自然学類

微分幾何学

数学研究科

微分幾何学概論

理工学研究科

微分幾何学 II

微分幾何学と接続

田崎博之

2000 年度

目 次

第 1 章 Euclid 空間の部分多様体

Euclid 空間内の曲面上の微分、より一般的に部分多様体上の微分から、共変微分の概念を導く。共変微分から第二基本形式、曲率、平行移動等の基本的概念を導入する。共変微分は局所正規直交フレームに対してある一次微分形式を定める。正規直交フレーム全体を多様体とみなすことによって、局所正規直交フレームから定まる局所的な一次微分形式は大域的な一次微分形式を定めることがわかる。

1.1 交代形式

微分形式を定式化するためにはベクトル空間上の交代形式が必要になるので、この節では交代形式の解説をする。

定義 1.1.1 V, Wを実ベクトル空間とし p を自然数とする。Vの p 個の積 V^pから Wへの多重線形写像ω(各成分について線形) が任意の $i \neq j$について

$$\omega(\ldots, \overset{i}{\breve{v_i}}, \ldots, \overset{j}{\breve{v_j}}, \ldots) + \omega(\ldots, \overset{i}{\breve{v_j}}, \ldots, \overset{j}{\breve{v_i}}, \ldots) = 0 \qquad (v_k \in V)$$

を満たすとき、ωを W**に値を持つ** V**上の** p **次交代形式**と呼ぶ。Wに値を持つ V上の p 次交代形式の全体を$\wedge^p(V, W)$ で表す。$\wedge^p(V, W)$ に Wの実ベクトル空間の構造から定まる実ベクトル空間の構造を入れることにする。$W = \mathbf{R}$ のとき、$\wedge^p(V, \mathbf{R}) = \wedge^p V^*$と書き、$\wedge^p V^*$の元を単に V上の p 次交代形式と呼ぶ。$\wedge^0(V, W) = W$としておく。

補題 1.1.2 pを自然数とし S_pを p 次対称群 ($\{1, \ldots, p\}$ の置換全体のつくる群) とする。$\sigma \in S_p$の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で表すことにする。V, Wを実ベクトル空間とすると、$\omega \in \wedge^p(V, W), \sigma \in S_p$に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。

証明 σが互換のときは定義より

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = -\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。偶置換は互換の偶数個の積で表され奇置換は互換の奇数個の積で表されるので一般の$\sigma \in S_p$に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

が成り立つ。

定義 1.1.3 V_1, V_2, Wを実ベクトル空間とし p を自然数とする。線形写像 $f : V_1 \to V_2$による引戻し $f^* : \wedge^p(V_2, W) \to \wedge^p(V_1, W)$ を$\omega \in \wedge^p(V_2, W)$ に対して

$$(f^*\omega)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \qquad (v_i \in V_1)$$

と定める。$f^* : \wedge^0(V_2, W) = W \to \wedge^0(V_1, W) = W$は恒等写像とする。上の定め方より、$f^* : \wedge^p(V_2, W) \to \wedge^p(V_1, W)$ は線形写像になる。

定義 1.1.4 V, W_1, W_2, W_3を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_2 \to W_3$を双線形写像とする。このとき$\omega \in \wedge^p(V, W_1)$ と$\eta \in \wedge^q(V, W_2)$ の**外積** $A(\omega \wedge \eta) \in \wedge^{p+q}(V, W_3)$ を $v_i \in V$に対して

$$\begin{aligned} & A(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ = \; & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}), \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \end{aligned}$$

と定義する。定義式より、$A(\omega \wedge \eta)$ は$\wedge^{p+q}(V, W_3)$ の元になり、

$$A(\wedge) : \wedge^p(V, W_1) \times \wedge^q(V, W_2) \to \wedge^{p+q}(V, W_3)$$

は双線形写像になることがわかる。双線形写像 A が明かな場合は $A(\omega \wedge \eta)$ を単に$\omega \wedge \eta$とも書く。

注意 1.1.5 本や論文によって外積の定義式の係数が異なるので注意を要する。この講義では交代形式の外積の定義の係数は $1/p!q!$にしているが、この係数が異なるとこの後の諸公式の係数も異なってくる。

命題 1.1.6 V, V', W_1, W_2, W_3を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_2 \to W_3$を双線形写像とする。線形写像 $f : V \to V'$に対して

$$f^*(A(\omega \wedge \eta)) = A((f^*\omega) \wedge (f^*\eta)) \qquad (\omega \in \wedge^p(V', W_1), \eta \in \wedge^q(V', W_2))$$

が成り立つ。

証明 $v_i \in V$に対して

$$\begin{aligned} & f^*(A(\omega \wedge \eta))(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ = \; & (A(\omega \wedge \eta))(f(v_1), \ldots, f(v_{p+q})) \\ = \; & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(f(v_{\sigma(1)}), \ldots, f(v_{\sigma(p)})), \eta(f(v_{\sigma(p+1)}), \ldots, f(v_{\sigma(p+n)}))) \\ = \; & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A((f^*\omega)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}), (f^*\eta)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\ = \; & A((f^*\omega) \wedge (f^*\eta))(v_1, \ldots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

命題 1.1.7 V, W_1, W_2を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_1 \to W_2$を双線形写像とする。$A$が対称ならば (すなわち、$A(X,Y) = A(Y,X)$)、

$$A(\omega \wedge \eta) = (-1)^{pq} A(\eta \wedge \omega) \qquad (\omega \in \wedge^p(V, W_1), \eta \in \wedge^q(V, W_1))$$

が成り立ち、A が交代ならば (すなわち、$A(X,Y) = -A(Y,X)$)、

$$A(\omega \wedge \eta) = (-1)^{pq+1} A(\eta \wedge \omega) \qquad (\omega \in \wedge^p(V, W_1), \eta \in \wedge^q(V, W_1))$$

が成り立つ。

証明 S_{p+q}の元τを

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ q+1 & \cdots & p+q & 1 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

によって定める。$\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^{pq}$に注意しておく。$v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$に対して

$$\begin{aligned} & A(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\ = & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) A(\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}), \eta(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)})) \\ = & \frac{1}{p!q!} \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}), \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})). \end{aligned}$$

ここで、A が対称の場合は

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{p!q!} (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}), \omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\ = & (-1)^{pq} A(\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \end{aligned}$$

となり、A が交代の場合は

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{p!q!} (-1)^{pq+1} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) A(\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}), \omega(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \\ = & (-1)^{pq+1} A(\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \end{aligned}$$

となる。

定理 1.1.8 Vを実ベクトル空間としWを代数とする。Wの積を$W \times W$からWへの双線形写像とみなしてWに値を持つV上の交代形式の外積を定めると、$\omega \in \wedge^p(V, W)$, $\eta \in \wedge^q(V, W)$, $\zeta \in \wedge^r(V, W)$ に対して

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

が成り立つ。

証明 以下の計算では、

$$S_{p+q} = \{\tau \in S_{p+q+r} \mid \tau(i) = i\ (p+q+1 \leq i \leq p+q+r)\}$$

とみなすことにする。$v_1, \ldots, v_{p+q+r} \in V$をとる。

$$\begin{aligned}
& ((\omega \wedge \eta) \wedge \zeta)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
= & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma)(\omega \wedge \eta)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \cdot \zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)})) \\
= & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& \left\{ \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}) \cdot \eta(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) \right\} \\
& \cdot\zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\
= & \frac{1}{p!q!r!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \cdot \\
& (\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}) \cdot \eta(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)})) \cdot \zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\
= & \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& (\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})) \cdot \zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}).
\end{aligned}$$

同様の計算で

$$\begin{aligned}
& (\omega \wedge (\eta \wedge \zeta))(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
= & \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot (\eta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \cdot \zeta(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}$$

となることもわかる。したがって $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$。

注意 1.1.9 Vを実ベクトル空間としWを代数とする。定理 1.1.8より、$\omega \in \wedge^p(V, W)$, $\eta \in \wedge^q(V, W)$, $\zeta \in \wedge^r(V, W)$ に対して $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$ が成り立つので、これを単に $\omega \wedge \eta \wedge \zeta$と書くことにする。$W = \mathbf{R}$ の場合、双線形写像 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は実数の積を考えて交代形式の外積をとる。

補題 1.1.10 Vを実ベクトル空間とし、$\omega^1, \ldots, \omega^p \in \wedge^1 V^*$と $v_1, \ldots, v_p \in V$をとると

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p)(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega^p(v_{\sigma(p)}) = \det(\omega^i(v_j))$$

が成り立つ。

証明 p に関する数学的帰納法で証明しよう。$p=1$ のときは明か。$p=q$のときに上の式が成り立つと仮定して、$p=q+1$ のときも成り立つことを示そう。

$$\begin{aligned}
& (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{q+1})(v_1, \ldots, v_{q+1}) \\
= \ & \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^q)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) \cdot \omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)}) \\
= \ & \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_q} \operatorname{sgn}(\tau)\omega^1(v_{\sigma\tau(1)}) \cdots \omega^q(v_{\sigma\tau(q)}) \cdot \omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)}) \\
= \ & \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \sum_{\tau \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\omega^1(v_{\sigma\tau(1)}) \cdots \omega^q(v_{\sigma\tau(q)}) \cdot \omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)}) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega^q(v_{\sigma(q)}) \cdot \omega^{q+1}(v_{\sigma(q+1)}) \\
= \ & \det(\omega^i(v_j)).
\end{aligned}$$

定理 1.1.11 Vを n 次元実ベクトル空間とする。$e_1, \ldots, e_n$を Vの基底とし、$\omega^1, \ldots, \omega^n$をその双対基底とする。このとき、$\wedge^0 V^* = \mathbf{R}$ で $n < p$ のとき$\wedge^p V^* = \{0\}$ が成り立ち、$1 \leq p \leq n$ のとき

$$(*) \qquad \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} \qquad (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n)$$

が$\wedge^p V^*$の基底になる。特に $\dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}$である。さらに$\omega \in \wedge^p V^*$をとり $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ に対して

$$a_{j_1 \ldots j_p} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$$

とおくと

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} a_{j_1 \ldots j_p} \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p}$$

と表すことができる。

証明 定義 1.1.1より$\wedge^0 V^* = \mathbf{R}$。$p > 0$ とし$\omega \in \wedge^p V$について考える。$v_1, \ldots, v_p \in V$をとり $v_i = \sum_{j=1}^n b_i^j e_j$とおく。

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^n b_1^{j_1} \cdots b_p^{j_p} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$$

において $j_k = j_l$ならば$\omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = 0$ になる。$n < p$ のときは必ずこのような k, lが存在するので、$\omega = 0$ となり$\wedge^p V^* = \{0\}$。

$1 \leq p \leq n$ の場合を考えよう。上の式において和は $j_1, \ldots, j_p$がすべて異なる項だけをとればよいので、

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \ldots, v_p) &= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} b_1^{j_{\sigma(1)}} \cdots b_p^{j_{\sigma(p)}} \omega(e_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{j_{\sigma(p)}}) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) b_1^{j_{\sigma(1)}} \cdots b_p^{j_{\sigma(p)}} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}).
\end{aligned}$$

ここで $b_i^{j_{\sigma(i)}} = \omega^{j_{\sigma(i)}}(v_i)$ だから、補題 1.1.10より

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)b_1^{j_{\sigma(1)}}\cdots b_p^{j_{\sigma(p)}} &= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{j_{\sigma(1)}}(v_1)\cdots\omega^{j_{\sigma(p)}}(v_p)\\ &= (\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p})(v_1,\ldots,v_p).\end{aligned}$$

したがって

$$\omega(v_1,\ldots,v_p) = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\ldots j_p}(\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p})(v_1,\ldots,v_p)$$

となり

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\ldots j_p}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}.$$

以上で $(*)$ が$\wedge^p V^*$を生成することがわかった。そこで $(*)$ が線形独立になることを示そう。ある $c_{j_1\ldots j_p}\in\mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\ldots j_p}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p} = 0$$

と仮定する。両辺を $(e_{k_1},\ldots,e_{k_p})$ $(k_1<\cdots<k_p)$ に作用させると補題 1.1.10より

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\ldots j_p}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}(e_{k_1},\ldots,e_{k_p})\\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_p} c_{j_1\ldots j_p}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega^{j_{\sigma(1)}}(e_{k_1})\cdots\omega^{j_{\sigma(p)}}(e_{k_p})\\ &= c_{k_1\ldots k_p}.\end{aligned}$$

したがって $(*)$ は線形独立になり$\wedge^p V^*$の基底になる。$(*)$ の元の全体の個数は n 個から p 個とる組合せの数に等しいので $\dim\wedge^p V^* = \binom{n}{p}$。

系 1.1.12 Vを n 次元実ベクトル空間とし、Wを m 次元実ベクトル空間とする。$e_1, \ldots, e_n$ を Vの基底とし、$\omega^1,\ldots,\omega^n$をその双対基底とする。$f_1,\ldots,f_m$を Wの基底とする。このとき$\wedge^0(V,W) = W$で $n<p$ のとき$\wedge^p(V,W)=\{0\}$ が成り立ち、$1\le p\le n$ のとき

$$(*) \qquad \omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}f_k \qquad (1\le j_1<\cdots<j_p\le n,\ 1\le k\le m)$$

を $v_i\in V$に対して

$$(\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p}f_k)(v_1,\ldots,v_p) = (\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_p})(v_1,\ldots,v_p)f_k$$

によって定義すると、$(*)$ は$\wedge^p(V,W)$ の基底になる。特に $\dim\wedge^p(V,W) = \binom{n}{p}m$ である。さらに$\omega\in\wedge^p(V,W)$ をとり、$1\le j_1<\cdots<j_p\le n$ に対して

$$\sum_{k=1}^m a^k_{j_1\ldots j_p}f_k = \omega(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})\in W$$

とおくと

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{k=1}^{m} a^k_{j_1\cdots j_p} \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k$$

と表すことができる。

証明 $\wedge^p V^*$の m 個の直和$\overset{m}{\oplus} \wedge^p V^*$から$\wedge^p(V,W)$ への写像 Sを

$$S(\phi_1,\ldots,\phi_m) = \sum_{k=1}^{m} \phi_k f_k \qquad ((\phi_1,\ldots,\phi_m) \in \overset{m}{\oplus} \wedge^p V)$$

によって定める。Sの定義式より Sが線形写像であることがわかる。$f_1,\ldots,f_m$は Wの基底だから Sは単射になる。任意の$\omega \in \wedge^p(V,W)$ に対して

$$\omega(v_1,\ldots,v_p) = \sum_{k=1}^{m} \xi^k(v_1,\ldots,v_p) f_k \qquad (v_1,\ldots,v_p \in V)$$

とおくと、$\omega \in \wedge^p(V,W)$ だから、各 kについて$\xi^k \in \wedge^p V^*$が成り立つ。$S(\xi^1,\ldots,\xi^m) = \omega$ だから、Sは全射になり、線形同型写像になる。定理 1.1.11を$\overset{m}{\oplus} \wedge^p V^*$の各直和因子に適用すると、$(*)$ が$\wedge^p(V,W)$ の基底になることがわかり、$\dim \wedge^p(V,W) = \binom{n}{p} m$ が成り立つ。

また $j_1 < \cdots < j_p$に対して

$$\omega(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}) = \sum_{k=1}^{m} \xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}) f_k$$

となり $a^k_{j_1\cdots j_p} = \xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})$。したがって定理 1.1.11より

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{k=1}^{m} \xi^k f_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j_1<\cdots<j_p} \xi^k(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}) \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{k=1}^{m} a^k_{j_1\cdots j_p} \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} f_k.
\end{aligned}$$

定義 1.1.13 V, W_1, W_2, W_3を実ベクトル空間とし、$A : W_1 \times W_2 \to W_3$を双線形写像とする。このとき$\omega \in \wedge^1(V,W_1)$ と$\eta \in \wedge^1(V,W_2)$ の**積** $A(\omega,\eta)$ を $v_1, v_2 \in V$に対して

$$A(\omega,\eta)(v_1,v_2) = A(\omega(v_1),\eta(v_2))$$

と定義する。定義式より、$A(\omega,\eta)$ は $V \times V$から W_3への双線形写像になる。さらに (ω,η) に $A(\omega,\eta)$ を対応させる写像も双線形写像になることがわかる。双線形写像 A が明かな場合は $A(\omega,\eta)$ を単に$\omega\eta$とも書く。

1.2 微分形式

接続の定式化とその性質を調べるためには、ベクトル空間に値を持つ微分形式が必要になる。そこでこの節ではベクトル空間に値を持つ微分形式に関する準備をする。

定義 1.2.1 Vを有限次元実ベクトル空間としMをn次元多様体とする。Mの各点xに対して$\wedge^p(T_x(M), V)$の元ω_xを対応させる対応ωが次の条件を満たすとき、ωをV**に値を持つ**M**上の**p**次微分形式**と呼ぶ。$\mathbf{R}$に値を持つ微分形式を単に**微分形式**と呼ぶ。(条件)Mの任意の局所座標近傍$(U; x^1, \ldots, x^n)$に対して、

$$x \longmapsto \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right)$$

がすべての$i_1, \ldots, i_p$についてUからVへのC^∞級写像になる。

注意 1.2.2 有限次元実ベクトル空間Vに値を持つ多様体M上の 0 次微分形式はMからVへのC^∞級写像にほかならない。

例 1.2.3 fを多様体Mから有限次元実ベクトル空間VへのC^∞級写像とする。このとき、fの微分dfはVに値を持つM上の 1 次微分形式になる。

証明 $n = \dim M$としMの局所座標近傍$(U; x^1, \ldots, x^n)$をとる。fはC^∞級写像だから

$$x \to df_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

もUからVへのC^∞級写像になる。よってdfはVに値を持つM上の 1 次微分形式である。

注意 1.2.4 ωを有限次元実ベクトル空間Vに値を持つn次元多様体M上のp次微分形式とする。Mの局所座標近傍$(U; x^1, \ldots, x^n)$をとると、$x \in U$に対して$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ $(1 \leq i \leq n)$は$T_x(M)$の基底になり$(dx^i)_x$ $(1 \leq i \leq n)$はその双対基底になる。そこで系 1.1.12を使うと、$x \in U$に対して$\omega_x \in \wedge^p(T_x(M), V)$は

$$\omega_x = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right|_x \right) (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$$

と表すことができるので、ω_xを$(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$を使って表したときの係数がすべて$V$に値を持つ$C^\infty$級写像になることと、定義 1.2.1の (条件) は同値である。上のような微分形式ωの$(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$を使った表示を微分形式の**局所表示**という。

命題 1.2.5 有限次元実ベクトル空間Vに値を持つ多様体M上のp次微分形式の全体を$\Omega^p(M; V)$で表し、$f, g \in C^\infty(M)$, $\omega, \eta \in \Omega^p(M; V)$と$x \in M$に対して

$$(f\omega + g\eta)_x = f(x)\omega_x + g(x)\eta_x \quad (\text{右辺の演算は}\wedge^p(T_x(M), V)\text{での演算})$$

として演算を定義すると$\Omega^p(M;V)$ は代数 $C^\infty(M)$ 上の加群、つまり $C^\infty(M)$ 加群になる。また V_1,V_2,V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A : V_1 \times V_2 \to V_3$を双線形写像とする。$\phi \in \Omega^p(M;V_1), \psi \in \Omega^q(M;V_2)$ と $x \in M$に対して

$$A(\phi \wedge \psi)_x = A(\phi_x \wedge \psi_x)$$
$$(\text{右辺の } A(\wedge) \text{ は} \wedge^p(T_x(M),V_1) \times \wedge^q(T_x(M),V_2) \text{ での外積})$$

として微分形式の外積を定義すると、$A(\phi \wedge \psi) \in \Omega^{p+q}(M;V_3)$ となり

$$A(\wedge) : \Omega^p(M;V_1) \times \Omega^q(M;V_2) \to \Omega^{p+q}(M;V_3)$$

は $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像である。

証明 $\Omega^p(M;V)$ が $C^\infty(M)$ 加群であることを示すためには $f,g \in C^\infty(M)$, $\omega,\eta \in \Omega^p(M;V)$ に対して $f\omega + g\eta \in \Omega^p(M;V)$ を示せば十分で、他の条件は$\wedge^p(T_x(M);V)$ がベクトル空間であることを使えばわかる。$(U;x^1,\ldots,x^n)$ を Mの任意の局所座標近傍とする。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x, \\
\eta_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x
\end{aligned}$$

とおくと、注意 1.2.4より、$a_{i_1\cdots i_p}, b_{i_1\cdots i_p}$は$U$から$V$への C^∞級写像になり

$$(f\omega + g\eta)_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} (f(x)a_{i_1\cdots i_p}(x) + g(x)b_{i_1\cdots i_p}(x))(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.$$

$fa_{i_1\cdots i_p} + gb_{i_1\cdots i_p}$は$U$から$V$への C^∞級写像だから、$f\omega + g\eta$は微分形式になる。

$\phi \in \Omega^p(M;V_1), \psi \in \Omega^q(M;V_2)$ に対して $A(\phi\wedge\psi) \in \Omega^{p+q}(M;V_3)$ を示す。$A(\wedge)$ が $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像であることは、交代形式の外積の双線形性から使えばわかる。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x, \\
\psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x
\end{aligned}$$

とおくと、注意 1.2.4より、$c_{i_1\cdots i_p}$と $d_{j_1\cdots j_q}$はそれぞれUからV_1とV_2への C^∞級写像になる。$x \in U$に対して

$$\begin{aligned}
&A(\phi \wedge \psi)_x \\
= &\sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} A((c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x) \wedge
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad (d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x)) \\
= & \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} A(c_{i_1\cdots i_p}(x), d_{j_1\cdots j_q}(x)) \cdot \\
& \qquad\qquad (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x
\end{aligned}
$$

だから $A(\phi \wedge \psi)_x$の $(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x$による表示の係数は、$A(c_{i_1\cdots i_p}(x), d_{j_1\cdots j_q}(x))$ の線形結合になり Uから V_3への C^∞級写像になる。したがって、$A(\phi \wedge \psi)$ は V_3に値を持つ M上の $p+q$次微分形式になる。

命題 1.2.6 Vを有限次元実ベクトル空間とし Fを多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。$x \in M$における Fの微分写像 $dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ と定義 1.1.6の交代形式の引き戻しを使って、$\omega \in \Omega^p(N; V)$ に対して

$$(F^*\omega)_x = (dF_x)^* \omega_{F(x)}$$

として $(F^*\omega)_x \in \wedge^p(T_x(M); V)$ を定義すると $F^*\omega \in \Omega^p(M; V)$ が成り立つ。

証明 $m = \dim M, n = \dim N$としておく。$F^*\omega \in \Omega^p(M; V)$ を示すためには、$F(U) \subset U'$ を満たす Mと Nの局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ と $(U'; y^1, \ldots, y^n)$ をとったときに

$$x \longmapsto (F^*\omega)_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right)$$

がすべての $i_1, \ldots, i_p$について Uから Vへの C^∞級写像になることを示せばよい。$x \in U$に対して

$$dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
& (F^*\omega)_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \\
= \ & \omega_{F(x)} \left(dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x \right), \cdots, dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \right) \\
= \ & \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^n \frac{\partial(y^{j_1} \circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p} \circ F)}{\partial x^{i_p}}(x) \, \omega_{F(x)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_{F(x)}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_{F(x)} \right)
\end{aligned}
$$

