のための必要十分条件は u と v が \mathbb{R}^2 に含まれることである。これをまず示しておこう。 u, v が線形従属のときは両辺ともに 0 になり等号が成り立つ。 u, v が線形独立のときは、 u, v の張る部分ベクトル空間を V で表す。 V の正規直交基底 e_1, e_2 を $P(e_1) \bullet P(e_2) = 0$ を満たすようにとる。すると

$$\begin{aligned} A(P(u), P(v)) &= A(P(e_1), P(e_2)) \cdot A(u, v) \\ &= [|P(e_1)|^2|P(e_2)|^2 - (P(e_1) \bullet P(e_2))^2]^{1/2} A(u, v) \\ &= |P(e_1)| \cdot |P(e_2)| \cdot A(u, v) \\ &\leq A(u, v). \end{aligned}$$

等号成立の必要十分条件は e_1, e_2 が \mathbb{R}^2 に含まれることになり、すなわち、 u, v が \mathbb{R}^2 に含まれることになる。

\mathbb{R}^3 内の曲面 S の局所座標近傍 $(U; s, t)$ をとる。 U の位置ベクトルを p で表すと U の面積 $A(U)$ は

$$\begin{aligned} A(U) &= \int A \left(\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t} \right) ds dt \geq \int A \left(P \frac{\partial p}{\partial s}, P \frac{\partial p}{\partial t} \right) ds dt \\ &= \int A \left(\frac{\partial Pp}{\partial s}, \frac{\partial Pp}{\partial t} \right) ds dt = A(PU). \end{aligned}$$

等号成立の必要十分条件は $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t}$ が \mathbb{R}^2 に含まれることであり、これは U が \mathbb{R}^2 に平行な平面の一部になることである。これより曲面全体についても $A(PS) \leq A(S)$ が成り立ち、等号成立のための必要十分条件は、 S が \mathbb{R}^2 に平行な平面の一部になることである。

c を境界に持つ曲面 S をとる。このとき $H(c) \subset PS$ となるので、

$$A(S) \geq A(PS) \geq A(H(c)).$$

したがって、 $H(c)$ が面積最小になる。等号成立の必要十分条件は、 S が \mathbb{R}^2 に含まれ、かつ $H(c)$ に含まれることになるので、 S が $H(c)$ に一致することである。 P が面積非増加レトラクションである。

キャリブレーションによる証明 \mathbb{R}^3 上の二次微分形式 $dx \wedge dy$ は閉微分形式になっている。任意のベクトル $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$(dx \wedge dy)(u, v) \leq A(P(u), P(v)) \leq A(u, v)$$

となり、 $A(u, v) \neq 0$ のときの等号成立のための必要十分条件は u と v が \mathbb{R}^2 に含まれかつ u, v の定める向きが \mathbb{R}^2 の正の向きになることである。

\mathbb{R}^3 内の向きの付いた曲面 S の正の向きの局所座標近傍 $(U; s, t)$ をとる。 U の位置ベクトルを p で表すと U の面積 $A(U)$ は

$$A(U) = \int A \left(\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t} \right) ds dt \geq \int (dx \wedge dy) \left(\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t} \right) ds dt = \int_U dx \wedge dy.$$

等号成立の必要十分条件は $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t}$ が \mathbb{R}^2 に含まれかつこれらの定める向きが \mathbb{R}^2 の正の向きになることである。これは U が \mathbb{R}^2 に平行な平面の一部になり \mathbb{R}^2 と同じ向きになることである。これより曲面全体についても $A(S) \geq \int_S dx \wedge dy$ が成り立ち、等号成立のための必要十分条件は、 S が \mathbb{R}^2 に平行な平面の一部になり \mathbb{R}^2 と同じ向きになることである。

c を境界に持つ向きの付いた曲面 S をとる。 S と $H(c)$ の境界は一致しているので Stokes の定理より

$$A(S) \geq \int_S dx \wedge dy = \int_{H(c)} dx \wedge dy = A(H(c)).$$

したがって、 $H(c)$ が面積最小になる。等号成立の必要十分条件は、 S が \mathbb{R}^2 に含まれ、かつ \mathbb{R}^2 と同じ向きになるので、 S が $H(c)$ に一致することである。 $dx \wedge dy$ がキャリブレーションである。

Crofton の公式による証明 この証明では次の Crofton の公式を利用する。

定理 1.2.2 (Crofton の公式) \mathbb{R}^3 内の直線全体の集合にある測度 ϕ が存在し、 \mathbb{R}^3 内の曲線 S に対して $l \mapsto i_S(l) = \text{card}(S \cap l)$ は \mathbb{R}^3 内の直線全体の集合上の ϕ 可測関数になり、

$$A(S) = \int i_S d\phi$$

が成り立つ。

この定理の証明は後で与えることにする。 $H(c)$ を通る直線は $H(c)$ と交点を一つだけ持ち、 c を境界に持つ曲面 S とは一点以上の交点を持つので、 $i_{H(c)} \leq i_S$ が成り立つ。これより、

$$A(S) = \int i_S d\phi \geq \int i_{H(c)} d\phi = A(H(c)).$$

したがって、 $H(c)$ が面積最小になる。等号 $A(S) = A(H(c))$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 ϕ に関してほとんどすべての直線に関して $i_S = i_{H(c)}$ が成り立つことになり S は $H(c)$ に一致する。

注意 1.2.3 曲線の長さは曲線の速度ベクトルの長さを積分することによって定義されている。曲面の面積は局所座標が定める接ベクトルの張る平行四辺形の面積を積分することによって定義される。このように曲線の長さでは接ベクトルの長さを考えればよかったのに対して、曲面の面積では接ベクトルの平行四辺形の面積を考える必要がある。ベクトル u, v の張る平行四辺形の面積 $A(u, v)$ は

$$A(u, v) = [|u|^2|v|^2 - (u \bullet v)^2]^{1/2}.$$

で定まるが、これは

$$A(u, v) = \left(\det \begin{bmatrix} u \bullet u & u \bullet v \\ v \bullet u & v \bullet v \end{bmatrix} \right)^{1/2}$$

となる。この等式から平行四辺形の面積は行列式、さらにはベクトル空間の外積代数と関係があることが察せられる。このことから、次の第二章ではベクトル空間の外積代数に内積を導入し、一般次元の面積を定めるための準備をする。また、キャリブレーションによる証明の部分で現れた不等式

$$(dx \wedge dy)(u, v) \leq A(u, v)$$

は外積代数に定まる通常のノルムとは異なる余体積量というノルムと関係があり、これも第二章で扱う。そして、第三章で多様体上の測度と積分を定義し、第二章の準備を使って一般次元の面積を定めその性質を考察する。

第 2 章 外積代数の内積とノルム

第 1 章で扱った面積非増加レトラクション、キャリブレーションと Crofton の公式を一般的に定式化し活用するために、外積代数の復習をした後、外積代数に内積を定義し内積から定まるノルムとは異なる幾何学的な意味を持つノルムを定義する。

この章では特に断らない限り有限次元実ベクトル空間を単にベクトル空間ということにする。

2.1 外積代数

定義 2.1.1 ベクトル空間 V のテンソル代数 $\otimes_* V$ 内で、 $x \in V$ に対応する $\otimes_2 V$ の元 $x \otimes x$ 全体の生成する両側イデアルを $\mathfrak{A}V$ で表す。剰余代数

$$\wedge_* V = \otimes_* V / \mathfrak{A}V$$

を V の外積代数と呼ぶ。

$$\mathfrak{A}V = \bigoplus_{m=2}^{\infty} (\otimes_m V \cap \mathfrak{A}V)$$

となり、 $\mathfrak{A}V$ は同次イデアルになる。そこで、

$$\wedge_m V = \otimes_m V / (\otimes_m V \cap \mathfrak{A}V)$$

とおくと

$$\wedge_* V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \wedge_m V.$$

特に $\wedge_0 V = \mathbf{R}$ と $\wedge_1 V = V$ が成り立つ。 $\wedge_m V$ の元を V の m ベクトルと呼ぶ。 $\wedge_* V$ の積を外積と呼び、 \wedge で表す。 $v_1, \dots, v_m \in V$ に対して、 $v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in \otimes_m V$ の自然な射影 $\otimes_* V \rightarrow \wedge_* V$ による像は、

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_m \in \wedge_m V$$

になる。さらに、この外積全体が $\wedge_m V$ を生成する。

命題 2.1.2 ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \rightarrow V'$ は $\wedge_* V$ から $\wedge_* V'$ への単位元を保つ代数準同型写像 $\wedge_* f$ に一意的に拡張され、 $\wedge_* f$ は線形写像 $\wedge_m f : \wedge_m V \rightarrow \wedge_m V'$ の直和になる。

命題 2.1.3 n 次元ベクトル空間 V の外積代数 $\wedge_* V$ は 2^n 次元になる。 V の基底 e_1, \dots, e_n をとる。

$$\Lambda(n, m) = \{\lambda : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \lambda \text{ は単調増加}\}$$

とし、 $\lambda \in \Lambda(n, m)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda(1)} \wedge e_{\lambda(2)} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda(m)}$$

とおく。すると、 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は $\wedge_m V$ の基底になる。これより、 $m \leq n$ のときは

$$\dim \wedge_m V = \binom{n}{m}$$

が成り立ち、 $m > n$ のときは $\wedge_m V = \{0\}$ が成り立つ。

定義 2.1.4 $\{1, \dots, n\}$ の置換全体の群を \mathfrak{S}_n で表す。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned} N(\sigma) &= \text{card}\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\} \\ \text{index}(\sigma) &= (-1)^{N(\sigma)} \end{aligned}$$

によって $\text{index}(\sigma)$ を定め、 $\text{index}(\sigma)$ を σ の指数と呼ぶ。 \mathfrak{S}_{p+q} の元 σ であって

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$$

を満たすものを (p, q) 型シャッフルと呼び、 (p, q) 型シャッフル全体の集合を $\text{Sh}(p, q)$ で表す。

例 2.1.5 V の元 u_1, \dots, u_p と $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)} = \text{index}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。さらに p 次正方形行列 $A = (A_j^i)$ に対して $v_j = A_j^i u_i$ とおくと

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。 V が n 次元のとき、線形写像 $f : V \rightarrow V$ に対して

$$(\wedge_n f)\xi = \det(f) \cdot \xi \quad (\xi \in \wedge_n V)$$

が成り立つ。

定義 2.1.6 V と W をベクトル空間とする。 m 線形写像 $f : V^m \rightarrow W$ が次の条件を満たすとき、 f を交代 m 線形写像と呼ぶ。ある $i \neq j$ について $v_i = v_j$ となる $v_1, \dots, v_m \in V$ について $f(v_1, \dots, v_m) = 0$ が成り立つ。 V^m から W への交代 m 線形写像全体の成すベクトル空間を

$$\wedge^m(V, W)$$

で表す。

命題 2.1.7 ベクトル空間 V, W に対して

$$\wedge^m(V, W) \cong \text{Hom}(\wedge_m V, W)$$

が成り立つ。 $\wedge^0(V, W) = W$ とすると、上の線形同型は $m = 0$ のときも成り立つ。

証明 $f \in \wedge^m(V, W)$ に対して、 f は線形写像 $g : \otimes_m V \rightarrow W$ を誘導する。

$$f(v_1, \dots, v_m) = g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \quad (v_1, \dots, v_m \in V)$$

となるので、 f が交代 m 線形写像であることから、定義 2.1.1 で定めた $\mathfrak{A}V$ は $\ker g$ に含まれる。よって $g : \otimes_m V \rightarrow W$ は $h : \wedge_m V \rightarrow W$ を誘導し、

$$(*) \quad f(v_1, \dots, v_m) = h(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) \quad (v_1, \dots, v_m \in V)$$

が成り立つ。これによって、線形写像

$$\wedge^m(V, W) \rightarrow \text{Hom}(\wedge_m V, W); f \mapsto h$$

が定まる。逆に $h \in \text{Hom}(\wedge_m V, W)$ に対して $(*)$ によって $f \in \wedge^m(V, W)$ を定めると、これは上の線形写像の逆写像になる。したがって、

$$\wedge^m(V, W) \cong \text{Hom}(\wedge_m V, W)$$

が成り立つ。 $m = 0$ のときは

$$\wedge^0(V, W) = W \cong \text{Hom}(\mathbf{R}, W) = \text{Hom}(\wedge_0 V, W).$$

注意 2.1.8 ベクトル空間 V の外積代数は

$$\wedge_* V = \bigoplus_{m=0}^{\dim V} \wedge_m V$$

という直和分解を持つので、

$$\text{Hom}^m(\wedge_* V, W) = \{f \in \text{Hom}(\wedge_* V, W) \mid f|_{\wedge_n V} = 0 \ (n \neq m)\}$$

とおくと、

$$\text{Hom}(\wedge_m V, W) \cong \text{Hom}^m(\wedge_* V, W)$$

が成り立つ。

$$\wedge^*(V, W) = \bigoplus_{m=0}^{\dim V} \wedge^m(V, W)$$

によって $\wedge^*(V, W)$ を定める。 $W = \mathbf{R}$ のときは、単に

$$\wedge^m(V, \mathbf{R}) = \wedge^m V, \quad \wedge^*(V, \mathbf{R}) = \wedge^* V$$

と表す。

定義 2.1.9 $\wedge^m V$ の元を m コベクトルと呼ぶ。

定義 2.1.10 ベクトル空間 V, W から定まる $\wedge_m V, \text{Hom}(\wedge_m V, W)$ について、

$$\langle \xi, h \rangle = h(\xi) \quad (\xi \in \wedge_m V, h \in \text{Hom}(\wedge_m V, W))$$

という記号を使うことにする。上で示した線形同型写像によって $h \in \text{Hom}(\wedge_m V, W)$ に対応する $f \in \wedge^m(V, W)$ や $k \in \text{Hom}^m(\wedge_* V, W)$ についても、同様の記号 $\langle \xi, h \rangle = \langle \xi, f \rangle = \langle \xi, k \rangle$ を使うことにする。

定義 2.1.11 ベクトル空間の間の線形写像 $f: V \rightarrow V'$ とベクトル空間 W に対して

$$\langle \xi, \wedge^m(f, W)\phi \rangle = \langle (\wedge_m f)\xi, \phi \rangle \quad (\xi \in \wedge_m V, \phi \in \wedge^m(V', W))$$

によって線形写像

$$\wedge^m(f, W): \wedge^m(V', W) \rightarrow \wedge^m(V, W)$$

を定め、

$$\wedge^*(f, W) = \bigoplus_{m=0}^{\dim V} \wedge^m(f, W): \wedge^*(V', W) \rightarrow \wedge^*(V, W)$$

によって $\wedge^*(f, W)$ を定める。 $W = \mathbf{R}$ のとき、単に $\wedge^*(f, \mathbf{R}) = \wedge^* f$ と書く。

例 2.1.12 n 次元ベクトル空間 V の線形変換 $f: V \rightarrow V$ に対して

$$(\wedge^n f)\phi = \det(f) \cdot \phi \quad (\phi \in \wedge^n(V, W))$$

が成り立つ。

定義 2.1.13 ベクトル空間 V と \mathbf{R} 上の代数 W に対して、 $\wedge^*(V, W)$ に以下で定める積を導入し、 $\wedge^*(V, W)$ を V の W 係数交代代数と呼ぶ。 $\alpha \in \wedge^p(V, W)$, $\beta \in \wedge^q(V, W)$ に対して $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{p+q}(V, W)$ は $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$ に対して次の等式によって定義する。

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p, q)} \text{index}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

命題 2.1.14 ベクトル空間 V と \mathbf{R} 上の代数 W に対して、 V の W 係数交代代数 $\wedge^*(V, W)$ は次の性質を持つ。

- (1) W の積が結合律を満たすとき、 $\wedge^*(V, W)$ の積 \wedge も結合律を満たす。
- (2) W の積が可換のとき、 $\wedge^*(V, W)$ の積 \wedge は次数付代数として交代的になる。すなわち、

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \quad (\alpha \in \wedge^p(V, W), \beta \in \wedge^q(V, W))$$

が成り立つ。

(3) W の単位元は $\wedge^*(V, W)$ の単位元にもなる。

(4) ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \rightarrow V'$ の誘導する線形写像

$$\wedge^*(f, W) : \wedge^*(V', W) \rightarrow \wedge^*(V, W)$$

は代数準同型写像になる。

命題 2.1.15 V をベクトル空間とし、 W を \mathbb{R} 上の結合律を満たす代数とする。各 $1 \leq i \leq m$ に対して $\alpha_i \in \wedge^{p(i)}(V, W)$ をとり、

$$s(i) = \sum_{j \leq i} p(j)$$

とおく。 $\mathfrak{S}_{s(m)}$ の元 σ であって、各 $1 \leq i \leq m$ について

$$\sigma(s(i-1) + 1) < \cdots < \sigma(s(i))$$

を満たすものを $(p(1), \dots, p(m))$ 型シャッフルと呼び、 $(p(1), \dots, p(m))$ 型シャッフル全体の集合を $\text{Sh}(p(1), \dots, p(m))$ で表す。このとき、 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \in \wedge^{s(m)}(V, W)$ は $v_1, \dots, v_{s(m)} \in V$ に対して次の等式を満たす。

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)(v_1, \dots, v_{s(m)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p(1), \dots, p(m))} \text{index}(\sigma) \prod_{i=1}^m \alpha_i(v_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots, v_{\sigma(s(i))}). \end{aligned}$$

特に $p(i) = 1$ ($1 \leq i \leq m$) の場合は

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{index}(\sigma) \prod_{i=1}^m \alpha_i(v_{\sigma(i)})$$

が成り立ち、 $j < i$ のとき $\alpha_i(v_j) = 0$ となるならば、

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)(v_1, \dots, v_m) = \prod_{i=1}^m \alpha_i(v_i)$$

が成り立つ。

命題 2.1.16 V をベクトル空間とする。 $\wedge^1 V$ の線形独立な元 $\omega_1, \dots, \omega_n$ をとる。 $m \leq n$ と $\lambda \in \Lambda(n, m)$ に対して

$$\omega_\lambda = \omega_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\lambda(m)}$$

とおくと、 $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は $\wedge^m V$ において線形独立になる。さらに、 $\dim V = n$ のときは、これは $\wedge^m V$ の基底になり、

$$\dim \wedge^m V = \dim \wedge_m V = \binom{n}{m}$$

が成り立つ。

証明 $e_j \in V$ ($1 \leq j \leq m$) を

$$\langle e_j, \omega_i \rangle = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases}$$

となるようにとる。このとき、命題 2.1.15 を使うと、 $\lambda, \mu \in \Lambda(n, m)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle e_\mu, \omega_\lambda \rangle &= (\omega_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\lambda(m)})(e_{\mu(1)}, \dots, e_{\mu(m)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{index}(\sigma) \prod_{i=1}^m \omega_{\lambda(i)}(e_{\mu\sigma(i)}) \\ &= \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu) \\ 0 & (\lambda \neq \mu). \end{cases} \end{aligned}$$

$\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ の線形独立性を示すために

$$\sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} a_\lambda \omega_\lambda = 0$$

と仮定する。 e_μ に作用させると、上で得た等式より

$$0 = \left\langle e_\mu, \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} a_\lambda \omega_\lambda \right\rangle = a_\mu$$

となり、 $a_\mu = 0$ が成り立つ。したがって、 $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は線形独立になる。

命題 2.1.7 より

$$\wedge^m V = \wedge^m(V, \mathbf{R}) \cong \text{Hom}(\wedge_m V, \mathbf{R})$$

となるので、 $\dim V = n$ の場合は、命題 2.1.3 より、

$$\dim \wedge^m V = \dim \wedge_m V = \binom{n}{m}$$

が成り立つ。これより、 $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は $\wedge^m V$ の基底になる。

定義 2.1.17 V を n 次元ベクトル空間とする。 e_1, \dots, e_n を V の基底とし、 $\omega_1, \dots, \omega_n$ をその双対基底とする。命題 2.1.3 と命題 2.1.16 より、

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \langle e_\lambda, \phi \rangle \omega_\lambda & (\phi \in \wedge^m V), \\ \xi &= \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \langle \xi, \omega_\lambda \rangle e_\lambda & (\xi \in \wedge_m V) \end{aligned}$$

という線形結合による表示を得る。 $\langle e_\lambda, \phi \rangle$ と $\langle \xi, \omega_\lambda \rangle$ をそれぞれ ϕ と ξ の Grassmann 座標という。

$$\phi_\lambda = \langle e_\lambda, \phi \rangle, \quad \xi_\lambda = \langle \xi, \omega_\lambda \rangle$$

と表すこともある。

命題 2.1.18 n 次元ベクトル空間 V に対して恒等写像 $\text{Hom}(V, \mathbf{R}) = \wedge^1 V$ を単位元を保つ代数準同型写像

$$\Omega : \wedge_* \text{Hom}(V, \mathbf{R}) \rightarrow \wedge^* V$$

に一意的に拡張することができる。 Ω は代数同型写像になり $\dim \wedge_m \text{Hom}(V, \mathbf{R}) = \binom{n}{m}$ が成り立つ。

証明 恒等写像

$$\Omega : \text{Hom}(V, \mathbf{R}) \rightarrow \wedge^1 V \subset \wedge^* V ; \alpha \mapsto \alpha$$

は単位元を保つ代数準同型写像

$$\Omega : \wedge_* \text{Hom}(V, \mathbf{R}) \rightarrow \wedge^* V$$

に一意的に拡張される。 $\text{Hom}(V, \mathbf{R})$ の基底 $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ をとる。命題 2.1.3 より、

$$\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$$

は $\wedge_m \text{Hom}(V, \mathbf{R})$ の基底になる。これらの元の Ω による像は、命題 2.1.16 より線形独立になる。特に、 Ω は単射になる。さらに

$$\dim \wedge_m \text{Hom}(V, \mathbf{R}) = \binom{n}{m} = \dim \wedge^m V$$

となり、 $\Omega : \wedge_m \text{Hom}(V, \mathbf{R}) \rightarrow \wedge^m V$ は同型写像になる。