となるので、これは Uから Vへの C^∞級写像になる。よって $F^*\omega \in \Omega^p(M; V)$ が成り立つ。

定義 1.2.7 命題 1.2.6で定めた $F^*\omega$を、微分形式ωの Fによる**引戻し**と呼ぶ。

命題 1.2.8 Vを有限次元実ベクトル空間とし $F : M \to M'$, $G : M' \to M''$を多様体の間のC^∞級写像とする。このとき$\omega \in \Omega^p(M'', V)$ に対して、

$$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$$

が成り立つ。

証明 微分写像は、$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x$を満たす。よって $v \in T_x(M)$ に対して

$$\begin{aligned} ((G \circ F)^*\omega)_x(v) &= \omega_{G \circ F(x)}(d(G \circ F)_x(v)) = \omega_{G(F(x))}(dG_{F(x)} \circ dF_x(v)) \\ &= (G^*\omega)_{F(x)}(dF_x(v)) = (F^*(G^*\omega))_x(v) \end{aligned}$$

となり、$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$ がわかる。

命題 1.2.9 V_1, V_2, V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A : V_1 \times V_2 \to V_3$を双線形写像とする。$F$を多様体 Mから多様体 Nへの C^∞級写像とする。このとき$\phi \in \Omega^p(N; V_1), \psi \in \Omega^q(N; V_2)$ に対して

$$F^*(A(\phi \wedge \psi)) = A((F^*\phi) \wedge (F^*\psi))$$

が成り立つ。

証明 命題 1.1.6より各 $x \in M$に対して

$$\begin{aligned} F^*(A(\phi \wedge \psi))_x &= (dF_x)^*(A(\phi \wedge \psi)_{F(x)}) \\ &= (dF_x)^*(A(\phi_{F(x)} \wedge \psi_{F(x)})) \\ &= A(((dF_x)^*\phi_{F(x)}) \wedge ((dF_x)^*\psi_{F(x)})) \\ &= A((F^*\phi)_x \wedge (F^*\psi)_x) \\ &= A((F^*\phi) \wedge (F^*\psi))_x \end{aligned}$$

となるので、$F^*(A(\phi \wedge \psi)) = A((F^*\phi) \wedge (F^*\psi))$ が成り立つ。

定理 1.2.10 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを n 次元多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M; V)$ に対して次の条件を満たす $d\omega \in \Omega^{p+1}(M; V)$ が一意的に存在する。(条件) Mの局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ におけるωの局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると

$$(d\omega)_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

証明　局所表示

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

によって定まる$\wedge^{p+1}(T_x(M),V)$ の元が局所座標近傍のとり方によらないことを示す。系1.1.12より、$a_{i_1\cdots i_p}(x)$ はω_xから

$$a_{i_1\cdots i_p}(x)=\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)\qquad(1\le i_1<\cdots<i_p\le n)$$

によって定まっている。$i_1,\ldots,i_p$に括弧内のような大小関係がない場合も上の式によって$a_{i_1\cdots i_p}(x)$ を定めておく。$(V;y^1,\ldots,y^n)$ を Mのもう 1 つの局所座標近傍とし、

$$b_{i_1\cdots i_p}(x)=\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_p}}\right|_x\right)$$

とおくと

$$\omega_x=\sum_{i_1<\cdots<i_p}b_{i_1\cdots i_p}(x)(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x$$

となる。$x\in U\cap V$に対して $T_x(M)$ の 2 つ基底$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$と$\frac{\partial}{\partial y^i}|_x$の間の変換行列は

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x$$

となっているので、双対基底の間の変換行列は

$$(dy^i)_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

となり、また

$$b_{i_1\cdots i_p}(x)=\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)$$

が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x)=\delta_{jk}$$

に注意しておく。

$$\begin{aligned}(*)\qquad&\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x\wedge(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x\\ =\ &\frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x\wedge(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j,j_1,\dots,j_p=1\\k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot \\
&\qquad \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1\\k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot \\
&\qquad (dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x)=\delta_{j_rk_r}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\right)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x) &= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x)\right) \\
&= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial^2 y^{i_r}}{\partial x^k\partial x^{k_r}}(x)
\end{aligned}
$$

となり、これは kと k_rに関して対称である。他方、$(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x$ は kと k_rに関して交代的だから

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1\\k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}(x)\cdot \\
&\qquad (dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{k,k_1,\dots,k_p=1}^{n}\frac{\partial a_{k_1\cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x \\
&= \sum_{k_1<\cdots<k_p}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{k_1\cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}
$$

以上で $d\omega$の表示が局所座標近傍のとり方によらないことがわかった。$d\omega$の一意性もこのことからわかる。また $d\omega$が $p+1$ 次微分形式になることも $d\omega$の表示からわかる。

注意 1.2.11 定理 1.2.10の設定のもとで $p=0$ の場合を考えると、$\omega\in\Omega^0(M;V)$ は Mから Vへの C^∞級写像になり、$d\omega$の局所表示は、

$$
(d\omega)_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x
$$

となる。

定義 1.2.12 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。定理 1.2.10より定まる写像 $d : \Omega^p(M;V) \to \Omega^{p+1}(M;V)$ を微分形式の**外微分**と呼ぶ。

定理 1.2.13 Vを有限次元実ベクトル空間とし Fを多様体 Mから多様体 NへのΓ級写像とする。このとき、Fによる微分形式の引き戻し $F^* : \Omega^p(N;V) \to \Omega^p(M;V)$ は外微分と可換になる。

証明 $m = \dim M$, $n = \dim N$としておく。$\omega \in \Omega^p(N;V)$ とする。$F(U) \subset U'$を満たす Mと Nの局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ と $(U'; y^1, \ldots, y^n)$ をとる。

$$a_{j_1\cdots j_p}(y) = \omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_y, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_y\right)$$

とおくとωの U'における局所表示は

$$\omega_y = \sum_{j_1<\cdots<j_p} a_{j_1\cdots j_p}(y)(dy^{j_1})_y \wedge \cdots \wedge (dy^{j_p})_y$$

となる。命題 1.2.6の証明中の計算より $x \in U$に対して

$$\begin{aligned}
&(F^*\omega)_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right) \\
= \quad & \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x)).
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(d(F^*\omega))_x \\
= \quad & \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x))\right\}\cdot \\
&(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.
\end{aligned}$$

ここで$\dfrac{\partial^2(y^{j_r}\circ F)}{\partial x^i \partial x^{i_r}}(x)$ は i と i_rに関して対称で、$(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$は i と i_rに関して交代的だから

$$\begin{aligned}
&(d(F^*\omega))_x \\
= \quad & \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}\cdot \\
&(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
= \quad & \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}\cdot \\
&(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.
\end{aligned}$$

他方

$$
\begin{aligned}
(d\omega)_y &= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y\wedge(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y\wedge(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y
\end{aligned}
$$

だから命題 1.1.6より

$$
\begin{aligned}
(F^*(d\omega))_x &= (dF_x)^*(d\omega)_{F(x)} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)}\wedge \\
&\quad (dF_x)^*(dy^{j_1})_{F(x)}\wedge\cdots\wedge(dF_x)^*(dy^{j_p})_{F(x)}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} = (dy^j)_{F(x)}\circ dF_x = d(y^j\circ F)_x = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x
$$

でさらに

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} \\
=\ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \\
=\ &\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
&(F^*(d\omega))_x \\
=\ &\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x)\cdot \\
&(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\
=\ &(d(F^*\omega))_x.
\end{aligned}
$$

したがって $F^*(d\omega)=d(F^*\omega)$ が成り立つ。

注意 1.2.14 定理 1.2.13において Mが Nの部分多様体で $F:M\to N$が包含写像のとき、N上の微分形式を外微分してから Mに制限しても先に Mに制限してから M上の微分形式として外微分しても結果は等しくなる。特別な場合として Mが Nの開集合の場合がある。これらの場合は包含写像を省略して記述することもある。

補題 1.2.15 Vを有限次元実ベクトル空間としMを多様体とする。外微分

$$d:\Omega^p(M;V)\to\Omega^{p+1}(M;V)$$

は実線形写像になる。

証明 定理 1.2.10の外微分の定め方よりdは実線形写像になる。

定理 1.2.16 V_1,V_2,V_3を有限次元実ベクトル空間とし、$A:V_1\times V_2\to V_3$を双線形写像とする。Mを多様体とすると$\phi\in\Omega^p(M;V_1),\psi\in\Omega^q(M;V_2)$ に対して

$$dA(\phi\wedge\psi)=A(d\phi\wedge\psi)+(-1)^pA(\phi\wedge d\psi)$$

が成り立つ。

証明 $n=\dim M$とし$(U;x^1,\dots,x^n)$をMの局所座標近傍とする。Uにおけるϕとψの局所表示を

$$\begin{aligned}\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\\ \psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}A(\phi\wedge\psi)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}A(a_{i_1\cdots i_p}(x),b_{j_1\cdots j_q}(x))\cdot\\ &\quad (dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

となる。そこで$k_1<\cdots<k_{p+q}$に対して、$\{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q\}\neq\{k_1,\dots,k_{p+q}\}$のときは

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}=0$$

としておくと

$$\begin{aligned}&A(\phi\wedge\psi)_x\\ =&\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot\\ &A(a_{i_1\cdots i_p}(x),b_{j_1\cdots j_q}(x))(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x\end{aligned}$$

となるので

$$dA(\phi\wedge\psi)_x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A(a_{i_1\cdots i_p}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x))}{\partial x^i}(dx^i)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x \\
&= \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \left\{ A\left(\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x)\right) + A\left(a_{i_1\cdots i_p}(x), \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right)\right\} \cdot \\
&\quad (dx^i)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \sum_{i=1}^{n} \left\{ A\left(\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x), b_{j_1\cdots j_q}(x)\right) + A\left(a_{i_1\cdots i_p}(x), \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right)\right\} \cdot \\
&\quad (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x \\
&= A(d\phi \wedge \psi)_x + (-1)^p A(\phi \wedge d\psi)_x.
\end{aligned}$$

よって、$dA(\phi \wedge \psi) = A(d\phi \wedge \psi) + (-1)^p A(\phi \wedge d\psi)$ が成り立つ。

定理 1.2.17 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M;V) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M;V)$$

は $d \circ d = 0$ を満たす。

証明 $n = \dim M$としておく。まず$\omega \in \Omega^0(M;V)$ について $d^2\omega = 0$ が成り立つことを示そう。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。$x \in U$に対して

$$(d\omega)_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

だから

$$(d^2\omega)_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^j)_x.$$

ここで$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^i \partial x^j}(x)$ は i と jに関して対称的で $(dx^i)_x \wedge (dx^j)_x$は i と jに関して交代的である。したがって $(d^2\omega)_x = 0$ となり $d^2\omega = 0$。

次に $p > 0$ のとき$\omega \in \Omega^p(M;V)$ の Uにおける局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると

$$\begin{aligned}
(d\omega)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p} (da_{i_1\cdots i_p})_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x
\end{aligned}$$

となるので、定理 1.2.10より

$$
\begin{aligned}
(d^2\omega)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} (d^2 a_{i_1\cdots i_p})_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
&\quad + \sum_{i_1<\cdots<i_p} (da_{i_1\cdots i_p})_x \wedge \sum_{j=1}^{p} (-1)^j (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (d^2 x^{i_j})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

したがって $(d^2\omega)_x = 0$ となり $d^2\omega = 0$。

定理 1.2.18 Vを有限次元実ベクトル空間とし Mを多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M;V)$ に対して次の公式が成り立つ。$p=0$ のとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = X\omega.$$

$p=1$ のとき $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

証明 $p=0$ のとき $l = \dim V$とし Vの基底 $v_1, \ldots, v_l$をとるとωは

$$\omega = \sum_{i=1}^{l} \omega^i v_i \quad (\omega^i \in C^\infty(M))$$

と表すことができる。$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = \sum_{i=1}^{l} d\omega^i v_i(X) = \sum_{i=1}^{l} d\omega^i(X) v_i = \sum_{i=1}^{l} (X\omega^i) v_i = X\omega.$$

次に $p=1$ の場合を考える。ωの局所表示を

$$\omega = \sum_i a_i dx^i$$

で表すと、ωの外微分 $d\omega$の局所表示は

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

になる。ベクトル場 X, Yの局所表示を

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で表す。外積の定義より

$$d\omega(X,Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j} (\xi^j \eta^i - \eta^j \xi^i)$$

が成り立つ。

$$\omega(Y) = \sum_i a_i \eta^i$$

となるので

$$X(\omega(Y)) = \sum_{i,j} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}(a_i \eta^i) = \sum_{i,j} \xi^j \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \eta^i + a_i \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right).$$

XとYを入れ替えることにより

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i,j} \eta^j \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \xi^i + a_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right)$$

も得られる。ベクトル場のブラケット積の定義から

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \sum_{i,j} \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\omega([X,Y]) = \sum_{i,j} a_i \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right).$$

以上の計算結果より

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

を得る。

注意 1.2.19 定理 1.2.18の条件下で $p > 0$ のとき $X_1, \ldots X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} & d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) \\ = & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

が成り立つことが知られている。

1.3 Euclid 空間の部分多様体の共変微分と第二基本形式

この節では N次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$内の部分多様体に関する基本的事項を 1.2節で準備した微分形式を使って解説する。

Mを N次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$内の部分多様体とする。Mの各点 x に対して $T_xM \subset \mathbf{R}^N$とみなすことによって、$M$上の接ベクトル場を $\mathbf{R}^N$に値を持つ M上の 0 次微分形式とみることができる。そこで、M上の接ベクトル場 Xに対して、$X \in \Omega^0(M;\mathbf{R}^N)$ とみなして外微分 $dX \in \Omega^1(M;\mathbf{R}^N)$ を考える。Mの各点 x に対して $\mathbf{R}^3$は T_xMとその直交補空間 $T_x^\perp M$の直交直和に分解する。$T_x^\perp M$を Mの x における**法ベクトル空間**と呼ぶ。この直交直和分解に関して dXの値を接成分と法成分の和に分解する。

$$dX = \nabla X + A_X.$$

ここで、∇Xは T_xMに値を持ち、A_Xは $T_x^\perp M$に値を持っている。M上の接ベクトル場 Yに対して $(\nabla X)(Y) = \nabla_Y X$と書くこともある。

M上の関数 fをとる。M上の接ベクトル場 Yに対して

$$\begin{aligned} d(fX)(Y) &= Y(fX) = (Yf)X + fYX \\ &= df(Y)X + fdX(Y) = (dfX + fdX)(Y) \end{aligned}$$

となるので、

$$d(fX) = dfX + fdX$$

が成り立つ。両辺の接成分と法成分を比べることにより、

$$\begin{aligned} \nabla(fX) &= dfX + f\nabla X \\ A_{fX} &= fA_X \end{aligned}$$

を得る。∇ を Mの**共変微分**と呼び、A を Mの**第二基本形式**と呼ぶ。上の A の性質から A は Mの各点 x で双線形写像

$$A : T_xM \times T_xM \to T_x^\perp M \,;(X,Y) \mapsto A_X(Y)$$

を定めることがわかる。

次に M上の法ベクトル場ξを $\mathbf{R}^N$に値を持つ M上の 0 次微分形式とみなして、外微分 $d\xi \in \Omega^1(M;\mathbf{R}^N)$ を考える。M上の接ベクトル場の場合と同様に、$d\xi$の値を接成分と法成分の和に分解する。

$$d\xi = B_\xi + \nabla^\perp \xi.$$

ここで B_ξは T_xMに値を持ち、$\nabla^\perp\xi$は $T_x^\perp M$に値を持っている。M上の接ベクトル場 Xに対して $(\nabla^\perp\xi)(X) = \nabla^\perp_X\xi$と書くこともある。

M上の関数 fをとる。M上の接ベクトル場の場合と同様に、

$$d(f\xi) = df\xi + fd\xi$$

が成り立つ。両辺の接成分と法成分を比べることにより、

$$\begin{aligned} B_{f\xi} &= fB_\xi \\ \nabla^\perp(f\xi) &= df\xi + f\nabla^\perp\xi \end{aligned}$$

を得る。この Bの性質から Bは Mの各点 x で双線形写像

$$B : T_xM \times T_x^{\perp}M \to T_xM \ ; (X, \xi) \mapsto B_\xi(X)$$

を定めることがわかる。

命題 1.3.1 $\mathbf{R}^N$の標準内積を$\bullet$で表す。$\mathbf{R}^N$内の部分多様体 M上の接ベクトル場 X, Yと法ベクトル場ξ, ηに対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} d(X \bullet Y) &= \nabla X \bullet Y + X \bullet \nabla Y, \\ d(\xi \bullet \eta) &= \nabla^{\perp}\xi \bullet \eta + \xi \bullet \nabla^{\perp}\eta. \end{aligned}$$

証明 ∇ の定め方から

$$\begin{aligned} d(X \bullet Y) &= dX \bullet Y + X \bullet dY \\ &= (\nabla X + A_X) \bullet Y + X \bullet (\nabla Y + A_Y) \\ &= \nabla X \bullet Y + X \bullet \nabla Y. \end{aligned}$$

同様に $\nabla^{\perp}$の定め方から

$$\begin{aligned} d(\xi \bullet \eta) &= d\xi \bullet \eta + \xi \bullet d\eta \\ &= (B_\xi + \nabla^{\perp}\xi) \bullet \eta + \xi \bullet (B_\eta + \nabla^{\perp}\eta) \\ &= \nabla^{\perp}\xi \bullet \eta + \xi \bullet \nabla^{\perp}\eta. \end{aligned}$$

命題 1.3.2 $\mathbf{R}^N$内の部分多様体 M上の接ベクトル場 Xと法ベクトル場ξに対して次が成り立つ。

$$A_X \bullet \xi + X \bullet B_\xi = 0.$$

証明 Xは接ベクトル場であり、ξは法ベクトル場だから $X \bullet \xi = 0$ が成り立つ。この両辺を外微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= d(X \bullet \xi) = dX \bullet \xi + X \bullet d\xi \\ &= (\nabla X + A_X) \bullet \xi + X \bullet (B_\xi + \nabla^{\perp}\xi) \\ &= A_X \bullet \xi + X \bullet B_\xi. \end{aligned}$$

命題 1.3.3 $\mathbf{R}^N$内の部分多様体 M上の接ベクトル場 X, Yに対して次が成り立つ。

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad A(X, Y) = A(Y, X).$$

証明 ∇ と A の定め方から

$$dX(Y) = \nabla X(Y) + A_X(Y) = \nabla_Y X + A_X(Y)$$

となる。他方、ベクトル場のブラケット積の定め方より

$$\begin{aligned}[X,Y] &= XY - YX = dY(X) - dX(Y) \\ &= \nabla_X Y + A_Y(X) - \nabla_Y X - A_X(Y) \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (A_Y(X) - A_X(Y)).\end{aligned}$$

接ベクトル場のブラケット積はまた接ベクトル場になることから、両辺の接成と法成分を比べると

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad A(X,Y) = A(Y,X)$$

を得る。

1.4 3 次元 Euclid 空間の曲面

この節では 3 次元 Euclid 空間内の曲面に関する基本的事項を 1.2節で準備した微分形式を使って復習する。

M内の開集合 U上で接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, e_2 \in \Omega^0(U; \mathbf{R}^3)$ をとる。その双対基底を$\theta^1, \theta^2 \in \Omega^1(U; \mathbf{R})$ で表す。さらに $\mathbf{R}^3$のベクトル積を使って

$$e_3 = e_1 \times e_2$$

によって $e_3 \in \Omega^0(U; \mathbf{R}^3)$ を定める。すると e_1, e_2, e_3は $\mathbf{R}^3$の正規直交基底になる。Mから $\mathbf{R}^3$への包含写像を Pで表す。すなわち Pは Mの各点に $\mathbf{R}^3$における位置ベクトルが対応する。$P \in \Omega^0(M; \mathbf{R}^3)$ とみなして Pを微分すると $dP \in \Omega^1(M; \mathbf{R}^3)$ であり、Uにおいて

$$dP = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$$

と表示できる。

$$I = dP \bullet dP$$

によって Mの第一基本形式 Iを定める。Iは接ベクトル空間の内積を定め、$\mathbf{R}^3$の内積から誘導される内積に一致する。さらに Uにおいて

$$I = dP \bullet dP = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$$

と表示できる。

Uの各点において e_1, e_2, e_3は $\mathbf{R}^3$の正規直交基底だから、Mの任意の接ベクトル Xに対して

$$[de_1(X)\ de_2(X)\ de_3(X)] = [e_1\ e_2\ e_3]\omega(X)$$

を満たす$\omega \in \Omega^1(U; M_3(\mathbf{R}))$ が存在する。ここで、$M_3(\mathbf{R})$ は 3 次正方行列全体の成すベクトル空間を表す。これを簡単に

$$d[e_1\ e_2\ e_3] = [de_1\ de_2\ de_3] = [e_1\ e_2\ e_3]\omega$$

とも書くことにする。さらに$\sigma = [e_1\ e_2\ e_3] \in \Omega^0(U; M_3(\mathbf{R}))$ とおくと、σは直交行列に値を持ち、$d\sigma = \sigma\omega$が成り立つ。行列 Sの転置行列を S^*で表し、n 次単位行列を 1_nで表すことにする。$\sigma^*\sigma = 1_3$となり$\sigma \in \Omega^0(U; M_3(\mathbf{R}))$ だから、定理 1.2.16より

$$\begin{aligned} 0 &= d(\sigma^*\sigma) = (d\sigma^*)\sigma + \sigma^* d\sigma \\ &= (\sigma\omega)^*\sigma + \sigma^*\sigma\omega = \omega^*\sigma^*\sigma + \sigma^*\sigma\omega \\ &= \omega^* + \omega. \end{aligned}$$

これより、ωは交代行列に値を持つ U上の 1 次微分形式になる。そこで 3 次交代行列全体を $\mathfrak{o}(3)$ で表すと、$\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{o}(3))$ が成り立つ。そこで$\omega = (\omega_i^j)$ で表すと、

$$\begin{aligned} de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3, \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3, \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。前節の接ベクトル場の外微分の接成分と法成分の和への分解と比べると、

$$\nabla e_1 = \omega_1^2 e_2, \qquad \nabla e_2 = \omega_2^1 e_1, \qquad A_{e_1} = \omega_1^3 e_3, \qquad A_{e_2} = \omega_2^3 e_3$$

を得る。さらに法ベクトル場の外微分の接成分と法成分の和への分解と比べると、

$$\nabla^\perp e_3 = 0, \qquad B_{e_3} = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2$$

を得る。M上の一般の接ベクトル場 Xは U上で $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$と書き表されるので、

$$\begin{aligned} \nabla X &= \nabla(X^1 e_1) + \nabla(X^2 e_2) \\ &= (dX^1)e_1 + X^1 \nabla e_1 + (dX^2)e_2 + X^2 \nabla e_2 \\ &= (dX^1)e_1 + X^1 \omega_1^2 e_2 + (dX^2)e_2 + X^2 \omega_2^1 e_1 \\ &= (dX^1 + \omega_2^1 X^2)e_1 + (dX^2 + \omega_1^2 X^1)e_2. \end{aligned}$$