定義 2.1.19 V をベクトル空間とする。 $\xi \in \wedge_m V$ が単純 m ベクトルであるとは、

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \quad (v_1, \dots, v_m \in V)$$

となることである。 $\xi \neq 0$ のとき v_1, \dots, v_m の張る部分ベクトル空間を $T(\xi)$ で表す。 $\phi \in \wedge^m V$ が単純 m コベクトルであるとは、

$$\phi = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \quad (\omega_1, \dots, \omega_m \in \wedge^1 V)$$

となることである。

命題 2.1.20 V をベクトル空間とする。このとき双線形写像 $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ と V から $\wedge^1 V$ への線形写像 β は

$$B(x, y) = \langle x, \beta(y) \rangle \quad (x, y \in V)$$

によって一対一に対応する。この対応によって $V \times V$ から \mathbf{R} への双線形写像全体の空間と、 $\text{Hom}(V, \wedge^1 V)$ は線形同型になる。 B が対称のとき、 B に対応する $\beta \in \text{Hom}(V, \wedge^1 V)$ を polarity と呼ぶ。

証明 $\beta \in \text{Hom}(V, \wedge^1 V)$ に対して

$$B(x, y) = \langle x, \beta(y) \rangle \quad (x, y \in V)$$

で定まる B は双線形になる。

逆に、双線形写像 $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、上の等式で定まる β は $\text{Hom}(V, \wedge^1 V)$ の元になる。

定め方より、この対応は一対一になり、 $V \times V$ から \mathbf{R} への双線形写像全体の空間と $\text{Hom}(V, \wedge^1 V)$ は線形同型になる。

定義 2.1.21 内積を持つベクトル空間 V, V' の間の線形写像 $f : V \rightarrow V'$ が

$$f(x) \bullet f(y) = x \bullet y \quad (x, y \in V)$$

を満たすとき、 f を直交単射と呼ぶ。

$$\mathbf{O}(n, m) = \{f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n \mid f \text{ は直交単射}\}$$

と表す。 $\mathbf{O}(n) = \mathbf{O}(n, n)$ は直交群になる。

定義 2.1.22 V を内積を持つ有限次元ベクトル空間とする。 V の内積に対応する polarity $V \rightarrow \wedge^1 V$ が直交単射になるような内積が $\wedge^1 V$ に一意に定まる。今後は $\wedge^1 V$ にはこの内積が定まっているとする。

定義 2.1.23 V, V' を内積を持つベクトル空間とする。線形写像 $f : V \rightarrow V'$ が直交単射になるとき、 $f^* : V' \rightarrow V$ を直交射影と呼ぶ。ここで、 f^* は f の共役線形写像を表す。すなわち、

$$(fv) \bullet v' = v \bullet (f^*v') \quad (v \in V, v' \in V')$$

によって f^* を定める。 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への直交射影の全体を

$$\mathbf{O}^*(n, m) = \{f^* \mid f \in \mathbf{O}(n, m)\}$$

で表す。

命題 2.1.24 V を内積を持つ有限次元ベクトル空間とする。内積に対応する polarity を $\beta : V \rightarrow \wedge^1 V$ で表す。 β が誘導する単位元を保つ代数準同型写像 $\gamma : \wedge_* V \rightarrow \wedge^* V$ は線形写像 $\gamma_m : \wedge_m V \rightarrow \wedge^m V$ の直和になる。 $\wedge^m V$ は $\wedge^1(\wedge_m V)$ と線形同型になり、 γ_m とこの線形同型との合成を $\beta_m : \wedge_m V \rightarrow \wedge^1(\wedge_m V)$ で表す。このとき、

$$\langle \xi, \beta_m(\eta) \rangle = \langle \eta, \beta_m(\xi) \rangle \quad (\xi, \eta \in \wedge_m V)$$

が成り立つ。これより、 β_m を polarity とする双線形写像 $\bullet : \wedge_m V \times \wedge_m V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\xi \bullet \eta = \langle \xi, \beta_m(\eta) \rangle \quad (\xi, \eta \in \wedge_m V)$$

によって定めると、これは $\wedge_m V$ の内積になる。

証明 最初の等式の両辺は $\xi, \eta \in \wedge_m V$ に関して双線形になるので、 ξ, η が単純 m ベクトルのときに等式を証明すればよい。そこで、 $v_i, w_i \in V$ をとり、

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m, \quad \eta = w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$$

とおく。

$$\begin{aligned} \langle \xi, \beta_m(\eta) \rangle &= \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_m, \beta(w_1) \wedge \cdots \wedge \beta(w_m) \rangle \\ &\quad (\text{命題 2.1.15 より}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{index}(\sigma) \prod_{i=1}^m \langle v_{\sigma(i)}, \beta(w_i) \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{index}(\sigma) \prod_{i=1}^m v_{\sigma(i)} \bullet w_i \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{index}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^m v_j \bullet w_{\sigma^{-1}(j)} \\ &= \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_m, \beta(v_1) \wedge \cdots \wedge \beta(v_m) \rangle \\ &= \langle \eta, \beta_m(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

そこで、 e_1, \dots, e_n を V の正規直交基底とすると、 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は $\wedge_m V$ の基底になる。さらに、上の計算より、これは正規直交基底になる。よって $\wedge_m V$ の元

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \xi_\lambda e_\lambda, \quad \eta = \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \eta_\lambda e_\lambda$$

に対して、

$$\xi \bullet \eta = \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \xi_\lambda \eta_\lambda$$

となり、 $\xi = \eta \neq 0$ の場合は

$$\xi \bullet \xi = \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} (\xi_\lambda)^2 > 0.$$

したがって、これは $\wedge_m V$ の内積になる。

定義 2.1.25 以後、特に断わらない限り、内積を持つ有限次元実ベクトル空間 V の外積代数 $\wedge_m V$ の内積は命題 2.1.24で示した \bullet を考えることにする。また、これらの内積から定まるノルムも $\|\cdot\|$ で表す。

系 2.1.26 命題 2.1.24の条件のもとで、 V の元 u_1, \dots, u_m と v_1, \dots, v_m に対して、

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \bullet (v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \det(u_i \bullet v_j)_{1 \leq i, j \leq m}$$

が成り立つ。特に、ある v_j がすべての u_i と直交しているときは、

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \bullet (v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = 0$$

が成り立つ。さらに、 V の正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとると、 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n, m)\}$ は $\wedge_m V$ の正規直交基底になる。

例 2.1.27 注意 1.2.3で述べたことより、ベクトル u, v の張る平行四辺形の面積 $A(u, v)$ は

$$A(u, v) = \left(\det \begin{bmatrix} u \bullet u & u \bullet v \\ v \bullet u & v \bullet v \end{bmatrix} \right)^{1/2} = |u \wedge v|$$

を満たし、外積代数の内積が定めるノルムを使って表すことができる。

命題 2.1.28 V を内積を持つ有限次元実ベクトル空間とする。 V の元 u_1, \dots, u_m に対して、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_m| \leq \prod_{i=1}^m |u_i|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、 u_1, \dots, u_m が互いに直交していることである。

証明 u_i から v_i と w_i を以下のように帰納的に構成する。まず $v_1 = 0$, $w_1 = u_1$ とおく。 v_{i-1} , w_{i-1} まで定まっていると仮定して、 v_i と w_i を次のように定める。

$$u_i = v_i + w_i, \quad v_i \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}, \quad w_i \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}^\perp$$

となるように v_i と w_i をとる。すると、

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_i = w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

が成り立つ。これを i に関する帰納法で示しておく。 $i = 1$ のときは定め方から $u_1 = w_1$ が成り立つ。 $i - 1$ のときに上の等式が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge u_i &= u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge (v_i + w_i) \\ &= u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i-1} \wedge w_i \\ &= w_1 \wedge \cdots \wedge w_{i-1} \wedge w_i. \end{aligned}$$

特に

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_m = w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$$

となる。さらに $i < j$ のとき $u_i \bullet w_j = 0$ となることに注意しておく。系 2.1.26 を使うと

$$\begin{aligned} |u_1 \wedge \cdots \wedge u_m|^2 &= (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \bullet (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \\ &= (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \bullet (w_1 \wedge \cdots \wedge w_m) \\ &= \det(u_i \bullet w_j) \\ &= \det \begin{bmatrix} u_1 \bullet w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ u_m \bullet w_1 & \cdots & \cdots & u_m \bullet w_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^m u_i \bullet w_i \\
&= \prod_{i=1}^m w_i \bullet w_i \\
&\leq \prod_{i=1}^m u_i \bullet u_i \\
&= \prod_{i=1}^m |u_i|^2.
\end{aligned}$$

したがって、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_m| \leq \prod_{i=1}^m |u_i|$$

が成り立つ。

等号が成立するための必要十分条件は、すべての i について $w_i \bullet w_i = u_i \bullet u_i$ が成り立つことだから、これは $v_i = 0$ と同値になり、 u_1, \dots, u_m が互いに直交していることである。

命題 2.1.29 V を内積を持つ有限次元ベクトル空間とする。 $\xi \in \wedge_p V$ と $\eta \in \wedge_q V$ をとる。 ξ, η がともに単純ベクトルのときは

$$|\xi \wedge \eta| \leq |\xi| \cdot |\eta|$$

が成り立つ。 ξ, η がどちらも 0 ではないとき、等号成立のための必要十分条件は $T(\xi)$ と $T(\eta)$ が直交することである。一般には

$$|\xi \wedge \eta| \leq \binom{p+q}{p}^{1/2} |\xi| \cdot |\eta|$$

が成り立つ。

証明 まず ξ, η がともに単純ベクトルの場合を考える。どちらかが 0 の場合は証明すべき不等式の等号が成り立つので、どちらも 0 ではない場合を考えればよい。直交系 u_1, \dots, u_p であって $\xi = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ を満たすものをとる。このとき、命題 2.1.28 の等号成立条件より $|\xi| = |u_1| \cdots |u_p|$ が成り立つ。 V を直交直和

$$V = T(\eta) \oplus T(\eta)^\perp$$

に分解する。この分解に応じて

$$u_i = v_i + w_i \quad (v_i \in T(\eta), w_i \in T(\eta)^\perp)$$

と和に分解する。このとき $|w_i| \leq |u_i|$ が成り立つ。系 2.1.26 より、

$$\begin{aligned}
|\xi \wedge \eta| &= |u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \wedge \eta| \\
&= |(v_1 + w_1) \wedge \cdots \wedge (v_p + w_p) \wedge \eta|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \wedge \eta| \\
&= |w_1 \wedge \cdots \wedge w_p| \cdot |\eta| \\
&\quad (\text{命題 2.1.28 より}) \\
&\leq |w_1| \cdots |w_p| \cdot |\eta| \\
&\leq |u_1| \cdots |u_p| \cdot |\eta| \\
&= |\xi| \cdot |\eta|.
\end{aligned}$$

等号成立のための必要十分条件は w_1, \dots, w_m が互いに直交していて、各 i について $|w_i| = |u_i|$ が成り立つことである。この条件は、各 i について $v_i = 0$ となることと同値になり、さらに、 $T(\xi)$ が $T(\eta)$ と直交することと同値になる。

次に一般の $\xi \in \wedge_p V$, $\eta \in \wedge_q V$ について考える。 V の正規直交基底をとり、

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,p)} \xi_\lambda e_\lambda, \quad \eta = \sum_{\mu \in \Lambda(n,q)} \eta_\mu e_\mu$$

と表す。これらの積を表示するために、 $\nu \in \Lambda(n, p+q)$ に対して

$$\begin{aligned}
S(\nu) &= \{(\lambda, \mu) \in \Lambda(n, p) \times \Lambda(n, q) \mid e_\lambda \wedge e_\mu = \pm e_\nu\} \\
&= \{(\lambda, \mu) \in \Lambda(n, p) \times \Lambda(n, q) \mid \text{im } \lambda \cup \text{im } \mu = \text{im } \nu\}
\end{aligned}$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned}
\xi \wedge \eta &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda(n,p) \\ \mu \in \Lambda(n,q)}} \xi_\lambda \eta_\mu e_\lambda \wedge e_\mu \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda(n, p+q)} \sum_{(\lambda, \mu) \in S(\nu)} \pm \xi_\lambda \eta_\mu e_\nu.
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
|\xi \wedge \eta|^2 &= \sum_{\nu \in \Lambda(n, p+q)} \left(\sum_{(\lambda, \mu) \in S(\nu)} \pm \xi_\lambda \eta_\mu \right)^2 \\
&\leq \sum_{\nu \in \Lambda(n, p+q)} \left(\sum_{(\lambda, \mu) \in S(\nu)} |\xi_\lambda \eta_\mu| \right)^2 \\
&\quad (\text{Cauchy-Schwarz の不等式より}) \\
&\leq \sum_{\nu \in \Lambda(n, p+q)} \text{card } S(\nu) \sum_{(\lambda, \mu) \in S(\nu)} (\xi_\lambda \eta_\mu)^2 \\
&= \binom{p+q}{p} \sum_{\nu \in \Lambda(n, p+q)} \sum_{(\lambda, \mu) \in S(\nu)} \xi_\lambda^2 \eta_\mu^2 \\
&\leq \binom{p+q}{p} \sum_{\lambda \in \Lambda(n, p)} \xi_\lambda^2 \sum_{\mu \in \Lambda(n, q)} \eta_\mu^2 \\
&= \binom{p+q}{p} |\xi|^2 \cdot |\eta|^2.
\end{aligned}$$

したがって、

$$|\xi \wedge \eta| \leq \binom{p+q}{p}^{1/2} |\xi| \cdot |\eta|$$

が成り立つ。

注意 2.1.30 命題 2.1.24の設定のもとで、合成

$$\wedge_m V \xrightarrow{\wedge_m \beta} \wedge_m \wedge^1 V \xrightarrow{\Omega} \wedge^m V$$

は線形同型 $\gamma_m : \wedge_m V \rightarrow \wedge^m V$ に一致する。(Ω の定義と性質については命題 2.1.18 参照。)

さらに、合成

$$\wedge_m V \xrightarrow{\gamma_m} \wedge^m V \xrightarrow{\cong} \wedge^1 \wedge_m V$$

は線形同型 $\beta_m : \wedge_m V \rightarrow \wedge^1 \wedge_m V$ に一致する。そこで、線形同型写像

$$\begin{aligned} \wedge_m \beta & : \wedge_m V \rightarrow \wedge_m \wedge^1 V \\ \gamma_m & : \wedge_m V \rightarrow \wedge^m V \\ \beta_m & : \wedge_m V \rightarrow \wedge^1 \wedge_m V \end{aligned}$$

が直交線形写像になるように $\wedge_m \wedge^1 V, \wedge^m V, \wedge^1 \wedge_m V$ に内積を定めると、

$$\Omega : \wedge_m \wedge^1 V \rightarrow \wedge^m V, \quad \wedge^m V \cong \wedge^1 \wedge_m V$$

も直交線形写像になる。

V の基底 e_1, \dots, e_n と $\wedge^1 V$ の双対基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ をとる。

$$\langle e_i, \beta(e_j) \rangle = e_i \bullet e_j = \delta_{ij}$$

が成り立つので、 $\beta(e_j) = \omega_j$ となることがわかる。これより、任意の $m \leq n$ と $\lambda \in \Lambda(n, m)$ に対して $\gamma_m(e_\lambda) = \omega_\lambda$ が成り立つ。

$\xi \in \wedge_m V$ と $\phi \in \wedge^m V$ に対して $\phi = \gamma_m(\eta)$ を満たす $\eta \in \wedge_m V$ をとると、

$$\langle \xi, \phi \rangle = \langle \xi, \gamma_m(\eta) \rangle = \xi \bullet \eta = \gamma_m(\xi) \bullet \gamma_m(\eta) = \gamma_m(\xi) \bullet \phi$$

となるので、Cauchy-Schwarz の不等式より、

$$|\langle \xi, \phi \rangle| = |\gamma_m(\xi) \bullet \phi| \leq |\gamma_m(\xi)| \cdot |\phi| = |\xi| \cdot |\phi|.$$

したがって、

$$|\langle \xi, \phi \rangle| \leq |\xi| \cdot |\phi| \quad (\xi \in \wedge_m V, \phi \in \wedge^m V)$$

が成り立ち、Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件より、等号成立の必要十分条件は、 $\gamma_m(\xi)$ と ϕ が線形従属になることである。

2.2 体積量と余体積量

前節で $\wedge_m V$ や $\wedge^m V$ に内積 \bullet およびそのノルム $\|\cdot\|$ を定めたが、この節では別のノルムを定める。

定義 2.2.1 $\phi \in \wedge^m V$ に対して、 ϕ の余体積量を次の等式で定める。

$$\|\phi\| = \sup\{\langle \xi, \phi \rangle \mid \xi \in \wedge_m V, \xi \text{ は単純}, |\xi| \leq 1\}.$$

$\xi \in \wedge_m V$ に対して、 ξ の体積量を次の等式で定める。

$$\|\xi\| = \sup\{\langle \xi, \phi \rangle \mid \phi \in \wedge^m V, \|\phi\| \leq 1\}.$$

定義 2.2.2 V をベクトル空間とする。 V 内の m 次元部分ベクトル空間全体を Grassmann 多様体と呼び、 $G(V, m)$ で表す。 T は V の 0 ではない単純 m ベクトル全体から $G(V, m)$ への全射になる。 0 ではない単純 m ベクトル ξ, η がこの写像に関して同値になるための必要十分条件は、ある $0 \neq c \in \mathbb{R}$ が存在し $\xi = c\eta$ が成り立つことである。 V 内の m 次元有向部分ベクトル空間全体を有向 Grassmann 多様体と呼び、 $G_0(V, m)$ で表す。 V の 0 ではない単純 m ベクトル ξ に対して、部分ベクトル空間 $T(\xi)$ に ξ から定まる向きを付けた有向部分ベクトル空間を $T_0(\xi)$ で表すことにすると、 T_0 は V の 0 ではない単純 m ベクトル全体から $G_0(V, m)$ への全射になる。 0 ではない単純 m ベクトル ξ, η がこの写像に関して同値になるための必要十分条件は、ある $0 < c \in \mathbb{R}$ が存在し $\xi = c\eta$ が成り立つことである。 V の直交群 $O(V)$ は $G(V, m)$ と $G_0(V, m)$ に推移的に作用するので、 $G(V, m)$ と $G_0(V, m)$ はコンパクトになる。 $V = \mathbb{R}^n$ の場合は、簡単のため

$$G(\mathbb{R}^n, m) = G(n, m), \quad G_0(\mathbb{R}^n, m) = G_0(n, m)$$

と表すことにする。

命題 2.2.3 $\wedge^m V$ 上の余体積量と $\wedge_m V$ 上の体積量は、これらベクトル空間上のノルムになる。

$\phi \in \wedge^m V$ に対して

$$|\phi| \geq \|\phi\| \geq \binom{\dim V}{m}^{-1/2} |\phi|$$

が成り立つ。 $|\phi| = \|\phi\|$ が成り立つための必要十分条件は、 ϕ が単純になることである。

$\xi \in \wedge_m V$ に対して

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \binom{\dim V}{m}^{1/2} |\xi|$$

が成り立つ。 $|\xi| = \|\xi\|$ が成り立つための必要十分条件は、 ξ が単純になることである。

$\phi \in \wedge^m V$ に対して

$$\|\phi\| = \sup\{\langle \xi, \phi \rangle \mid \xi \in \wedge_m V, \|\xi\| \leq 1\}$$

が成り立つ。

補題 2.2.4 V を有限次元ベクトルとし、 $S \subset V$ を V の原点对称コンパクト生成系とする。 $\alpha \in \wedge^1 V$ に対して、

$$\|\alpha\| = \sup\{\langle x, \alpha \rangle \mid x \in S\}$$

によって $\|\alpha\|$ を定めると、これは $\wedge^1 V$ のノルムになる。

証明 $r \in \mathbf{R}$ と $\alpha \in \wedge^1 V$ をとる。 r の符号を $\varepsilon = \pm 1$ で表す。 $r = 0$ のときは $\varepsilon = 1$ とする。このとき $r = \varepsilon|r|$ が成り立つ。任意の $x \in S$ に対して $\varepsilon x \in S$ となるので、

$$\langle x, r\alpha \rangle = |r|\langle \varepsilon x, \alpha \rangle \leq |r| \cdot \|\alpha\|.$$

これより $\|r\alpha\| \leq |r| \cdot \|\alpha\|$ が成り立つ。 S はコンパクトだから、 $\langle x_1, \alpha \rangle = \|\alpha\|$ を満たす $x_1 \in S$ をとることができる。このとき $\varepsilon x_1 \in S$ となり、

$$\langle \varepsilon x_1, r\alpha \rangle = |r|\langle x_1, \alpha \rangle = |r| \cdot \|\alpha\|.$$

したがって、 $\|r\alpha\| = |r| \cdot \|\alpha\|$ が成り立つ。

$\|\alpha\| = 0$ とすると、 α は S 上 0 になり、 S が V の生成系であることから $\alpha = 0$ となる。

$\alpha, \beta \in \wedge^m V$ と $x \in S$ に対して

$$\langle x, \alpha + \beta \rangle = \langle x, \alpha \rangle + \langle x, \beta \rangle \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

となるので、

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

が成り立つ。以上より、 $\|\cdot\|$ は $\wedge^1 V$ 上のノルムになる。

命題 2.2.3 の証明 余体積量の定義に現れる単純ベクトルの集合は、

$$\{\xi \in \wedge_m V \mid \xi \text{ は単純, } |\xi| \leq 1\} = \{t\xi \mid \xi \in \mathbf{G}_0(V, m), 0 \leq t \leq 1\}$$

となり、 $\mathbf{G}_0(V, m)$ はコンパクトだから、上の集合もコンパクトになる。さらに、原点对称であり、 $\wedge_m V$ の生成系になる。よって補題 2.2.4 より、余体積量は $\wedge^m V$ 上のノルムになる。

これより

$$\{\phi \in \wedge^m V \mid \|\phi\| \leq 1\}$$

は $\wedge^m V$ の原点对称コンパクト生成系になり、補題 2.2.4 より、体積量は $\wedge^m V$ 上のノルムになる。

$\dim V = n$ としておく。 V の正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとっておく。まず

$$(*) \quad \langle \xi, \phi \rangle \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi| \cdot \|\phi\| \quad (\xi \in \wedge_m V, \phi \in \wedge^m V)$$

が成り立つことを示しておく。

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} \xi_\lambda e_\lambda$$

とおくと、

$$|\xi|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,m)} \xi_\lambda^2$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned} \langle \xi, \phi \rangle^2 &= \left(\sum_{\lambda \in \Lambda(n,m)} \xi_\lambda \langle e_\lambda, \phi \rangle \right)^2 \\ &\quad (\text{Cauchy-Schwarz の不等式より}) \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda(n,m)} \xi_\lambda^2 \sum_{\mu \in \Lambda(n,m)} \langle e_\mu, \phi \rangle^2 \\ &\leq |\xi|^2 \binom{n}{m} \|\phi\|^2. \end{aligned}$$

これより、

$$\langle \xi, \phi \rangle \leq |\langle \xi, \phi \rangle| \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi| \cdot \|\phi\|$$

を得る。

注意 2.1.30 より

$$\langle \xi, \phi \rangle \leq |\xi| \cdot |\phi|$$

が成り立つので、余体積量の定義より、 $\|\phi\| \leq |\phi|$ を得る。

ϕ に対して

$$\langle \xi_1, \phi \rangle = |\phi|, \quad |\xi_1| = 1$$

を満たす $\xi_1 \in \wedge_m V$ をとる。不等式 (*) より、

$$|\phi| = \langle \xi_1, \phi \rangle \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi_1| \cdot \|\phi\| = \binom{n}{m}^{1/2} \|\phi\|.$$

これより、

$$\|\phi\| \geq \binom{n}{m}^{-1/2} |\phi|$$

を得る。

ϕ は単純であると仮定する。上で使った注意 2.1.30 の不等式の等号成立条件より、ある単純 m ベクトル ξ が存在し

$$|\xi| = 1, \quad \langle \xi, \phi \rangle = |\phi|$$

を満たす。これより $|\phi| \leq \|\phi\|$ となる。 $|\phi| \geq \|\phi\|$ はいつでも成り立つので、 $|\phi| = \|\phi\|$ を得る。

逆に $|\phi| = \|\phi\|$ と仮定すると、ある単純 m ベクトル ξ が存在し

$$|\xi| = 1, \quad \langle \xi, \phi \rangle = \|\phi\| = |\phi|$$

を満たす。上で使った注意 2.1.30 の不等式の等号成立条件より、 $\gamma_m(\xi)$ と ϕ が線形従属になり、特に、 ϕ も単純になる。

$\xi \in \wedge_m V$ に対して $\langle \xi, \phi_1 \rangle = |\xi| \cdot |\phi_1|$ を満たす $0 \neq \phi_1 \in \wedge^m V$ をとる。余体積量の評価と体積量の定義より、

$$|\xi| \cdot \|\phi_1\| \leq |\xi| \cdot |\phi_1| = \langle \xi, \phi_1 \rangle \leq \|\xi\| \cdot \|\phi_1\|.$$

これより、

$$|\xi| \leq \|\xi\|$$

が成り立つ。

$\|\phi\| \leq 1$ を満たす $\phi \in \wedge^m V$ に対して、(*) より

$$\langle \xi, \phi \rangle \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi| \cdot \|\phi\| \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi|.$$

したがって

$$\|\xi\| \leq \binom{n}{m}^{1/2} |\xi|$$

が成り立つ。

ξ は単純であると仮定する。ある $\phi \in \wedge^m V$ が存在し

$$\|\phi\| \leq 1, \quad \langle \xi, \phi \rangle = \|\xi\|$$

を満たす。 ξ は単純だから余体積量の定義から

$$\|\xi\| = \langle \xi, \phi \rangle \leq |\xi| \cdot \|\phi\| \leq |\xi|.$$

$\|\xi\| \geq |\xi|$ はいつでも成り立つので、 $|\xi| = \|\xi\|$ を得る。

逆に $|\xi| = \|\xi\|$ と仮定する。 $\xi \neq 0$ の場合を考えればよい。 $|\xi| \leq \|\xi\|$ の証明の際に示した不等式

$$|\xi| \cdot \|\phi_1\| \leq |\xi| \cdot |\phi_1| = \langle \xi, \phi_1 \rangle \leq \|\xi\| \cdot \|\phi_1\|$$

の等号が成り立つので、 $\|\phi_1\| = |\phi_1|$ となり、 ϕ_1 は単純になる。さらに、 $|\xi| \cdot |\phi_1| = \langle \xi, \phi_1 \rangle$ が成り立つので、上で使った注意 2.1.30 の不等式の等号成立条件より、 $\gamma_m(\xi)$ と ϕ が線形従属になり、 ξ も単純になる。

$\phi \in \wedge^m V$ とする、体積量の定義より $\|\xi\| \leq 1$ を満たす $\xi \in \wedge_m V$ に対して

$$\langle \xi, \phi \rangle \leq \|\xi\| \cdot \|\phi\| \leq \|\phi\|$$

となるので、

$$\|\phi\| \geq \sup\{\langle \xi, \phi \rangle \mid \xi \in \wedge_m V, \|\xi\| \leq 1\}.$$

上で示したことより

$$\{\xi \in \wedge_m V \mid \xi \text{ は単純, } |\xi| \leq 1\} \subset \{\xi \in \wedge_m V \mid \|\xi\| \leq 1\}$$

だから

$$\|\phi\| = \sup\{\langle \xi, \phi \rangle \mid \xi \in \wedge_m V, \|\xi\| \leq 1\}.$$

が成り立つ。

定義 2.2.5 \mathbb{R}^n 内の空でない部分集合 X に対して、 X を含む凸集合の中で包含関係に関して最小になる凸集合を X の凸包と呼び、 $H(X)$ で表す。 \mathbb{R}^n 内の空でない部分集合 X_1, \dots, X_k に対して、

$$H(X_1, \dots, X_k) = H(X_1 \cup \dots \cup X_k)$$

と表す。 $X_i = \{x_i\}$ のときは、

$$H(x_1, \dots, x_k) = H(X_1, \dots, X_k) = H(\{x_1, \dots, x_k\})$$

と表すことにする。すなわち、 $H(x_1, \dots, x_k)$ は x_1, \dots, x_k の張る単体に一致する。

補題 2.2.6 次のように $\wedge_m V$ の部分集合 C と S を定めると、 C は S の凸包になる。

$$\begin{aligned} C &= \{\xi \in \wedge_m V \mid \|\xi\| \leq 1\} \\ S &= \{\xi \in \wedge_m V \mid \xi \text{ は単純、} |\xi| \leq 1\} \end{aligned}$$

証明 S の凸包は $\wedge_m V$ 内の S を含むすべての閉半空間の共通部分になる。 S を含む閉半空間は、任意の $\xi \in S$ に対して $\langle \xi, \phi \rangle \leq 1$ を満たす $\phi \in \wedge_m V$ によって、

$$\{\xi \in \wedge_m V \mid \langle \xi, \phi \rangle \leq 1\}$$

と表すことができる。ここで、 ϕ の条件は命題 2.2.3 の最後の等式より $\|\phi\| \leq 1$ と同値になる。 S の凸包を $H(S)$ で表すと、

$$\begin{aligned} H(S) &= \bigcap_{\|\phi\| \leq 1} \{\xi \in \wedge_m V \mid \langle \xi, \phi \rangle \leq 1\} \\ &= \{\xi \in \wedge_m V \mid \|\xi\| \leq 1\} \\ &= C. \end{aligned}$$

定理 2.2.7 (Carathéodory) X を \mathbb{R}^n 内の空でない部分集合とする。このとき、

$$H(X) = \cup \{H(x_1, \dots, x_s) \mid x_i \in X, s \leq n+1\}$$

が成り立つ。 X の連結成分の個数が n 個以下のときには、

$$H(X) = \cup \{H(x_1, \dots, x_s) \mid x_i \in X, s \leq n\}$$

が成り立つ。

命題 2.2.8 $\xi \in \wedge_m V$ に対して、単純 m ベクトル ξ_1, \dots, ξ_N が存在し、

$$\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad \|\xi\| = \sum_{i=1}^N |\xi_i|, \quad N \leq \binom{\dim V}{m}$$

を満たす。これより

$$\|\xi\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N |\xi_i| \mid \xi_i \text{ は単純、} \xi = \sum_{i=1}^N \xi_i \right\}$$

が成り立つ。

証明 $\dim V = n$ とおく。 $\xi = 0$ の場合は明らかだから、 $\xi \neq 0$ の場合を考えればよい。さらに、 $\|\xi\| = 1$ の場合をまず考える。 $\xi \in C$ であり S は連結だから、補題 2.2.6 と定理 2.2.7 から $\xi_1, \dots, \xi_N \in S$ と実数 c_1, \dots, c_N が存在し

$$\xi = \sum_{i=1}^N c_i \xi_i, \quad c_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N c_i = 1, \quad N \leq \binom{n}{m}$$

が成り立つ。

$$1 = \|\xi\| \leq \sum_{i=1}^N \|c_i \xi_i\| = \sum_{i=1}^N |c_i| \|\xi_i\| = \sum_{i=1}^N c_i \|\xi_i\| \leq \sum_{i=1}^N c_i = 1$$

となるので、すべての等号が成り立ち

$$\|\xi\| = \sum_{i=1}^N |c_i| \|\xi_i\|$$

を得る。

$\|\xi\| \neq 1$ の場合は $\xi/\|\xi\|$ に上の結果を適用すればよい。

$\xi \in \wedge_m V$ を

$$\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (\xi_i \text{ は単純})$$

と表したとき、

$$\|\xi\| \leq \sum_{i=1}^N \|\xi_i\| = \sum_{i=1}^N |\xi_i|.$$

よって

$$\|\xi\| \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^N |\xi_i| \mid \xi_i \text{ は単純、 } \xi = \sum_{i=1}^N \xi_i \right\}$$

が成り立つ。上で示したことから等号が成り立つ。

命題 2.2.9 $\xi \in \wedge_p V$ と $\eta \in \wedge_q V$ に対して

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$$

が成り立つ。 $\phi \in \wedge^p V$ と $\psi \in \wedge^q V$ に対して

$$\|\phi \wedge \psi\| \leq \binom{p+q}{p} \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

が成り立つ。さらに ϕ と ψ のうちの少なくとも一つが単純のとき、

$$\|\phi \wedge \psi\| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

が成り立つ。

証明 $\xi \in \wedge_p V$ と $\eta \in \wedge_q V$ に対して、命題 2.2.8 より単純ベクトル ξ_i と η_j が存在し

$$\xi = \sum_{i=1}^M \xi_i, \quad \|\xi\| = \sum_{i=1}^M |\xi_i|, \quad \eta = \sum_{j=1}^N \eta_j, \quad \|\eta\| = \sum_{j=1}^N |\eta_j|$$

を満たす。

$$\xi \wedge \eta = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i \wedge \eta_j$$

となり、

$$\begin{aligned} \|\xi \wedge \eta\| &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\xi_i \wedge \eta_j\| = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\xi_i \wedge \eta_j| \\ &\quad (\text{命題 2.1.29 より}) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\xi_i| \cdot |\eta_j| = \sum_{i=1}^M |\xi_i| \sum_{j=1}^N |\eta_j| \\ &= \|\xi\| \cdot \|\eta\|. \end{aligned}$$

$|\xi| = 1$ を満たす単純ベクトル $\xi \in \wedge_{p+q} V$ に対して

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}$$

となる正規直交系 v_1, \dots, v_{p+q} をとる。命題 2.1.15 より、

$$\begin{aligned} \langle \xi, \phi \wedge \psi \rangle &= \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}, \phi \wedge \psi \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} \text{index}(\sigma) \langle v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)}, \phi \rangle \langle v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}, \psi \rangle \\ &\leq \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} |\langle v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)}, \phi \rangle| \cdot |\langle v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}, \psi \rangle| \\ &\leq \binom{p+q}{p} \|\phi\| \cdot \|\psi\|. \end{aligned}$$

したがって、

$$\|\phi \wedge \psi\| \leq \binom{p+q}{p} \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

を得る。

さらに ϕ と ψ のうちの少なくとも一つが単純の場合を考える。 ϕ が単純であると仮定しても一般性は失われない。 $|\xi| = 1$ を満たす単純ベクトル $\xi \in \wedge_{p+q} V$ を任意にとる。 $T(\xi)$ の包含写像を $f : T(\xi) \rightarrow V$ で表す。 ϕ は単純だから $(\wedge^p f)\phi$ も単純になる。そこで、 $\wedge^1 T(\xi)$ の正規直交系 $\omega_1, \dots, \omega_p$ と実数 c をとり

$$(\wedge^p f)\phi = c\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$$

と表すことができる。 $\omega_1, \dots, \omega_p$ を $\wedge^1 T(\xi)$ の正規直交基底 $\omega_1, \dots, \omega_{p+q}$ に延長し、その双対正規直交基底 e_1, \dots, e_{p+q} が

$$\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{p+q}$$

を満たすようにする。このとき、

$$\|\phi\| \geq |\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_p, \phi \rangle| = |c|.$$

さらに

$$\begin{aligned} \langle \xi, \phi \wedge \psi \rangle &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} \text{index}(\sigma) \langle e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}, \phi \rangle \langle e_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p+q)}, \psi \rangle \\ &= \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_p, \phi \rangle \langle e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{p+q}, \psi \rangle \\ &\leq |\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_p, \phi \rangle| \cdot |\langle e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{p+q}, \psi \rangle| \\ &\leq |c| \cdot \|\psi\| \\ &\leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|. \end{aligned}$$

これより $|\xi| = 1$ となる任意の $\xi \in \wedge_{p+q} V$ に対して

$$\langle \xi, \phi \wedge \psi \rangle \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

となり、

$$\|\phi \wedge \psi\| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

が成り立つ。

定義 2.2.10 V を複素ベクトル空間とする。実双線形写像 $H : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ が次の条件を満たすとき、 H を V 上の Hermite 内積と呼ぶ。

$$\begin{aligned} H(v, iw) &= iH(v, w) & (v, w \in V) \\ H(w, v) &= \overline{H(v, w)} & (v, w \in V) \\ H(v, v) &> 0 & (v \in V, v \neq 0). \end{aligned}$$

命題 2.2.11 複素ベクトル空間 V 上の Hermite 内積 H を実数値双線形写像 A, B によって

$$H = B + iA$$

と分解すると、 B は V 上の内積になり (以後 \bullet で表す)、 A は V 上の交代二次形式になる。さらに、

$$\begin{aligned} |cv| &= |c| \cdot |v| & (c \in \mathbf{C}, v \in V) \\ |H(v, w)| &\leq |v| \cdot |w| & (v, w \in V) \end{aligned}$$

が成り立ち、二番目の不等式の等号成立の必要十分条件は v と w が複素線形従属になることである。

証明 定め方より、 A, B はどちらも実数値双線形写像になる。 $v, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned} B(w, v) + \mathbf{i}A(w, v) &= H(w, v) \\ &= \overline{H(v, w)} \\ &= B(v, w) - \mathbf{i}A(v, w) \end{aligned}$$

となり、

$$B(w, v) = B(v, w), \quad A(w, v) = -A(v, w).$$

すなわち、 B は対称になり、 A は交代になる。さらに $0 \neq v \in V$ に対して

$$0 < H(v, v) = B(v, v)$$

だから、 B は V 上の内積になり、 A は V 上の交代二次形式になる。

$c \in \mathbf{C}, v \in V$ に対して

$$|cv|^2 = H(cv, cv) = \bar{c}cH(v, v) = |c|^2 \cdot |v|^2$$

となるので、 $|cv| = |c| \cdot |v|$ を得る。

$v, w \in V$ に対して $cH(v, w) \in \mathbf{R}$ となり $|c| = 1$ を満たす $c \in \mathbf{C}$ をとる。

$$cH(v, w) = H(v, cw) = v \bullet (cw)$$

となるので、Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} |H(v, w)| &= |cH(v, w)| = |v \bullet (cw)| \\ &\leq |v| \cdot |cw| = |v| \cdot |c| \cdot |w| \\ &= |v| \cdot |w|. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件より、上の不等式の等号成立の必要十分条件は、ある $|c| = 1$ を満たす $c \in \mathbf{C}$ が存在し v と cw が実線形従属になることである。この条件は v と w が複素線形従属になることと同値になる。

例 2.2.12 \mathbf{C}^ν 上の Hermite 内積

$$H(v, w) = \sum_{j=1}^{\nu} \bar{v}_j w_j \quad (v, w \in \mathbf{C}^\nu)$$

を考える。 H から命題 2.2.11によって定まる内積 B は、標準的な線形同型 $\mathbf{C}^\nu \cong \mathbf{R}^{2\nu}$ によって $\mathbf{R}^{2\nu}$ の標準的内積に対応する。次に、 H から定まる交代二次形式 A について考える。 \mathbf{C}^ν の通常の複素座標関数を $Z_1, \dots, Z_\nu \in \wedge^1(\mathbf{C}^\nu, \mathbf{C})$ で表す。 A の定め方より、 $v, w \in \mathbf{C}^\nu$ に対

して

$$\begin{aligned}
 A(v, w) &= \frac{\mathbf{i}}{2} (\overline{H(v, w)} - H(v, w)) \\
 &= \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{j=1}^{\nu} (v_j \bar{w}_j - \bar{v}_j w_j) \\
 &= \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{j=1}^{\nu} (Z_j(v) \bar{Z}_j(w) - Z_j(w) \bar{Z}_j(v)) \\
 &= \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{j=1}^{\nu} (Z_j \wedge \bar{Z}_j)(v, w).
 \end{aligned}$$

したがって、

$$A = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{j=1}^{\nu} Z_j \wedge \bar{Z}_j \in \wedge^2(\mathbf{C}^{\nu}, \mathbf{R})$$

となる。

命題 2.2.13 (Wirtinger の不等式) 例 2.2.12 の設定のもとで、 $V = \mathbf{C}^{\nu}$ とおく。 $\mu \leq \nu$ に対して A の μ 乗 $A^{\mu} \in \wedge^{2\mu} V$ を考える。単純ベクトル $\xi \in \wedge_{2\mu} V$ に対して

$$\langle \xi, A^{\mu} \rangle \leq \mu! |\xi|$$

が成り立ち、等号成立のための必要十分条件は、ある $v_1, \dots, v_{\mu} \in V$ が存在し

$$\xi = v_1 \wedge (\mathbf{i}v_1) \wedge \dots \wedge v_{\mu} \wedge (\mathbf{i}v_{\mu})$$

となることである。したがって $\|A^{\mu}\| = \mu!$ が成り立つ。

証明 単純ベクトル $\xi \in \wedge_{2\mu} V$ は $|\xi| = 1$ の場合を考えればよい。

まず $\mu = 1$ の場合を証明する。正規直交系 v, w を $\xi = v \wedge w$ となるようにとる。このとき

$$H(v, w) = v \bullet w + \mathbf{i}A(v, w) = \mathbf{i}A(v, w)$$

となるので、 $A(v, w) = H(\mathbf{i}v, w)$ となり、

$$\langle \xi, A \rangle = A(v, w) = H(\mathbf{i}v, w) = (\mathbf{i}v) \bullet w \leq |\mathbf{i}v| \cdot |w| = |v| \cdot |w| = 1.$$

等号成立のための必要十分条件は、 $\mathbf{i}v = w$ となる。

次に一般の場合 $\mu > 1$ について考える。 $f : T(\xi) \rightarrow V$ を包含写像とする。 $(\wedge^2 f)A \in \wedge^2 T(\xi)$ に交代二次形式の標準形を適用すると、 $\wedge^1 T(\xi)$ の正規直交基底 $\omega_1, \dots, \omega_{2\mu}$ と非負の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu}$ が存在し

$$(\wedge^2 f)A = \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

が成り立つ。 $\omega_1, \dots, \omega_{2\mu}$ に関する $T(\xi)$ の双対基底を $e_1, \dots, e_{2\mu}$ とすると、これは正規直交基底になる。

$$\xi = \varepsilon e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2\mu}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

が成り立つ。 $\mu = 1$ の場合に示したことから、各 j について $\lambda_j = A(e_{2j-1}, e_{2j}) \leq 1$ が成り立つ。 $\wedge^* f$ は代数準同型だから、

$$\begin{aligned} (\wedge^{2\mu} f)A^\mu &= ((\wedge^2 f)A)^\mu \\ &= \mu! \lambda_1 \cdots \lambda_\mu \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2\mu}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \langle \xi, A^\mu \rangle &= \langle \xi, (\wedge^{2\mu} f)A^\mu \rangle \\ &= \langle \varepsilon e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2\mu}, \mu! \lambda_1 \cdots \lambda_\mu \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2\mu} \rangle \\ &= \varepsilon \mu! \lambda_1 \cdots \lambda_\mu \\ &\leq \mu!. \end{aligned}$$

等号成立の必要十分条件は、 $\varepsilon = 1$ かつ $\lambda_j = 1$ となることであり、 $\mu = 1$ の場合の結果から、これは $e_{2j} = i e_{2j-1}$ と同値になる。

以上の $\langle \xi, A^\mu \rangle$ の上からの評価と、等号を成立させる単純ベクトルの存在から、 $\|A^\mu\| = \mu!$ が成り立つ。

2.3 二次元体積量と二次余体積量

二次外積空間 $\wedge^2 V, \wedge_2 V$ を扱う際の基本的な道具は、次の補題系 2.3.1 である。

補題 2.3.1 $\phi \in \wedge^2 V$ に対して、 V の正規直交基底 e_1, \dots, e_n とその双対基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 、正の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在し

$$(*) \quad \phi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

が成り立つ。

命題 2.3.2 $\phi \in \wedge^2 V$ が $(*)$ の表示を持つとき、

$$\|\phi\| = \max\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq m\}$$

が成り立つ。

$$\bar{V} = \text{span}\{e_{2j-1}, e_{2j} \mid \lambda_j = \|\phi\|\}$$

とする。

$$M(\phi) = \{\xi \in \wedge_2 V \mid \xi \text{ は単純、} |\xi| = 1, \langle \xi, \phi \rangle = \|\phi\|\}$$