以上より、曲面 Mの共変微分と第二基本形式はωから定まり、ωの性質を調べることが重要になる。

命題 1.4.1 $\sigma = [e_1\ e_2\ e_3]$ と同様の性質を持つもう一つの$\bar\sigma = [\bar e_1\ \bar e_2\ \bar e_3]$ をとり、$d\bar\sigma = \bar\sigma\bar\omega$となるように$\bar\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{o}(3))$ を定める。$\bar\sigma = \sigma f$によって変換行列 $f \in \Omega^0(U; M_3(\mathbf{R}))$ を定めると、fは 3 次直交群 $O(3)$ に値を持つ。このとき、次が成り立つ。

$$\bar\omega = f^{-1} df + f^{-1}\omega f.$$

証明 $\bar\sigma = \sigma f$より

$$d\bar\sigma = d\sigma f + \sigma df = \sigma\omega f + \sigma df = \sigma(\omega f + df).$$

他方、

$$d\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\bar{\omega} = \sigma f \bar{\omega}.$$

これらより、$\sigma f \bar{\omega} = \sigma(df + \omega f)$、すなわち $f\bar{\omega} = df + \omega f$となり、

$$\bar{\omega} = f^{-1}df + f^{-1}\omega f$$

を得る。

注意 1.4.2 曲面 M上の共変微分 ∇ は Mに対して定まるが、e_1, e_2, e_3を使って共変微分を表現しているωは e_1, e_2, e_3のとり方に依存して定まっている。

定理 1.2.17の $d \circ d = 0$ を利用して、上で定めた微分形式の間の関係式を求める。

命題 1.4.3 今までの設定のもとで次が成り立つ。

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1, \quad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2, \quad \theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

証明 定理 1.2.17、1.2.16より

$$\begin{aligned}
0 &= d(dP) = d(\theta^1 e_1 + \theta^2 e_2) \\
&= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge de_1 + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge de_2 \\
&= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge (\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3) + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge (\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3) \\
&= (d\theta^1 - \theta^2 \wedge \omega_2^1)e_1 + (d\theta^2 - \theta^1 \wedge \omega_1^2)e_2 - (\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3)e_3.
\end{aligned}$$

e_1, e_2, e_3は基底になっているので、係数の微分形式はすべて 0 になり命題を得る。

命題 1.4.4 ω_1^3, ω_2^3は U上の 1 次微分形式だから、

$$\omega_1^3 = b_{11}^3\theta^1 + b_{12}^3\theta^2, \qquad \omega_2^3 = b_{21}^3\theta^1 + b_{22}^3\theta^2$$

とおくことができる。このとき、$A = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^3 \theta^i \theta^j e_3$ が成り立つ。

証明 第二基本形式 A の定め方より

$$\begin{aligned}
A &= \theta^1 A_{e_1} + \theta^2 A_{e_2} \\
&= \theta^1 \omega_1^3 e_3 + \theta^2 \omega_2^3 e_3 \\
&= \theta^1 (b_{11}^3\theta^1 + b_{12}^3\theta^2)e_3 + \theta^2 (b_{21}^3\theta^1 + b_{22}^3\theta^2)e_3 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^3 \theta^i \theta^j e_3.
\end{aligned}$$

注意 1.4.5 命題 1.4.3の第三式に命題 1.4.4のω_1^3, ω_2^3の表示を代入すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 \\
&= \theta^1 \wedge (b_{11}^3\theta^1 + b_{12}^3\theta^2) + \theta^2 \wedge (b_{21}^3\theta^1 + b_{22}^3\theta^2) \\
&= b_{12}^3\theta^1 \wedge \theta^2 + b_{21}^3\theta^2 \wedge \theta^1 \\
&= (b_{12}^3 - b_{21}^3)\theta^1 \wedge \theta^2.
\end{aligned}
$$

これより $b_{12}^3 = b_{21}^3$となり、命題 1.3.3で示した第二基本形式の対称性を再び得る。

命題 1.4.6 次が成り立つ。

$$d\omega_2^1 = (b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^3 b_{21}^3)\theta^1 \wedge \theta^2.$$

証明　定理 1.2.17より、

$$
\begin{aligned}
0 &= d(de_1) = d(\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3) \\
&= d\omega_1^2 e_2 - \omega_1^2 \wedge de_2 + d\omega_1^3 e_3 - \omega_1^3 \wedge de_3 \\
&= d\omega_1^2 e_2 - \omega_1^2 \wedge (\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3) + d\omega_1^3 e_3 - \omega_1^3 \wedge (\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \\
&\quad (\omega_j^i = -\omega_i^j \text{だから、} \omega_j^i \wedge \omega_i^j = 0) \\
&= (d\omega_1^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^2)e_2 + (d\omega_1^3 - \omega_1^2 \wedge \omega_2^3)e_3.
\end{aligned}
$$

したがって、

$$d\omega_1^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \qquad d\omega_1^3 - \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = 0$$

となり、

$$
\begin{aligned}
d\omega_2^1 &= -d\omega_1^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\
&= \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = (b_{11}^3\theta^1 + b_{12}^3\theta^2) \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}^3\theta^2) \\
&= (b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^3 b_{21}^3)\theta^1 \wedge \theta^2.
\end{aligned}
$$

注意 1.4.7 第二基本形式の正規直交基底による表現行列 (b_{ij}^3) の固有値は曲面 Mの**主曲率**であり、主曲率の平均が**平均曲率**、主曲率の積が **Gauss 曲率**である。すなわち、行列 (b_{ij}^3) のトレースの 1/2 が平均曲率であり、行列式が Gauss 曲率になる。そこで、Mの Gauss 曲率を Kで表すと、命題 1.4.6の主張は $d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$と書くことができる。第二基本形式は曲面 Mに対して定まっているので、平均曲率は e_3のとり方に応じて± 1 倍になり、Gauss 曲率は e_1, e_2, e_3のとり方に依存しない。

定義 1.4.8 $\mathbf{R}^3$内の曲面 Mの各点 x に対して

$$O_x(M) = \{(x; \tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \mid \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \text{は } T_xM \text{の正規直交基底}\}$$

と定め、

$$O(M) = \bigcup_{x \in M} O_x(M)$$

とおくと、$O(M)$ は $M \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$内の部分集合とみなしたとき部分多様体になり、これによって $O(M)$ は多様体構造を持つ。$\mathbf{R}^2$の標準正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$で表す。$\mathbf{R}^2$から T_xM への等長線形写像 u に対して $(u(\mathbf{e}_1), u(\mathbf{e}_2))$ を対応させることにより、

$$O_x(M) = \{u \mid u \text{ は } \mathbf{R}^2 \text{から } T_xM \text{への等長線形写像}\}$$

とみなすことができる。$\mathbf{R}^2$の等長線形同型写像 $a \in O(2)$ を $\mathbf{R}^2$から T_xMへの等長線形写像 u と合成し $ua \in O_x(M)$ を考えることにより、$O(2)$ の $O_x(M)$ への右からの作用が定まり、さらに $O(2)$ の $O(M)$ への右からの作用が定まる。$u \in O_x(M)$ に x を対応させる写像を$\pi : O(M) \to M$で表すと、πは C^∞級写像になり、各 $x \in M$に対して$\pi^{-1}(x)$ に $O(2)$ は単純推移的に作用する。$O(M)$ を Mの**正規直交フレーム束**と呼ぶ。

$O(M)$ 上で正規直交基底の一番目と二番目$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$を対応させる写像は定義され、$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \Omega^0(O(M); \mathbf{R}^3)$ となる。これを使うと、先に Mの開集合 U上での議論を $O(M)$ 全体で展開することができる。$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2$によって$\tilde{e}_3$を定義すると$\tilde{e}_3 \in \Omega^0(O(M); \mathbf{R}^3)$ となり、$\tilde{\sigma} = [\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3] \in \Omega^0(O(M); M_3(\mathbf{R}))$ が成り立つ。

$$d\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\omega}$$

を満たす$\tilde{\omega} \in \Omega^1(O(M); M_3(\mathbf{R}))$ をとることができ、$\tilde{\omega}$は $O(3)$ に値を持つので、$\tilde{\omega}$は $\mathfrak{o}(3)$ に値を持つ。したがって、$\tilde{\omega} \in \Omega^1(O(M); \mathfrak{o}(3))$ となる。Mの開集合上定義されたωの場合と同様に

$$\begin{aligned} d\tilde{e}_1 &= \tilde{\omega}_1^2\tilde{e}_2 + \tilde{\omega}_1^3\tilde{e}_3, \\ d\tilde{e}_2 &= \tilde{\omega}_2^1\tilde{e}_1 + \tilde{\omega}_2^3\tilde{e}_3, \\ d\tilde{e}_3 &= \tilde{\omega}_3^1\tilde{e}_1 + \tilde{\omega}_3^2\tilde{e}_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

先に考察した Mの開集合 U上定義された e_1, e_2, e_3およびωと $O(M)$ 上定義された$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$および$\tilde{\omega}$との関係をみておこう。$s = (e_1, e_2)$ は Uから $O(M)$ への C^∞級写像とみなすことができ、$\pi \circ s = 1_U$を満たす。さらに $s^*\tilde{e}_i = \tilde{e}_i \circ s = e_i$となるので、$s^*\tilde{\sigma} = \sigma$が成り立つ。両辺を外微分することにより

$$\sigma\omega = d\sigma = ds^*\tilde{\sigma} = s^*d\tilde{\sigma} = s^*(\tilde{\sigma}\tilde{\omega}) = \sigma s^*\tilde{\omega}.$$

したがって$\omega = s^*\tilde{\omega}$が成り立つ。すなわち、$M$の開集合 U上定義された e_1, e_2から定まるωは、$s = (e_1, e_2)$ を Uから $O(M)$ への写像とみなすことにより、$O(M)$ 全体で定義された$\tilde{\omega}$の s による引き戻しとして定まる。根本に $O(M)$ 上定義された$\tilde{\omega}$があり、M上局所的に定義された e_1, e_2からωが定まるという観点から考えると、ωの種々の性質は$\tilde{\omega}$の性質から導かれるのが自然である。そこで、以下では先に示したωの性質を参考にしながら、$\tilde{\omega}$の性質を調べる。

M上局所的に定義した 1 次微分形式θ^1, θ^2に対応する $O(M)$ 上の $\mathbf{R}^2$に値を持つ 1 次微分形式$\tilde{\theta}$をまず定める。

$$\tilde{\theta}_u(X) = u^{-1}(d\pi_u(X)) \qquad (u \in O(M),\ X \in T_u(O(M)))$$

によって $O(M)$ 上の $\mathbf{R}^2$に値を持つ 1 次微分形式$\tilde{\theta}$を定める。ここで、$u \in O(M)$ は $\mathbf{R}^2$から $T_{\pi(u)}M$への等長線形写像とみなしている。$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^1\mathbf{e}_1 + \tilde{\theta}^2\mathbf{e}_2$ と表しておく。M上局所的に定義された $s = (e_1, e_2)$ に対して、

$$(s^*\tilde{\theta})(e_i) = s^{-1}(d\pi_s \circ ds(e_i)) = s^{-1}d(\pi \circ s)_s(e_i) = s^{-1}(e_i) = \mathbf{e}_i.$$

他方

$$(s^*\tilde{\theta})(e_i) = (s^*\tilde{\theta}^1)(e_i)\mathbf{e}_1 + (s^*\tilde{\theta}^2)(e_i)\mathbf{e}_2$$

となるので、$(s^*\tilde{\theta}^j)(e_i) = \delta_i^j$、すなわち $s^*\tilde{\theta}^1, s^*\tilde{\theta}^2$は e_1, e_2の双対になる。これより $s^*\tilde{\theta}^i = \theta^i$ が成り立つ。

命題 1.4.9 今までの設定のもとで次が成り立つ。

$$d\tilde{\theta}^1 = \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^1, \quad d\tilde{\theta}^2 = \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^2, \quad \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^3 = 0.$$

証明 $\tilde{\theta}$の定義より、$u \in O(M)$ に対して

$$d\pi_u = u\tilde{\theta}_u = u(\tilde{\theta}^1\mathbf{e}_1 + \tilde{\theta}^2\mathbf{e}_2) = \tilde{\theta}^1 u\mathbf{e}_1 + \tilde{\theta}^2 u\mathbf{e}_2 = \tilde{\theta}^1\tilde{e}_1 + \tilde{\theta}^2\tilde{e}_2$$

が成り立つ。$\pi : O(M) \to M \subset \mathbf{R}^3$だから、$\pi \in \Omega^0(O(M); \mathbf{R}^3)$ とみなすことができる。定理 1.2.17、1.2.16より

$$\begin{aligned}
0 &= d(d\pi) = d(\tilde{\theta}^1\tilde{e}_1 + \tilde{\theta}^2\tilde{e}_2) \\
&= d\tilde{\theta}^1\tilde{e}_1 - \tilde{\theta}^1 \wedge d\tilde{e}_1 + d\tilde{\theta}^2\tilde{e}_2 - \tilde{\theta}^2 \wedge d\tilde{e}_2 \\
&= d\tilde{\theta}^1\tilde{e}_1 - \tilde{\theta}^1 \wedge (\tilde{\omega}_1^2\tilde{e}_2 + \tilde{\omega}_1^3\tilde{e}_3) + d\tilde{\theta}^2\tilde{e}_2 - \tilde{\theta}^2 \wedge (\tilde{\omega}_2^1\tilde{e}_1 + \tilde{\omega}_2^3\tilde{e}_3) \\
&= (d\tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^1)\tilde{e}_1 + (d\tilde{\theta}^2 - \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^2)\tilde{e}_2 - (\tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^3)\tilde{e}_3.
\end{aligned}$$

$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$は基底になっているので、係数の微分形式はすべて 0 になり命題を得る。

注意 1.4.10 M上局所的に定義された $s = (e_1, e_2)$ に対して、命題 1.4.9の等式を s で引き戻して M上の微分形式の等式にすると、命題 1.4.3が得られる。

第 2 章 ファイバー束

3 次元 Euclid 空間内の曲面上の正規直交フレーム全体を多様体とみなすことによって、局所正規直交フレームから共変微分を定める局所的な一次微分形式は正規直交フレーム全体で定義された大域的な一次微分形式から定まることを第 1章でみた。これを高次元の部分多様体や一般的な多様体上で考えるためには、多様体上のファイバー束や主ファイバー束の概念が必要になる。そこで、第 2章ではこれらの概念を導入し、その基本的性質を調べる。

2.1 Lie 群と Lie 環

主ファイバー束の概念を導入するためには Lie 群の概念が不可欠であるので、ここで Lie 群と Lie 環に関する基本事項をまとめておく。

定義 2.1.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 2.1.2 定義 2.1.1では、Lie 群は可算開基を持つと仮定しなかったが、連結 Lie 群は可算開基を持つことが知られている。

例 2.1.3 Vを有限次元実ベクトル空間とすると、Vの正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。

証明 $\dim V = n$とする。$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V | f$は線形写像$\}$とおく。$V$の基底をとり、$\mathrm{End}(V)$ の元を行列で表現したときの行列の成分を考えれば、$\mathrm{End}(V)$ と n^2次元 Euclid 空間の間の微分同型写像になる。表現行列の成分が $\mathrm{End}(V)$ の座標になる。$\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ は $\mathrm{End}(V)$ の座標の多項式で表されるので連続であり、

$$GL(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) | \det f \neq 0\}$$

だから、$GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合である。特に、$GL(V)$ は n^2次元多様体になる。群演算

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V); (x, y) \mapsto xy$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の二次式で表されるので C^∞級写像であり、

$$GL(V) \to GL(V); x \mapsto x^{-1}$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の分数式で表されるので C^∞級写像である (Cramer の公式)。

定義 2.1.4 Lie 群 G の元 gに対して微分同型写像 L_g, R_gを

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ gによる**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 Xは、G の任意の元 gに対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

注意 2.1.5 Lie 群 G の単位元 e を含む局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとっておけば、各 $g \in G$ に対して $(L_g(U); x^1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x^n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。右移動を使っても同様にできる。

定義 2.1.6 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

例 2.1.7 多様体 M上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 2.1.8 Vをベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Yに対して $[X, Y] = XY - YX$と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

証明 定め方より $[\ ,\ ] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ は双線形写像である。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y, Zに対して

$$\begin{aligned}
& [X,Y] = XY - YX = -[Y,X], \\
& [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \\
= \ & [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
= \ & XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY \\
& + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{End}(V)$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

定理 2.1.9 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表す。すると、$\mathfrak{g}$ は Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

証明 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{X}(G)$ の部分ベクトル空間になることは定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (dL_g)_x(Y_x) = Y_{gx} \quad (x \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係より

$$(dL_g)_x([X,Y]_x) = [X,Y]_{gx} \quad (x \in G)$$

となり、$[X,Y] \in \mathfrak{g}$。よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環である。

αが線形写像になることは定義からわかる。$X \in \mathfrak{g}, \alpha(X) = 0$ とすると、任意の $g \in G$ に対し

$$X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$$

だから、$X = 0$。よって $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ となり、αは単射。他方 $X \in T_e(G)$ に対して$\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ とおき、$\tilde{X}$が左不変ベクトル場になることを示せば、αが全射になることがわかる。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を G の単位元 e を含む局所座標近傍とする。$G \times G \to G; (x,y) \mapsto xy$ は連続だから、e を含む開近傍 Vで $VV = \{xy | x, y \in V\} \subset U$を満たすものをとることができる。

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_e$$

とおく。注意 2.1.5より任意の $g \in G$ に対して、$(L_g(V); x^1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x^n \circ L_g^{-1})$ は gを含む局所座標近傍になる。そこで $y^i = x^i \circ L_g^{-1}$とおくと $gx \in L_g(V)$ $(x \in V)$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{gx} &= (dL_{gx})_e(X) = d(L_g \circ L_x)_e(X) = (dL_g)_x(dL_x)_e(X) \\ &= (dL_g)_x \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x .\end{aligned}$$

ここで

$$\left((dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) y^k = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) (y^k \circ L_g) = \delta_{jk}$$

だから

$$(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{gx}$$

となり

$$\tilde{X}_{gx} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{gx} .$$

$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy = L_x(y)$ は C^∞級写像だから、各 i, jに対して

$$V \to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)$$

は C^∞級写像になる。よって、各 jについて

$$L_g(V) \to \mathbf{R}; gx \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x^j \circ L_x)}{\partial x^i}(e)$$

は C^∞級写像である。したがって$\tilde{X}$は G 上のベクトル場である。$\tilde{X}$は定め方より左不変。したがってαは線形同型写像である。

定義 2.1.10 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群** G **の Lie 環**と呼ぶ。

定義 2.1.11 Lie 群の間の C^∞級写像 $f : G \to H$が群の準同型写像でもあるとき、fを **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持ち、f^{-1}も Lie 群の準同型写像であるとき、fを **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と Hは**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、fを **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに fが逆写像 f^{-1}を持つとき、fを **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

定義 2.1.12 Mを多様体とし、XをM上のベクトル場とする。Iを実数の開区間とし、M上の曲線$c: I \to M$が

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

を満たすとき、cをXの**積分曲線**と呼ぶ。

補題 2.1.13 Mを多様体とし、XをM上のベクトル場とする。実数t_0とMの各点$x \in M$に対して、Xの積分曲線$c: I \to M$で$t_0 \in I,\ c(t_0) = x$を満たすものが存在する。また$c_1, c_2 : I \to M$が$c_1(t_0) = c_2(t_0) = x$を満たすXの積分曲線ならば$c_1 = c_2$が成り立つ。

証明 xを含むMの局所座標近傍$(U; x^1, \ldots, x^n)$をとる。XのUにおける局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \quad (x \in U)$$

とする。Uにおいて問題になっている等式

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

の局所表示は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}$$

となる。したがってcは

$$\frac{d(x^i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)), \quad x^i \circ c(t_0) = x^i(x) \quad (1 \leq i \leq n)$$

を満たせばよい。これはEuclid空間の開集合における常微分方程式でありa_iはC^∞級関数だからt_0を含む開区間Iと$c: I \to U$が存在し上の常微分方程式を満たす。この曲線cが求めるものである。

次に積分曲線の一意性を示そう。Mの局所座標近傍$(U; x^1, \ldots, x^n)$で$c_1(I), c_2(I) \subset U$を満たすものが存在する場合は、局所座標$x^1, \ldots, x^n$を使うと

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_{c_1(t)}, \quad \frac{dc_2}{dt}(t) = X_{c_2(t)} \quad (t \in I)$$

はEuclid空間の開集合における常微分方程式になり、常微分方程式の解の一意性から$c_1 = c_2$となる。$c_1(I), c_2(I)$がMの1つの局所座標近傍に含まれない場合を考えよう。$t_0 < s, s \in I$に対して$0 < \varepsilon$と$t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s$を次の条件を満たすようにとる。$I_i = (t_{i-1} - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ $(1 \leq i \leq k)$とおくと各iについて$c_1(I_i), c_2(I_i)$はMの1つの局所座標近傍に含まれる。先に示したことを使うと$c_1(t_1) = c_2(t_1), \ldots, c_1(t_k) = c_2(t_k)$を帰納的に示すことができる。特に$c_1(s) = c_2(s)$。$t_0 > s, s \in I$に対しても同様にして$c_1(s) = c_2(s)$となり、$c_1 = c_2$が成り立つ。

定義 2.1.14 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 2.1.15 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 2.1.9によって$\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xを c に対応させる。

証明 次の (1),(2) のステップにわけて定理を証明する。

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものが存在し、c は G の一径数部分群である。

(2) 定理で定めた 2 つの対応はお互いの逆対応になる。

(1) 補題 2.1.13より、$\delta > 0$ と Xの積分曲線 $a : (-\delta, \delta) \to G$ で $a(0) = e$ を満たすものが存在する。$|s| < \delta/2$ となる s を 1 つ固定して

$$b_1(t) = a(s+t),\ b_2(t) = a(s)a(t) \quad (|s| < \delta/2)$$

とおく。すると、$t \mapsto b_1(t)$ は Xの積分曲線になり、

$$\frac{d}{dt}b_2(t) = (dL_{a(s)})_{a(t)}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right) = (dL_{a(s)})_{a(t)}(X_{a(t)}) = X_{a(s)a(t)}$$

だから $t \mapsto b_2(t)$ も Xの積分曲線になる。さらに、

$$b_1(0) = a(s) = a(s)e = a(s)a(0) = b_2(0)$$

だから補題 2.1.13の一意性より、

$$b_1(t) = b_2(t) \quad (|t| < \delta/2).$$

結局

$$a(s+t) = a(s)a(t) = a(t)a(s) \quad (|s|, |t| < \delta/2)$$

が成り立つ。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となるように自然数 kをとり

$$c(t) = a\left(\frac{t}{k}\right)^k$$

として写像 $c : \mathbf{R} \to G$ を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$|t/k| < \delta/2, |t/l| < \delta/2$ となる自然数 k, lをとったとき、

$$a\left(\frac{t}{k}\right)^k = a\left(\frac{t}{kl}\right)^{kl} = a\left(\frac{t}{l}\right)^l$$