とおく。 $\langle u \wedge v, \phi \rangle = (Ju) \bullet v$ ($u, v \in V$) によって交代線形変換 $J: V \rightarrow V$ を定めると、

$$M(\phi) = \{u \wedge (Ju) / \|\phi\| \mid u \in \bar{V}, |u| = 1\}$$

が成り立つ。 $k = \text{card}\{j \mid \lambda_j = \|\phi\|\}$ とおくと、 $\dim \bar{V} = 2k$ となり、 $k \leq m \leq [n/2]$ が成り立つ。 $I = \|\phi\|^{-1} J|_{\bar{V}}$ は \bar{V} の直交複素構造になり、 $M(\phi)$ は \bar{V} 内の正の向きの複素 1 次元部分ベクトル空間全体の成す複素 $k-1$ 次元複素射影空間 $\mathbf{P}_{k-1}^{\mathbb{C}}(\bar{V}, I)$ とみなすことができる。

証明 線形変換 $J: V \rightarrow V$ は

$$\begin{aligned} J e_{2j-1} &= \lambda_j e_{2j}, & J e_{2j} &= -\lambda_j e_{2j-1} & (1 \leq j \leq m) \\ J e_i &= 0 & & & (2m+1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

を満たす。 ϕ を調べるため、まず J の性質を調べる。

$$\begin{aligned} V_j &= \text{span}\{e_{2j-1}, e_{2j}\} & (1 \leq j \leq m) \\ V_0 &= \text{span}\{e_{2m+1}, \dots, e_n\} \end{aligned}$$

とおくと、各 V_j は J 不変になり、

$$V = \bigoplus_{j=0}^m V_j$$

は直交直和になる。

$$\begin{aligned} |Jv| &= \lambda_j |v| & (v \in V_j, 1 \leq j \leq m) \\ Jv &= 0 & (v \in V_0) \end{aligned}$$

となることに注意しておく。 $v \in V$ を

$$v = \sum_{j=0}^m v_j \quad (v_j \in V_j)$$

と分解すると

$$|v|^2 = \sum_{j=0}^m |v_j|^2$$

となり、

$$Jv = \sum_{j=1}^m Jv_j, \quad Jv_j \in V_j.$$

これより $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ とおくと、

$$|Jv|^2 = \sum_{j=1}^m |Jv_j|^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 |v_j|^2 \leq \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^2 |v_j|^2 \leq \bar{\lambda}^2 \sum_{j=0}^m |v_j|^2 = \bar{\lambda}^2 |v|^2.$$

したがって

$$|Jv| \leq \bar{\lambda} |v| \quad (v \in V)$$

となり、

$$|Jv| = \bar{\lambda}|v| \iff v \in \bar{V}$$

が成り立つ。

$|\xi| = 1$ を満たす単純ベクトル $\xi \in \wedge_2 V$ に対して、 $\xi = u \wedge v$ を満たす正規直交系 u, v をとる。

$$\begin{aligned} (**) \quad \langle \xi, \phi \rangle &= \langle u \wedge v, \phi \rangle = (Ju) \bullet v \\ &\leq |Ju| \cdot |v| \leq \bar{\lambda}|u| \cdot |v| \\ &= \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

これより $\|\phi\| \leq \bar{\lambda}$ を得る。

次に $\bar{\lambda} = \lambda_j$ となる j をとると、

$$\langle e_{2j-1} \wedge e_{2j}, \phi \rangle = \lambda_j = \bar{\lambda}$$

となり、

$$\|\phi\| = \bar{\lambda} = \max\{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq m\}$$

が成り立つ。

不等式 (**) において等号成立のための必要十分条件は、 $(Ju) \bullet v = |Ju| \cdot |v|$ かつ $|Ju| = \bar{\lambda}|u|$ が成り立つことであり、これは、 $v = Ju/\bar{\lambda}$ かつ $u \in \bar{V}$ となることと同値になる。したがって、

$$\begin{aligned} M(\phi) &= \{u \wedge (Ju)/\bar{\lambda} \mid u \in \bar{V}, |u| = 1\} \\ &= \{u \wedge (Ju)/\|\phi\| \mid u \in \bar{V}, |u| = 1\} \end{aligned}$$

を得る。

\bar{V} の定め方より $\dim \bar{V} = 2k$ が成り立ち、 $k \leq m \leq [n/2]$ となる。 $e_{2j-1} \in \bar{V}$ に対して

$$Je_{2j-1} = \|\phi\|e_{2j}, \quad Je_{2j} = -\|\phi\|e_{2j-1}$$

となるので、

$$Ie_{2j-1} = e_{2j}, \quad Ie_{2j} = -e_{2j-1}.$$

よって、 I は \bar{V} の直交複素構造になる。 I に関して \bar{V} は複素 k 次元複素ベクトル空間になる。上で求めた $M(\phi)$ の表示より、 $M(\phi)$ は \bar{V} 内の正の向きの複素 1 次元部分ベクトル空間全体の成す複素 $k-1$ 次元複素射影空間 $P_{k-1}^C(\bar{V}, I)$ とみなすことができる。

$\wedge^2 V$ においては、命題 2.2.3 よりもよい評価が得られる。等号成立もはっきりすることから、最良の評価になっている。

命題 2.3.3 $\phi \in \wedge^2 V$ に対して

$$|\phi| \geq \|\phi\| \geq \left[\frac{n}{2}\right]^{-1/2} |\phi|$$

が成り立つ。 $|\phi| = \|\phi\|$ が成り立つための必要十分条件は、 ϕ が単純になることである。 $\|\phi\| = [n/2]^{-1/2}|\phi|$ が成り立つための必要十分条件は、 $\wedge^1 V$ のある正規直交基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ が存在し

$$\phi = \|\phi\| \sum_{j=1}^{[n/2]} \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

が成り立つことである。

証明 不等式 $|\phi| \geq \|\phi\|$ および等号 $|\phi| = \|\phi\|$ の成立条件は、命題 2.2.3で証明済みである。

補題 2.3.1より、 $\wedge^1 V$ の正規直交基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ と正の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ によって

$$\phi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

と表示しておく。 $m \leq [n/2]$ となることに注意しておく。命題 2.3.2より、

$$\|\phi\| = \max\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq m\}$$

だから、

$$(*) \quad |\phi|^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \leq m \|\phi\|^2 \leq \left[\frac{n}{2}\right] \|\phi\|^2.$$

これより、

$$\|\phi\| \geq \left[\frac{n}{2}\right]^{-1/2} |\phi|$$

を得る。

不等式 (*) において等号成立の必要十分条件は、

$$\lambda_j = \|\phi\| \quad (1 \leq j \leq m), \quad m = \left[\frac{n}{2}\right]$$

だから、

$$\phi = \|\phi\| \sum_{j=1}^{[n/2]} \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

となる。

上で得た余体積量の評価から体積量の評価も得られる。ここでも次の補題が基本的な道具になる。これは補題 2.3.1と線形同型写像 $\gamma_2 \wedge_2 V \rightarrow \wedge^2 V$ から得られる。

補題 2.3.4 $\xi \in \wedge_2 V$ に対して、 V の正規直交基底 e_1, \dots, e_n とその双対基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 、正の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在し

$$(*) \quad \xi = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_{2j-1} \wedge e_{2j}$$

が成り立つ。

命題 2.3.5 $\xi \in \wedge_2 V$ が (*) の表示を持つとき、

$$\|\xi\| = \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

が成り立つ。

証明 $\phi \in \wedge^2 V$ に対して

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle e_{2j-1} \wedge e_{2j}, \phi \rangle \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j |e_{2j-1} \wedge e_{2j}| \cdot \|\phi\| = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \|\phi\|.$$

よって

$$\|\xi\| \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j.$$

そこで、

$$\phi = \sum_{j=1}^m \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j} \in \wedge^2 V$$

とおくと、命題 2.3.2 より $\|\phi\| = 1$ となり

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

が成り立つ。これより

$$\|\xi\| = \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

を得る。

$\wedge_2 V$ においては、命題 2.2.3 よりもよい評価が得られる。等号成立もはっきりすることから、最良の評価になっている。

命題 2.3.6 $\phi \in \wedge_2 V$ に対して

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \left[\frac{n}{2} \right]^{1/2} |\xi|$$

が成り立つ。 $|\xi| = \|\xi\|$ が成り立つための必要十分条件は、 ξ が単純になることである。 $\|\xi\| = [n/2]^{1/2} |\xi|$ が成り立つための必要十分条件は、 V のある正規直交基底 e_1, \dots, e_n が存在し

$$\xi = \left[\frac{n}{2} \right]^{-1} \|\xi\| \sum_{j=1}^{[n/2]} e_{2j-1} \wedge e_{2j}$$

が成り立つことである。

証明 不等式 $|\xi| \leq \|\xi\|$ および等号 $|\xi| = \|\xi\|$ の成立条件は、命題 2.2.3 で証明済みである。
補題 2.3.4 より、 V の正規直交基底 e_1, \dots, e_n と正の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ によって

$$\xi = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_{2j-1} \wedge e_{2j}$$

と表示しておく。 $m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ となることに注意しておく。命題 2.3.5 より、

$$\|\xi\| = \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

だから、

$$(*) \quad \|\xi\|^2 = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \right)^2 \leq m \cdot \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 = m \cdot |\xi|^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot |\xi|^2.$$

これより、

$$\|\xi\| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{1/2} |\xi|$$

を得る。

不等式 (*) において等号成立の必要十分条件は、

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m, \quad m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

だから、

$$\xi = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1} \|\xi\| \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} e_{2j-1} \wedge e_{2j}$$

となる。

注意 2.3.7 一般の次数の交代線形写像の余体積量の評価に比べると、二次交代線形写像またはその冪の余体積量の評価は精密なものを得ることができた。これは二次交代線形写像には標準形 (補題 2.3.1) があるためであり、三次以上の交代線形写像には補題 2.3.1 に対応するような標準形は知られていないようである。

第 3 章 多様体上の測度と積分

3.1 測度と積分

定義 3.1.1 集合 X に対して、 $2^X = \{A \mid A \subset X\}$ と書く。集合 X に対して、 ϕ が X 上の測度であるとは、 $\phi : 2^X \rightarrow \{t \in \bar{\mathbf{R}} \mid 0 \leq t \leq \infty\}$ であって、高々可算な部分集合 $F \subset 2^X$ が $A \subset \cup F$ を満たすならば、

$$\phi(A) \leq \sum_{B \in F} \phi(B)$$

を満たすことである。 $\cup \emptyset = \emptyset$ だから、 $\phi(\emptyset) \leq \sum_{B \in \emptyset} \phi(B) = 0$ となり、 $\phi(\emptyset) = 0$ が成り立つ。また、 $A \subset B \subset X$ に対して $\phi(A) \leq \phi(B)$ となる。

定義 3.1.2 ϕ を集合 X 上の測度とする。 $A \in 2^X$ に対して、 A が ϕ 可測集合であるとは、任意の $T \in 2^X$ に対して、

$$\phi(T) = \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A)$$

が成り立つことである。

例 3.1.3 集合 X の部分集合に対してその元の個数を対応させる測度を数え上げ測度と呼ぶ。数え上げ測度に関して、 X の任意の部分集合は可測になる。

例 3.1.4 集合 X 上の任意の測度に関して、 \emptyset と X は可測になる。 $\phi(\emptyset) = 0$ かつ任意の $\emptyset \neq A \subset X$ に対して $\phi(A) = 1$ となる測度 ϕ を考えると、 \emptyset と X 以外には ϕ 可測集合は存在しない。

定義 3.1.5 ϕ を集合 X 上の測度とする。 ϕ が次の条件を満たすとき、 ϕ を正則測度と呼ぶ。任意の $A \in 2^X$ に対してある ϕ 可測集合 B が存在し、 B は $A \subset B$ かつ $\phi(A) = \phi(B)$ を満たす。

定義 3.1.6 集合 X の部分集合族 $\emptyset \in F \subset 2^X$ に対して、 F が次の条件を満たすとき F を Borel 族と呼ぶ。

- (1) $A \in F$ ならば、 $X \sim A \in F$ が成り立つ。
- (2) $G \subset F$ かつ G が高々可算ならば、 $\cup G \in F$ が成り立つ。
- (3) $\emptyset \neq G \subset F$ かつ G が高々可算ならば、 $\cap G \in F$ が成り立つ。

例 3.1.7 集合 X と X 上の測度 ϕ に対して、 ϕ 可測集合全体は Borel 族になる。

定義 3.1.8 $S \subset 2^X$ に対して、

$$\cap\{F \subset 2^X \mid S \subset F, F \text{ は Borel 族}\}$$

は S を含む最小の Borel 族になる。これを S から生成された Borel 族と呼ぶ。

定義 3.1.9 X を位相空間とし、 \mathcal{O} をその開集合族とする。 \mathcal{O} から生成される Borel 族の元を Borel 集合と呼ぶ。

定義 3.1.10 ϕ を位相空間 X 上の測度とする。 X のすべての開集合は ϕ 可測になり、任意の $A \in 2^X$ に対してある Borel 集合 B が存在し、

$$A \subset B, \quad \phi(A) = \phi(B)$$

を満たすとき、 ϕ を Borel 正則測度という。

注意 3.1.11 ϕ を位相空間 X 上の Borel 正則測度とする。 ϕ 可測集合の族は Borel 族になり開集合族を含むので、Borel 集合の族を含む。したがって Borel 集合は ϕ 可測になる。

定義 3.1.12 ϕ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の測度とする。 ϕ が次の (1) から (3) を満たすとき、 ϕ を Radon 測度と呼ぶ。

(1) X のコンパクト部分集合 K に対して、 $\phi(K) < \infty$ が成り立つ。

(2) V を X の開集合とすると、 V は ϕ 可測集合になり、

$$\phi(V) = \sup\{\phi(K) \mid K \text{ はコンパクト, } K \subset V\}$$

が成り立つ。

(3) $A \in 2^X$ に対して、

$$\phi(A) = \inf\{\phi(V) \mid V \text{ は開集合, } A \subset V\}$$

が成り立つ。

命題 3.1.13 局所コンパクト Hausdorff 空間上の Radon 測度は Borel 正則になる。

定義 3.1.14 ϕ を集合 X 上の測度とし、 P を $A \subset X$ の各元に対する命題とする。

$$\phi(A \sim \{x \in A \mid P(x)\}) = 0$$

となるとき、 $P(x)$ が ϕ に関してほとんどすべての $x \in A$ に対して成り立つという。 X 上定義された写像 f, g に対して、 ϕ に関してほとんどすべての $x \in X$ について $f(x) = g(x)$ となるとき、 ϕ に関して f と g はほとんど等しいという。 $\phi(A \sim B) = 0$ のとき、 B は ϕ に関してほとんどすべての A を含むという。

定義 3.1.15 ϕ を集合 X 上の測度とし、 Y を位相空間とする。 f が X の ϕ に関してほとんどすべての点で定義された Y への写像であり、 E が Y の開集合ならば、 $f^{-1}(E)$ は X の ϕ 可測集合になるとき、 f を X から Y への ϕ 可測関数と呼ぶ。写像 f の定義域を $\text{dmn}f$ と書くことにする。

定義 3.1.16 ϕ を集合 X 上の測度とする。部分集合 $A \subset X$ に対して、 ϕ 可測集合の可算族 $\{A_i\}$ が存在し各 i について $\phi(A_i) < \infty$ となり $A = \cup_i A_i$ が成り立つとき、 A を可算 ϕ 可測集合と呼ぶ。 X の ϕ に関してほとんどすべての点で定義された位相ベクトル空間に値をとる関数 f に対して、 $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ が可算 ϕ 可測集合になるとき、 f を可算 ϕ 可測関数と呼ぶ。

以下では ϕ を集合 X 上の測度とする。

定義 3.1.17 u が次の条件をみたすとき、 u を X 上の ϕ 階段関数と呼ぶ。 u は X 上の \mathbb{R} に値をとる ϕ 可測関数であり、 $\text{card}(\text{im}u)$ は高々可算かつ

$$\sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot \phi(u^{-1}(y)) \in \bar{\mathbb{R}}.$$

ただしここでは、級数の和は絶対収束の場合だけを考え、 $0 \cdot \infty = 0$ とする。

定義 3.1.18 f を X の ϕ に関してほとんどすべての点で定義されていて $\bar{\mathbb{R}}$ に値を持つ関数とする。ほとんどすべての $x \in X$ に対して $f(x) \leq u(x)$ [$u(x) \leq f(x)$] を満たす ϕ 階段関数を f の上界関数 [下界関数] という。 f の ϕ 上積分 $\int^* f d\phi$ と ϕ 下積分 $\int_* f d\phi$ を

$$\int^* f d\phi = \inf \left\{ \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot \phi(u^{-1}(y)) \mid u \text{ は } f \text{ の上界関数} \right\}$$

$$\int_* f d\phi = \sup \left\{ \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot \phi(u^{-1}(y)) \mid u \text{ は } f \text{ の下界関数} \right\}$$

によって定義する。 ϕ 可測関数 f に対して、

$$\int^* f d\phi = \int_* f d\phi$$

が成り立つとき、 f を ϕ 積分確定関数と呼ぶ。上の値を f の ϕ 積分と呼び $\int f d\phi$ で表す。これは次のように表すこともある。

$$\int f(x) d\phi x, \quad \phi(f), \quad \phi_x[f(x)], \quad \langle f, \phi \rangle$$

さらに、 $\int f d\phi \in \mathbb{R}$ のとき、 f を ϕ 積分可能関数または ϕ 可積分関数と呼ぶ。

定理 3.1.19 次の (1) から (8) が成り立つ。

(1) f が ϕ 階段関数ならば、 f は ϕ 積分確定であり、

$$\int f d\phi = \sum_{y \in \mathbf{R}} y \cdot \phi(f^{-1}(y))$$

が成り立つ。

- (2) f が ϕ 可測関数であって ϕ に関してほとんどすべての $x \in X$ に対して $f(x) \geq 0$ となるならば、 f は ϕ 積分確定であり $\int f d\phi \geq 0$ が成り立つ。
- (3) f が ϕ 積分確定ならば、 $0 \neq c \in \mathbf{R}$ に対して cf も ϕ 積分確定であり $\int (cf) d\phi = c \int f d\phi$ が成り立つ。($0 \cdot \infty = 0$ とすれば $c = 0$ でもよい。)
- (4) f, g が ϕ 積分確定であり $\int f d\phi + \int g d\phi \in \mathbf{R}$ ならば、 $f+g$ も ϕ 積分確定であり $\int (f+g) d\phi = \int f d\phi + \int g d\phi$ が成り立つ。
- (5) f, g が ϕ 可測関数であり ϕ に関してほとんどすべての $x \in X$ に対して $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとする。このとき、 g が ϕ 積分確定であり $\int g d\phi < \infty$ であるか、または f が ϕ 積分確定であり $\int f d\phi > \infty$ であるならば、 f, g ともに ϕ 積分確定になり $\int f d\phi \leq \int g d\phi$ が成り立つ。
- (6) f が ϕ 積分確定ならば、 f^+ と f^- も ϕ 積分確定であり $\int f d\phi = \int f^+ d\phi - \int f^- d\phi$ が成り立つ。
- (7) f が ϕ 積分確定ならば、 $|f|$ も ϕ 積分確定であり $|\int f d\phi| \leq \int |f| d\phi$ が成り立つ。
- (8) f が ϕ 可積分ならば、 $|f|$ も ϕ 可積分である。

定理 3.1.20 (Lebesgue の単調収束定理) $\{f_n\}$ を非負 ϕ 可測関数の単調増加列とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\phi = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\phi.$$

定理 3.1.21 (Lebesgue の有界収束定理) h, g, f_n は ϕ 可測関数であり、 h は ϕ 可積分かつ、

$$|f_n(x)| \leq h(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) \quad (x \in X)$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - g| d\phi = 0$$

が成り立つ。特に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\phi = \int g d\phi.$$

定義 3.1.22 X を位相空間とし、 f を X 上の実数値関数とする。このとき、

$$\text{spt} f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

を f の台と呼ぶ。さらに、

$$\mathcal{K}(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbf{R} \text{ は連続であり、} \text{spt} f \text{ はコンパクト}\}$$

とおく。 $\mathcal{K}(X)$ はベクトル空間になる。

定理 3.1.23 (Riesz の表現定理) X を可算開基を持つ局所コンパクト Hausdorff 空間とし、

$$\mu : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

は線形写像であり、 $f \in \mathcal{K}(X)$ が非負のとき、 $\mu(f) \geq 0$ を満たすとする。このとき X 上の Radon 測度 ϕ が存在し、

$$\mu(f) = \int f d\phi \quad (f \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。上の条件を満たす μ を $\mathcal{K}(X)$ 上または単に X 上の積分と呼ぶことにする。

補題 3.1.24 α, β をそれぞれ X, Y 上の測度とする。 $S \subset X \times Y$ に対して、

$$(\alpha \times \beta)S = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j) \cdot \beta(B_j) \mid \begin{array}{l} A_j \text{ は } \alpha \text{ 可測集合、} B_j \text{ は } \beta \text{ 可測集合であり、} \\ S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \end{array} \right\}$$

とおく。すると、任意の α 可測集合 A と任意の β 可測集合 B に対して、

$$\phi(A \times B) \leq \alpha(A) \cdot \beta(B)$$

を満たす $X \times Y$ 上の測度 ϕ の内で $\alpha \times \beta$ は最大の測度になる。

定義 3.1.25 補題 3.1.24 の測度 $\alpha \times \beta$ を α と β の積測度と呼ぶ。

定理 3.1.26 (Fubini の定理) α, β をそれぞれ X, Y 上の測度とすると、次の (1) から (4) が成り立つ。

(1) $\alpha \times \beta$ は $X \times Y$ 上の正則測度になる。

(2) A を α 可測集合、 B を β 可測集合とすると、 $A \times B$ は $\alpha \times \beta$ 可測集合になり、

$$(\alpha \times \beta)(A \times B) = \alpha(A) \cdot \beta(B)$$

が成り立つ。

- (3) S を可算 $\alpha \times \beta$ 可測集合とすると、次が成り立つ。 β に関してほとんどすべての $y \in Y$ に対し $\{x \mid (x, y) \in S\}$ は α 可測集合になり、 $y \mapsto \alpha\{x \mid (x, y) \in S\}$ は β 可測関数になる。 α に関してほとんどすべての $x \in X$ に対し $\{y \mid (x, y) \in S\}$ は β 可測集合になり、 $x \mapsto \beta\{y \mid (x, y) \in S\}$ は α 可測関数になる。さらに

$$(\alpha \times \beta)S = \int \alpha\{x \mid (x, y) \in S\}d\beta y = \int \beta\{y \mid (x, y) \in S\}d\alpha x.$$

- (4) f が $\alpha \times \beta$ 積分確定であり可算 $\alpha \times \beta$ 可測とすると、次が成り立つ。 β に関してほとんどすべての $y \in Y$ に対し、 $x \mapsto f(x, y)$ は α 積分確定になり、 $y \mapsto \int f(x, y)d\alpha x$ は β 積分確定になる。 α に関してほとんどすべての $x \in X$ に対し、 $y \mapsto f(x, y)$ は β 積分確定になり、 $x \mapsto \int f(x, y)d\beta y$ は α 積分確定になる。さらに

$$\int f d(\alpha \times \beta) = \int \int f(x, y)d\alpha x d\beta y = \int \int f(x, y)d\beta y d\alpha x.$$

3.2 微分形式の積分と Riemann 測度

多様体は可算開基を持つ C^∞ 級多様体のみ考えることにする。

定義 3.2.1 多様体 M の各点 x に $\wedge^k T_x(M)$ の元 ω_x を対応させる対応 $\omega = \{\omega_x\}_{x \in M}$ が次の条件を満たすとき、 ω を M 上の k 次 C^∞ 級 (連続) 微分形式と呼ぶ。(条件) M 上の任意の k 個の C^∞ 級ベクトル場 X_1, \dots, X_k に対して

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(x) = \omega_x((X_1)_x, \dots, (X_k)_x)$$

は M 上の C^∞ 級 (連続) 関数になる。

定義 3.2.2 M を向き付けられた多様体とする。 M の正の向きの局所座標系 (U, x^1, \dots, x^m) をとる。 $\text{spt}\omega \subset U$ となる M 上の m 次連続微分形式 ω に対して ω を U 上

$$\omega = f(x^1, \dots, x^m)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

と表し、

$$\int_M \omega = \int_U f(x^1, \dots, x^m)d\mathcal{L}^m(x^1, \dots, x^m)$$

によって $\int_M \omega$ を定める。右辺の積分は m 次元 Euclid 空間の通常の Lebesgue 積分である。被積分関数はコンパクトな台を持つ連続関数になるので、この積分は通常の Riemann 積分に一致する。この値 $\int_M \omega$ は積分の変数変換の公式から、局所座標系のとり方に依存しない。さらにコンパクトな台を持つ一般の m 次微分形式 ω に対しては、単位の分割を使うことによって $\int_M \omega$ を定義することができる。

定義 3.2.3 M を向きの付いた m 次元多様体とする。 M 上の m 次連続微分形式 ω が、 M の任意の正の向きの局所座標系 (x^1, \dots, x^m) に対して

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) > 0$$

を満たすとき、 ω を正の微分形式と呼ぶ。

M 上のコンパクトな台を持つ m 次連続微分形式の積分が定まるので、次のように正の m 次連続微分形式から測度を定めることができる。

命題 3.2.4 M を向きの付いた m 次元多様体とする。 M 上の正の m 次連続微分形式 ω を一つとり固定し

$$\lambda_\omega : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbf{R}; f \mapsto \int_M f\omega$$

によって λ_ω を定めると、 λ_ω は Riesz の表現定理 (定理 3.1.23) の仮定を満たす。よって、 M 上の Radon 測度 ϕ が存在し、

$$\lambda_\omega(f) = \int f d\phi \quad (f \in \mathcal{K}(M))$$

を満たす。

定義 3.2.5 M を m 次元 Riemann 多様体とする。 M の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^m)$ に対して

$$\lambda_U(f) = \int_U f(x^1, \dots, x^m) \left| \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \right| d\mathcal{L}^m(x^1, \dots, x^m) \quad (f \in \mathcal{K}(U))$$

とおく。ただし、右辺の $|\cdot|$ は M の Riemann 計量から各接ベクトルの外積代数上に定まる内積 (定義 2.1.25) のノルムであり、積分は m 次元 Euclid 空間の通常の Lebesgue 積分である。積分の変数変換の公式と外積代数の性質から、上の λ_U の定義は局所座標系 x^1, \dots, x^m のとり方に依存しないことがわかる。さらに局所座標近傍系に付随する単位の分割を使うことによって、各局所座標近傍 U 上定まる λ_U を

$$\lambda_M : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

に一意的に拡張することができる。 $f \in \mathcal{K}(M)$ が非負のとき、 $\lambda_M(f) \geq 0$ が成り立つので、 λ_M は Riesz の表現定理 (定理 3.1.23) の仮定を満たす。よって、 M 上の Radon 測度 μ_M が存在し、

$$\lambda_M(f) = \int f d\mu_M \quad (f \in \mathcal{K}(M))$$

を満たす。この μ_M を M の Riemann 測度と呼ぶ。特に断らない限り、Riemann 多様体上では Riemann 測度を考えることにする。

命題 3.2.6 M を向きの付いた m 次元 Riemann 多様体とすると、 M 上の正の m 次 C^∞ 級微分形式 ω が存在し、命題 3.2.4で定めた

$$\lambda_\omega : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

は、定義 3.2.5で定めた

$$\lambda_M : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

に一致する。さらに M の任意の正の向きの局所座標近傍系 $(U; x^1, \dots, x^m)$ に対して ω の U における局所表示は

$$\omega = \left| \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \right| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

となる。

証明 M の任意の正の向きの局所座標近傍系 $(U; x^1, \dots, x^m)$ に対して

$$\omega = \left| \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \right| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

によって ω を定めると、外積代数の性質と微分形式の変数変換公式から、 ω は M 上の m 次 C^∞ 級微分形式になる。さらに、定め方から正の微分形式であることもわかる。また、この ω の局所表示から λ_ω は定義 3.2.5で定めた λ_M に一致する。

3.3 余面積公式と面積非増加写像

定義 3.3.1 $f : M \rightarrow N$ を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。 $x \in M$ に対して、 $df_x : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(N)$ が全射になるとき、 x を f の正則点と呼ぶ。 M の正則点ではない点を臨界点と呼ぶ。 $y \in N$ に対して、 $f(x) = y$ となる f の臨界点 x が存在するとき、 y を f の臨界値と呼ぶ。 N の臨界値ではない点を正則値と呼ぶ。

定理 3.3.2 (Sard の定理) U を \mathbf{R}^n 内の開集合とし、 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ を C^∞ 級写像とする。 f の臨界点の全体を C で表し、 \mathbf{R}^p の Lebesgue 測度を \mathcal{L}^p で表すと、 $\mathcal{L}^p(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定理 3.3.3 $f : M \rightarrow N$ を Riemann 多様体 M から Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。 f の臨界点の全体を C で表すと、 $\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

証明 M と N は可算開基を持っているので、 M と N の可算開被覆 $\{U_i\}$ と $\{V_i\}$ を、各 i について

- (1) U_i は M の局所座標近傍に含まれる、
- (2) \bar{V}_i はコンパクトで、 N の局所座標近傍に含まれる、
- (3) $f(U_i) \subset V_i$ を満たす

が成り立つようにとることができる。\$C_i = C \cap U_i\$ において、\$\bar{V}_i\$ を含む \$N\$ の局所座標近傍を \$(V'_i; x_1, \dots, x_p)\$ で表す。\$V'_i \subset \mathbb{R}^p\$ とみなし、\$\mathbb{R}^p\$ の Lebesgue 測度を \$\mathcal{L}^p\$ と書くことにすると、定理 3.3.2 より、\$\mathcal{L}^p(f(C_i)) = 0\$ が成り立つ。

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

は \$V'_i\$ 上の連続関数になり、\$\bar{V}_i (\subset V'_i)\$ はコンパクトだから

$$A = \sup_{\bar{V}_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

が存在する。したがって、

$$0 \leq \mu_N(f(C_i)) \leq A \mathcal{L}^p(f(C_i)) = 0$$

となり、\$\mu_N(f(C_i)) = 0\$。これより、

$$0 \leq \mu_N(f(C)) \leq \sum_i \mu_N(f(C_i)) = 0,$$

つまり、\$\mu_N(f(C)) = 0\$ が成り立つ。

補題 3.3.4 \$V\$ と \$W\$ をそれぞれ内積を持つ \$m\$ 次元と \$n\$ 次元のベクトル空間とし (\$m \geq n\$)、\$F: V \to W\$ を線形写像とする。

$$JF = \sup \{ |F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)| \mid u_1, \dots, u_n \text{ は } V \text{ の正規直交系} \}$$

とおく。\$F\$ が全射でないときは、\$JF = 0\$ となり、\$F\$ が全射のときは、\$(\ker F)^\perp\$ の基底 \$v_1, \dots, v_n\$ に対して

$$JF = \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

証明 \$F\$ が全射でないときは \$\dim(\text{im} F) < n\$ となるので、\$V\$ の任意の正規直交系 \$u_1, \dots, u_n\$ に対して \$F(u_1), \dots, F(u_n)\$ は線形従属になる。したがって

$$F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n) = 0$$

となり、\$JF = 0\$ が成り立つ。

次に \$F\$ が全射の場合を考える。\$(\ker F)^\perp\$ の任意の基底 \$v_1, \dots, v_n\$ をとる。さらに \$(\ker F)^\perp\$ の正規直交基底 \$u_1, \dots, u_n\$ をとる。これらの間の変換行列を \$(a_{ij})\$ で表す。すなわち、

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &= \det(a_{ij}) u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \\ \wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \det(a_{ij}) \wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})| |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|\det(a_{ij})| |u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= \frac{|\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

これより、

$$JF \geq |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

V の任意の正規直交系 w_1, \dots, w_n に対して

$$w_i = w_i^1 + w_i^2, \quad w_i^1 \in (\ker F)^\perp, \quad w_i^2 \in \ker F$$

とおくと $|w_i^1| \leq |w_i| = 1$ となり、さらに

$$\begin{aligned} \wedge_n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= F(w_1) \wedge \cdots \wedge F(w_n) \\ &= F(w_1^1) \wedge \cdots \wedge F(w_n^1) \\ &= \wedge_n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1). \end{aligned}$$

ここで、 w_1^1, \dots, w_n^1 が線形従属の場合は

$$\wedge_n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1) = 0$$

となり、線形独立の場合は $(\ker F)^\perp$ の基底になる。このときは、上で示したことより、

$$\frac{|\wedge_n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)|}{|w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1|} = |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|$$

命題 2.1.28 を使うと

$$\begin{aligned} |\wedge_n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n)| &= |\wedge_n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)| \\ &= |w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1| \cdot |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |w_1^1| \cdots |w_n^1| \cdot |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

よって

$$JF \leq |\wedge_n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

以上の結果より、

$$JF \leq \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \leq JF.$$

したがって、

$$JF = \frac{|\wedge_n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

定義 3.3.5 $m \geq n$ とし、 $f : M \rightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。 $x \in M$ に対して補題 3.3.4 の J を使って、 $Jf(x) = Jdf_x$ とおく。

定理 3.3.6 (余面積公式) $m \geq n$ とし、 $f : M \rightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とし、 ϕ を M 上の μ_M 可測関数とする。このとき、 N の元 y に対して $\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、 ϕJf が M 上 μ_M 可積分であるか、または $\phi \geq 0$ のとき、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

証明 各 $x \in M$ について、 $V_x^n(M)$ で $T_x(M)$ 内の n 個の正規直交系全体の成す Stiefel 多様体とし、

$$V^n(M) = \bigcup_{x \in M} V_x^n(M)$$

とおくと、 $V^n(M)$ は $V^n(M) \rightarrow M$ を射影とし Stiefel 多様体をファイバーとするファイバー束の全空間になり、特に $V^n(M)$ は多様体になる。

$$V^n(M) \rightarrow \mathbf{R}; (u_1, \dots, u_n) \mapsto |df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)|$$

は連続関数になり、

$$Jf(x) = \sup\{|df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)| \mid (u_1, \dots, u_n) \in V_x^n(M)\}$$

は M から \mathbf{R} への連続関数になる。したがって、

$$O = \{x \in M \mid Jf(x) \neq 0\}$$

は M の開集合になる。特に、 O は μ_M 可測集合になり、

$$\int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x) = \int_O \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。各 $x \in O$ に対して、陰関数定理より x の局所座標近傍 U_x が存在し、 $f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、 $f : U_x \rightarrow f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、 f 自身が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、まず定理の公式を証明する。

N が \mathbf{R}^n の開集合になっていて、 F が \mathbf{R}^{m-n} の開集合で $M = N \times F$ となり、

$$f : M = N \times F \rightarrow N; (y, t) \mapsto y$$

である場合を考える。 y_1, \dots, y_n を $N \subset \mathbf{R}^n$ の座標とし、 x_1, \dots, x_m を $M = N \times F \subset \mathbf{R}^m$ の座標とする。ただし、 $y_i \circ f = x_i$ ($1 \leq i \leq n$) となるようにしておく。このとき、 x_{n+1}, \dots, x_m は F の座標になる。 ϕ は M 上の可測関数だから、

$$\phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f$$

も M 上の可測になる。したがって、Fubini の定理 (定理 3.1.26) より

$$\begin{aligned} y \mapsto & \int_F \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f d\mathcal{L}^{m-n}(t) \\ & = \left(\int_F \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M d\mathcal{L}^{m-n}(t) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\ & = \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \end{aligned}$$

は N 上の可測関数になり、

$$\begin{aligned} & \int_M \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f d\mathcal{L}^m \\ & = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N d\mathcal{L}^n(y) \\ & = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \end{aligned}$$

が成り立つ。各 $1 \leq i \leq n$ について、 $M = N \times F$ の接ベクトル $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を F に接する成分と直交する成分に分解する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_F + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp}.$$

すると

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\ &= \left| df \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \wedge \cdots \wedge df \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right|_N \\ &= \left| df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \right) \wedge \cdots \wedge df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right) \right|_N. \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ は F に接しているので、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \\ &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \\ &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M. \end{aligned}$$

以上の計算と補題 3.3.4 より、

$$\begin{aligned} & \int_M \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_1 \cdots dx_m \\ &= \int_M \phi(x) \frac{\left| df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \right) \wedge \cdots \wedge df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right) \right|_N}{\left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right|_M} d\mu_M(x) \\ &= \int_M \phi J f d\mu_M \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi J f d\mu_M$$

を得る。これで f が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、定理の証明ができた。

一般の場合にもどる。各 $x \in O$ に対して、 x の局所座標近傍 U_x が存在し、 $f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、 $f : U_x \rightarrow f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、このような開集合を O の各点でとると、 $\{U_x\}_{x \in O}$ は O の開被覆になる。 M は可算開基を持つので、 O も可算開基を持つ。したがって O の開被覆 $\{U_x\}_{x \in O}$ から可算個 $\{U_k\}$ をとり、 $\{U_k\}$ が O の開被覆になるようにできる。 $\{U_k\}$ に付随する単位の分割 $\{\psi_k\}$ をとる。 f の U_k への制限を

$$f_k : U_k \rightarrow V_k = f(U_k)$$

で表すことにして、すでに示したことを $\psi_k\phi$ に適用すると、

$$y \mapsto \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は V_k 上の μ_N 可測関数になり、

$$\int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) = \int_{U_k} \psi_k\phi Jf d\mu_{U_k}.$$

よって

$$y \mapsto \sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。各 y について $\{\psi_k|_{f^{-1}(y)}\}$ は $f^{-1}(y)$ の単位の分割になるので、

$$\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) = \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

となる。これより

$$y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。 ϕJf が M 上 μ_M 可積分のときは Lebesgue の有界収束定理 (定理 3.1.21) を使い、 $\phi \geq 0$ のときは Lebesgue の単調収束定理 (定理 3.1.20) を使うと、

$$\begin{aligned} \int_M \phi Jf d\mu_M &= \sum_k \int_{U_k} \psi_k\phi Jf d\mu_{U_k} \\ &= \sum_k \int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) \\ &= \int_N \left(\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \\ &= \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \end{aligned}$$

となり、

$$\int_M \phi Jf d\mu_M = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)$$

を得る。

系 3.3.7 定理 3.3.6において $m = n$ の場合、 N の元 y に対して $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、

$$\int_N \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

定義 3.3.8 $m \geq n$ とし、 $f : M \rightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。各点 $x \in M$ において $Jf(x) \leq 1$ が成り立つとき、 f を面積非増加写像と呼ぶ。

命題 3.3.9 $m \geq n$ とし、 $f : M \rightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への面積非増加写像とする。 M の n 次元部分多様体 S に対して $f|_S : S \rightarrow N$ の臨界点全体を C で表すと、

$$\mu_S(S) \geq \int_{f(S) \sim f(C)} \text{card}((f|_S)^{-1}(y)) d\mu_N(y) \geq \mu_N(f(S))$$

が成り立つ。

証明 各点 $x \in S$ において $d(f|_S)_x = df|_{T_x(S)}$ だから、 $J(f|_S)(x) \leq Jf(x) \leq 1$ が成り立つ。 $f|_S : S \rightarrow N$ に余面積公式 (系 3.3.7) を $\phi = 1$ として適用すると

$$\int_N \text{card}((f|_S)^{-1}(y)) d\mu_N(y) = \int_S J(f|_S)(x) d\mu_S(x) \leq \int_S d\mu_S = \mu_S(S)$$

を得る。この左辺は

$$\int_{f(S) \sim f(C)} \text{card}((f|_S)^{-1}(y)) d\mu_N(y)$$

に一致するので、

$$\mu_S(S) \geq \int_{f(S) \sim f(C)} \text{card}((f|_S)^{-1}(y)) d\mu_N(y)$$

が成り立つ。さらに定理 3.3.3 より $\mu_N(f(C)) = 0$ だから、 $f(C)$ は μ_N 可測になり、

$$\begin{aligned} \int_{f(S) \sim f(C)} \text{card}((f|_S)^{-1}(y)) d\mu_N(y) &\geq \int_{f(S) \sim f(C)} d\mu_N(y) \\ &= \mu_N(f(S) \sim f(C)) \\ &= \mu_N(f(S) \sim f(C)) + \mu_N(f(C)) \\ &= \mu_N(f(S)) \end{aligned}$$

を得る。

定理 3.3.10 $m > n$ とする。 \mathbf{R}^m 内の平面 \mathbf{R}^n の $n-1$ 次元コンパクト部分多様体 M が領域 $H(M)$ を囲んでいると仮定する。 M を境界に持つ \mathbf{R}^m 内の n 次元コンパクト部分多様体の内で面積最小なものは $H(M)$ に限る。

面積非増加レトラクションによる証明 $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ とみなすことにする。

$$P : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n \times \{0\}; (x, y) \mapsto (x, 0)$$

によって写像 P を定める。各点 $(x, y) \in \mathbf{R}^m$ において $dP_{(x,y)} = P$ となり、補題 3.3.4 より $JP(x, y) = 1$ が成り立つ。よって、 P は面積非増加写像になる。

\mathbb{R}^m 内の n 次元部分多様体 S をとると、命題 3.3.9より $\mu_S(S) \geq \mathcal{L}^n(P(S))$ が成り立つ。さらに S は M を境界に持つコンパクト部分多様体であると仮定すると、 $H(M) \subset P(S)$ となり、 $\mathcal{L}^n(H(M)) \leq \mathcal{L}^n(P(S))$ を得る。よって $\mathcal{L}^n(H(M)) \leq \mu_S(S)$ が成り立ち、 $H(M)$ は面積最小になる。

上の不等式の等号が成り立つと仮定すると、 μ_S に関してほとんどすべての $x \in S$ について $J(P|_S)(x) = 1$ となり、 $T_x S$ は \mathbb{R}^n と平行になることがわかる。さらに $P(S)$ は $H(M)$ に一致することになるので、 S は $H(M)$ に一致する。以上より、面積最小部分多様体は $H(M)$ に限ることがわかる。

3.4 Lie 群上の不変測度

定義 3.4.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \rightarrow G; (x, y) \mapsto xy, \quad G \rightarrow G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、 G を Lie 群と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 3.4.2 連結 Lie 群は可算開基を持つことが知られている。したがって、可算連結成分を持つ Lie 群も可算開基を持つ。

例 3.4.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、 V の正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。 $GL(\mathbb{R}^n)$ は $GL(n, \mathbb{R})$ とも書く。 $GL(V)$ を一般線形群と呼ぶ。 $GL_+(V)$ で行列式が正になる正則線形変換の全体を表すことにすると、 $GL_+(V)$ は連結 Lie 群になる。さらに、 $GL(V)$ は $GL_+(V)$ に関して二つの剰余類を持ち、それぞれ $GL_+(V)$ に微分同型になるので、 $GL(V)$ は二つの連結成分を持つ。したがって、注意 3.4.2で述べたことより、 $GL(V)$ は可算開基を持つ。

定義 3.4.4 Lie 群 G の元 g に対して微分同型写像 L_g, R_g を

$$L_g : G \rightarrow G; x \mapsto gx, \quad R_g : G \rightarrow G; x \mapsto xg^{-1}$$

によって定め、それぞれ g による左移動、右移動と呼ぶ。 G 上のベクトル場 X は、 G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき左不変ベクトル場と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg^{-1}} \quad (x \in G)$$

を満たすとき右不変ベクトル場と呼ばれる。

定義 3.4.5 実ベクトル空間 \mathfrak{g} に双線形写像 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、 \mathfrak{g} を Lie 環と呼ぶ。Lie 環 \mathfrak{g} の部分ベクトル空間 \mathfrak{h} が、演算 $[\cdot, \cdot]$ に関して閉じているとき、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Lie 部分環と呼ぶ。