が成り立つので、上の c は kのとり方によらずに定まっている。$c(0) = a(0) = e$ は明らか。以下で、c が G の一径数部分群であることを示そう。$t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となる自然数 kをとる。t を含む開集合 Iで $s \in I$ならば $|s/k| < \delta/2$ となるものをとる。すると $s \in I$ に対して $c(s) = a(s/k)^k$となるので、c は Iにおいて C^∞級写像である。よって $c : \mathbf{R} \to G$ は C^∞級写像になる。任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $|s/k|, |t/k| < \delta/4$ となる自然数 kをとると、$|s/k|, |t/k|, |(s+t)/k| < \delta/2$ となり、

$$\begin{aligned} c(s)c(t) &= a\left(\frac{s}{k}\right)^k a\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(a\left(\frac{s}{k}\right) a\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \\ &= a\left(\frac{s+t}{k}\right)^k = c(s+t). \end{aligned}$$

したがって $c : \mathbf{R} \to G$ は G の一径数部分群になる。

次に c が Xの積分曲線であることを示そう。$s \in \mathbf{R}$ に対して、$t \in (s - \delta, s + \delta)$ とすると、$c(t) = c(s)c(t-s) = L_{c(s)}(c(t-s))$ だから、

$$\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=s} = (dL_{c(s)})_e \left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) = (dL_{c(s)})_e(X_e) = X_{c(s)}.$$

したがって c は Xの積分曲線である。

(2) $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群 c は$\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たすので、c に対応する $\mathfrak{g}$ の元は Xになる。逆に G の一径数部分群 c に対応する $\mathfrak{g}$ の元 Xは $X_e = \frac{dc}{dt}(0)$ を満たす。(1) の最後で示したことは $\mathfrak{g}$ の元 Xと G の一径数部分群 c が$\frac{dc}{dt}(0) = X_e$を満たせば c は X の積分曲線になることである。したがって Xに対応する G の一径数部分群は c になる。

例 2.1.16 $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n, \mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元と同一視する。$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$で表すと、定理 2.1.9の証明中の計算より $\tilde{X}_g = gX$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ となる。したがって、Xに対応する $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。行列の指数関数: $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$を使うと $c(t) = e^{tX}$となる。

定義 2.1.17 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.1.15で存在を示した Xの積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。$\exp$ を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 2.1.18 例 2.1.16で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 Xに対応する一径数部分群は e^{tX}になるので、$GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 2.1.19 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.1.15の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$になる。

証明　$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.1.15の対応で対応する G の一径数部分群を $t \mapsto c(t, X)$ と書くことにする。$s \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{d}{dt}c(st, X) = sX_{c(st,X)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

となるので、$t \mapsto c(st, X)$ は $sX \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群になる。よって $c(st, X) = c(t, sX)$ となり $t = 1$ とおくと

$$c(s, X) = c(1, sX) = \exp sX.$$

これより $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$に一致する。

命題 2.1.20 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

証明　$X_1, \ldots, X_n$を $\mathfrak{g}$ の基底とし $u_1, \ldots, u_n$をその双対基底とすると、$u_1, \ldots, u_n$は $\mathfrak{g}$ の座標になる。G の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $e \in U,\ x_1(e) = \ldots = x_n(e) = 0$ を満たすものをとっておく。$\sum_{i=1}^{n} u_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群を $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ と書くことにする。

$$\frac{d}{dt}c(t; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i (X_i)_{c(t;u_1,\ldots,u_n)}$$

だから、各 X_iの Uにおける局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x$$

とすると $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ は

$$\frac{d}{dt}x_j(c(t; u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji}(c(t; u_1, \ldots, u_n))$$

を満たす。常微分方程式の解はパラメーターに関して滑らかだから、写像:

$$(t, u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1(c(t; u_1, \ldots, u_n)), \ldots, x_n(c(t; u_1, \ldots, u_n)))$$

は 0 の近傍で C^∞級写像になる。

$$\exp(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i) = c(1; u_1, \ldots, u_n)$$

だから、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は 0 のある開近傍 Nで C^∞級写像である。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対してある自然数 p が存在し$\frac{1}{p}X \in N$となる。そこで Xの開近傍 Oを$\frac{1}{p}O \subset N$となるようにとると

$$\exp(Z) = \exp\left(\frac{1}{p}Z\right)^p \quad (Z \in O)$$

だから $\exp$ は Oにおいて C^∞級写像である。したがって、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞級写像になる。

定理 2.1.21 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明　$X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d\exp_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)\bigg|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d\exp_e = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$。定理 2.1.9より $d\exp_e$は線形同型写像になる。逆関数定理を使うと、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

命題 2.1.22 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
(Xf)(g) &= \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0} \\
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明　接ベクトル X_gは曲線 $t \mapsto g\exp tX$の $t = 0$ における速度ベクトルになっているので

$$(Xf)(g) = X_g(f) = \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
(XYf)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY)\bigg|_{s=t=0} \qquad (\text{先に示したことより}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1}\exp sX)\bigg|_{s=0}\right)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=0}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial s}f(g\exp tY\exp sX)\bigg|_{s=0}\right)\bigg|_{t=0} \qquad (\text{Leibniz の法則より}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0} \\
&\quad +(YXf)(g).
\end{aligned}$$

したがって

$$([X,Y]f)(g) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}.$$

系 2.1.23 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ となる。

証明 $f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\bigg|_{s=t=0} = 0.\end{aligned}$$

したがって $[X, Y] = 0$ となる。

定義 2.1.24 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 2.1.23は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

命題 2.1.25 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 2.1.26 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 2.1.9の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、$df_e(X_e) \in T_e(H)$ を H 上の左不変ベクトル場に拡張したものが $df(X)$ になる。任意の $g \in G$ に対して、

$$df_g(X_g) = df_g \circ (dL_g)_e(X_e) = d(f \circ L_g)_e(X_e).$$

ここで $x \in G$ に対して

$$(f \circ L_g)(x) = f(gx) = f(g)f(x) = (L_{f(g)} \circ f)(x)$$

だから、

$$\begin{aligned}df_g(X_g) &= d(f \circ L_g)_e(X_e) = d(L_{f(g)} \circ f)(X_e) \\ &= (dL_{f(g)})_e \circ df_e(X_e) = df(X)_{f(g)}.\end{aligned}$$

よって $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$df_g(X_g) = df(X)_{f(g)}, \quad df_g(Y_g) = df(Y)_{f(g)} \quad (g \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係を使うと

$$df_g([X,Y]_g) = [df(X), df(Y)]_{f(g)} \quad (g \in G)$$

となる。特に

$$df_e([X,Y]_e) = [df(X), df(Y)]_e$$

が成立し、定理 2.1.9より $[df(X), df(Y)]$ は H上の左不変ベクトル場だから、

$$df([X,Y]) = [df(X), df(Y)].$$

したがって $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型になる。

定義 2.1.27 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を fの**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 2.1.26は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 2.1.28 A, B, Cを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} d(id_A) &= \alpha_A^{-1} \circ d(id_A)_e \circ \alpha_A = \alpha_A^{-1} \circ id_{T_e(A)} \circ \alpha_A = id \\ d(g \circ f) &= \alpha_C^{-1} \circ d(g \circ f)_e \circ \alpha_A = \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ df_e \circ \alpha_A \\ &= \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ \alpha_B \circ \alpha_B^{-1} \circ df_e \circ \alpha_A = dg \circ df \end{aligned}$$

系 2.1.29 A, Bを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

証明

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) = d(id_B) = id$$

同様にして $d(f^{-1}) \circ df = id$ となり $d(f^{-1}) = df^{-1}$。したがって dfは Lie 環の同型写像になる。

命題 2.1.30 G, Hを Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は Hの指数写像である。

証明 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になるので (命題 2.1.25)、$t \mapsto f(\exp tX)$ は Hの一径数部分群になる。定理 2.1.15よりある $Y \in \mathfrak{h}$ が存在して、

$$f(\exp tX) = \exp tY \quad (t \in \mathbf{R})$$

となる。$t=0$ で両辺を微分すると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left.\frac{d}{dt}f(\exp tX)\right|_{t=0} = df_e(X_e)\\(\text{右辺}) &= \left.\frac{d}{dt}\exp tY\right|_{t=0} = Y_e.\end{aligned}$$

したがって、$df_e(X_e)=Y_e$となり $df(X)=Y$。これより、$f(\exp tX)=\exp(tdf(X))$ が成り立つ。特に $t=1$ とすると、$f(\exp X)=\exp(df(X))$。

定義 2.1.31 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 Vに対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 Vに対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 2.1.32 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して $\mathrm{ad}(X)(Y)=[X,Y],\ Y\in\mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

証明 $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)](Z) &= \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z)-\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]\\&= [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]] = -[Z,[X,Y]] \quad (\text{Jacobi 律})\\&= \mathrm{ad}([X,Y])(Z)\end{aligned}$$

となるので $[\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)](Z)=\mathrm{ad}([X,Y])$ が成り立ち、ad は Lie 環の表現になる。

定義 2.1.33 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 2.1.34 Lie 群 G の元 gに対して $\mathrm{Ad}(g)=d(L_g\circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g)\in GL(\mathfrak{g})$ となり $g\exp(X)g^{-1}=\exp(\mathrm{Ad}(g)X)\quad(g\in G,\ X\in\mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad}:G\to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

証明 $L_g\circ R_{g^{-1}}$は G の自己同型写像だから、系 2.1.29より $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像になる。特に $\mathrm{Ad}(g)\in GL(\mathfrak{g})$ となる。命題 2.1.30より

$$g\exp(X)g^{-1}=\exp(\mathrm{Ad}(g)X)\quad(g\in G,\ X\in\mathfrak{g})$$

が成り立つ。命題 2.1.28を使うと $g,h\in G$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(gh) &= d(L_{gh}\circ R_{(gh)^{-1}}) = d(L_g\circ L_h\circ R_{g^{-1}}\circ R_{h^{-1}})\\&= d(L_g\circ R_{g^{-1}}\circ L_h\circ R_{h^{-1}}) = d(L_g\circ R_{g^{-1}})\circ d(L_h\circ R_{h^{-1}})\\&= \mathrm{Ad}(g)\circ\mathrm{Ad}(h)\end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Ad}:G\to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。

次に Ad が C^∞級写像になることを示そう。$GL(\mathfrak{g})$ における座標は $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$ とその双対基底$\theta_1, \dots, \theta_n$を使って $GL(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R};\ u \mapsto \theta_i(u(X_j))$ と表すことができる。したがって $G \to \mathbf{R};\ g \mapsto \theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j))$ が C^∞級関数になることを示せばよい。定理 2.1.9の証明と同様、

$$\theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j)) = \theta_i(\alpha_G^{-1} \circ dL_g \circ dR_{g^{-1}} \circ \alpha_G(X_j))$$

は gに関する C^∞級関数になる。

最後に Ad の微分が $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致することを示そう。命題 2.1.22より、$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)tY))\bigg|_{t=0}\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)f(g)\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)\right)\bigg|_{s=0} f(g)
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\bigg|_{s=0} = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$$

となり

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)\bigg|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)$$

が成り立つので、Ad の微分は ad になる。

定義 2.1.35 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(V)$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 2.1.36 有限次元ベクトル空間 Vに対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例2.1.18より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\bigg|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

定義 2.1.37 Lie 群 Hが Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、Hが G の部分多様体であり同時に Hが G の部分群であることをいう。

補題 2.1.38 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の Lie 部分群 Hの包含写像を $\iota : H \to G$ とすると $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

証明 ιの微分 $d\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は定理 2.1.26より Lie 環の準同型写像になり、Hが G の部分多様体であることから単射になる。したがって $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

定義 2.1.39 補題 2.1.38において、$d\iota(\mathfrak{h})$ を **Lie 部分群** H**に対応する Lie 部分環** と呼ぶ。今後、$d\iota$によって $\mathfrak{h}$ と $d\iota(\mathfrak{h})$ を同一視する。

命題 2.1.40 G を Lie 群とし、Hを G の Lie 部分群とする。G, Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、指数写像を $\exp_G, \exp_H$とする。このとき $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\exp_G(X) = \exp_H(X)$ が成り立つ。

証明 包含写像を$\iota : H \to G$ とするとιは Lie 群の準同型写像になる。命題 2.1.30より $X \in \mathfrak{h}$ に対して$\iota(\exp_H(X)) = \exp_G(d\iota(X))$ が成り立つ。ιと $d\iota$による同一視をすると $\exp_G(X) = \exp_H(X)$。

定理 2.1.41 G を Lie 群とし Hを G の部分群とする。Hが G の閉集合ならば、Hは相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 2.1.42 定理 2.1.41より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

命題 2.1.43 Lie 群 G とその Lie 部分群 Hの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続 }\}$$

が成り立つ。Hが閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

証明

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{は } H \text{の位相に関して連続 }\}$$

とおいておく。$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$は補題 2.1.38と定義 2.1.39よりわかる。$X \in \mathfrak{h}',\ s \in \mathbf{R}$ に対して、$\exp sX$を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は Hにおける $\exp sX$の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$のそこへの制限は Hの局所座標系になる。$t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続だから s を含む開区間 Iが存在し $\exp tX \in V\ (t \in I)$ となる。$I \to W; t \mapsto \exp tX$は C^∞級写像になるので $t \mapsto x_i(\exp tX)$ は I上の C^∞級関数になる。したがって $t \mapsto \exp tX$は Hの多様体構造に関して C^∞級写像である。これで $X \in \mathfrak{h}$ がわかり、$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ である。以上より $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$である。さらに Hが閉 Lie 部分群の場合は Hの位相は相対位相だから $X \in \mathfrak{g}$ が $\exp tX \in H (t \in \mathbf{R})$ を満たせば $t \mapsto \exp tX$は Hの位相に関して連続になり $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

系 2.1.44 Lie 群 G の閉 Lie 部分群 H, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とおくと $H \cap K$ は G の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ である。

定義 2.1.45 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

定理 2.1.46 $GL(n, \mathbf{R})$ は、例 2.1.3の証明中に示したように、$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{\ } : \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

証明 定理 2.1.9を $GL(n, \mathbf{R})$ に適用すると $\tilde{\ } = \alpha^{-1}$ となるので、$\tilde{\ }$ は線形同型写像である。あとは $\tilde{\ }$ が Lie 環の準同型写像になることを示せばよい。(i, j)-成分のみが 1 で他の成分は 0 になる n 次正方行列を E_{ij} で表すと、$\{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の基底になる。その双対基底を $\{x_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ で表すと、x_{ij} は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の座標になる。$GL(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合で $e \in GL(n, \mathbf{R})$ だから、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と十分小さい $t \in \mathbf{R}$ に対して $e + tX \in GL(n, \mathbf{R})$ となることに注意しておく。$g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_g &= (dL_g)_e(X) = (dL_g)_e \left(\left. \frac{d}{dt}(e + tX) \right|_{t=0} \right) \\
&= \left. \frac{d}{dt} L_g(e + tX) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(g + tgX) \right|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gX) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g .
\end{aligned}$$

したがって、$X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
&[\tilde{X}, \tilde{Y}]_g \\
&= \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(X) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(Y) \right)}{\partial x_{pq}} \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(Y) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \right)}{\partial x_{pq}} \right\} \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(X) x_{kj}(Y) - \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(Y) x_{kj}(X) \right\} \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gXY - gYX) \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(g[X,Y]) \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
&= \widetilde{[X,Y]}_g .
\end{aligned}
$$

よって、

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}$$

となり、$\tilde{}$ は Lie 環の準同型である。

命題 2.1.47 Vを n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n,\mathbf{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ は同型になる。

証明 $v_1,\dots,v_n$を Vの基底とし、$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して fの $v_1,\dots,v_n$に関する表現行列を $R(f)$ で表す。つまり、

$$f[v_1,\dots,v_n] = [v_1,\dots,v_n]R(f)$$

となる。このとき、

$$R : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$$

は代数の同型写像になる。Rは線形同型写像だから特に微分同型写像である。

以上のことから、Rは Lie 環の同型写像

$$R : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$$

を与え、Rの $GL(V)$ への制限は Lie 群の同型写像

$$R|_{GL(V)} : GL(V) \to GL(n,\mathbf{R})$$

を与える。

注意 2.1.48 定理 2.1.46の Lie 環の同型写像$\tilde{}: \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ を $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環とみなすことにする。命題 2.1.47の同型より、有限次元ベクトル空間 Vに対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

補題 2.1.49 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ と $v \in V$に対して $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \rho(X)v = 0\}$ とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環になる。

証明 $a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\rho(aX+bY)v &= a\rho(X)v + b\rho(Y)v = 0, \\
\rho([X,Y])v &= \rho(X)\rho(Y)v - \rho(Y)\rho(X)v = 0
\end{aligned}
$$

だから $aX+bY, [X,Y] \in \mathfrak{h}$ となり $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。

補題 2.1.50 Lie 群 G の表現$\rho : G \to GL(V)$ と $v \in V$に対して

$$H = \{g \in G | \rho(g)v = v\}$$

とおくと Hは G の閉 Lie 部分群になる。$\mathfrak{h}$ を Hの Lie 環とすると

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | d\rho(X)v = 0\}$$

が成り立つ。

証明 $g, h \in H$に対して$\rho(gh^{-1})v = \rho(g)\rho(h^{-1})v = v$だから $gh^{-1} \in H$となり Hは G の部分群である。次に$\rho : G \to GL(V)$ は C^∞級写像だから$\rho_v : G \to V; g \mapsto \rho(g)v$ とおくと ρ_vも C^∞級写像になる。よって $H = \rho_v^{-1}(v)$ は G の閉集合である。したがって Hは G の閉 Lie 部分群である (定理 2.1.41と定義 2.1.42)。

命題 2.1.43より、$X \in \mathfrak{h}$ をとると、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\exp tX \in H$となるので $\rho(\exp tX)v = v$。両辺を $t = 0$ で微分し命題 2.1.30を使うと

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)v\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{td\rho(X)}v\bigg|_{t=0} = d\rho(X)v.$$

逆に $d\rho(X)v = 0$ となる $X \in \mathfrak{g}$ をとると任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho(\exp tX)v = \exp(td\rho(X))v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(td\rho(X))^n v = v$$

だから $\exp tX \in H$となり命題 2.1.43より $X \in \mathfrak{h}$。

補題 2.1.51 有限次元実ベクトル空間 Vに対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、det の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

証明 行列式の性質より $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になる。$X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $X : V \to V$の固有値をλ_i $(1 \leq i \leq k)$ とし、各固有値の重複度を p_iとすると、

$$\det(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{k}(e^{\lambda_i t})^{p_i} = \prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}.$$

したがって、

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k}p_i\lambda_i = \mathrm{tr}(X)$$

となり、det の微分は tr になる。

定義 2.1.52 Vを有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) | \det g = 1\}$ と表すと、補題 2.1.50と補題 2.1.51より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 2.1.50と補題 2.1.51より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

命題 2.1.53 Vを有限次元ベクトル空間とし $A : V \times V \to \mathbf{R}$ を双線形写像とする。

$$G = \{g \in GL(V) | A(gu, gv) = A(u, v)\ (u, v \in V)\}$$

とおくと G は線形 Lie 群になる。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

が成り立つ。

証明 $V \times V$から $\mathbf{R}$ への双線形写像の全体を $M^2(V, \mathbf{R})$ で表す。$b, c \in \mathbf{R},\ B, C \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して $(bB + cC)(u, v) = bB(u, v) + cC(u, v)\ (u, v \in V)$ によって $bB + cC \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めるとこの演算によって $M^2(V, \mathbf{R})$ はベクトル空間になる。$g \in GL(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して

$$(\rho(g)B)(u, v) = B(g^{-1}u, g^{-1}v) \qquad (u, v \in V)$$

として$\rho(g)B \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めると$\rho(g) \in GL(M^2(V, \mathbf{R}))$。$g, h \in GL(V),\ u, v \in V$について

$$\begin{aligned}(\rho(gh)B)(u, v) &= B((gh)^{-1}u, (gh)^{-1}v) = B(h^{-1}g^{-1}u, h^{-1}g^{-1}v) \\ &= (\rho(h)B)(g^{-1}u, g^{-1}v) = (\rho(g)(\rho(h)B))(u, v)\end{aligned}$$

だから$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり$\rho : GL(V) \to GL(M^2(V, \mathbf{R}))$ は群の準同型写像である。各 $u, v \in V,\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ について $g \mapsto (\rho(g)B)(u, v)$ は C^∞級関数だからρはC^∞級写像になる。したがってρは Lie 群の準同型写像である。ρの定義より $G = \{g \in GL(V) | \rho(g)A = A\}$。補題 2.1.50を適用すると G は線形 Lie 群になる。

G の Lie 環を求めるためにρの微分を計算する。$X \in \mathfrak{gl}(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R}),\ u, v \in V$について

$$\begin{aligned}(d\rho(X)B)(u, v) &= \left.\frac{d}{dt}(\rho(e^{tX})B)(u, v)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}B(e^{-tX}u, e^{-tX}v)\right|_{t=0} \\ &= -B(Xu, v) - B(u, Xv)\end{aligned}$$

だから補題 2.1.50より

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) | d\rho(X)A = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}.\end{aligned}$$

定義 2.1.54 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。Vの A に関する直交変換の全体を $O(V) = O(V; A)$ で表すと命題 2.1.53より $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと命題 2.1.53より

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。

注意 2.1.55 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 2.1.56 Vを有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。

$$SO(V) = SO(V;A) = SL(V) \cap O(V;A)$$

と表すと、系 2.1.44 より $SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V;A)$ で表すと系 2.1.44 より $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。$SO(n)$ は連結になり、$O(n)$ の単位元の連結成分になることが知られている。したがって、$O(n)$ は二つの連結成分を持つ。

2.2 ベクトル束

定義 2.2.1 $\pi_E : E \to M$が次の条件を満たすとき、多様体 M上の**ベクトル束**と呼ぶ。

(1) E, Mは多様体であり、$\pi_E : E \to M$は多様体の間の C^∞級写像である。

(2) ある自然数 kが存在し、Mの各点 p に対して p の開近傍 Uと微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$$

が存在し、$u \in \pi_E(U)$ に対して$\Phi_U(u)$ の U成分は$\pi_E(u)$ に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \qquad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、$x \in U$に対して$\pi_E^{-1}(x)$ はベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \to \mathbf{R}^k$$

は線形同型写像になる。

Eをベクトル束の**全空間**、Mを**底空間**、π_Eを**射影**、$\pi_E^{-1}(x)$ を x の**ファイバー**と呼ぶ。kをベクトル束の**階数**と呼び、rank$E$で表す。

定義 2.2.2 $\pi : E \to M$と$\pi' : E' \to M$を多様体 M上のベクトル束とする。微分同型写像 $\phi : E \to E'$が$\pi = \pi' \circ \phi$を満たし、各 $x \in M$に対して

$$\phi|_{E_x} : E_x \to E'_x$$

が線形同型写像になるとき、ϕを**ベクトル束の同型写像**と呼び、Eと E'は**同型**であるという。Vをベクトル空間とし、$M \times V$から Mへの射影を考えることによって、$M \times V$は M 上のベクトル束になる。M上のベクトル束 Eが $M \times V$と同型になるとき、Eを**自明ベクトル束**と呼ぶ。Mの接ベクトル束 TMが自明であるとき、Mは**絶対平行性**を持つという。

命題 2.2.3 Lie 群は絶対平行性を持つ。

証明 G を Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。

$$\phi : G \times \mathfrak{g} \to TG \,; (g, X) \mapsto X_g$$

によって写像ϕを定めると、ϕはベクトル束の同型写像になり、TG は自明ベクトル束になる。したがって、G は絶対平行性を持つ。

例 2.2.4 Mを多様体とし、

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

とおく。$u \in TM$に対して $u \in T_x M$となる $x \in M$が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : TM \to M$$