例 3.4.6 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\cdot, \cdot]$ に関して Lie 環になる。

例 3.4.7 V をベクトル空間とする。 $\text{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると $\text{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。 $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ とも書く。

定理 3.4.8 G を Lie 群とし、 G の左不変ベクトル場の全体を \mathfrak{g} で表す。すると、 \mathfrak{g} は Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

定義 3.4.9 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 \mathfrak{g} を Lie 群 G の Lie 環と呼ぶ。

定義 3.4.10 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f: G \rightarrow H$ が群の準同型写像でもあるとき、 f を Lie 群の準同型写像と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、 f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、 f を Lie 群の同型写像と呼び Lie 群 G と H は同型であるという。Lie 環の間の線形写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、 f を Lie 環の準同型写像と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、 f を Lie 環の同型写像と呼び、Lie 環 \mathfrak{g} と \mathfrak{h} は同型であるという。

定理 3.4.11 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ と同一視できる。Lie 群 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ の Lie 環を \mathfrak{g} とし、 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ ($g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$) によって定めると、写像

$$\tilde{\cdot}: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

注意 3.4.12 定理 3.4.11 の Lie 環の同型写像 $\tilde{\cdot}: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ と Lie 群 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ の Lie 環 \mathfrak{g} を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ を $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ の Lie 環とみなすことにする。

定義 3.4.13 実数全体 \mathbf{R} を加法に関して Lie 群とみなしたとき、 \mathbf{R} から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の一径数部分群と呼ぶ。

定理 3.4.14 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。Lie 環 \mathfrak{g} の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c: \mathbf{R} \rightarrow G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、 c は G の一径数部分群になり、 $X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 3.4.8 によって $\frac{dc}{dt}(0)$ に対応する \mathfrak{g} の元 X を c に対応させる。

例 3.4.15 $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。 $GL(n, \mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元と同一視する。 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を \tilde{X} で表すと、 $\tilde{X}_g = gX$ ($g \in GL(n, \mathbf{R})$) となる。したがって、 X に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。行列の指数関数: $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ を使うと $c(t) = e^{tX}$ となる。

定義 3.4.16 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 3.4.14 で存在を示した X の積分曲線 $c: \mathbf{R} \rightarrow G$ で $c(0) = e$ となるものを取り、 $\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ を定義する。 \exp を Lie 群 G の指数写像と呼ぶ。

例 3.4.17 例 3.4.15 で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、 $GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 3.4.18 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 3.4.14 の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

定理 3.4.19 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とすると、 G の指数写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は C^∞ 級写像である。さらに、 \exp は \mathfrak{g} における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

命題 3.4.20 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 3.4.21 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。 $f: G \rightarrow H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 3.4.8 の線形同型写像を $\alpha_G: \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$, $\alpha_H: \mathfrak{h} \rightarrow T_e(H)$ とすると、 $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

定義 3.4.22 Lie 群の準同型写像 $f: G \rightarrow H$ に対して、 $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を f の微分と呼ぶ。この用語を使うと定理 3.4.21 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 3.4.23 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。 A の恒等写像の微分は \mathfrak{a} の恒等写像である。また $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ を Lie 群の準同型写像とすると、 $d(g \circ f) = dg \circ df: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$ が成り立つ。

系 3.4.24 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。 $f: A \rightarrow B$ を Lie 群の同型写像とすると、 $df: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

命題 3.4.25 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。 $f: G \rightarrow H$ を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の \exp は G の指数写像で右辺の \exp は H の指数写像である。

定義 3.4.26 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、 G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の表現と呼ぶ。Lie 環 \mathfrak{g} とベクトル空間 V に対して、 \mathfrak{g} から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を \mathfrak{g} の表現と呼ぶ。

命題 3.4.27 Lie 環 \mathfrak{g} の元 X に対して $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y], Y \in \mathfrak{g}$ として $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

定義 3.4.28 Lie 環 \mathfrak{g} に対して定まる表現 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} の随伴表現と呼ぶ。

定理 3.4.29 Lie 群 G の元 g に対して $\text{Ad}(g) = d(L_g \circ R_g)$ とおく。 G の Lie 環を \mathfrak{g} とすると、 $\text{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X) \quad (g \in G, X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、 $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は \mathfrak{g} の随伴表現に一致する。

定義 3.4.30 Lie 群 G に対して定まる表現 $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ を G の随伴表現と呼ぶ。

例 3.4.31 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 3.4.17 より、 $GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。 $g \in GL(V), X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\text{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}} \right|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

定義 3.4.32 Lie 群 H が Lie 群 G の Lie 部分群であるとは、 H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

定理 3.4.33 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。 H が G の閉集合ならば、 H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 3.4.34 定理 3.4.33 より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を閉 Lie 部分群と呼ぶことにする。

定義 3.4.35 一般線形群の閉 Lie 部分群を線形 Lie 群と呼ぶ。

補題 3.4.36 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $\mathrm{GL}(V)$ の表現になり、 \det の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

定義 3.4.37 V を有限次元実ベクトル空間とし、 $\mathrm{SL}(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) | \det g = 1\}$ と表すと、補題 3.4.36 より $\mathrm{SL}(V)$ は線形 Lie 群になる。 $\mathrm{SL}(V)$ を特殊線形群と呼ぶ。 $\mathrm{SL}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 3.4.36 より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{tr} X = 0\}$$

となる。 \mathbf{R}^n における特殊線形群とその Lie 環を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。 $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は連結になることが知られているので、注意 3.4.2 で述べたことより、可算開基を持つ。

定義 3.4.38 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。 V の A に関する直交変換の全体を $\mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V; A)$ で表すと $\mathrm{O}(V)$ は線形 Lie 群になる。 $\mathrm{O}(V)$ を直交群と呼ぶ。 $\mathrm{O}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0 \ (u, v \in V)\}$$

となる。 \mathbf{R}^n の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $\mathrm{O}(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。 $\mathrm{O}(V)$ は二つの連結成分を持つことが知られているので、注意 3.4.2 で述べたことより、 $\mathrm{O}(V)$ は可算開基を持つ。

注意 3.4.39 $\mathrm{O}(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 3.4.40 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。

$$\mathrm{SO}(V) = \mathrm{SO}(V; A) = \mathrm{SL}(V) \cap \mathrm{O}(V; A)$$

と表すと、 $\mathrm{SO}(V)$ は線形 Lie 群になる。 $\mathrm{SO}(V)$ を回転群または特殊直交群と呼ぶ。 $\mathrm{SO}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V; A)$ で表すと $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。 \mathbf{R}^n の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $\mathrm{SO}(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。 $\mathrm{SO}(V)$ は連結になることが知られているので、注意 3.4.2 で述べたことより、 $\mathrm{SO}(V)$ は可算開基を持つ。

定義 3.4.41 G を Lie 群とする。定義 3.4.4 で定めた記号

$$L(g, x) = L_g(x) = gx, \quad R(g, x) = R_g(x) = xg^{-1} \quad (x, g \in G)$$

を使うことにする。 G 上の微分形式 ω が任意の $g \in G$ に対して $L_g^* \omega = \omega$ を満たすとき、 ω を左不変微分形式と呼ぶ。同様に ω が任意の $g \in G$ に対して $R_g^* \omega = \omega$ を満たすとき、 ω を右不変微分形式と呼ぶ。

命題 3.4.42 G を n 次元 Lie 群とすると、 G 上に任意の点で 0 にならない左不変 n 次微分形式 ω が 0 ではない定数倍を除いて一意に存在する。 ω は G に向きを定め、この向きは左移動に関して不変であり、 ω は正の微分形式になる。

証明 G の Lie 環を \mathfrak{g} で表す。 \mathfrak{g} の基底 X_1, \dots, X_n は G 上の左不変ベクトル場の基底だから、 $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ を満たす左不変 1 次微分形式 ω^i をとることができる。このとき、 $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ によって G 上の n 次微分形式を定めると、任意の $g \in G$ に対して

$$L_g^* \omega = L_g^*(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n) = (L_g^* \omega^1) \wedge \dots \wedge (L_g^* \omega^n) = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = \omega$$

となり ω は左不変微分形式になる。 ω は任意の点で 0 にはならないので、 G の向きを定める。 G の左移動は ω を不変にするので、 ω の定める向きも不変にする。この向きに関して、 ω は正の左不変 n 次微分形式になる。一意性は左不変性から従う。

命題 3.4.43 と同様にして、次の命題も証明することができる。

命題 3.4.43 G を n 次元 Lie 群とすると、 G 上に任意の点で 0 にならない右不変 n 次微分形式 ω が 0 ではない定数倍を除いて一意に存在する。 ω は G に向きを定め、この向きは右移動に関して不変であり、 ω は正の微分形式になる。

補題 3.4.44 G を Lie 群とし、 $x \in G$ に対して $I(x) = L_x \circ R_x$ によって内部自己同型写像 $I(x)$ を定めると、

$$dI(x)_g = dL_{xgx^{-1}} \circ \text{Ad}(x) \circ dL_{g^{-1}} \quad (g \in G)$$

が成り立つ。命題 3.4.43 で定めた左不変な向きが右不変にもなるための必要十分条件は、任意の $x \in G$ に対して $\det \text{Ad}(x) > 0$ が成り立つことである。特に、 G が連結のときは、左不変な向きは右不変にもなる。

証明 $x, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} dI(x)_g &= d(L_x \circ R_x)_g \\ &= d(L_x \circ R_x \circ L_g \circ L_{g^{-1}})_g \\ &= d(L_x \circ R_x \circ L_g)_e \circ (dL_{g^{-1}})_g \\ &= d(L_x \circ L_g \circ R_x)_e \circ (dL_{g^{-1}})_g \\ &= d(L_x \circ L_g \circ L_{x^{-1}} \circ L_x \circ R_x)_e \circ (dL_{g^{-1}})_g \\ &= dL_{xgx^{-1}} \circ \text{Ad}(x) \circ dL_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

したがって

$$dI(x)_g = dL_{xgx^{-1}} \circ \text{Ad}(x) \circ dL_{g^{-1}} \quad (g \in G)$$

を得る。

左不変な向きが右不変にもなることは、任意の $x \in G$ について $I(x)$ が左不変な向きを保つことと同値であり、上で示した等式よりこれは任意の $x \in G$ について $\text{Ad}(x)$ が $T_e G$ の

向きを保つことと同値になる。さらにこれは任意の $x \in G$ について $\det \text{Ad}(x) > 0$ が成り立つことと同値になる。

G が連結のときは、連続準同型写像 $\det \text{Ad} : G \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ の像は連結になり、任意の $x \in G$ について $\det \text{Ad}(x) > 0$ が成り立つ。上で示したことから、左不変な向きは右不変にもなる。

命題 3.4.45 ω_l と ω_r をそれぞれ n 次元 Lie 群 G 上の 0 ではない左不変 n 次微分形式と右不変 n 次微分形式とする。このとき 0 ではない定数 c が存在し

$$\omega_r = c \det \text{Ad} \cdot \omega_l$$

が成り立つ。

証明 $\theta = \det \text{Ad} \cdot \omega_l$ とおくと、 θ は G 上の 0 ではない n 次微分形式になる。以下で θ が右不変になることを補題 3.4.44 を使って示す。 $x, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} (R_x^* \theta)_g &= \wedge^n (dR_x)_g \theta_{gx^{-1}} \\ &= \wedge^n (dR_x)_g \det \text{Ad}(gx^{-1}) (\omega_l)_{gx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \wedge^n (dR_x)_g (\omega_l)_{gx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \wedge^n (dL_{x^{-1}} \circ dL_x \circ dR_x)_g (\omega_l)_{gx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \wedge^n (dL_x \circ dR_x)_g \circ \wedge^n (dL_{x^{-1}})_{xgx^{-1}} (\omega_l)_{gx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \wedge^n dI(x)_g (\omega_l)_{xgx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \wedge^n (dL_{xgx^{-1}} \circ \text{Ad}(x) \circ dL_{g^{-1}})_g (\omega_l)_{xgx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(gx^{-1}) \det \text{Ad}(x) \wedge^n (dL_{xgx^{-1}} \circ dL_{g^{-1}})_g (\omega_l)_{xgx^{-1}} \\ &= \det \text{Ad}(g) (\omega_l)_g \\ &= \theta_g. \end{aligned}$$

以上より θ は右不変微分形式になる。

命題 3.4.43 より、0 ではない定数 c が存在し

$$\omega_r = c \cdot \theta = c \det \text{Ad} \cdot \omega_l$$

となる。

系 3.4.46 命題 3.4.45 と同じ設定のもとで、 $J(g) = g^{-1}$ によって微分同型写像 $J : G \rightarrow G$ を定める。このとき、任意の $x \in G$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} R_x^* \omega_l &= \det \text{Ad}(x) \cdot \omega_l, & L_x^* \omega_r &= \det \text{Ad}(x) \cdot \omega_r, \\ J^* \omega_l &= (-1)^n \det \text{Ad} \cdot \omega_l. \end{aligned}$$

証明 命題 3.4.45より $x, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
 (R_x^* \omega_l)_g &= \wedge^n (dR_x)_g (\omega_l)_{gx^{-1}} \\
 &= \wedge^n (dR_x)_g (c \det \text{Ad}(gx^{-1}))^{-1} (\omega_r)_{gx^{-1}} \\
 &= c^{-1} \det \text{Ad}(xg^{-1}) \wedge^n (dR_x)_g (\omega_r)_{gx^{-1}} \\
 &= \det \text{Ad}(x) c^{-1} \det \text{Ad}(g)^{-1} (\omega_r)_g \\
 &= \det \text{Ad}(x) (\omega_l)_g
 \end{aligned}$$

となるので、

$$R_x^* \omega_l = \det \text{Ad}(x) \omega_l$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 (L_x^* \omega_r)_g &= \wedge^n (dL_x)_g (\omega_r)_{xg} \\
 &= \wedge^n (dL_x)_g c \det \text{Ad}(xg) (\omega_l)_{xg} \\
 &= c \det \text{Ad}(xg) \wedge^n (dL_x)_g (\omega_l)_{xg} \\
 &= \det \text{Ad}(x) c \det \text{Ad}(g) (\omega_l)_g \\
 &= \det \text{Ad}(x) (\omega_r)_g
 \end{aligned}$$

となるので、

$$L_x^* \omega_r = \det \text{Ad}(x) \omega_r$$

が成り立つ。

$J^* \omega_l$ について考える。

$$J \circ R_x(g) = J(gx^{-1}) = xg^{-1} = L_x \circ J(g)$$

となり $J \circ R_x = L_x \circ J$ が成り立つ。これを使って $J^* \omega_l$ が右不変になることをまず示しておく。

$$R_x^* J^* \omega_l = (J \circ R_x)^* \omega_l = (L_x \circ J)^* \omega_l = J^* \circ L_x^* \omega_l = J^* \omega_l$$

となるので、 $J^* \omega_l$ は右不変微分形式になる。

命題 3.4.45よりある定数 c が存在し $J^* \omega_l = c \det \text{Ad} \cdot \omega_l$ が成り立つ。単位元 e での値を調べるために dJ_e を求めておく。 G の Lie 環の元 X に対して

$$dJ_e X_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\exp tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp tX)^{-1} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tX) = -X_e$$

となるので、 $dJ_e = -1$ が成り立つ。

$$(J^* \omega_l)_e = (\wedge^n dJ_e)(\omega_l)_e = (-1)^n (\omega_l)_e = (-1)^n \det \text{Ad}(e) (\omega_l)_e$$

より上の定数 c は $c = (-1)^n$ となり、

$$J^* \omega_l = (-1)^n \det \text{Ad} \cdot \omega_l$$

が成り立つ。

定義 3.4.47 Lie 群 G が多様体 X に Lie 変換群として作用していると仮定する。すなわち、作用を定める写像

$$A : G \times X \rightarrow X$$

が C^∞ 級であると仮定する。 μ を $\mathcal{K}(X)$ 上の積分とし、 $\chi : G \rightarrow \mathbf{R}$ とする。

$$\mu(u \circ A_g) = \chi(g)\mu(u) \quad (g \in G, u \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つとき、 μ を χ 共変積分と呼ぶ。 $\chi = 1$ のとき、 μ を不変積分と呼ぶ。

系 3.4.48 命題 3.4.45 と同じ設定のもとで、左不変 n 次微分形式 ω_l の定める $\mathcal{K}(G)$ 上の積分を λ_l で表し、右不変 n 次微分形式 ω_r の定める $\mathcal{K}(G)$ 上の積分を λ_r で表すと、 λ_l は右 $|\det \text{Ad}|^{-1}$ 共変積分になり、 λ_r は左 $|\det \text{Ad}|^{-1}$ 共変積分になる。

証明 G の連結成分の全体を $\{G_i\}$ で表す。 $x \in G$ をとったとき、各連結成分 G_i 上で $R_{x^{-1}}$ が向きを保つか逆にするかが定まる。 G_i 上で $R_{x^{-1}}$ が向きを保つならば $\alpha_i = 1$ とし、 G_i 上で $R_{x^{-1}}$ が向きを逆にするならば $\alpha_i = -1$ とする。 $f \in \mathcal{K}(G)$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_l(f \circ R_x) &= \int_G (f \circ R_x) \omega_l = \sum_i \alpha_i \int_{G_i} R_{x^{-1}}^* [(f \circ R_x) \omega_l] \\ &= \sum_i \alpha_i \int_{G_i} f \cdot (R_{x^{-1}}^* \omega_l) = \sum_i \alpha_i \int_{G_i} f \cdot \det \text{Ad}(x)^{-1} \cdot \omega_l \\ &= \sum_i \alpha_i \det \text{Ad}(x)^{-1} \int_{G_i} f \cdot \omega_l = \sum_i |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \int_{G_i} f \cdot \omega_l \\ &= |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \int_G f \cdot \omega_l = |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \lambda_l(f). \end{aligned}$$

したがって、 λ_l は右 $|\det \text{Ad}|^{-1}$ 共変積分になる。

G_i 上で $L_{x^{-1}}$ が向きを保つならば $\beta_i = 1$ とし、 G_i 上で $L_{x^{-1}}$ が向きを逆にするならば $\beta_i = -1$ とする。

$$\begin{aligned} \lambda_r(f \circ L_x) &= \int_G (f \circ L_x) \omega_r = \sum_i \beta_i \int_{G_i} L_{x^{-1}}^* [(f \circ L_x) \omega_r] \\ &= \sum_i \beta_i \int_{G_i} f \cdot (L_{x^{-1}}^* \omega_r) = \sum_i \beta_i \int_{G_i} f \cdot \det \text{Ad}(x)^{-1} \cdot \omega_r \\ &= \sum_i \beta_i \det \text{Ad}(x)^{-1} \int_{G_i} f \cdot \omega_r = \sum_i |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \int_{G_i} f \cdot \omega_r \\ &= |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \int_G f \cdot \omega_r = |\det \text{Ad}(x)|^{-1} \lambda_r(f). \end{aligned}$$

したがって、 λ_r は左 $|\det \text{Ad}|^{-1}$ 共変積分になる。

定義 3.4.49 Lie 群 G の左不変積分が右不変積分にもなるとき、 G をユニモジュラーという。

系 3.4.50 Lie 群 G がユニモジュラーになるための必要十分条件は、

$$|\det(\operatorname{Ad}(g))| = 1 \quad (g \in G)$$

が成り立つことである。

命題 3.4.51 Lie 群 G は、 $\operatorname{Ad}(G)$ がコンパクトになるとき、ユニモジュラーになる。

証明 $\operatorname{Ad}(G)$ がコンパクトだから、Lie 群の準同型写像

$$G \rightarrow \mathbf{R}_+; g \mapsto |\det \operatorname{Ad}(g)|$$

の像はコンパクトになる。ところが、 \mathbf{R}_+ のコンパクト部分群は $\{1\}$ のみだから、

$$|\det \operatorname{Ad}(g)| = 1 \quad (g \in G)$$

が成り立つ。したがって、系 3.4.50 より、 G はユニモジュラーになる。

3.5 等質空間上の不変測度

この節をとおして次のような設定で Lie 群の等質空間上の不変測度について考察する。 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} で表す。 H を G の閉 Lie 部分群とし、その Lie 環を $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ で表す。 $\pi : G \rightarrow G/H$ を自然な射影とし、 $o = \pi(e)$ とおく。各 $x \in G$ に対して G/H の微分同型写像 $\tau(x)$ を

$$\tau(x)gH = xgH \quad (gH \in G/H)$$

によって定める。

補題 3.5.1 任意の $h \in H$ に対して $d\tau(h)_o \circ d\pi_e = d\pi_e \circ \operatorname{Ad}_G(h)$ となり、さらに、次の等式が成り立つ。

$$\det d\tau(h)_o = \frac{\det \operatorname{Ad}_G(h)}{\det \operatorname{Ad}_H(h)} \quad (h \in H).$$

証明 任意の $h \in H$ と $g \in G$ に対して

$$\tau(h) \circ \pi(g) = hgH = hgh^{-1}H = (\pi \circ I(h))(g)$$

となるので、 $\tau(h) \circ \pi = \pi \circ I(h)$ が成り立つ。これより

$$d\tau(h)_o \circ d\pi_e = d(\tau(h) \circ \pi)_e = d(\pi \circ I(h))_e = d\pi_e \circ \operatorname{Ad}_G(h)$$

を得る。

$d\pi_e$ は \mathfrak{g} から $T_o(G/H)$ への線形全射になる。さらに $d\pi_e$ の核は \mathfrak{h} に一致する。したがって、 $d\pi_e$ は線形同型写像

$$\overline{d\pi_e} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow T_o(G/H)$$

を誘導する。また $\text{Ad}_G(h)$ は \mathfrak{h} を不変にするので

$$\overline{\text{Ad}_G(h)} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

を誘導する。これらより、 $d\tau(h)_o \circ \overline{d\pi_e} = \overline{d\pi_e} \circ \overline{\text{Ad}_G(h)}$ が成り立つので、

$$\det(d\tau(h)_o) = \det(\overline{\text{Ad}_G(h)})$$

を得る。他方、 $\text{Ad}_G(h)$ の \mathfrak{h} への制限は、 $\text{Ad}_H(h)$ に一致し、

$$\det(\text{Ad}_G(h)) = \det(\overline{\text{Ad}_G(h)}) \det(\text{Ad}_H(h))$$

が成り立つので、

$$\det(d\tau(h)_o) = \det(\overline{\text{Ad}_G(h)}) = \frac{\det(\text{Ad}_G(h))}{\det(\text{Ad}_H(h))}.$$

命題 3.5.2 $m = \dim(G/H)$ とおくと、次の二つの条件は同値になる。

- (1) G/H は 0 でない G 不変 m 次微分形式を持つ。
- (2) 任意の $h \in H$ に対して $\det(\text{Ad}_G(h)) = \det(\text{Ad}_H(h))$ が成り立つ。

これらの条件が満たされているとき、 G/H は G 不変な向きを持ち、 G 不変 m 次微分形式は定数倍を除いて一意的に定まる。

証明 まず (1) を仮定する。 G/H 上の 0 でない G 不変 m 次微分形式 ω をとる。 G 不変性より、特に $h \in H$ に対して $\tau(h)^*\omega = \omega$ が原点 o で成り立つので、 $\det(d\tau(h)_o) = 1$ となる。補題 3.5.1 より、 $\det(\text{Ad}_G(h)) = \det(\text{Ad}_H(h))$ となり、(2) が成り立つ。

次に (2) を仮定する。 $T_o(G/H)$ 上の 0 でない m 次交代形式 ω_o をとる。 $h \in H$ に対して $\det(\text{Ad}_G(h)) = \det(\text{Ad}_H(h))$ だから、 $\tau(h)^*\omega_o = \omega_o$ となる。したがって、 ω_o を G/H 上の G 不変 m 次微分形式 ω に一意的に拡張することができる。よって (2) が成り立つ。もし他の G 不変 m 次微分形式 ω' があるとすると、 G 不変性から ω の定数倍になる。これより G 不変 m 次微分形式の定数倍を除いた一意性がわかる。

最後に条件 (1) が満たされているとき、 G/H が G 不変な向きを持つことを示す。 G/H 上の 0 でない G 不変 m 次微分形式 ω をとる。 G/H の各点で ω に代入して正の値になる接ベクトル空間の基底を正の基底として定めると、これにより G/H の向きが定まり、 ω が G 不変であることから、この向きも G 不変になる。

定理 3.5.3 任意の $h \in H$ に対して

$$|\det(\text{Ad}_G(h))| = |\det(\text{Ad}_H(h))|$$

が成り立つことが、 $\mathcal{K}(G/H)$ 上に 0 ではない G 不変積分 $\mu_{G/H}$ が存在するための必要十分条件になる。この積分 $\mu_{G/H}$ は定数倍を除いて一意的であり、 G と H の左不変積分 μ_G と μ_H を正規化すると、

$$\int_G f d\mu_G = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_{G/H} \quad (f \in \mathcal{K}(G))$$

が成り立つ。

まずこの定理の証明のための準備をしておく。

補題 3.5.4 μ_H を H の左不変測度とし

$$\bar{f}(gH) = \int_H f(gh) d\mu_H(h) \quad (f \in \mathcal{K}(G))$$

とおく。このとき、 $f \mapsto \bar{f}$ は $\mathcal{K}(G)$ から $\mathcal{K}(G/H)$ への線形全射になる。

証明 \bar{f} の定め方より、 $\text{spt} \bar{f} \subset \pi(\text{spt} f)$ となる。 $f \in \mathcal{K}(G)$ より $\text{spt} f$ はコンパクトになり、 $\pi(\text{spt} f)$ もコンパクト、よって $\text{spt} \bar{f}$ もコンパクトになり、 $\bar{f} \in \mathcal{K}(G/H)$ が成り立つ。さらに積分の線形性より $f \mapsto \bar{f}$ は $\mathcal{K}(G)$ から $\mathcal{K}(G/H)$ への線形写像になる。

以下で上の線形写像が全射になること、すなわち、任意の $F \in \mathcal{K}(G/H)$ に対してある $f \in \mathcal{K}(G)$ が存在し $F = \bar{f}$ が成り立つことを示す。 $C = \text{spt} F$ とおくと C は G/H のコンパクト部分集合になる。よって、 G のあるコンパクト部分集合 C' が存在し $C = \pi(C')$ が成り立つ。 $\mu_H(C_H) > 0$ となる H のコンパクト部分集合 C_H をとり、 $\tilde{C} = C' \cdot C_H$ とおく。 C_H は H の部分集合だから $\pi(\tilde{C}) = \pi(C' \cdot C_H) = \pi(C') = C$ が成り立つ。さらに C' と C_H はコンパクトだから \tilde{C} もコンパクトになる。これより \tilde{C} 上 $f_1 > 0$ となり G 全体で $f_1 \geq 0$ となる $f_1 \in \mathcal{K}(G)$ をとることができる。 $gH \in C \subset G/H$ に対して

$$\bar{f}_1(gH) = \int_H f_1(gh) d\mu_H(h) \geq \int_{C_H} f_1(gh) d\mu_H(h) > 0$$

となり、 C 上 $\bar{f}_1 > 0$ が成り立つ。そこで

$$f(g) = \begin{cases} f_1(g) \frac{F(\pi(g))}{f_1(\pi(g))} & \pi(g) \in C \\ 0 & \pi(g) \notin C \end{cases}$$

とおく。 f は連続になり、 $\text{spt} f \subset \text{spt} f_1$ だから $f \in \mathcal{K}(G)$ が成り立つ。さらに定め方より $\pi(g) \notin C$ のとき $\bar{f}(gH) = 0 = F(gH)$ となり、 $\pi(g) \in C$ のとき

$$\bar{f}(gH) = \int_H f(gh) d\mu_H(h) = \frac{F(\pi(g))}{f_1(\pi(g))} \int f_1(gh) d\mu_H(h) = \frac{F(\pi(g))}{f_1(\pi(g))} \bar{f}_1(\pi(g)) = F(\pi(g)).$$

したがって $\bar{f} = F$ が成り立つ。

定理 3.5.5 $n = \dim G$ とする。 μ_G を G 上の左不変測度とすると、 G 上のある左不変 n 次微分形式 ω_l が存在し

$$\int_G \phi d\mu_G = \int_G \phi \omega_l \quad (\phi \in \mathcal{K}(G))$$

が成り立つ。特に G 上の左不変測度は定数倍を除いて一意的に定まる。

この定理の証明は省略し、結果を認めて使うことにする。

定理 3.5.3 の証明 まず任意の $h \in H$ に対して

$$|\det(\text{Ad}_G(h))| = |\det(\text{Ad}_H(h))|$$

が成り立つと仮定する。 G/H 上の G 不変積分 $\mu_{G/H}$ を構成するために $f \in \mathcal{K}(G)$ に対して $\bar{f} = 0$ ならば $\int_G f d\mu_G = 0$ が成り立つことを示す。任意に $\phi \in \mathcal{K}(G)$ をとる。系 3.4.48 と定理 3.5.5 より、 G 上の左不変測度 μ_G は右 $|\det \text{Ad}_G|^{-1}$ 共変になることと、Fubini の定理を使うと

$$\begin{aligned} & \int_G \phi(g) \left(\int_H f(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) \\ &= \int_H \left(\int_G \phi(g) f(gh) d\mu_G(g) \right) d\mu_H(h) \\ &= \int_H \left(|\det \text{Ad}_G(h)| \int_G \phi(gh^{-1}) f(g) d\mu_G(g) \right) d\mu_H(h) \\ &= \int_G f(g) \left(\int_H \phi(gh^{-1}) |\det \text{Ad}_G(h)| d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) \\ &= \int_G f(g) \left(\int_H \phi(gh^{-1}) |\det \text{Ad}_H(h)| d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) \\ &= \int_G f(g) \left(\int_H \phi(gh^{-1}) |\det \text{Ad}_H(h)| d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) \end{aligned}$$

を得る。系 3.4.46 と定理 3.5.5 より、

$$\int_H \phi(gh^{-1}) |\det \text{Ad}_H(h)| d\mu_H(h) = \int_H \phi(gh) d\mu_H(h)$$

が成り立つことがわかり、

$$\int_G \phi(g) \left(\int_H f(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) = \int_G f(g) \left(\int_H \phi(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g)$$

を得る。そこで、 $\pi(\text{spt} f)$ 上 $\Phi = 1$ となる $\Phi \in \mathcal{K}(G/H)$ をとり、補題 3.5.4 より $\bar{\phi} = \Phi$ を満たす $\phi \in \mathcal{K}(G)$ をとることができる。 $\bar{f} = 0$ と仮定すると、上で示したことより

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \phi(g) \bar{f}(gH) d\mu_G(g) = \int_G \phi(g) \left(\int_H f(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) \\ &= \int_G f(g) \left(\int_H \phi(gh) d\mu_H(h) \right) d\mu_G(g) = \int_G f(g) \Phi(gH) d\mu_G(g) \\ &= \int_G f(g) d\mu_G(g) \end{aligned}$$

を得る。

$F \in \mathcal{K}(G/H)$ に対して補題 3.5.4 より $\bar{f} = F$ を満たす $f \in \mathcal{K}(G)$ をとることができ、 $\mu_{G/H}(F) = \int_G f d\mu_G$ によって $\mu_{G/H} : \mathcal{K}(G/H) \rightarrow \mathbf{R}$ を定める。もし $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(G)$ が $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ を満たすとすると、 $\overline{f_1 - f_2} = 0$ となり、上で示したことから $\int_G (f_1 - f_2) d\mu_G = 0$ 、すなわち、 $\int_G f_1 d\mu_G = \int_G f_2 d\mu_G$ が成り立つ。これより、上の $\mu_{G/H}(F)$ の定め方は f のとり方に依

存しない。さらに $\mu_{G/H}$ は線形写像になる。 $F \geq 0$ ならば $\mu_{G/H}(F) \geq 0$ となることもわかる。したがって、 $\mu_{G/H}$ は G/H 上の積分になる。

G の元 g に対して

$$\mu_{G/H}(F \circ \tau(g)) = \int_G f(gx) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x) = \mu_{G/H}(F)$$

となり、 $\mu_{G/H}$ は G 不変積分になる。

次に G/H 上の0ではない G 不変積分 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する。このとき、 $f \in \mathcal{K}(G)$ に対して $\mu_{G/H}(\bar{f})$ を対応させる対応が G 上の左不変積分になることをまず示しておく。 $g \in G$ に対して

$$\mu_{G/H}(\overline{f \circ L_g}) = \mu_{G/H}(\bar{f} \circ \tau(g)) = \mu_{G/H}(\bar{f})$$

となるので、 $f \mapsto \mu_{G/H}(\bar{f})$ が左不変であることがわかる。定理3.5.5よりある正の定数 c が存在し

$$\mu_{G/H}(\bar{f}) = c \int_G f d\mu_G \quad (f \in \mathcal{K}(G))$$

が成り立つ。

第 4 章 積分幾何学

4.1 アフィン部分空間の全体

次の節で議論する Euclid 空間における Crofton の公式を定式化するために必要になるアフィン部分空間の全体に関する準備をこの節ですておく。

定義 4.1.1 \mathbf{R}^n の合同変換全体のなす Lie 変換群を $M(\mathbf{R}^n)$ で表す。 $M(\mathbf{R}^n)$ の元は $g \in O(n)$ と $u \in \mathbf{R}^n$ によって

$$T(g, u)x = gx + u \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表すことができ、 $M(\mathbf{R}^n)$ は多様体としては $O(n) \times \mathbf{R}^n$ と微分同型になる。Lie 群としては同型ではないことに注意しておく。 \mathbf{R}^n 内の m 次元アフィン部分空間全体を $A_m(\mathbf{R}^n)$ で表すと、 $M(\mathbf{R}^n)$ は $A_m(\mathbf{R}^n)$ に推移的に作用し、この作用によって $A_m(\mathbf{R}^n)$ は $M(\mathbf{R}^n)$ の等質空間になる。

$$I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m)) = \{(x, W) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m) \mid x \in W\}$$

によって $I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m))$ を定めると、 $I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m))$ は $\mathbf{G}(n, n-m)$ 上のベクトル束の全空間になり、多様体構造を持つ。写像

$$L : I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m)) \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n) ; (x, W) \mapsto L(x, W) = W^\perp + x$$

は二つの多様体間の微分同型写像を与える。

命題 4.1.2 $A_m(\mathbf{R}^n)$ は $(n-m)(m+1)$ 次元多様体になり、 $M(\mathbf{R}^n)$ の作用に関する不変積分 $\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)}$ を持つ。

略証 $G = M(\mathbf{R}^n)$ とおき、 $\mathbf{R}^m \in A_m(\mathbf{R}^n)$ とみなして

$$H = \{g \in G \mid g\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m\}$$

とすると、 H は G の閉部分群になり、 $A_m(\mathbf{R}^n)$ は G/H に微分同型になる。そこで、今後これらを微分同型写像

$$G/H \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n) ; gH \rightarrow g\mathbf{R}^m$$

によって同一視することにする。

$$H = \{T(g, u) \mid g \in \mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m), u \in \mathbf{R}^m\}$$

となることに注意すると、

$$\dim A_m(\mathbf{R}^n) = \dim M(\mathbf{R}^n) - \dim(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m) \times \mathbf{R}^m) = (n-m)(m+1).$$

G の随伴表現を計算すると $T(g, u) \in G$ に対して

$$|\det \text{Ad}_G(T(g, u))| = |\det \text{Ad}_{\mathbf{O}(n)}(g)| = 1$$

となり、 G はユニモジュラーになる。上の最後の等式は、命題 3.4.51 よりわかる。同様の計算によって $T(g, u) \in H$ に対しても

$$|\det \text{Ad}_H(T(g, u))| = |\det \text{Ad}_{\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m)}(g)| = 1$$

となり、 G はユニモジュラーになる。したがって、定理 3.5.3 より $G/H = A_m(\mathbf{R}^n)$ は $M(\mathbf{R}^n)$ の作用に関する不変積分を持つ。

命題 4.1.3

$$I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)) = \{(x, L) \in \mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n) \mid x \in L\}$$

とおくと、 $I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)$ の $n + m(n-m)$ 次元正規部分多様体になる。さらに、

$$i : \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, m) \rightarrow I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)); (x, V) \mapsto (x, V+x)$$

によって i を定めると、 i は微分同型写像になる。

略証 $A_m(\mathbf{R}^n)$ の元を $(x, W) \in I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m))$ によって $L(x, W)$ で表すことにする。 $\mathbf{G}(n, n-m)$ において局所的には、 $W \in \mathbf{G}(n, n-m)$ に滑らかに依存する W の正規直交基底 $e_1(W), \dots, e_{n-m}(W)$ をとることができる。 $(y, L(x, W)) \in \mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)$ に対して $(y, L(x, W)) \in I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ となるための必要十分条件は、 $y \in L(x, W)$ であり、 L の定め方からこれは $y \in W^\perp + x$ すなわち $y - x \in W^\perp$ と同値になる。さらに

$$\langle y - x, e_1(W) \rangle = \dots = \langle y - x, e_{n-m}(W) \rangle = 0$$

と同値になる。これは、 $\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)$ 内で $I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ が局所的に独立な $n-m$ 個の方程式 $\langle y - x, e_i(W) \rangle = 0$ の共通零点になっていることを示しているので、 $I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)$ の正規部分多様体になり、その次元は

$$n + (n-m)(m+1) - (n-m) = n + m(n-m)$$

に一致する。

i の定め方から、 i は C^∞ 級全単射であることがわかる。そこで、 i が微分同型写像になることを示すためには、各点の微分写像が線形同型写像になることを示せばよい。 i の像は

$$\begin{aligned} I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)) &\subset \mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n) \\ \xrightarrow{\mathbf{1} \times L^{-1}} \mathbf{R}^n \times I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m)) &\subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m) \end{aligned}$$

に含まれるので、 $(\mathbf{1} \times L^{-1})i$ の微分写像を $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n-m)$ の接ベクトルを使って表し最大階数になることがわかれば、 i の微分写像が線形同型写像になることもわかる。 $\mathbf{G}(n, m)$ において局所的には、 $V \in \mathbf{G}(n, m)$ に滑らかに依存する \mathbf{R}^n の正規直交基底 $e_1(V), \dots, e_n(V)$ であって、 $e_1(V), \dots, e_m(V)$ は V の正規直交基底になるものをとることができる。 $\mathbf{G}(n, m)$ の V における接ベクトル空間は、自然に $\text{Hom}(V, V^\perp)$ と同一視することができる。 $1 \leq j \leq m, m+1 \leq k \leq n$ に対して

$$F_{jk}(V)(e_l(V)) = \begin{cases} e_k(V) & (j=l) \\ 0 & (j \neq l) \end{cases}$$

によって $F_{jk}(V) \in \text{Hom}(V, V^\perp) = T_V(\mathbf{G}(n, m))$ を定めると、これらは $T_V(\mathbf{G}(n, m))$ の基底になる。以降の計算では $e_j(V)$ と $F_{jk}(V)$ の V は省略して書くことにする。 $(x, V) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, m)$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} \times L^{-1})i(x, V) &= (\mathbf{1} \times L^{-1})(x, V+x) \\ &= (\mathbf{1} \times L^{-1}) \left(x, V + \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right) \\ &= (\mathbf{1} \times L^{-1}) \left(x, V + \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) \\ &= \left(x, \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, V^\perp \right). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} d((\mathbf{1} \times L^{-1})i)(e_j, 0) &= (e_j, 0, 0) & (1 \leq j \leq m) \\ d((\mathbf{1} \times L^{-1})i)(e_k, 0) &= (e_k, e_k, 0) & (m+1 \leq k \leq n) \\ d((\mathbf{1} \times L^{-1})i)(0, F_{jk}) &= (0, -\langle x, e_k \rangle e_j - \langle x, e_j \rangle e_k, -F_{jk}^*) & (1 \leq j \leq m, m+1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

となり、 $d((\mathbf{1} \times L^{-1})i)$ は最大階数であることがわかる。

4.2 Crofton の公式

定理 4.2.1 (Crofton の公式) \mathbf{R}^n 内の $n-m$ 次元部分多様体 S に対して

$$i_S : A_m(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, \infty] ; L \mapsto i_S(L) = \text{card}(S \cap L)$$

は $\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)}$ 可測関数になる。さらに n, m にのみ依存する正の定数 C が存在し

$$\mu_S(S) = C \int i_S d\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)}$$

が成り立つ。

証明

$$I(S) = \{(x, L) \in I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)) \mid x \in S\}$$

とおく。命題 4.1.3 の微分同型写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(S)) = S \times \mathbf{G}(n, m)$$

となるので、これは $\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, m)$ の部分多様体になりその次元は

$$n - m + m(n - m) = (n - m)(m + 1)$$

になる。したがって、 $I(S)$ は $I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ の $(n - m)(m + 1)$ 次元部分多様体になる。

$$\pi_A : I(S) \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n) ; (x, L) \mapsto L$$

によって写像 π_A を定義すると、 π_A は包含写像 $I(S) \rightarrow \mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n) \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n)$ との合成になるので、 C^∞ 級写像になる。

$$\dim A_m(\mathbf{R}^n) = (n - m)(m + 1) = \dim I(S)$$

に注意しておく。この C^∞ 級写像 $\pi_A : I(S) \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n)$ に余面積公式 (系 3.3.7) を適用するためにこれらの多様体に Riemann 計量を導入する。 \mathbf{R}^n とその部分多様体 S には標準的な Riemann 計量とその誘導計量を導入しておく。Grassmann 多様体 $\mathbf{G}(n, m)$ と $\mathbf{G}(n, n - m)$ には、命題 4.1.3 の略証中に導入した F_{jk} と F_{jk}^* が正規直交基底になるように Riemann 計量を導入しておく。命題 4.1.3 の微分同型写像

$$i : \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, m) \rightarrow I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$$

が等長的になるように $I(\mathbf{R}^n \times A_m(\mathbf{R}^n))$ に Riemann 計量を導入し、部分多様体 $I(S)$ にその誘導計量を導入する。すると、 $I(S)$ は $S \times \mathbf{G}(n, m)$ と等長的になる。写像 π_A の値域 $A_m(\mathbf{R}^n)$ には微分同型写像

$$L^{-1} : A_m(\mathbf{R}^n) \rightarrow I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n - m))$$

および包含関係

$$I(\mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n - m)) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{G}(n, n - m)$$

によって誘導される Riemann 計量を導入する。この Riemann 計量から誘導される Riemann 測度による積分は、 $A_m(\mathbf{R}^n)$ の $M(\mathbf{R}^n)$ の作用による不変積分になることがわかり、これを $\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)}$ とみなすことができる。

$I(S)$ 上恒等的に 1 に等しい関数と $\pi_A : I(S) \rightarrow A_m(\mathbf{R}^n)$ に余面積公式 (系 3.3.7) を適用すると

$$\int \text{card}(\pi_A^{-1}(L)) d\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)} L = \int J\pi_A d\mu_{I(S)}$$

を得る。ここで

$$\pi_A^{-1}(L) = \{(x, L) \mid x \in L, x \in S\} = (S \cap L) \times \{L\}$$

だから $\text{card}(\pi_A^{-1}(L)) = \text{card}(S \cap L) = i_S(L)$ となり、

$$\int i_S d\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)} = \int J\pi_A d\mu_{I(S)}.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_A の微分写像 $d\pi_A$ を求める。 $\pi_A(\mathbf{1} \times L^{-1})i = L^{-1}i$ であることに注意しておく。命題 4.1.3 の略証中に示した $(\mathbf{1} \times L^{-1})i$ の微分写像の公式を使うと、 $(x, V) \in S \times \mathbf{G}(n, m)$ において S の接ベクトル X をとると

$$\begin{aligned} d(\pi_A(\mathbf{1} \times L^{-1})i)(X, 0) &= d(L^{-1}i)(X, 0) \\ &= d(L^{-1}i) \left(\sum_{j=1}^m \langle X, e_j \rangle e_j + \sum_{k=m+1}^n \langle X, e_k \rangle e_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^n \langle X, e_k \rangle e_k, 0 \right) \\ d(\pi_A(\mathbf{1} \times L^{-1})i)(0, F_{jk}) &= d(L^{-1}i)(0, F_{jk}) \\ &= (-\langle x, e_k \rangle e_j - \langle x, e_j \rangle e_k, -F_{jk}^*) \end{aligned}$$