が定まる。Mの各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。$\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^1, \ldots, \xi^n) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとると、各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = \eta^i \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{\pi(v)}$$

と表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ の座標は $(y^1, \ldots, y^n, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ になり、

$$\eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

よって、座標変換は、

$$(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n) \to \left(y^1, \ldots, y^n, \xi^j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}, \ldots, \xi^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j} \right)$$

となり、C^∞級微分同型写像になる。これによって、TMは多様体になる。

πの定め方より、

$$\pi(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n) = (x^1, \ldots, x^n)$$

となり、$\pi : TM \to M$はC^∞級写像になる。Φ_Uの定め方より、$\Phi_U(u)$ の U成分は$\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

となるので、各 $x \in U$に対して$\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{R}^n$は線形同型写像になる。

以上より、$\pi : TM \to M$がベクトル束になることがわかった。これを多様体 Mの**接ベクトル束**と呼ぶ。

定義 2.2.5 $\pi_E : E \to M$を多様体 M上のベクトル束とする。C^∞級写像$\sigma : M \to E$で$\pi_E \circ \sigma = 1_M$を満たすものを、ベクトル束 Eの**断面**と呼ぶ。Eの断面の全体を$\Gamma(M, E)$ または単に$\Gamma(E)$ で表す。

注意 2.2.6 多様体 Mの接ベクトル束 Mの断面は M上の接ベクトル場であり、$\Gamma(TM)$ は M上の接ベクトル場全体に他ならない。

Vを有限次元実ベクトル空間とする。

$$\wedge^p(TM, V) = \bigcup_{x \in M} \wedge^p(T_xM, V)$$

とおく。$\omega \in \wedge^p(TM, V)$ に対して$\omega \in \wedge^p(T_xM, V)$ となる $x \in M$が一つ定まるので、$\pi(\omega) = x$ とおくと、写像

$$\pi : \wedge^p(TM, V) \to M$$

が定まる。例 2.2.4と同様にして、$\pi : \wedge^p(TM, V) \to M$は M上のベクトル束になることがわかる。微分形式の定義より、$\Gamma(\wedge^p(TM, V)) = \Omega^p(M; V)$ となる。

定義 2.2.7 多様体 Mの各点 $p \in M$の接ベクトル空間 T_pMに内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$が存在し、M上の任意の C^∞級ベクトル場 X, Yに対して $\langle X, Y\rangle$ が M上の C^∞級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

定義 2.2.8 $\iota : M \to \tilde{M}$を多様体 Mから Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への挿入とする。すなわち Mの各点 x でのιの微分写像 $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$が単射であるとする。このとき、$\tilde{M}$上の Riemann 計量$\tilde{g}$の $d\iota$による引き戻し $g = \iota^*\tilde{g}$は M上の Riemann 計量になる。この (M, g) を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

注意 2.2.9 定義 2.2.8では、$\tilde{M}$の Riemann 計量から Mの Riemann 計量を誘導したが、Mの Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体 (M, g) から $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への C^∞級写像ιが、Mの各点 x に対して $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$は等長線形写像になるという条件をみたすとき、$\iota$を**等長的挿入**と呼び、$(M, g)$ を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

例 2.2.10 $\iota : M \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の Riemann 部分多様体とする。各 $x \in M$に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)}\tilde{M} \mid \langle u, d\iota_x(T_x M)\rangle = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x \in M} T_x^\perp M$$

で $T^\perp M$を定める。$u \in T^\perp M$に対して $u \in T_x^\perp M$となる $x \in M$が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \to M$$

が定まる。このとき、$\pi : T^\perp M \to M$はベクトル束になることを以下で示す。

Mと$\tilde{M}$の次元をそれぞれ n と$\tilde{n}$としておく。Mの各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を、$\iota|_U : U \to \tilde{M}$が埋め込みになるようにとる。このとき、$U$の点 x をιによって$\iota(x) \in \tilde{M}$と同一視することができる。つまり、Uを$\tilde{M}$の部分集合とみなす。これにより、各 $x \in U$に対して、$T_x M$も $T_x\tilde{M}$の部分ベクトル空間とみなす。さらに、p を含む$\tilde{M}$の座標近傍系 $(\tilde{U}; x^1, \ldots, x^{\tilde{n}})$ を、

$$U = \{y \in \tilde{U} \mid x^{n+1}(y) = \cdots = x^{\tilde{n}}(y) = 0\}$$

を満たすようにとることができる。各 $x \in U$に対して、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

は $T_x M$の基底になっている。そこで、

$$(*) \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x$$

に Gram-Schmidt の直交化法を施し、得られたものを $(e_1)_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$とすると、

$$[(e_1)_x \cdots (e_{\tilde{n}})_x] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x \right] \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \cdots & \cdots & a_{\tilde{n}}^1(x) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}(x) \end{bmatrix}$$

となる。$a_j^i(x)$ は U上定義された C^∞級関数である。$(*)$ は $T\tilde{U}|_U$の C^∞級断面だから、$(e_1)_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$も C^∞級断面になる。さらに、$(e_i)_x$は

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

の線形結合になっているので、$(e_1)_x, \ldots, (e_n)_x$はT_xMの正規直交基底になる。よって、$T_x^\perp M$の定め方より、$(e_{n+1})_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$は$T_x^\perp M$の正規直交基底になる。これより、$\pi^{-1}(U) \subset T^\perp M$の各元 u は

$$u = \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \xi^i (e_i)_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}}) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{\tilde{n}-n}$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n, \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}})$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとり、上と同様に Gram-Schmidt の直交化法によって、$y \in V$に対して正規直交系 $(f_1)_y, \ldots, (f_{\tilde{n}})_y$を定めると、

$$[(f_1)_y \cdots (f_{\tilde{n}})_y] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_y \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right|_y \right] \begin{bmatrix} b_1^1(y) & \cdots & \cdots & b_{\tilde{n}}^1(y) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}(y) \end{bmatrix}$$

となる。各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \eta^i (f_i)_{\pi(v)}$$

と表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ の座標は$(y^1, \ldots, y^n, \eta^{n+1}, \ldots, \eta^{\tilde{n}})$ になる。以下で、$U \cap V \neq \emptyset$のときの$\pi^{-1}(U)$ と$\pi^{-1}(V)$ の座標の間の変換公式を求める。まず、$x \in U \cap V$に対して、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x$$

となるので、

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right|_x \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{\tilde{n}}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^{\tilde{n}}}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^{\tilde{n}}}{\partial x^{\tilde{n}}}(x) \end{bmatrix}.$$

そこで、

$$J(x) = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x) \right]$$

とおく。さらに、

$$A(x) = [a_j^i(x)], \quad B(x) = [b_j^i(x)]$$

とおいておく。これらの行列を使って上で得た基底の変換を表すと、

$$\begin{aligned}[e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] A \\ [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] B \\ \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] J.\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}[e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] A \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] JA \\ &= [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}]\, B^{-1} JA\end{aligned}$$

となり、

$$[e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}]\, B^{-1} JA$$

を得る。$u \in \pi^{-1}(U \cap V)$ に対して

$$u = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta^{n+1} \\ \vdots \\ \eta^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = [e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] B^{-1} JA \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix}.$$

よって、

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta^{n+1} \\ \vdots \\ \eta^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = B^{-1} JA \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix}$$

となり、座標変換

$$(x^1, \ldots, x^n, \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}}) \to (y^1, \ldots, y^n, \eta^{n+1}, \ldots, \eta^{\tilde{n}})$$

は C^∞級微分同型写像になる。これによって、$T^\perp M$は多様体になる。

πの定め方より、

$$\pi(x^1,\ldots,x^n,\xi^{n+1},\ldots,\xi^{\tilde{n}}) = (x^1,\ldots,x^n)$$

となり、$\pi : T^\perp M \to M$は C^∞級写像になる。Φ_Uの定め方より、$\Phi_U(u)$ の U成分は$\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U\left(\sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \xi^i e_i\right) = (\xi^{n+1},\ldots,\xi^{\tilde{n}})$$

となるので、各 $x \in U$に対して$\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{R}^{\tilde{n}-n}$は線形同型写像になる。

以上より、$\pi : T^\perp M \to M$がベクトル束になることがわかった。

$\pi : T^\perp M \to M$を、Riemann 部分多様体 Mの**法ベクトル束**と呼ぶ。法ベクトル束 $T^\perp M$の断面を M上の**法ベクトル場**と呼ぶ。

2.3 主ファイバー束

第 1.4節の例 1.4.8で考察した 3 次元 Euclid 空間の曲面の正規直交フレーム束を一般化した主ファイバー束の概念をこの節で導入し、主ファイバー束上の接続を考える際に必要になる事項をまとめておく。

主ファイバー束の一般的定義を与える前に、ベクトル束に対して定まる主ファイバー束を構成する。

例 2.3.1 $\pi : E \to M$を多様体 M上の階数 rのベクトル束とする。各 $x \in M$に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$ は r次元ベクトル空間の構造を持つ。そこで、

$$P_x = \{(x; \tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r) \mid \tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r \text{は } E_x \text{の基底}\}$$

と定め、

$$P = \bigcup_{x\in M} P_x$$

とおくと、Pは自然に多様体構造を持つ。これは次のように示すことができる。ベクトル束の定義より、$p \in M$に対して p の開近傍 Uと微分同型写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^r$$

が存在する。この写像を通して P_xは $\mathbf{R}^r$の基底全体と一対一に対応する。$\mathbf{R}^r$の基底全体は $GL(r,\mathbf{R})$ と一対一に対応し、これは線形 Lie 群だから、特に多様体構造を持つ。これより、

$$\Phi_U^r : \bigcup_{x\in U} P_x \to U \times GL(r,\mathbf{R})\ ; (x;\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r) \mapsto (x, \Phi_U(\tilde{e}_1),\ldots,\Phi_U(\tilde{e}_r))$$

が定まり、これらによって Pに多様体構造を導入する。$\mathbf{R}^r$の標準的基底を $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r$で表す。$\mathbf{R}^r$から E_xへの線形同型写像 u に対して $(u(\mathbf{e}_1),\ldots,u(\mathbf{e}_r))$ を対応させることにより、

$$P_x = \{u \mid u \text{ は } \mathbf{R}^r \text{から } E_x \text{への線形同型写像}\}$$

とみなすことができる。$\mathbf{R}^r$の線形自己同型写像 $a \in GL(r, \mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^r$から E_xへの線形同型写像 u と合成し ua を考えることにより、$GL(r, \mathbf{R})$ の P_xへの右からの作用が定まり、さらに $GL(r, \mathbf{R})$ の Pへの右からの作用が定まる。$u \in P_x$に x を対応させる写像を$\pi : P \to M$ で表すと、πはC^∞級写像になり、各 $x \in M$に対して$\pi^{-1}(x)$ に $GL(r, \mathbf{R})$ は単純推移的に作用する。Pを Eの**フレーム束**と呼ぶ。

定義 2.3.2 G を Lie 群とする。$\pi_P : P \to M$が次の条件を満たすとき、多様体 M上の**構造群 G の主ファイバー束**と呼ぶ。

(1) P, Mは多様体であり、$\pi_P : P \to M$は多様体の間の C^∞級写像である。

(2) Lie 群 G が Pに右から作用していて、$u \in P$と $a \in G$ に対して$\pi_P(u \cdot a) = \pi_P(u)$ が成り立ち、各 $x \in M$に対して G は$\pi_P^{-1}(x)$ に単純推移的に作用する。

(3) Mの各点 p に対して p の開近傍 Uと微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_P^{-1}(U) \to U \times G$$

が存在し、$u \in \pi_P^{-1}(U)$ に対して$\Phi_U(u)$ の U成分は$\pi_P(u)$ に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_P(u), \phi_U(u)) \qquad (u \in \pi_P^{-1}(U))$$

とおくと、$a \in G$ に対して$\phi_U(u \cdot a) = \phi_U(u)a$ が成り立つ。

Pを主ファイバー束の**全空間**、Mを**底空間**、π_Pを**射影**、$\pi_P^{-1}(x)$ を x の**ファイバー**と呼ぶ。$a \in G$ による Pの右移動を R_aで表す。すなわち、$R_a(u) = u \cdot a$。

注意 2.3.3 例 1.4.8で導入した曲面 Mの正規直交フレーム束 $O(M)$ は、M上の構造群 $O(2)$ の主ファイバー束になっている。また、例 2.3.1で導入した多様体 M上の階数 rのベクトル束のフレーム束は、M上の構造群 $GL(r, \mathbf{R})$ の主ファイバー束になっている。このようにベクトル束に主ファイバー束が対応するが、逆に次の例で示すように主ファイバー束からベクトル束を構成することができる。

例 2.3.4 $\pi_P : P \to M$を構造群 G の多様体 M上の主ファイバー束とする。G の表現$\rho : G \to GL(V)$ に対して、M上のベクトル束 $E = P \times_\rho V$を次のように定める。G の $P \times V$ への右からの作用を

$$(u, v) \cdot g = (ug, \rho(g)^{-1}v) \qquad (g \in G,\ (u, v) \in P \times V)$$

によって定める。$P \times V$の G の作用に関する商空間を $P \times_\rho V$と書くことにする。$P \times_\rho V$ に商位相を入れる。$(u, v) \in P \times V$の代表する同値類を $[u, v]$ で表す。

$$\pi_E[u, v] = \pi_P(u) \qquad ((u, v) \in P \times V)$$

によって写像$\pi_E : E \to M$を定める。$g \in G$ に対して$\pi_P(ug) = \pi_P(u)$ が成り立つので、π_Eの定義は同値類の代表元のとり方に依存しない。定義 2.3.2の (3) の微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_P^{-1}(U) \to U \times G$$

をとる。

$$\Psi_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times V \,;\, [u, v] \mapsto (\pi_P(u), \rho(\phi_U(u))v)$$

によって写像Ψ_Uを定める。$g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} [ug, \rho(g)^{-1}v] \quad \mapsto \quad & (\pi_P(ug), \rho(\phi_U(ug))\rho(g)^{-1}v) \\ & = (\pi_P(u), \rho(\phi_U(u))\rho(g)\rho(g)^{-1}v) \\ & = (\pi_P(u), \rho(\phi_U(u))v) \end{aligned}$$

となるので、Ψ_Uの定義は同値類の代表元のとり方に依存しない。Ψ_Uは位相同型写像になり、これによって Eに多様体構造が定まる。さらに、$\pi_E : E \to M$は M上のベクトル束になる。$E = P \times_\rho V$を主ファイバー束に表現ρに関して**同伴するベクトル束**という。

各 $u \in P$に対して、

$$V \to E_{\pi(u)} \,;\, v \mapsto [u, v]$$

は線形同型写像になる。この線形同型写像を単に u とも書くことにする。すなわち、$uv = [u, v]$ と書き表す。これによって Pの元を Eのフレームとみなすことができる。

例 2.3.5 Eを多様体 M上の階数 rのベクトル束とし、Pを Eのフレーム束とする。Pの構造群 $GL(r, \mathbf{R})$ の自然な表現 $1 : GL(r, \mathbf{R}) \to GL(r, \mathbf{R})$ に関する同伴ベクトル束 $P \times_1 \mathbf{R}^r$は、

$$P \times_1 V \to E \,;\, [u, v] \mapsto uv$$

によって、元のベクトル束 Eと同型になる。

定義 2.3.6 $P' \to M'$と $P \to M$をそれぞれ構造群 G'と G を持つ主ファイバー束とする。写像 $f' : P' \to P$と $f'' : G' \to G$ が

$$f'(u'a') = f'(u')f''(a') \qquad (u' \in P',\ a' \in G')$$

を満たすとき、$f = (f', f'')$ を主ファイバー束 P'から Pへの**準同型写像**と呼ぶ。

命題 2.3.7 定義 2.3.6の設定のもとで、写像 $f' : P' \to P$は M'から Mへの写像を誘導する。

証明 定義より、

$$f'(u'a') = f'(u')f''(a') \qquad (u' \in P',\ a' \in G')$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} f'(\pi^{-1}(\pi(u'))) \quad & = \quad f'(u'G') = f'(u')f''(G') \\ & \subset \quad f'(u')G = \pi^{-1}(\pi(f'(u'))) \end{aligned}$$

を得る。したがって、$f' : P' \to P$は M'から Mへの写像を誘導する。

注意 2.3.8 定義 2.3.6の設定のもとで、主ファイバー束の準同型写像を構成する写像をすべて同じ記号で表すことにする。さらに、命題 2.3.7で示した底空間の間の写像も同じ記号で表す。

定義 2.3.9 定義 2.3.6の設定のもとで、$f : P' \to P$が埋め込みであり $f : G' \to G$ が単射のとき、準同型写像 fを**埋め込み**と呼ぶ。準同型写像 fが埋め込みのとき、$f : M' \to M$も埋め込みになる。このとき、P'を $f(P')$ と同一視し、G'を G と、M'を Mと同一視することにより、P'を Pの**部分束**と呼ぶ。

定義 2.3.10 Pを多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 Xに対して

$$X^*_u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \exp tX \qquad (u \in P)$$

によって P上のベクトル場 X^*を定める。X^*を Xに対応する**基本ベクトル場**と呼ぶ。各点 $u \in P$において $d\pi_u X^*_u = 0$ となるので、X^*はファイバーに接するベクトル場になる。

補題 2.3.11 Pを多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 Xと $g \in G$ に対して $(\mathrm{Ad}(g)X)^* = dR_{g^{-1}} X^*$が成り立つ。

証明 任意の $u \in P$に対して

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}(g)X)^*_u &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \exp t\mathrm{Ad}(g)X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ug \exp tX g^{-1} \\
&= (dR_{g^{-1}})_{ug} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ug \exp tX \right) = (dR_{g^{-1}})_{ug} X^*_{ug} \\
&= (dR_{g^{-1}} X^*)_u
\end{aligned}$$

となるので、$(\mathrm{Ad}(g)X)^* = dR_{g^{-1}} X^*$が成り立つ。

定義 2.3.12 Eを多様体 M上のベクトル束とする。$\langle\ ,\ \rangle$ は Eの各ファイバーの内積を定めていて、Eの任意の断面 s, t に対して

$$\langle s, t\rangle(x) = \langle s(x), t(x)\rangle \qquad (x \in M)$$

によって定まる M上の関数 $\langle s, t\rangle$ が C^∞級になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ をベクトル束 Eの**計量**といい、$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ を計量ベクトル束と呼ぶ。

例 2.3.13 定義 2.2.7で定めた多様体の Riemann 計量は、接ベクトル束の計量に他ならない。また、Riemann 多様体の Riemann 部分多様体の法ベクトル束にも、全体の Riemann 多様体の計量から自然に定まる計量が入る。

例 2.3.14 $\pi : E \to M$を多様体 M上の階数 rの計量ベクトル束とする。各 $x \in M$に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$ は r次元ベクトル空間の構造を持つ。そこで、

$$P_x = \{(x; \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r) \mid \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r \text{は } E_x \text{の正規直交基底}\}$$

と定め、

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

とおくと、Pは自然に多様体構造を持つ。これは次のように示すことができる。ベクトル束の定義より、$p \in M$に対して p の開近傍 Uと微分同型写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^r$$

が存在する。この写像を通して P_xは $\mathbf{R}^r$の正規直交基底全体と一対一に対応する。$\mathbf{R}^r$の正規直交基底全体は $O(r)$ と一対一に対応し、これは線形 Lie 群だから、特に多様体構造を持つ。これより、

$$\Phi_U^r : \bigcup_{x \in U} P_x \to U \times O(r) \; ; (x; \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r) \mapsto (x, \Phi_U(\tilde{e}_1), \ldots, \Phi_U(\tilde{e}_r))$$

が定まり、これらによって Pに多様体構造を導入する。$\mathbf{R}^r$の標準的正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ で表す。$\mathbf{R}^r$から E_xへの等長的線形同型写像 u に対して $(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_r))$ を対応させることにより、

$$P_x = \{u \mid u \text{ は } \mathbf{R}^r \text{から } E_x \text{への等長的線形同型写像}\}$$

とみなすことができる。$\mathbf{R}^r$の等長的線形自己同型写像 $a \in O(r)$ を $\mathbf{R}^r$から E_xへの等長的線形同型写像 u と合成し ua を考えることにより、$O(r)$ の P_xへの右からの作用が定まり、さらに $O(r)$ の Pへの右からの作用が定まる。$u \in P_x$に x を対応させる写像を$\pi : P \to M$ で表すと、πは C^∞級写像になり、各 $x \in M$に対して$\pi^{-1}(x)$ に $GL(r, \mathbf{R})$ は単純推移的に作用する。Pを Eの**正規直交フレーム束**と呼ぶ。

例 2.3.15 Eを多様体 M上の階数 rの計量ベクトル束とし、Pを Eの正規直交フレーム束とする。Pの構造群 $O(r)$ の自然な表現 $1 : O(r) \to GL(r, \mathbf{R})$ に関する同伴ベクトル束 $P \times_1 \mathbf{R}^r$ は、元のベクトル束 Eと同型になる。

命題 2.3.16 $\pi : P \to M$を多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、$\rho : G \to GL(V)$ を表現とする。Pにρに関して同伴するベクトル束を $E = P \times_\rho V$で表す。このとき、M上の Eの断面全体$\Gamma(E)$ と

$$\{\Phi \in \Omega^0(P; V) \mid \Phi(ua) = \rho(a)^{-1}\Phi(u) \; (u \in P, \; a \in G)\}$$

は次の対応で一対一に対応する。M上の Eの断面ϕに対して

$$\Phi(u) = u^{-1}(\phi(\pi(u))) \qquad (u \in P)$$

によって定まる P上の Vに値を持つ関数Φを対応させる。

証明　M上の Eの断面ϕに対応するΦは

$$\Phi(ua) = (ua)^{-1}(\phi(\pi(ua))) = \rho(a)^{-1}u^{-1}(\phi(\pi(u))) = \rho(a)^{-1}\Phi(u)$$

を満たす。

逆に$\Phi(ua) = \rho(a)^{-1}\Phi(u)$ を満たす P上の Vに値を持つ関数Φをとる。$x \in M$に対して、$\pi(u) = x$ となる $u \in P$をとり、

$$\phi(x) = u\Phi(u)$$

によって、Eの断面ϕを定める。まず、上の定義が $u \in P$のとり方によらないことを示しておく。$a \in G$ をとって ua について考えると、

$$(ua)\Phi(ua) = u\rho(a)\rho(a)^{-1}\Phi(u) = u\Phi(u)$$

となり、$\pi^{-1}(x)$ の元の選び方によらない。

次に上の対応が逆対応になっていることを示す。M上の Eの断面ϕをとる。

$$\Phi(u) = u^{-1}(\phi(\pi(u))) \qquad (u \in P)$$

によって P上の Vに値を持つ関数Φを定める。$x \in M$に対して$\pi(u) = x$ を満たす $u \in P$をとると、

$$u\Phi(u) = uu^{-1}(\phi(\pi(u))) = \phi(x)$$

となり、もとの断面ϕに一致する。

今度は$\Phi(ua) = \rho(a)^{-1}\Phi(u)$ を満たす P上の Vに値を持つ関数Φをとる。$x \in M$に対して、$\pi(u) = x$ となる $u \in P$をとり、

$$\phi(x) = u\Phi(u)$$

によって、Eの断面ϕを定める。

$$u^{-1}\phi(\pi(u)) = u^{-1}u\Phi(u) = \Phi(u)$$

となり、もとの関数Φに一致する。

第 3 章 接続

3.1 ベクトル束上の共変微分

第 1.3節では、Euclid 空間の部分多様体の接ベクトル束上の共変微分を考えた。この節では、一般の多様体におけるベクトル束上の共変微分を考える。

定義 3.1.1 Mを多様体とし、Eを M上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E);\ (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、∇ を E上の**共変微分**と呼ぶ。

(1) $\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi, \qquad (X, Y \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E))$

(2) $\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi, \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi, \psi \in \Gamma(E))$

(3) $\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi, \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M))$

(4) $\nabla_X(f\phi) = f\nabla_X\phi + (Xf)\phi. \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M))$

任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して $\nabla_X\phi = 0$ を満たす$\phi \in \Gamma(E)$ を**平行**な断面という。

定義 3.1.2 $\langle\ ,\ \rangle$ を多様体 M上の計量ベクトル束 Eとする。E上の共変微分 ∇ が

$$X\langle \phi, \psi\rangle = \langle \nabla_X\phi, \psi\rangle + \langle \phi, \nabla_X\psi\rangle \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、共変微分 ∇ は計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を**保つ**という。

例 3.1.3 第 1.3節で定めた Euclid 空間の部分多様体の接ベクトル束上の共変微分と法ベクトル束上の共変微分は、定義 3.1.1の意味での共変微分になっている。さらに、命題 1.3.1より、これらは計量を保存する。

∇ を多様体 M上のベクトル束 E上の共変微分とする。$\phi \in \Gamma(E)$ をとる。定義 3.1.1より各 $x \in M$における接ベクトル $X \in T_xM$に対して $\nabla_X\phi \in E_x$が定まる。すなわち Mの各点 x において $\nabla\phi$が T_xM上の E_xに値を持つ一次形式を定めているとみなすことができる。第 1.2節で定義した微分形式は固定されたベクトル空間に値を持つ微分形式だった。ベクトル束上の共変微分を微分形式を使って扱うためには、次に定義するベクトル束に値を持つ微分形式を考える必要がある。

定義 3.1.4 Eをn次元多様体M上のベクトル束とする。Mの各点xに対して$\wedge^p(T_x(M), E_x)$の元ω_xを対応させる対応ωが次の条件を満たすとき、ωをE**に値を持つ**M**上の**p**次微分形式**と呼ぶ。(条件)Mの任意の局所座標近傍$(U; x^1, \dots, x^n)$に対して、

$$x \longmapsto \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right)$$

がすべての$i_1, \dots, i_p$についてU上のEのC^∞級断面になる。

M上のEに値を持つp次微分形式全体の成すベクトル空間を$\Omega^p(M; E)$で表す。

ベクトル束に値を持つ微分形式を使うと、ベクトル束上の共変微分の定義 (定義 3.1.1) は次のように書き換えることができる。

定義 3.1.5 Mを多様体とし、EをM上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E);\ \phi \mapsto \nabla\phi$$

が、次の (1) と (2) を満たすとき、∇ をE上の**共変微分**と呼ぶ。

(1) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi, \qquad (\phi, \psi \in \Omega^0(M; E))$

(2) $\nabla(f\phi) = f\nabla\phi + df\phi. \qquad (\phi \in \Omega^0(M; E),\ f \in C^\infty(M))$

計量ベクトル束上の計量を保つ共変微分の定義も次のように書き換えることができる。

定義 3.1.6 $\langle\ ,\ \rangle$ を多様体M上の計量ベクトル束Eとする。E上の共変微分 ∇ が

$$d\langle\phi, \psi\rangle = \langle\nabla\phi, \psi\rangle + \langle\phi, \nabla\psi\rangle \qquad (\phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、共変微分 ∇ は計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を**保つ**という。

第 1.4で 3 次元 Euclid 空間の曲面上の共変微分を局所的に定義された接ベクトル束の正規直交基底によって表現した。ここでは同様のことを一般のベクトル束に対して行う。

Eを多様体M上の階数rのベクトル束とし、そのフレーム束をPで表す。∇ をE上の共変微分とする。ベクトル束Eは局所的には積多様体だから、Mの各点にはある開近傍Uが存在し線形独立な断面$e_1, \dots, e_r \in \Omega^0(U; E)$をとることができる。$\nabla e_i \in \Omega^1(U; E)$は$U$上の 1 次微分形式$\omega_i^j \in \Omega^1(U)$を係数に持つ$e_1, \dots, e_r$の線形結合で書き表すことができ、

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^r e_j \omega_i^j$$

となる。$\omega = (\omega_i^j) \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R}))$ とみなすこともできる。EのU上の断面ϕに対して$\phi = \sum e_i\phi^i$と表すと、共変微分の定義より

$$\nabla\phi = \sum e_i(d\phi^i) + \sum \nabla e_j \phi^j = \sum e_i \left(d\phi^i + \sum \omega_j^i \phi^j \right)$$

となる。これより、Eの共変微分は局所的にはωによって定まる。ωを**局所接続形式**と呼ぶ。

第 1.4の命題 1.4.1で考えたのと同様に、ベクトル束の共変微分の局所接続形式の変換を考える。

命題 3.1.7 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E の共変微分とする。M の開集合 U 上定義された局所フレーム $\sigma = [e_1, \dots, e_r]$ と $\bar{\sigma} = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r]$ に対する局所接続形式を ω と $\bar{\omega}$ で表す。すなわち、$\nabla\sigma = \sigma\omega$ と $\nabla\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\bar{\omega}$ が成り立つ。$\bar{\sigma} = \sigma f$ によって変換行列 $f \in \Omega^0(U; M_r(\mathbf{R}))$ を定めると、f は r 次一般線形群 $GL(r, \mathbf{R})$ に値を持つ。このとき、次が成り立つ。

$$\bar{\omega} = f^{-1}df + f^{-1}\omega f.$$

証明 $\bar{\sigma} = \sigma f$ より

$$\nabla\bar{\sigma} = \nabla\sigma f + \sigma df = \sigma\omega f + \sigma df = \sigma(\omega f + df).$$

他方、

$$\nabla\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\bar{\omega} = \sigma f\bar{\omega}.$$

これらより、$\sigma f\bar{\omega} = \sigma(df + \omega f)$、すなわち $f\bar{\omega} = df + \omega f$ となり、

$$\bar{\omega} = f^{-1}df + f^{-1}\omega f$$

を得る。

ベクトル束の共変微分から局所接続形式が定まり、局所接続形式は命題 3.1.7の変換公式を満たす。逆に変換公式を満たす局所接続形式の集まりからベクトル束の共変微分が定まることを以下で示す。そのためにまずベクトル束の局所的な構造を調べておく。

$\pi : E \to M$ を多様体 M 上の階数 r のベクトル束とする。ベクトル束の定義より、M は開被覆 $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ を持ち、各 $\alpha \in A$ に対して微分同型

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^r$$

が存在する。さらに各 $x \in U_\alpha$ に対して

$$\Phi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \mathbf{R}^r$$

は線形同型写像になる。そこで、$\phi_\alpha(x) = \Phi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \mathbf{R}^r$ とおく。もう一つ U_β をとると、$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(x) \circ \phi_\beta(x)^{-1} : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$$

は線形同型写像になる。これによって、C^∞ 級写像

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbf{R})$$

が定まる。$\{\psi_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in A\}$ を開被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する E の**変換関数**と呼ぶ。

命題 3.1.8 多様体 M 上のベクトル束 E の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は次の等式を満たす。

$$\begin{aligned}
&\psi_{\alpha\alpha}(x) = 1_r \qquad (x \in U_\alpha) \\
&\psi_{\beta\alpha}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \qquad (x \in U_\alpha \cap U_\beta) \\
&\psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x) \circ \psi_{\gamma\alpha}(x) = 1_r. \qquad (x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)
\end{aligned}$$

逆に M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と C^∞ 級写像 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbf{R})$ が与えられ上の等式を満たすとき、$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数に持つベクトル束が存在する。

証明　前半の変換関数の性質は、変換関数の定義から直接確かめることができる。

以下では Mの開被覆 $\{U_\alpha\}$ と上の等式を満たす C^∞級写像$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbf{R})$ が与えられたとき、$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数に持つベクトル束を構成する。直和 $\cup_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{R}^r)$ に次のように同値関係を定める。$(x, u) \in U_\alpha \times \mathbf{R}^r$と $(y, v) \in U_\beta \times \mathbf{R}^r$に対して、$x = y$かつ $u = \psi_{\alpha\beta}(x)v$のときに (x, u) と (y, v) は同値であると定める。このとき、この同値関係に関する商空間は$U_\alpha \times \mathbf{R}^r$と局所的に微分同型になるベクトル束になり、その変換関数は $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ になる。

命題 3.1.9 Eを多様体 M上の階数 rのベクトル束とし、Mの開被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する変換関数を $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ とする。$\mathbf{R}^r$の標準的な基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$をとる。$\nabla$ を Eの共変微分とし、U_αにおける Eの局所フレームを

$$e_i(x) = \phi_\alpha(x)^{-1}\mathbf{e}_i \qquad (x \in U_\alpha)$$

によって定め、$\{e_i\}$ から定まる局所接続形式をω_αで表す。このとき、$U_\alpha \cap U_\beta$上で

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。逆に各 U_α上の $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ に値を持つ微分形式の族 $\{\omega_\alpha\}$ が与えられ上の等式を満たすとき、$\{\omega_\alpha\}$ を局所接続形式に持つ Eの共変微分が存在する。

証明　$\{e_i\}$ と同様、U_βにおける Eの局所フレームを

$$\bar{e}_i(x) = \phi_\beta(x)^{-1}\mathbf{e}_i \qquad (x \in U_\beta)$$

によって定めると、$\{\bar{e}_i\}$ から定まる局所接続形式はω_βになる。$x \in U_\alpha \cap U_\beta$に対して、

$$\begin{aligned}
\bar{e}_i(x) &= \phi_\beta(x)^{-1}\mathbf{e}_i = \phi_\alpha(x)^{-1}\phi_\alpha(x)\phi_\beta(x)^{-1}\mathbf{e}_i \\
&= \phi_\alpha(x)^{-1}\psi_{\alpha\beta}(x)\mathbf{e}_i = \phi_\alpha(x)^{-1}\sum_{j=1}^{r}\mathbf{e}_j(\psi_{\alpha\beta}(x))_i^j \\
&= \sum_{j=1}^{r} e_j(x)(\psi_{\alpha\beta}(x))_i^j.
\end{aligned}$$

そこで、

$$\sigma = [e_1, \ldots, e_r], \quad \bar{\sigma} = [\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r]$$

とおくと、$\bar{\sigma} = \sigma\psi_{\alpha\beta}$が成り立つ。したがって、命題 3.1.7より命題の前半の変換公式を得る。

逆に各 U_α上の $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ に値を持つ微分形式の族 $\{\omega_\alpha\}$ が与えられ上の等式を満たすと仮定する。ω_αが U_αにおける局所接続形式になる共変微分は、U上の Eの断面

$$\xi = \sigma\phi = [e_1 \ \ldots e_r]\begin{bmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^r \end{bmatrix}$$

に対して、先に示したことから

$$\nabla\xi = \sum \left(d\phi^i + \sum \phi^j (\omega_\alpha)^i_j \right) e_i = \sigma(d\phi + \omega_\alpha \phi)$$

を満たす。そこで各 U_α上の断面に対して上の等式で共変微分 ∇ を定める。これが M全体で定義された共変微分になることを示すためには、$U_\alpha \cap U_\beta$において U_αで定めた共変微分と U_βで定めた共変微分が一致することを示せばよい。簡単のため $f = \psi_{\alpha\beta}$とおく。Eの $U_\alpha \cap U_\beta$上の断面を$\xi = \sigma\phi = \bar{\sigma}\bar{\phi}$と書き表す。

$$\sigma\phi = \bar{\sigma}\bar{\phi} = \sigma f \bar{\phi}$$

より$\phi = f\bar{\phi}$となり、$\bar{\phi} = f^{-1}\phi$が成り立つ。また $ff^{-1} = 1_r$だから

$$dff^{-1} + fd(f^{-1}) = 0$$

が成り立つことに注意しておく。

$$\begin{aligned}
& \bar{\sigma}(d\bar{\phi} + \omega_\beta \bar{\phi}) \\
= \ & \sigma f(d(f^{-1}\phi) + (f^{-1}df + f^{-1}\omega_\alpha f)f^{-1}\phi) \\
= \ & \sigma f(df^{-1}\phi + f^{-1}d\phi + f^{-1}dff^{-1}\phi + f^{-1}\omega_\alpha \phi) \\
= \ & \sigma(fdf^{-1}\phi + d\phi + dff^{-1}\phi + \omega_\alpha\phi) \\
= \ & \sigma(d\phi + \omega_\alpha\phi).
\end{aligned}$$

したがって両者は $U_\alpha \cap U_\beta$上で一致するので、共変微分 ∇ は M全体で定義される。

3.2 共変外微分と曲率

第 1.2節では、多様体上のベクトル空間に値を持つ微分形式の外微分を定義した。多様体上のベクトル束に値を持つ微分形式に対しても、ベクトル束に共変微分がある場合は同様の微分である共変外微分を定義することができる。さらに共変外微分を使って曲率を定義し、その基本的性質を調べる。

定理 3.2.1 Eを n 次元多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。$\omega \in \Omega^p(M;E)$ に対して次の条件を満たす $d^\nabla\omega \in \Omega^{p+1}(M;E)$ が一意的に存在する。(条件) M の局所座標近傍 $(U;x^1,\ldots,x^n)$ におけるωの局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると (ここで $a_{i_1\cdots i_p} \in \Omega^0(U;E)$ である)

$$(d^\nabla\omega)_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{i=1}^{n} \nabla a_{i_1\cdots i_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

証明　定理 1.2.10の証明と同様に以下のように示すことができる。局所表示

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\nabla a_{i_1\cdots i_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x$$

によって定まる$\wedge^{p+1}(T_x(M),E_x)$ の元が局所座標近傍のとり方によらないことを示す。系 1.1.12より、$a_{i_1\cdots i_p}(x)$ はω_xから

$$a_{i_1\cdots i_p}(x)=\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)\qquad(1\le i_1<\cdots<i_p\le n)$$

によって定まっている。$i_1,\ldots,i_p$に括弧内のような大小関係がない場合も上の式によって $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ を定めておく。$(V;y^1,\ldots,y^n)$ を Mのもう 1 つの局所座標近傍とし、

$$b_{i_1\cdots i_p}(x)=\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_p}}\right|_x\right)$$

とおくと

$$\omega_x=\sum_{i_1<\cdots<i_p}b_{i_1\cdots i_p}(x)(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x$$

となる。$x\in U\cap V$に対して $T_x(M)$ の 2 つ基底$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$と$\frac{\partial}{\partial y^i}|_x$の間の変換行列は

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x$$

となっているので、双対基底の間の変換行列は

$$(dy^i)_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

となり、また

$$b_{i_1\cdots i_p}(x)=\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)$$

が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x)=\delta_{jk}$$

に注意しておく。

$$(*)\qquad\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\nabla b_{i_1\cdots i_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x\right)(dy^i)_x\wedge(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x$$
$$=\frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\nabla_{\partial/\partial y^i|_x}b_{i_1\cdots i_p}(dy^i)_x\wedge(dy^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dy^{i_p})_x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j,j_1,\dots,j_p=1\\ k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{i}}(x)\nabla_{\partial/\partial x^j|_x}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot\\
&\qquad \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{k}}(x)(dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1\\ k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\nabla_{\partial/\partial x^k|_x}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot\\
&\qquad (dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x)=\delta_{j_rk_r}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\right)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x) &= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x)\right)\\
&= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial^2 y^{i_r}}{\partial x^k\partial x^{k_r}}(x)
\end{aligned}
$$

となり、これは kと k_rに関して対称である。他方、$(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x$ は kと k_rに関して交代的だから

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1\\ k,k_1,\dots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)\nabla_{\partial/\partial x^k|_x}a_{j_1\cdots j_p}\cdot\\
&\qquad (dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{k,k_1,\dots,k_p=1}^{n}\nabla_{\partial/\partial x^k|_x}a_{j_1\cdots j_p}(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x\\
&= \sum_{k_1<\cdots<k_p}\sum_{k=1}^{n}\nabla a_{k_1\cdots k_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_x\right)(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}
$$

以上で $d^\nabla\omega$の表示が局所座標近傍のとり方によらないことがわかった。$d^\nabla\omega$の一意性もこのことからわかる。また $d^\nabla\omega$が Eに値を持つ $p+1$ 次微分形式になることも $d^\nabla\omega$の表示からわかる。

注意 3.2.2 定理 3.2.1の設定のもとで $p=0$ の場合を考えると、$\omega\in\Omega^0(M;E)$ は Eの断面になり、$d^\nabla\omega$の局所表示は、

$$
(d^\nabla\omega)_x=\sum_{i=1}^{n}\nabla\omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)(dx^i)_x
$$

となるので、Mの接ベクトル Xに対して

$$(d^{\nabla}\omega)_x(X) = \sum_{i=1}^{n} \nabla\omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)(dx^i)_x(X) = (\nabla\omega)_x(X).$$

したがって、$d^{\nabla}\omega = \nabla\omega$となる。

定義 3.2.3 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。定理 3.2.1より定まる写像 $d^{\nabla} : \Omega^p(M;E) \to \Omega^{p+1}(M;E)$ を Eに値を持つ微分形式の ∇ に関する**共変外微分**と呼ぶ。

補題 3.2.4 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。共変外微分

$$d^{\nabla} : \Omega^p(M;E) \to \Omega^{p+1}(M;E)$$

は実線形写像になる。

証明　定理 3.2.1の共変外微分の定め方より d^{∇}は実線形写像になる。

定理 3.2.5 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。$\phi \in \Omega^p(M;E)$と$\psi \in \Omega^q(M)$ に対して

$$d^{\nabla}(\phi \wedge \psi) = d^{\nabla}\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$$

が成り立つ。

証明　定理 1.2.16の証明と同様に以下のように示すことができる。$(U; x^1, \dots, x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。Uにおけるϕとψの局所表示を

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\ \psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x \end{aligned}$$

とすると (ここで、$a_{i_1\cdots i_p} \in \Omega^p(U;E), b_{j_1\cdots j_q} \in \Omega^q(U)$ である)

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} a_{i_1\cdots i_p}(x) b_{j_1\cdots j_q}(x) \cdot \\ &\quad (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x \end{aligned}$$

となる。そこで $k_1 < \cdots < k_{p+q}$に対して、$\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} \neq \{k_1, \dots, k_{p+q}\}$ のときは

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} = 0$$

としておくと

$$
\begin{aligned}
& (\phi\wedge\psi)_x \\
= \ & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot \\
& a_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
& d^\nabla(\phi\wedge\psi)_x \\
= \ & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot \\
& \sum_{i=1}^n \nabla_{\partial/\partial x^i|_x}(a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q})(dx^i)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x \\
= \ & \sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot \\
& \sum_{i=1}^n \left\{(\nabla_{\partial/\partial x^i|_x}a_{i_1\cdots i_p})b_{j_1\cdots j_q}(x)+a_{i_1\cdots i_p}(x)\frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right\}\cdot \\
& (dx^i)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x \\
= \ & \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\sum_{i=1}^n \left\{(\nabla_{\partial/\partial x^i|_x}a_{i_1\cdots i_p})b_{j_1\cdots j_q}(x)+a_{i_1\cdots i_p}(x)\frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right\}\cdot \\
& (dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x \\
= \ & (d^\nabla\phi\wedge\psi)_x+(-1)^p(\phi\wedge d\psi)_x.
\end{aligned}
$$

よって、$d^\nabla(\phi\wedge\psi)=d^\nabla\phi\wedge\psi+(-1)^p\phi\wedge d\psi$ が成り立つ。

ベクトル空間に値を持つ微分形式に外微分作用を二回続けると 0 になることを定理 1.2.17 で示したが、ベクトル束に値を持つ微分形式に共変外微分作用を二回続けても一般には 0 にならない。0 にはならないが、ベクトル束の各ファイバーの変換を誘導することを次の系で示す。

系 3.2.6 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。$\phi\in\Omega^0(M;E)$ と $\psi\in\Omega^p(M)$ に対して

$$d^\nabla d^\nabla(\phi\psi)=(d^\nabla d^\nabla\phi)\wedge\psi$$

が成り立つ。特に $p=0$ のときは $d^\nabla d^\nabla(\phi\psi)=(d^\nabla d^\nabla\phi)\psi$ となり、

$$d^\nabla d^\nabla:\Omega^0(M;E)\to\Omega^2(M;E)$$

は、各 $x\in M$に対して

$$d^\nabla d^\nabla:E_x\to\wedge^2(T_xM,E_x)$$

を定める。したがって $R^\nabla = d^\nabla d^\nabla \in \Omega^2(M;\mathrm{End}E)$ とみなすことができ、次が成り立つ。

$$d^\nabla d^\nabla \phi = R^\nabla \wedge \phi. \qquad (\phi \in \Omega^p(M;E))$$

証明　定理 3.2.5より $\phi \in \Omega^0(M;E)$ と $\psi \in \Omega^p(M)$ に対して

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla(\phi\psi) &= d^\nabla((d^\nabla\phi)\wedge\psi + \phi d\psi) \\ &= (d^\nabla d^\nabla\phi)\wedge\psi - (d^\nabla\phi)\wedge d\psi + (d^\nabla\phi)\wedge d\psi + \phi dd\psi \\ &\quad (\text{定理 } 1.2.16 \text{より } dd\psi = 0) \\ &= (d^\nabla d^\nabla\phi)\wedge\psi. \end{aligned}$$

これより $p=0$ のときは $d^\nabla d^\nabla(\phi\psi) = (d^\nabla d^\nabla\phi)\psi$ が成り立つ。$\psi \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ だから、各 $x \in M$に対して $(d^\nabla d^\nabla\phi)_x \in \wedge^2(T_xM, E_x)$ は$\phi(x)$ にのみ依存する。よって

$$d^\nabla d^\nabla : E_x \to \wedge^2(T_xM, E_x)$$

が定まる。これより $R^\nabla = d^\nabla d^\nabla \in \Omega^2(M;\mathrm{End}E)$ とみなすことができる。

$\phi \in \Omega^p(M;E)$ に対して、局所的には$\phi_1 \in \Omega^0(M;E)$ と$\phi_2 \in \Omega^p(M)$ による$\phi_1\phi_2$という形の元の和で書き表すことができる。これより$\phi = \phi_1\phi_2$の場合に $d^\nabla d^\nabla\phi = R^\nabla \wedge \phi$を示せばよい。

$$d^\nabla d^\nabla\phi = d^\nabla d^\nabla(\phi_1\phi_2) = (d^\nabla d^\nabla\phi_1)\wedge\phi_2 = (R^\nabla\phi_1)\wedge\phi_2 = R^\nabla\wedge\phi_1\phi_2 = R^\nabla\wedge\phi.$$

定義 3.2.7 系 3.2.6の条件下で、R^∇を共変微分 ∇ の**曲率**と呼ぶ。

定理 3.2.8 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。$\omega \in \Omega^p(M;E)$ に対して次の公式が成り立つ。$p=0$ のとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d^\nabla\omega(X) = \nabla_X\omega.$$