を得る。 \mathbf{R}^n における V^\perp への直交射影を P_{V^\perp} で表すと、

$$P_{V^\perp}(v) = \sum_{k=m+1}^n \langle v, e_k \rangle e_k$$

となるので、

$$\begin{aligned} d(\pi_A(\mathbf{1} \times L^{-1})i)(X, 0) &= (P_{V^\perp}(X), 0) \\ d(\pi_A(\mathbf{1} \times L^{-1})i)(0, F_{jk}) &= (-\langle x, e_k \rangle e_j - \langle x, e_j \rangle e_k, -F_{jk}^*) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $T_x S$ の正規直交基底 u_1, \dots, u_{n-m} をとると、

$$\begin{aligned} &J\pi_A(x, V) \\ &= \left| (P_{V^\perp}(u_1), 0) \wedge \cdots \wedge (P_{V^\perp}(u_{n-m}), 0) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq m \\ m+1 \leq k \leq n}} (-\langle x, e_k \rangle e_j - \langle x, e_j \rangle e_k, -F_{jk}^*) \right| \\ &= \left| (P_{V^\perp}(u_1), 0) \wedge \cdots \wedge (P_{V^\perp}(u_{n-m}), 0) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq m \\ m+1 \leq k \leq n}} (0, -F_{jk}^*) \right| \\ &= |P_{V^\perp}(u_1) \wedge \cdots \wedge P_{V^\perp}(u_{n-m})|. \end{aligned}$$

したがって、

$$\int J\pi_A d\mu_{I(S)} = \int \left(\int |P_{V^\perp}(u_1) \wedge \cdots \wedge P_{V^\perp}(u_{n-m})| d\mu_{\mathbf{G}(n,m)} V \right) d\mu_S.$$

ここで、積分

$$\int |P_{V^\perp}(u_1) \wedge \cdots \wedge P_{V^\perp}(u_{n-m})| d\mu_{\mathbf{G}(n,m)} V$$

は $T_x S$ に依存しないで n, m にのみ依存するある正の定数 C^{-1} になるので、

$$\int J\pi_A d\mu_{I(S)} = C^{-1} \mu_S(S)$$

が成り立ち、

$$\mu_S(S) = C \int i_S d\mu_{A_m(\mathbf{R}^n)}$$

を得る。

定理 3.3.10 の Crofton の公式による証明 $m > n$ と仮定していることに注意しておく。 $H(M)$ を通る $m-n$ 次元アフィン部分空間は $H(M)$ と交点を一つだけ持ち、 M を境界に持つ n 次元部分多様体 S とは一点以上の交点を持つので、 $i_{H(c)} \leq i_S$ が成り立つ。これより、

$$\mu_S(S) = C \int i_S d\mu_{A_{m-n}(\mathbf{R}^n)} \geq C \int i_{H(M)} d\mu_{A_{m-n}(\mathbf{R}^n)} = \mathcal{L}^n(H(M)).$$

したがって、 $H(M)$ が面積最小になる。等号 $\mu_S(S) = \mathcal{L}^n(H(M))$ が成り立つと仮定すると、上の不等式の等号が成り立つので、 $\mu_{A_{m-n}(\mathbf{R}^n)}$ に関してほとんどすべての $m-n$ 次元アフィン部分空間に関して $i_S = i_{H(M)}$ が成り立つことになり S は $H(M)$ に一致する。

4.3 位相ベクトル空間

この節では次の節以降で必要になる位相ベクトル空間に関する基本的事項をまとめておく。さらに詳しい解説や証明については、たとえば

W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, New York, 1973

を参照のこと。

定義 4.3.1 実ベクトル空間 X が次の条件を満たす位相を持っているとき X を位相ベクトル空間という。

- (1) X のどの 1 点も閉集合である。
- (2) X の実ベクトル空間としての演算

$$X \times X \longrightarrow X; (x, y) \longmapsto x + y$$

$$\mathbf{R} \times X \longrightarrow X; (r, x) \longmapsto rx$$

は連続である。

定義 4.3.2 実ベクトル空間 X 上の実数値関数 p が

$$(1) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$$

$$(2) \quad p(rx) = |r|p(x) \quad (r \in \mathbf{R}, x \in X)$$

を満たすとき p を X 上のセミノルムと呼ぶ。さらにセミノルム p が $p(x) = 0$ ならば $x = 0$ を満たすとき p を X 上のノルムと呼ぶ。

命題 4.3.3 実ベクトル空間 X 上のセミノルム p は次の性質を持つ。

$$(1) \quad p(0) = 0$$

$$(2) \quad |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \quad (x, y \in X)$$

$$(3) \quad p(x) \geq 0 \quad (x \in X)$$

$$(4) \quad \{x \in X \mid p(x) = 0\} \text{ は } X \text{ の部分ベクトル空間になる。}$$

証明 (1) 定義 4.3.2 の (2) より

$$p(0) = p(0 \cdot x) = |0|p(x) = 0.$$

(2) 定義 4.3.2 の (1) より $x, y \in X$ に対して

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$$

となるので $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$ を得る。さらに定義 4.3.2 の (2) より

$$p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$$

だから $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ を得る。

(3) 上の (2) において $y = 0$ とすると

$$0 \leq |p(x) - p(0)| \leq p(x - 0) = p(x)$$

となり $0 \leq p(x)$ を得る。

(4) $p(x) = p(y) = 0$ を満たす $x, y \in X$ と実数 a, b に対して

$$0 \leq p(ax + by) \leq p(ax) + p(by) = |a|p(x) + |b|p(y) = 0.$$

したがって $p(ax + by) = 0$ となり、 $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ は X の部分ベクトル空間になる。

命題 4.3.4 X を実ベクトル空間とし、 p を X 上のノルムとする。このとき、

$$d(x, y) = p(x - y) \quad (x, y \in X)$$

によって d を定めると、 d は X 上の距離になる。さらにこの距離の定める位相に関して X は位相ベクトル空間になる。

証明 $x, y \in X$ に対して $0 \leq d(x, y)$ となる。 $d(x, x) = p(x - x) = p(0) = 0$ であり、 $0 = d(x, y) = p(x - y)$ ならば $x - y = 0$ となるので $x = y$ が成り立つ。さらに

$$d(x, y) = p(x - y) = p(y - x) = d(y, x).$$

$x, y, z \in X$ に対して

$$d(x, z) = p(x - z) = p(x - y + y - z) \leq p(x - y) + p(y - z) = d(x, y) + d(y, z).$$

以上より、 d は X 上の距離になる。

この距離から定まる位相に関して X が位相ベクトル空間になることは次の不等式からわかる。 $x, x', y, y' \in X$ に対して

$$d(x + x', y + y') = p(x + x' - y - y') \leq p(x - y) + p(x' - y') = d(x, y) + d(x', y').$$

$x, y \in X$ と実数 a, b に対して

$$\begin{aligned} d(ax, by) &= p(ax - by) = p(ax - ay + ay - by) \\ &\leq p(ax - ay) + p(ay - by) = |a|p(x - y) + |a - b|p(y) \\ &= |a|d(x, y) + |a - b|p(y). \end{aligned}$$

命題 4.3.5 $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を実ベクトル空間 X 上のセミノルムの可算族とする。さらに $x \in X$ をとると任意の i について $p_i(x) = 0$ ならば $x = 0$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(x - y), 1\} \quad (x, y \in X)$$

とおくと、 ρ は X の距離になり、 ρ が誘導する位相に関して X は位相ベクトル空間になる。

証明 $x, y \in X$ に対して $0 \leq \min\{p_i(x - y), 1\} \leq 1$ となるので、 ρ を定義している級数は収束し、 ρ の定義は意味を持つ。 $0 \leq \rho(x, y)$ も成り立つ。 $\rho(x, x) = 0$ は定義からわかる。 $\rho(x, y) = 0$ とすると、任意の i について $\min\{p_i(x - y), 1\} = 0$ が成り立ち、仮定から $x = y$ を得る。

0 以上の実数 u, v に対して $\min\{u + v, 1\} \leq \min\{u, 1\} + \min\{v, 1\}$ が成り立つので、 $x, y, z \in X$ に対して

$$\min\{p_i(x - z), 1\} \leq \min\{p_i(x - y), 1\} + \min\{p_i(y - z), 1\}$$

が成り立ち、これより

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

を得る。以上より、 ρ は X 上の距離になる。

この距離から定まる位相に関して X が位相ベクトル空間になることは、命題 4.3.4 の証明中に示した不等式はセミノルムに対しても成立することと、次の不等式からわかる。
 $x, x', y, y' \in X$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(x + x', y + y') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(x + x' - y - y'), 1\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(x - y) + p_i(x' - y'), 1\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(x - y), 1\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(x' - y'), 1\} \\ &= \rho(x, y) + \rho(x', y'). \end{aligned}$$

$x, y \in X$ と実数 a, b に対して

$$\begin{aligned} \rho(ax, by) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{p_i(ax - by), 1\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{|a|p_i(x - y) + |a - b|p_i(y), 1\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{|a|p_i(x - y), 1\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{|a - b|p_i(y), 1\} \\ &= |a|\rho(x, y) + |a - b|\rho(y). \end{aligned}$$

4.4 カレント

定義 4.4.1 位相ベクトル空間 X 上の実数値連続線形写像の全体がつくる実ベクトル空間を X の双対空間と呼ぶ。

定義 4.4.2 X を n 次元多様体とする。 $0 \leq p \leq n$ に対して X 上の C^∞ 級 p 次微分形式の全体がつくるベクトル空間を $\mathcal{E}^p(X)$ で表わす。 X の局所座標近傍 O_i, U_i を

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad O_i \supset \bar{U}_i \text{ はコンパクト}$$

となるようにとる。 $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ に対して

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \quad \text{on } O_i \\ |\omega|_i^a &= \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_n \leq a \\ j_1 < \dots < j_p}} \sup_{x \in \bar{U}_i} \left| \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} \omega_{j_1 \dots j_p}(x)}{(\partial x_1)^{a_1} \dots (\partial x_n)^{a_n}} \right| \end{aligned}$$

とおくと $|\cdot|_i^a$ は $\mathcal{E}^p(X)$ のセミノルムになり、 $|\cdot|_i^a$ を使うと命題 4.3.5 によって $\mathcal{E}^p(X)$ は位相ベクトル空間になる。

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{j_1 < \dots < j_p} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \quad \text{on } O_i$$

より $|d\omega|_i^a \leq |\omega|_i^{a+1}$ となるので

$$d : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1}(X)$$

は連続になる。

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(X) \longrightarrow 0$$

を de Rham 複体と呼ぶ。 $\mathcal{E}^p(X)$ 上の連続線形形式を X 上の p 次元カレントと呼び、その全体がつくるベクトル空間、つまり $\mathcal{E}^p(X)$ の双対空間を $\mathcal{E}'_p(X)$ で表わす。

注意 4.4.3 $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ について T の台 $\text{spt}T$ は

$$\text{spt}T = X \sim \cup \{V : X \text{ の開集合 } |\phi \in \mathcal{E}^p(X), \text{spt}\phi \subset V \Rightarrow T(\phi) = 0\}$$

で定義される。 $\mathcal{E}'_p(X)$ の元はコンパクトな台を持つことがわかる。一般には $\mathcal{E}'_p(X)$ の元をコンパクトな台を持つカレントと呼ぶが、ここでは単にカレントと呼ぶことにする。

定義 4.4.4 $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して $\partial T = T \circ d$ とすると $\partial T \in \mathcal{E}'_{p-1}(X)$ となり、線形写像 $\partial : \mathcal{E}'_p(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_{p-1}(X)$ が定まる。 ∂ を境界作用素と呼ぶ。

注意 4.4.5 $d^2 = 0$ より $\partial^2 = 0$ となり

$$0 \longleftarrow \mathcal{E}'_0(X) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} \mathcal{E}'_n(X) \longleftarrow 0$$

も複体になる。 de Rham の定理より

$$H_*(\mathcal{E}'_*(X)) \cong H_*(X; \mathbf{R}).$$

定義 4.4.6 n 次元多様体 X 上の連続 p 次微分形式の全体がつくるベクトル空間を $\mathcal{C}^p(X)$ で表わす。 $\omega \in \mathcal{C}^p(X)$ に対して

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \quad \text{on } O_i \\ |\omega|_i &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sup_{x \in \bar{U}_i} |\omega_{j_1 \dots j_p}(x)| \end{aligned}$$

とおくと $|\cdot|_i$ は $\mathcal{C}^p(X)$ のセミノルムになり、 $|\cdot|_i$ を使うと命題 4.3.5 によって $\mathcal{C}^p(X)$ は位相ベクトル空間になる。 $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ に対して $|\omega|_i = |\omega|_i^0 \leq |\omega|_i^a$ が成り立つので包含写像 $\iota : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{C}^p(X)$ は連続になる。 $\mathcal{C}^p(X)$ 上の連続線形形式を X 上の p 次元積分表示可能カレントと呼び、その全体がつくるベクトル空間を $\mathfrak{M}_p(X)$ で表す。包含写像 $\iota : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{C}^p(X)$ は連続だから $T \in \mathfrak{M}_p(X)$ に対して $T \circ \iota \in \mathcal{E}'_p(X)$ となる。また $\mathcal{E}^p(X)$ は $\mathcal{C}^p(X)$ 内で稠密なので線形写像

$$\mathfrak{M}_p(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_p(X); T \longmapsto T \circ \iota$$

は単射になる。したがって $\mathfrak{M}_p(X) \subset \mathcal{E}'_p(X)$ とみなすことができる。

定義 4.4.7 X を n 次元 Riemann 多様体とする。 $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して

$$\mathbf{M}(T) = \sup\{T(\phi) \mid \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi_x\| \leq 1(x \in X)\}$$

とおく。 $\mathbf{M}(T)$ を T の体積量と呼ぶ。 各 $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して $\mathbf{M}(T) \in [0, \infty]$ となる。

命題 4.4.8

$$\mathfrak{M}_p(X) = \{T \in \mathcal{E}'_p(X) \mid \mathbf{M}(T) < \infty\}.$$

定理 4.4.9 $T \in \mathfrak{M}_p(X)$ に対して X 上の Radon 測度 $\|T\|$ が存在し、すべての $f \in \mathcal{C}^0(X)^+$ に対して

$$\int_X f d\|T\| = \sup\{T(\phi) \mid \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\| \leq f\}$$

が成り立つ。特に $\int_X d\|T\| = \mathbf{M}(T)$ となる。

定義 4.4.10 定理 4.4.9 の $\|T\|$ を T の全変分測度と呼ぶ。

定理 4.4.11 $T \in \mathfrak{M}_p(X)$ に対してベクトル束 $\wedge_p TX$ の $\|T\|$ 可測な断面 \vec{T} が一意的に存在し

$$\begin{aligned} \int \|\vec{T}_x\| d\|T\|_x &< \infty \\ \|\vec{T}_x\| &= 1 \quad (\|T\| \text{ に関するほとんどすべての } x \in X) \\ T(\phi) &= \int \phi(\vec{T}_x) d\|T\|_x \quad (\phi \in \mathcal{C}^p(X)) \end{aligned}$$

を満たす。

注意 4.4.12 定理 4.4.11 より $T \in \mathfrak{M}_p(X)$ に対して

$$T(\phi) = \int \phi(\vec{T}_x) d\|T\|_x \quad (\phi \in \mathcal{C}^p(X))$$

となるので $T = \vec{T}\|T\|$ と書くこともある。

例 4.4.13 M を X の向き付けられた p 次元コンパクト部分多様体とする。 \mathcal{H}^p で X の p 次元 Hausdorff 測度を表し、 $\|M\| = \mathcal{H}^p \llcorner M$ とおく。ただし、 $A \subset X$ に対して $(\mathcal{H}^p \llcorner M)(A) = \mathcal{H}^p(M \cap A)$ によって測度 $\mathcal{H}^p \llcorner M$ を定める。

$$\vec{M}_x = \begin{cases} e_1 \wedge \cdots \wedge e_p & (x \in M \text{ かつ } e_i \text{ は } T_x M \text{ の正の向きの正規直交基底}) \\ 0 & (x \notin M) \end{cases}$$

によって $\wedge_p TX$ の $\|M\|$ 可測な断面 \vec{M} を定め、 p 次元積分表示可能カレント $\vec{M}\|M\|$ を考える。このカレントも M で表すことにする。これは p 次微分形式を M 上で積分することに他ならない。さらに $\mathcal{H}^p \llcorner M = \mu_M$ となることが知られているので

$$\mathbf{M}(M) = \int d\|M\| = \mathcal{H}^p(M) = \mu_M(M)$$

が成り立つ。したがって、カレントが向きの付いたコンパクト部分多様体から定まっているときは、そのカレントとしての体積量は通常の部分多様体の体積に一致している。

4.5 キャリブレーション

定義 4.5.1 V を内積を持つ有限次元ベクトル空間とする。 $\|\phi\| \leq 1$ を満たす $\phi \in \wedge^p V$ を V 上のキャリブレーションと呼ぶ。 V 上のキャリブレーション ϕ に対して、長さ1の単純ベクトル $\xi \in \wedge_p V$ が $\langle \xi, \phi \rangle = 1$ を満たすとき、 ϕ は ξ をキャリブレートするという。 V の向きが付いた p 次元部分ベクトル空間 W に対して W の正の向きの正規直交基底 w_1, \dots, w_p をとり、

$$\vec{W} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \in \wedge_p V$$

によって長さ1の単純ベクトル \vec{W} を定める。 ϕ が \vec{W} をキャリブレートするとき、 ϕ は W をキャリブレートするという。

定義 4.5.2 X をRiemann多様体とする。閉微分形式 $\phi \in \mathcal{E}^p(X)$ が各 $x \in M$ に対して $T_x M$ 上のキャリブレーションであるとき、 ϕ を X 上のキャリブレーションと呼ぶ。 X 上のキャリブレーション ϕ に対して、 $T \in \mathfrak{M}_p(X)$ が $\|T\|$ に関してほとんどすべての $x \in X$ について $\phi(\vec{T}_x) = 1$ を満たすとき、 ϕ は T をキャリブレートするという。

定理 4.5.3 (Harvey-Lawson) ϕ をRiemannian多様体 X 上のキャリブレーションとする。 ϕ がキャリブレートする閉カレントはそのホモロジー類の中で体積量最小になる。

証明 M を ϕ がキャリブレートする閉カレントとする。 M と同じホモロジー類に属する閉カレント M' をとる。すると $p+1$ 次元カレント N が存在し $M' - M = \partial N$ が成り立つ。よって

$$M'(\phi) - M(\phi) = \langle M' - M, \phi \rangle = \langle \partial N, \phi \rangle = \langle N, d\phi \rangle = 0$$

となり $M'(\phi) = M(\phi)$ が成り立つ。さらに ϕ が M をキャリブレートすることから、

$$M(\phi) = \int \phi(\vec{M}_x) d\|M\|_x = \int d\|M\| = \mathbf{M}(M).$$

次に M' について考える。 $M' \notin \mathfrak{M}_p(X)$ のときは命題4.4.8より $\mathbf{M}(M') = \infty$ だから、 $M' \in \mathfrak{M}_p(X)$ の場合を考えればよい。 ϕ の各点での余体積量が1以下であることから

$$M'(\phi) = \int \phi(\vec{M}'_x) d\|M'\|_x \leq \int d\|M'\| = \mathbf{M}(M').$$

以上より

$$\mathbf{M}(M) = M(\phi) = M'(\phi) \leq \mathbf{M}(M')$$

となり、 M は体積量最小になる。

定理 4.5.4 $m > n$ とする。 \mathbf{R}^m 内の平面 \mathbf{R}^n の $n-1$ 次元コンパクト部分多様体 M が領域 $H(M)$ を囲んでいると仮定する。 M を境界に持つ \mathbf{R}^m 内の n 次元カレントの内では体積量最小なものは $H(M)$ に限る。

証明 \mathbb{R}^m 上の n 次微分形式 $\phi = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ は閉微分形式になっている。さらに \mathbb{R}^m の各点で単純コベクトルであり長さ 1 だから、余体積量も 1 になる。したがって ϕ は \mathbb{R}^m 上のキャリブレーションになる。さらに ϕ の定め方より ϕ は $H(M)$ をキャリブレートする。

M を境界に持つカレント S に対して定理 4.5.3 より

$$\mathbf{M}(S) \geq \mathbf{M}(H(M))$$

が成り立つ。したがって、 $H(M)$ は体積量最小になる。

上の等号が成り立つと仮定すると

$$\mathbf{M}(S) = \int d\|S\| \geq \int \phi(\vec{S}_x) d\|S\|_x = \int \phi(\vec{H}(M)_x) d\|H(M)\|_x = \mathbf{M}(H(M))$$

の等号が成り立つので、 $\|S\|$ に関してほとんどすべての x に対して $\phi(\vec{S}_x) = 1$ となるので、 $S = H(M)$ が成り立つ。

定理 4.5.5 Kähler 多様体 M 内のコンパクト複素部分多様体は、そのホモロジー類内で体積最小である。

証明 ω を M の Kähler 形式とすると、 ω は閉微分形式になる。 N をコンパクト m 次元複素部分多様体とする。

$$d\omega^m = \sum_{i=1}^m \omega \wedge \cdots \wedge \overset{i}{d}\omega \wedge \cdots \wedge \omega = 0$$

だから ω^m も閉微分形式になる。命題 2.2.13 より $\omega^m/m!$ は M 上のキャリブレーションになり、 N をキャリブレートする。したがって、定理 4.5.3 より N はそのホモロジー類内で体積最小になる。