$p=1$ のとき $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d^\nabla\omega(X,Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

証明　定理 1.2.18の証明と同様に以下のように示すことができる。$p=0$ のとき $d^\nabla\omega = \nabla\omega$ より、$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d^\nabla\omega(X) = \nabla_X\omega.$$

次に $p=1$ の場合を考える。ωの局所表示を

$$\omega = \sum_i a_i dx^i$$

で表すと、ωの共変外微分 $d^\nabla\omega$の局所表示は

$$d^\nabla\omega = \sum_{i,j} \nabla_{\partial/\partial x^j} a_i dx^j \wedge dx^i$$

になる。ベクトル場 X, Yの局所表示を

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で表す。外積の定義より

$$d^\nabla \omega(X, Y) = \sum_{i,j} \nabla_{\partial/\partial x^j} a_i (\xi^j \eta^i - \eta^j \xi^i)$$

が成り立つ。

$$\omega(Y) = \sum_i a_i \eta^i$$

となるので

$$\nabla_X(\omega(Y)) = \sum_{i,j} \xi^j \nabla_{\partial/\partial x^j}(a_i \eta^i) = \sum_{i,j} \xi^j \left((\nabla_{\partial/\partial x^j} a_i)\eta^i + a_i \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right).$$

Xと Yを入れ替えることにより

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i,j} \eta^j \left((\nabla_{\partial/\partial x^j} a_i)\xi^i + a_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right)$$

も得られる。ベクトル場のブラケット積の定義から

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i,j} \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\omega([X, Y]) = \sum_{i,j} a_i \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right).$$

以上の計算結果より

$$d^\nabla \omega(X, Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

を得る。

注意 3.2.9 定理 3.2.8の条件下で $p > 0$ のとき $X_1, \ldots X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} & d^\nabla \omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) \\ = \; & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \nabla_{X_i}(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

が成り立つことが知られている。

系 3.2.10 Eを多様体M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。∇ の曲率 R^∇は次の等式を満たす。

$$R^\nabla(X,Y)\phi = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\phi. \qquad (X,Y \in \mathfrak{X}(M),\ \phi \in \Omega^0(M;E))$$

この等式を **Ricci の恒等式**と呼ぶ。

証明 曲率の定義と定理 3.2.8より

$$\begin{aligned} R(X,Y)\phi &= (d^\nabla d^\nabla \phi)(X,Y) \\ &= \nabla_X(d^\nabla\phi(Y)) - \nabla_Y(d^\nabla\phi(X)) - d^\nabla\phi([X,Y]) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y\phi) - \nabla_Y(\nabla_X\phi) - \nabla_{[X,Y]}\phi \\ &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\phi. \end{aligned}$$

命題 3.2.11 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。このとき、$\Phi \in \Omega^0(M;\mathrm{End}E)$ に対して

$$(\bar\nabla_X\Phi)\phi = \nabla_X(\Phi\phi) - \Phi(\nabla_X\phi) \qquad (X \in \mathfrak{X}(M),\ \phi \in \Omega^0(M;E))$$

によって$\bar\nabla_X\Phi \in \Omega^0(M;\mathrm{End}E)$ を定めると、$\bar\nabla$はベクトル束 $\mathrm{End}E$の共変微分を定める。

証明 まず$\bar\nabla_X\Phi \in \Omega^0(M;\mathrm{End}E)$ となることを示す。$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} (\bar\nabla_X\Phi)(f\phi) &= \nabla_X(\Phi(f\phi)) - \Phi(\nabla_X(f\phi)) \\ &= \nabla_X(f\Phi\phi) - \Phi(f\nabla_X\phi + (Xf)\phi) \\ &= f\nabla_X(\Phi\phi) + (Xf)\Phi\phi - f\Phi(\nabla_X\phi) - (Xf)\Phi\phi \\ &= f(\nabla_X(\Phi\phi)) - \Phi(\nabla_X\phi)) \\ &= f(\bar\nabla_X\Phi)\phi. \end{aligned}$$

これより、各$x \in M$に対して$(\bar\nabla_X\Phi)\phi$の x における値は$\phi(x)$ にのみ依存して定まる。したがって

$$\bar\nabla_X\Phi : \Omega^0(M;E) \to \Omega^0(M;E)$$

は各$x \in M$に対して

$$\bar\nabla_X\Phi : E_x \to E_x$$

を定める。これより$\bar\nabla_X\Phi \in \Omega^0(M;\mathrm{End}E)$ とみなせる。

$\mathrm{End}E$上の$\bar\nabla$が定義 3.1.1の (1) から (3) を満たすことは、E上の ∇ が共変微分であることからすぐにわかる。$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned} (\bar\nabla_X(f\Phi))\phi &= \nabla_X(f\Phi\phi) - f\Phi(\nabla_X\phi) \\ &= f\nabla_X(\Phi\phi) + (Xf)\Phi\phi - f\Phi(\nabla_X\phi) \\ &= f(\bar\nabla_X\Phi)\phi + (Xf)\Phi\phi. \end{aligned}$$

よって

$$\bar{\nabla}_X(f\Phi) = f(\nabla_X\Phi) + (Xf)\Phi$$

となり、$\bar{\nabla}$は End$E$の共変微分になる。

定理 3.2.12 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。このとき、$\Phi \in \Omega^p(M;\mathrm{End}E)$ と$\psi \in \Omega^q(M;E)$ に対して

$$d^{\nabla}(\Phi\wedge\psi) = d^{\bar{\nabla}}\Phi\wedge\psi + (-1)^p\Phi\wedge d^{\nabla}\psi$$

が成り立つ。

証明 定理 3.2.5の証明と同様に以下のように示すことができる。$(U;x^1,\ldots,x^n)$ を Mの局所座標近傍とする。UにおけるΦとψの局所表示を

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} A_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x \\ \psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

とすると (ここで、$A_{i_1\cdots i_p}\in\Omega^p(U;\mathrm{End}E), b_{j_1\cdots j_q}\in\Omega^q(U;E)$ である)

$$\begin{aligned}(\Phi\wedge\psi)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} A_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)\cdot \\ &\qquad (dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

となる。そこで $k_1<\cdots<k_{p+q}$に対して、$\{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\}\neq\{k_1,\ldots,k_{p+q}\}$ のときは

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix} = 0$$

としておくと

$$\begin{aligned}&(\Phi\wedge\psi)_x \\ =\ &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot \\ &A_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}&d^{\nabla}(\Phi\wedge\psi)_x \\ =\ &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \nabla_{\partial/\partial x^i|_x}(A_{i_1\cdots i_p} b_{j_1\cdots j_q})(dx^i)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x \\
= &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q} \end{pmatrix} \cdot \\
&\sum_{i=1}^{n} \left\{ (\bar{\nabla}_{\partial/\partial x^i|_x} A_{i_1\cdots i_p}) b_{j_1\cdots j_q}(x) + A_{i_1\cdots i_p}(x) \nabla_{\partial/\partial x^i|_x} b_{j_1\cdots j_q} \right\} \cdot \\
&(dx^i)_x \wedge (dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x \\
= &\sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j_1<\cdots<j_q} \sum_{i=1}^{n} \left\{ (\bar{\nabla}_{\partial/\partial x^i|_x} A_{i_1\cdots i_p}) b_{j_1\cdots j_q}(x) + A_{i_1\cdots i_p}(x) \nabla_{\partial/\partial x^i|_x} b_{j_1\cdots j_q} \right\} \cdot \\
&(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x \\
= &(d^{\bar{\nabla}}\Phi \wedge \psi)_x + (-1)^p (\Phi \wedge d^{\nabla}\psi)_x.
\end{aligned}$$

よって、$d^{\nabla}(\Phi \wedge \psi) = d^{\bar{\nabla}}\Phi \wedge \psi + (-1)^p \Phi \wedge d^{\nabla}\psi$ が成り立つ。

命題 3.2.13 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。∇ の曲率 R^{∇} は次の等式を満たす。

$$d^{\bar{\nabla}} R^{\nabla} = 0.$$

この等式を **Bianchi の恒等式**と呼ぶ。

証明 $\phi \in \Omega^0(M; E)$ を任意に一つとる。系 3.2.6を $d^{\nabla}\phi \in \Omega^1(M; E)$ に適用すると

$$d^{\nabla} d^{\nabla} d^{\nabla} \phi = d^{\nabla} d^{\nabla}(d^{\nabla}\phi) = R^{\nabla} \wedge d^{\nabla}\phi$$

を得る。他方、定理 3.2.12を使うと $R^{\nabla} \in \Omega^2(M; \mathrm{End}E)$ より

$$d^{\nabla} d^{\nabla} d^{\nabla} \phi = d^{\nabla}(d^{\nabla} d^{\nabla}\phi) = d^{\nabla}(R^{\nabla}\phi) = (d^{\bar{\nabla}} R^{\nabla})\phi + R^{\nabla} \wedge d^{\nabla}\phi$$

となるので、

$$(d^{\bar{\nabla}} R^{\nabla})\phi = 0.$$

これが任意の$\phi \in \Omega^0(M; E)$ について成り立つので、$d^{\bar{\nabla}} R^{\nabla} = 0$ を得る。

命題 3.2.14 Eを多様体 M上のベクトル束とし、∇ を Eの共変微分とする。Mの開集合 U 上定義された Eの局所フレーム$\sigma = [e_1, \ldots, e_r]$ に関する局所接続形式をωとする。

$$R^{\nabla}\sigma = \sigma\Omega$$

によって$\Omega \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R}))$ を定めると、

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

が成り立つ。この等式を局所接続形式の**構造方程式**と呼ぶ。さらに、

$$(d^{\bar{\nabla}} R^{\nabla})\sigma = \sigma(d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega)$$

となり、Bianchi の恒等式から

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が成り立つ。この等式も **Bianchi の恒等式**と呼ぶ。

証明　定理 3.2.5を使うと

$$\begin{aligned} R^\nabla \sigma &= d^\nabla d^\nabla \sigma = d^\nabla(\sigma\omega) \\ &= (d^\nabla \sigma) \wedge \omega + \sigma d\omega = \sigma\omega \wedge \omega + \sigma d\omega \\ &= \sigma(d\omega + \omega \wedge \omega). \end{aligned}$$

したがって、

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

を得る。

Ωの定義式

$$R^\nabla \sigma = \sigma\Omega$$

の両辺を共変外微分する。左辺の共変外微分は定理 3.2.12より

$$\begin{aligned} d^\nabla(R^\nabla \sigma) &= (d^{\bar\nabla} R^\nabla)\sigma + R^\nabla \wedge d^\nabla \sigma = (d^{\bar\nabla} R^\nabla)\sigma + R^\nabla \wedge \sigma\omega \\ &= (d^{\bar\nabla} R^\nabla)\sigma + R^\nabla \sigma \wedge \omega = (d^{\bar\nabla} R^\nabla)\sigma + \sigma\Omega \wedge \omega. \end{aligned}$$

右辺の共変外微分は定理 3.2.5より

$$d^\nabla(\sigma\Omega) = (d^\nabla \sigma) \wedge \Omega + \sigma d\Omega = \sigma\omega \wedge \Omega + \sigma d\Omega.$$

以上より

$$(d^{\bar\nabla} R^\nabla)\sigma = \sigma(d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega)$$

を得る。

注意 3.2.15 命題 3.2.14の Bianchi の恒等式は、次のように直接示すこともできる。

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

の両辺に外微分を作用させると $dd\omega = 0$ だから

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \end{aligned}$$

これより

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

を得る。

3.3 主ファイバー束上の接続

第 1.4節で考察した 3 次元 Euclid 空間の曲面の共変微分から定まる正規直交フレーム束上の微分形式を一般化した主ファイバー束上の接続をこの節で導入する。

主ファイバー束上の接続の一般的定義を与える前に、ベクトル束の共変微分から定まるそのフレーム束上の微分形式を構成する。

命題 3.1.9の設定のもとで考える。各αについて

$$\sigma_\alpha(x) = \phi_\alpha(x)^{-1}[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r] \qquad (x \in U_\alpha)$$

によって Eのフレーム束 Pの U_α上定義された断面σ_αを定める。局所接続形式の族 $\{\omega_\alpha\}$ から P上の微分形式$\tilde{\omega}$を$\sigma_\alpha^*\tilde{\omega} = \omega_\alpha$が成り立つように構成する。例 2.3.1より

$$\Phi_\alpha^r : \pi_P^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(r, \mathbf{R})\ ; u \mapsto (\pi_P(u), \phi_\alpha(\pi_P(u))u)$$

は微分同型写像になる。ここで、$\phi_\alpha(x) : E_x \to \mathbf{R}^r$は線形同型写像であり、$u$ は E_xの基底を横に並べたものだから、$\phi_\alpha(\pi_P(u))u$ は $\mathbf{R}^r$の基底を横に並べたもの、すなわち $GL(r, \mathbf{R})$ の元になる。$U_\alpha \times GL(r, \mathbf{R})$ 上の $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ に値を持つ 1 次微分形式$\tilde{\omega}_\alpha$を

$$(\tilde{\omega}_\alpha)_{(x,g)} = g^{-1}dg + g^{-1}(\omega_\alpha)_x g \qquad ((x, g) \in U_\alpha \times GL(r, \mathbf{R}))$$

によって定める。以下で$\pi_P^{-1}(U_\alpha)$ 上の微分形式 $(\Phi_\alpha^r)^*\tilde{\omega}_\alpha$の全体が、$P$上の微分形式を定めること、すなわち、$\pi_P^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上で $(\Phi_\alpha^r)^*\tilde{\omega}_\alpha$と $(\Phi_\beta^r)^*\tilde{\omega}_\beta$が一致することを示す。そのためには

$$\tilde{\omega}_\beta = ((\Phi_\beta^r)^{-1})^*(\Phi_\alpha^r)^*\tilde{\omega}_\alpha = (\Phi_\alpha^r \circ (\Phi_\beta^r)^{-1})^*\tilde{\omega}_\alpha$$

を示せばよい。まず

$$\Phi_\alpha^r \circ (\Phi_\beta^r)^{-1}(x, g) = (x, \phi_\alpha(x) \circ \phi_\beta(x)^{-1}g) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x)g)$$

となることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
(\Phi_\alpha^r \circ (\Phi_\beta^r)^{-1})^*\tilde{\omega}_\alpha &= (\psi_{\alpha\beta}g)^{-1}d(\psi_{\alpha\beta}g) + (\psi_{\alpha\beta}g)^{-1}\omega_\alpha(\psi_{\alpha\beta}g) \\
&= g^{-1}\psi_{\alpha\beta}^{-1}((d\psi_{\alpha\beta})g + \psi_{\alpha\beta}dg) + g^{-1}\psi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}g \\
&= g^{-1}dg + g^{-1}(\psi_{\alpha\beta}^{-1}d\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta})g \\
&= g^{-1}dg + g^{-1}\omega_\beta g \\
&= \tilde{\omega}_\beta.
\end{aligned}$$

以上で $(\Phi_\alpha^r)^*\tilde{\omega}_\alpha$の全体が P上の $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ に値を持つ 1 次微分形式を定めることがわかった。この微分形式を$\tilde{\omega}$で表す。

次に$\sigma_\alpha^*\tilde{\omega}$について考える。

$$\sigma_\alpha^*\tilde{\omega} = \sigma_\alpha^*(\Phi_\alpha^r)^*\tilde{\omega}_\alpha = (\Phi_\alpha^r\sigma_\alpha)^*\omega_\alpha$$

となり、

$$\Phi^r_\alpha \sigma_\alpha(x) = (x, [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r]) = (x, e) \quad (e \text{ は } GL(r, \mathbf{R}) \text{ の単位元}).$$

したがって、

$$(\Phi^r_\alpha \sigma_\alpha)^* \tilde{\omega} = \omega_\alpha$$

が成り立つ。

$GL(r, \mathbf{R})$ の元 a の Pへの右からの作用を R_aで表す。すなわち $u \in P$に対して $R_a(u) = ua$ と定める。

命題 3.3.1 これまでの設定のもとで次の等式が成り立つ。

$$R^*_a \tilde{\omega} = a^{-1} \tilde{\omega} a, \qquad (a \in GL(r, \mathbf{R}))$$
$$\tilde{\omega}(A^*) = A. \qquad (A \in \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R}))$$

証明 各$\pi_P^{-1}(U_\alpha)$ において

$$\begin{aligned}
R^*_a \tilde{\omega} &= R^*_a (\Phi^r_\alpha)^* \tilde{\omega}_\alpha = (\Phi^r_\alpha R_a)^* \tilde{\omega}_\alpha \\
&= (R_a \Phi^r_\alpha)^* \tilde{\omega}_\alpha = (\Phi^r_\alpha)^* R^*_a \tilde{\omega}_\alpha \\
&= (\Phi^r_\alpha)^* ((ga)^{-1} d(ga) + (ga)^{-1} \omega_\alpha ga) \\
&= (\Phi^r_\alpha)^* (a^{-1}(g^{-1} dg) a + a^{-1} g^{-1} \omega_\alpha g a) \\
&= (\Phi^r_\alpha)^* a^{-1} (g^{-1} dg + g^{-1} \omega_\alpha g) a \\
&= a^{-1} ((\Phi^r_\alpha)^* \omega_\alpha) a = a^{-1} \tilde{\omega} a.
\end{aligned}$$

次に $u \in \pi_P(U_\alpha)$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_u(A^*_u) &= (\Phi^r_\alpha)^* \tilde{\omega}_\alpha(A^*_u) = \tilde{\omega}_\alpha((d\Phi^r_\alpha)_u A^*_u) \\
&= \tilde{\omega}_\alpha \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi^r_\alpha(u \exp tA) \right) \\
&= \tilde{\omega}_\alpha \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi_P(u), (\phi_\alpha u) \exp tA) \right) \\
&= \tilde{\omega}_\alpha(0, A_{\phi_\alpha u}) = (\phi_\alpha u)^{-1} A_{\phi_\alpha u} = A.
\end{aligned}$$

命題 3.3.1で示したフレーム束 P上で定義された $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ に値を持つ微分形式$\tilde{\omega}$の性質をふまえて、一般の主ファイバー束上の接続を次のように定義する。

定義 3.3.2 Pを多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とする。P上の G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 次微分形式ω が次の等式を満たすとき、ωを主ファイバー束 P上の**接続形式**または単に**接続**と呼ぶ。

$$R^*_a \omega = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \omega, \qquad (a \in G)$$
$$\omega(A^*) = A. \qquad (A \in \mathfrak{g})$$

P上の接続形式ωに対して

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$$

によって P上の $\mathfrak{g}$ に値を持つ 2 次微分形式Ωを定める。Ωをωの**曲率形式**または単に**曲率**と呼ぶ。

命題 3.3.3 パラコンパクト多様体の主ファイバー束上には接続が存在する。

証明 省略。

定義 3.3.4 $\pi : P \to M$を多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とする。各 $u \in P$でのファイバーの接ベクトル空間を V_uで表す。

$$V_u = \{X \in T_uP \mid d\pi_u X = 0\}$$

となる。V_uを T_uPの**垂直部分空間**と呼ぶ。構造群 G は各ファイバーに単純推移的に作用しているので

$$V_u = \{A_u^* \mid A \in \mathfrak{g}\}$$

が成り立つ。主ファイバー束 P上の接続ωに対して、T_uPの**水平部分空間** H_uを

$$H_u = \{X \in T_uP \mid \omega_u(X) = 0\}$$

によって定める。

命題 3.3.5 Pを多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、ωを P上の接続とする。このとき、次の (1)、(2) が成り立つ。

(1) $T_u(P) = V_u + H_u$ は各 $u \in P$に対して直和になる。

(2) $H_{ua} = dR_a H_u \qquad (u \in P,\ a \in G).$

逆に (1)、(2) を満たす分布 $u \mapsto H_u$に対して、H_uを水平部分空間とする P上の接続ωが一意的に存在する。

証明 (1) $X \in T_u(P)$ に対して$\omega(X) \in \mathfrak{g}$ だから基本ベクトル場$\omega(X)^*$を考えることができる。

$$X = \omega(X)^* + (X - \omega(X)^*).$$

定義より$\omega(X)^* \in V_u$であり、

$$\omega(X - \omega(X)^*) = \omega(X) - \omega(\omega(X)^*) = \omega(X) - \omega(X) = 0.$$

よって、$X - \omega(X)^* \in H_u$が成り立つ。これより、

$$T_u(P) = V_u + H_u$$

を得る。

次に $X \in V_u \cap H_u$とすると、ある $A \in \mathfrak{g}$ が存在し $X = A^*$となる。さらに

$$A = \omega(A^*) = \omega(X) = 0.$$

よって $X = 0$ となり、

$$T_u(P) = V_u + H_u$$

は直和になる。

(2) $X \in H_u$に対して、

$$\omega(dR_aX) = (R_a^*\omega)(X) = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X) = 0.$$

したがって、$dR_aH_u \subset H_{ua}$が成り立つ。ところが、$dR_{a^{-1}}H_{ua} \subset H_u$ ともなるので、$dR_aH_u = H_{ua}$が成り立つ。

(1)、(2) を満たす分布 $u \mapsto H_u$があると仮定する。$u \in P$における接ベクトル $X \in T_u(P)$ に対して、直和分解

$$T_u(P) = V_u + H_u$$

による V_u成分を X^Vで表すと、$X^V = A^*$となる $A \in \mathfrak{g}$ が一意に存在する。そこで、$\omega(X) = A$ として P上の $\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 次微分形式ωを定める。このとき、$A \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega(A^*) = A$$

が成り立つことは、ωの定め方からわかる。

$X \in T_u(P)$ と $a \in G$ に対して

$$\omega(dR_aX) = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X)$$

が成り立つことを示す。そのために、まず、$X \in H_u$と $X \in V_u$の場合に示す。$X \in H_u$の場合は、(2) より

$$dR_aX \in dR_aH_u = H_{ua}$$

となり、

$$\omega(dR_aX) = 0 = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X)$$

が成り立つ。$X \in V_u$の場合は、ある $A \in \mathfrak{g}$ が存在して $X = A_u^*$となる。

$$\begin{aligned} dR_aA_u^* &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u(\exp tA)a = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ua(\exp t\mathrm{Ad}(a^{-1})A) \\ &= (\mathrm{Ad}(a^{-1})A)_{ua}^* \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \omega(dR_aX) &= \omega(dR_aA_u^*) = \omega((\mathrm{Ad}(a^{-1})A)_{ua}^*) = \mathrm{Ad}(a^{-1})A = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(A^*) \\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X). \end{aligned}$$

任意の $X \in T_u(P)$ に対しては、$X = X^V + X^H$と分解することによって、

$$\begin{aligned}\omega(dR_aX) &= \omega(dR_aX^V) + \omega(dR_aX^H) = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X^V) + \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X^H) \\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega(X)\end{aligned}$$

を得る。ωに関する水平部分空間が H_uになることは、ωの定め方からわかる。

命題 3.3.6 $P' \to M'$と $P \to M$をそれぞれ構造群G'と G の主ファイバー束とする。$f : P' \to P$を主ファイバー束の間の準同型写像とする。命題 2.3.7より誘導される写像 $f : M' \to M$ が微分同型写像になると仮定する。このとき、P'上の接続ω'に対して次の (1)、(2) が成り立つ。

(1) 次の条件を満たす $P(M, G)$ 上の接続ωが一意的に存在する。

$$df(H_{u'}) \subset H_{f(u')} \qquad (u' \in P').$$

(2) (1) のω'は $f^*\omega = df(\omega')$ を満たす。ただし、右辺の dfは $f : G' \to G$ が誘導する Lie 環の準同型写像 $df : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ である。

証明 (1) $u \in P$を任意にとり、$x = \pi(u)$ とおく。$f : M' \to M$は微分同型だから、$f(x') = x$ となる $x' \in M'$が存在する。$u' \in \pi^{-1}(x') \subset P'$をとると、$f(u') \in \pi^{-1}(x)$ となるので、ある $a \in G$ が存在し $u = f(u')a$ が成り立つ。そこで、$H_u = dR_a \circ df(H_{u'})$ によって $T_u(P)$ の部分ベクトル空間 H_uを定める。右辺の $H_{u'}$はω'に関する水平部分空間である。まず、H_uの定め方が、u'と a の選び方によらないことを示しておく。$v' \in P'$と $b \in G$ が $u = f(v')b$ を満たすとする。

$$f(\pi(u')) = \pi(u) = \pi(f(v')) = f(\pi(v'))$$

となり、$f : M' \to M$は微分同型だから$\pi(u') = \pi(v')$ が成り立つ。よってある $c' \in G'$が存在して $v' = u'c'$を満たす。$c = f(c') \in G$ とおくと、

$$u = f(v')b = f(u'c')b = f(u')cb$$

であり、$u = f(u')a$ だから、$a = cb$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}dR_b \circ df(H_{v'}) &= dR_b \circ df(H_{u'c'}) = dR_b \circ df(dR_{c'}H_{u'}) \\ &= dR_b \circ dR_c \circ df(H_{u'}) \qquad (f : P' \to P\text{は準同型}) \\ &= dR_{cb} \circ df(H_{u'}) \\ &= dR_a \circ df(H_{u'})\end{aligned}$$

となり、H_uの定め方が、u'と a の選び方によらないことがわかった。

以下で、分布 $u \mapsto H_u$が命題 3.3.5の条件 (1)、(2) を満たし、$P(M, G)$ 上の接続ωを定めることを示す。

$u \in P$に対して $u = f(u')a$ を満たす $u' \in P'$ と $a \in G$ をとる。$b \in G$ に対して $ub = f(u')ab$ だから、

$$H_{ub} = dR_{ab} \circ df(H_{u'}) = dR_b \circ dR_a \circ df(H_{u'}) = dR_b H_u$$

となり、(2) が成り立つ。

可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{u'} & \xrightarrow{dR_a \circ df} & H_u \\ {\scriptstyle d\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\pi} \\ T_{x'}(M) & \xrightarrow{df} & T_x(M) \end{array}$$

において

$$df \circ d\pi : H_{u'} \to T_x(M)$$

は線形同型写像になるので、

$$d\pi : H_u \to T_x(M)$$

も線形同型写像になる。したがって、

$$T_u(P) = V_u + H_u$$

は直和になる。

以上で分布 $u \mapsto H_u$は命題 3.3.5の条件 (1)、(2) を満たすことがわかり、P上の接続ωを定める。

(2) まず $A \in \mathfrak{g}'$に対して、

$$\omega(df(A^*_{u'})) = df(\omega'(A^*_{u'}))$$

を示す。

$$\begin{aligned} \omega(df(A^*_{u'})) &= \omega\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(u' \exp tA)\right) = \omega\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(u')f(\exp tA)\right) \\ &= \omega\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(u') \exp t df(A)\right) = \omega\left((df(A))^*_{f(u')}\right) \\ &= df(A) = df(\omega'(A^*_{u'})). \end{aligned}$$

これより、$X \in H_{u'}$と $A \in \mathfrak{g}'$に対して $df(H_{u'}) = H_{f(u')}$となるので

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(X + A^*_{u'}) &= \omega(df(X) + df(A^*_{u'})) = df(A^*_{u'})) \\ &= df(\omega'(A^*_{u'})) = df(\omega'(X + A^*_{u'})). \end{aligned}$$

したがって、$f^*\omega = df(\omega')$ が成り立つ。

命題 3.3.7 定義 3.3.2の設定のもとで

$$d\Omega + [\omega \wedge \Omega] = 0$$

が成り立つ。この等式も **Bianchi の恒等式**と呼ぶ。

証明 曲率形式の定義より

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) = \frac{1}{2}[d\omega \wedge \omega] - \frac{1}{2}[\omega \wedge d\omega] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\Omega - \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \wedge \omega\right] - \frac{1}{2}\left[\omega \wedge \left(\Omega - \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[\Omega \wedge \omega] - \frac{1}{2}[\omega \wedge \Omega] - \frac{1}{4}[[\omega \wedge \omega] \wedge \omega] + \frac{1}{4}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]]. \end{aligned}$$

ここで Pの接ベクトル X_1, X_2, X_3に対して

$$\begin{aligned} & [[\omega \wedge \omega] \wedge \omega](X_1, X_2, X_3) \\ = & \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)[[\omega(X_{\sigma(1)}), \omega(X_{\sigma(2)})], \omega(X_{\sigma(3)})] \\ = & [[\omega(X_1), \omega(X_2)], \omega(X_3)] + [[\omega(X_2), \omega(X_3)], \omega(X_1)] + [[\omega(X_3), \omega(X_1)], \omega(X_2)] \\ & -[[\omega(X_1), \omega(X_3)], \omega(X_2)] - [[\omega(X_3), \omega(X_2)], \omega(X_1)] - [[\omega(X_2), \omega(X_1)], \omega(X_3)] \\ & (\text{Jacobi 律より}) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

となるので、$[[\omega \wedge \omega] \wedge \omega] = 0$ が成り立つ。同様にして $[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0$ が成り立つこともわかる。これらより

$$d\Omega - \frac{1}{2}[\Omega \wedge \omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge \Omega] = 0$$

を得る。さらに Pの接ベクトル X_1, X_2, X_3に対して

$$\begin{aligned} -[\Omega \wedge \omega](X_1, X_2, X_3) &= -\sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)[\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \omega(X_{\sigma(3)})] \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)[\omega(X_{\sigma(3)}), \Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})] \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)[\omega(X_{\sigma(1)}), \Omega(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})] \\ &= [\omega \wedge \Omega](X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

となるので、$-[\Omega \wedge \omega] = [\omega \wedge \Omega]$ を得る。以上より

$$d\Omega + [\omega \wedge \Omega] = 0$$

を得る。

定理 3.3.8 Pを多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、ωを P上の接続とする。$u \in P$と $X \in T_uP$に対して Xの水平成分を X^Hで表す。ωの曲率形式Ωは次の等式を満たす。

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H). \qquad (X, Y \in T_uP)$$

証明　外積の定義より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\omega\wedge\omega](X,Y) &= \frac{1}{2}([\omega(X),\omega(Y)]-[\omega(Y),\omega(X)]) \\ &= [\omega(X),\omega(Y)]\,.\end{aligned}$$

よって曲率形式の定義より

$$\Omega(X,Y)=d\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)]$$

X,Yが水平と垂直の場合に分けて証明する。

まず X,Yがともに水平の場合を考える。上で示したことと $X=X^H, Y=Y^H$より

$$\Omega(X,Y)=d\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)]=d\omega(X^H,Y^H)$$

が成り立つ。

次に X,Yがともに垂直の場合を考える。$X=A_u^*, Y=B_u^*$となる $A,B\in\mathfrak{g}$ をとることができる。$d\omega(A^*,B^*)$ の計算をするため、まず

$$[A^*,B^*]=[A,B]^*$$

を示しておく。任意の $f\in C^\infty(M)$ と $u\in P$に対して

$$\begin{aligned}(A^*B^*f)(g) &= \left.\frac{d}{ds}(B^*f)(u\exp sA)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(u\exp sA\exp tB)\right|_{s=t=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}f(u\exp sA\exp tB(\exp sA)^{-1}\exp sA)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}f(u\exp(t\mathrm{Ad}(\exp sA)B)\exp sA)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}f(u\exp(t\mathrm{Ad}(\exp sA)B))\right|_{s=0}\right. \\ &\qquad \left.\left.+\left.\frac{\partial}{\partial s}f(u\exp tB\exp sA)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \quad (\text{Leibniz の法則より}) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}((\mathrm{Ad}(\exp sA)B)^*f)(u)\right|_{s=0}+(B^*A^*f)(u) \\ &= ([A,B]^*f)(u)+(B^*A^*f)(u).\end{aligned}$$

以上より $[A^*,B^*]=[A,B]^*$を得る。定理 1.2.18と接続の性質$\omega(A^*)=A$ より、

$$\begin{aligned}\Omega(A^*,B^*) &= d\omega(A^*,B^*)+[\omega(A^*),\omega(B^*)] \\ &= A^*\omega(B^*)-B^*\omega(A^*)-\omega([A^*,B^*])+[A,B] \\ &= -\omega([A,B]^*)+[A,B] \\ &= 0\end{aligned}$$

となり、これは$\omega((A^*)^H,(B^*)^H)$ に一致する。

最後に Xが垂直で Yが水平の場合を考える。$X=A^*_u$となる $A\in\mathfrak{g}$ をとる。Yを u の近傍に水平ベクトル場になるように拡張しておく。拡張したものも Yで表す。定理 1.2.18より

$$\begin{aligned}
\Omega(A^*,Y) &= d\omega(A^*,Y)+[\omega(A^*),\omega(Y)] \\
&= d\omega(A^*,Y) \\
&= A^*\omega(Y)-Y\omega(A^*)-\omega([A^*,Y]) \\
&= -\omega([A^*,Y]) \\
&= -\omega\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y-dR_{\exp tA}Y)\right) \\
&\qquad (Y\text{と } dR_{\exp tA}Y\text{はどちらも水平だから}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、これは$\omega((A^*)^H,Y^H)$ に一致する。

3.4 主ファイバー束上の接続と同伴ベクトル束上の共変微分

この節では主ファイバー束上の接続から同伴ベクトル束の共変微分を構成する。これによってベクトル束上の共変微分を統一的に扱うことができる。

命題 2.3.16において、主ファイバー束 P上のある性質を満たす関数と Pに同伴するベクトル束の断面とを一対一に対応させた。同様の対応を P上のベクトル空間に値を持つ微分形式と Pに同伴するベクトル束に値を持つ微分形式の間にも構成する。その後でこの対応を使って主ファイバー束上の接続から同伴ベクトル束の共変微分を構成する。

命題 3.4.1 $\pi:P\to M$を多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、$\rho:G\to GL(V)$ を表現とする。Pにρに関して同伴するベクトル束を $E=P\times_\rho V$で表す。次の条件を満たす$\tilde{\phi}\in\Omega^0(P;V)$ の全体を$\Omega^p_\rho(P;V)$ で表す。

$$R_a^*\tilde{\phi}=\rho(a)^{-1}\tilde{\phi}\qquad(a\in G)$$

$X_1,\dots,X_p\in T_uP$の内少なくとも一つが垂直ならば、$\tilde{\phi}(X_1,\dots,X_p)=0.$

このとき、$\Omega^p(M;E)$ と$\Omega^p_\rho(P;V)$ は次の対応で一対一に対応する。$\phi\in\Omega^p(M;E)$ に対して

$$\tilde{\phi}_u(X_1,\dots,X_p)=u^{-1}\phi(d\pi_uX_1,\dots,d\pi_uX_p)\qquad(u\in P,\ X_1,\dots,X_p\in T_uP)$$

によって定まる P上の Vに値を持つ微分形式$\tilde{\phi}$を対応させる。

証明 M上の Eに値を持つ p 次微分形式ϕに対応する$\tilde{\phi}$は

$$\begin{aligned}
(R_a^*\tilde{\phi})_u(X_1,\dots,X_p) &= \tilde{\phi}_{ua}(dR_aX_1,\dots,dR_aX_p) \\
&= (ua)^{-1}\phi(d\pi dR_aX_1,\dots,d\pi dR_aX_p) \\
&= (ua)^{-1}\phi(d(\pi R_a)X_1,\dots,d(\pi R_a)X_p) \\
&= \rho(a)^{-1}u^{-1}\phi(d\pi X_1,\dots,d\pi X_p) \\
&= \rho(a)^{-1}\tilde{\phi}_u(X_1,\dots,X_p)
\end{aligned}$$

を満たすので $R_a^*\tilde{\phi} = \rho(a)^{-1}\tilde{\phi}$が成り立つ。$X_1, \dots, X_p \in T_uP$の内少なくとも一つが垂直ならば、$d\pi X_1, \dots, d\pi X_p$の内少なくとも一つは 0 になり、$\tilde{\phi}(X_1, \dots, X_p) = 0$ が成り立つ。したがって、$\tilde{\phi} \in \Omega_\rho^p(P; V)$ を得る。

逆に$\tilde{\phi} \in \Omega_\rho^p(P; V)$ をとる。$x \in M$と $X_1, \dots, X_p \in T_M$に対して、$\pi(u) = x$ となる $u \in P$ と $d\pi\tilde{X}_i = X_i$となる$\tilde{X}_i \in T_uP$をとり、

$$\phi_x(X_1, \dots, X_p) = u\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)$$

によって、Eに値を持つ p 次微分形式ϕを定める。まず、上の定義が $u \in P$と$\tilde{X}_i \in T_uP$のとり方によらないことを示しておく。$d\pi\tilde{X}'_i = X_i$となる$\tilde{X}'_i \in T_uP$をとると、$\tilde{X}'_i - \tilde{X}_i$は垂直になり、

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_u(\tilde{X}'_1, \dots, \tilde{X}'_p) - \tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p) &= \sum_{i=1}^p \tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}'_i - \tilde{X}_i, \dots, \tilde{X}'_p) \\ &= 0.\end{aligned}$$

これよりϕの定め方は、$\tilde{X}_i \in T_uP$のとり方によらないことがわかった。次に$\pi(u') = x$ となる $u' \in P$をとると、適当な $a \in G$ をとって $u' = ua$ となる。$d\pi\tilde{Y}_i = X_i$となる$\tilde{Y}_i \in T_{ua}P$をとると

$$\begin{aligned}& (ua)\tilde{\phi}_{ua}(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p) \\ =\ & u\rho(a)(R_a^*\tilde{\phi})_u(dR_a^{-1}\tilde{Y}_1, \dots, dR_a^{-1}\tilde{Y}_p) \\ =\ & u\tilde{\phi}_u(dR_a^{-1}\tilde{Y}_1, \dots, dR_a^{-1}\tilde{Y}_p) \\ & (d\pi(dR_a^{-1}\tilde{Y}_i) = d(\pi R_a^{-1})\tilde{Y}_i = d\pi\tilde{Y}_i = X_i \text{と先に示したことから}) \\ =\ & u\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)\end{aligned}$$

となり、ϕの定め方が$\pi^{-1}(x)$ の元の選び方にもよらないことがわかる。

次に上の対応が逆対応になっていることを示す。M上の Eに値を持つ p 次微分形式ϕをとる。

$$\tilde{\phi}_u(X_1, \dots, X_p) = u^{-1}\phi_{\pi(u)}(d\pi X_1, \dots, d\pi X_p) \qquad (u \in P,\ X_i \in T_uP)$$

によって P上の Vに値を持つ p 次微分形式$\tilde{\phi}$を定める。$x \in M$と $X_i \in T_xM$に対して$\pi(u) = x$ と $d\pi\tilde{X}_i = X_i$を満たす $u \in P$と$\tilde{X}_i \in T_uP$をとると、

$$u\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p) = uu^{-1}\phi_{\pi(u)}(d\pi\tilde{X}_1, \dots, d\pi\tilde{X}_p) = \phi_x(X_1, \dots, X_p)$$

となり、もとの微分形式ϕに一致する。

今度は$\tilde{\phi} \in \Omega_\rho^p(P; V)$ をとる。$x \in M$と $X_i \in T_xM$に対して、$\pi(u) = x$ となる $u \in P$と $d\pi\tilde{X}_i = X_i$となる$\tilde{X}_i \in T_uP$をとり、

$$\phi_x(X_1, \dots, X_p) = u\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)$$

によって、Eに値を持つ p 次微分形式ϕを定める。

$$u^{-1}\phi_{\pi(u)}(d\pi\tilde{X}_1, \dots, d\pi\tilde{X}_p) = u^{-1}u\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p) = \tilde{\phi}_u(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)$$

となり、もとの微分形式$\tilde{\phi}$に一致する。

例 3.4.2 $\pi : P \to M$を多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、ωを P上の接続とする。ωの曲率形式$\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$ は、G の随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ に関する$\Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\mathfrak{g})$ に属し、同伴ベクトル束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値を持つ 2 次微分形式が対応する。同伴ベクトル束 $\mathfrak{g}_P$を Pの**随伴ベクトル束**と呼ぶ。

証明 $a \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
R_a^*\Omega &= R_a^*\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega\wedge\omega]\right)\\
&= d(R_a^*\omega) + \frac{1}{2}[R_a^*\omega \wedge R_a^*\omega]\\
&= d(\mathrm{Ad}(a^{-1})\omega) + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}(a^{-1})\omega \wedge \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega]\\
&\quad (\mathrm{Ad}(a^{-1}) \text{ は Lie 環 } \mathfrak{g} \text{ の自己同型だから})\\
&= \mathrm{Ad}(a^{-1})d\omega + \frac{1}{2}\mathrm{Ad}(a^{-1})[\omega\wedge\omega]\\
&= \mathrm{Ad}(a)^{-1}\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega\wedge\omega]\right)\\
&= \mathrm{Ad}(a)^{-1}\Omega.
\end{aligned}$$

次に $u \in P$と $X, Y \in T_uP$に対して、X, Yの内少なくとも一つが垂直ならば、定理 3.3.8 より

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X^H, Y^H) = 0.$$

以上より$\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\mathfrak{g})$ となり、命題 3.4.1より同伴ベクトル束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値を持つ 2 次微分形式が対応する。

補題 3.4.3 命題 3.4.1の設定のもとで、次の等式が成り立つ。

$$(\phi\wedge\alpha)^{\sim} = \tilde{\phi}\wedge\pi^*\alpha. \qquad (\phi \in \Omega^p(M;E),\ \alpha\in\Omega^q(M))$$

証明 $u \in P$と$\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{p+q} \in T_uP$に対して

$$\begin{aligned}
&(\phi\wedge\alpha)^{\sim}_u(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{p+q})\\
={}& u^{-1}(\phi\wedge\alpha)_{\pi(u)}(d\pi\tilde{X}_1,\ldots,d\pi\tilde{X}_{p+q})\\
={}& (u^{-1}\phi_{\pi(u)}\wedge\alpha_{\pi(u)})(d\pi\tilde{X}_1,\ldots,d\pi\tilde{X}_{p+q})\\
={}& \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\sigma)u^{-1}\phi_{\pi(u)}(d\pi\tilde{X}_{\sigma(1)},\ldots,d\pi\tilde{X}_{\sigma(p)})\alpha_{\pi(u)}(d\pi\tilde{X}_{\sigma(p+1)},\ldots,d\pi\tilde{X}_{\sigma(p+q)})\\
={}& \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\sigma)\tilde{\phi}_u(\tilde{X}_{\sigma(1)},\ldots,\tilde{X}_{\sigma(p)})(\pi^*\alpha)_u(\tilde{X}_{\sigma(p+1)},\ldots,\tilde{X}_{\sigma(p+q)})\\
={}& (\tilde{\phi}\wedge\pi^*\alpha)_u(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{p+q}).
\end{aligned}$$

となるので

$$(\phi\wedge\alpha)^{\sim} = \tilde{\phi}\wedge\pi^*\alpha. \qquad (\phi \in \Omega^p(M;E),\ \alpha\in\Omega^q(M))$$

が成り立つ。

定理 3.4.4 $\pi : P \to M$を多様体 M上の構造群 G の主ファイバー束とし、ωを P上の接続とする。さらに$\rho : G \to GL(V)$ を表現とする。$\tilde{\phi} \in \Omega^p_\rho(P;V)$ に対して

$$D^\omega \tilde{\phi} = d\tilde{\phi} + d\rho(\omega) \wedge \tilde{\phi}$$

によって $D^\omega \tilde{\phi} \in \Omega^{p+1}(P;V)$ を定めると、$D^\omega \tilde{\phi} \in \Omega^{p+1}_\rho(P;V)$ となり、

$$D^\omega : \Omega^p_\rho(P;V) \to \Omega^{p+1}_\rho(P;V)$$

が定まる。Pの同伴ベクトル束 $E = P \times_\rho V$の断面$\phi \in \Omega^0(M;E)$ に対して、命題 2.3.16によって対応する$\Omega^0_\rho(P;V)$ の元を$\tilde{\phi}$で表し、$D^\omega \tilde{\phi} \in \Omega^1_\rho(P;V)$ に命題 3.4.1によって対応する $\Omega^1(M;E)$ の元を $\nabla\phi$で表すと、

$$\nabla : \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$$

は同伴ベクトル束 Eの共変微分になる。さらにこの共変微分に関する共変外微分 d^∇は

$$(d^\nabla \phi)^\sim = D^\omega \tilde{\phi} \qquad (\phi \in \Omega^p(M;E))$$

を満たす。

証明 まず $g \in G$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$d\rho(\mathrm{Ad}(g)X) = \rho(g) d\rho(X) \rho(g)^{-1}$$

が成り立つことを示しておく。

$$\begin{aligned} d\rho(\mathrm{Ad}(g)X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(t\mathrm{Ad}(g)X)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(g \exp(tX) g^{-1}) \\ &= \rho(g) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tX))\rho(g)^{-1} = \rho(g) d\rho(X) \rho(g)^{-1}. \end{aligned}$$

$\tilde{\phi} \in \Omega^p_\rho(P;V)$ に対して

$$\begin{aligned} R_a^*(D^\omega \tilde{\phi}) &= R_a^*(d\tilde{\phi}) + R_a^*(d\rho(\omega) \wedge \tilde{\phi}) \\ &= d(R_a^* \tilde{\phi}) + R_a^* d\rho(\omega) \wedge R_a^* \tilde{\phi} \\ &= d(\rho(a)^{-1} \tilde{\phi}) + d\rho(R_a^* \omega(X)) \wedge \rho(a)^{-1} \tilde{\phi} \\ &= \rho(a)^{-1} d\tilde{\phi} + d\rho(\mathrm{Ad}(a)^{-1} \omega) \wedge \rho(a)^{-1} \tilde{\phi} \\ &= \rho(a)^{-1} d\tilde{\phi} + \rho(a)^{-1} d\rho(\omega) \rho(a) \wedge \rho(a)^{-1} \tilde{\phi} \\ &= \rho(a)^{-1} d\tilde{\phi} + \rho(a)^{-1} d\rho(\omega) \wedge \tilde{\phi} \\ &= \rho(a)^{-1} (d\tilde{\phi} + d\rho(\omega) \wedge \tilde{\phi}) \\ &= \rho(a)^{-1} D^\omega \tilde{\phi}. \end{aligned}$$

$X_1,\dots,X_{p+1}\in T_uP$の内少なくとも一つが垂直ならば、

$$(D^\omega\tilde{\phi})(X_1,\dots,X_{p+1})=0$$

となることを示すために、まず $p=0$ の場合を示す。$\tilde{\phi}\in\Omega^0_\rho(P;V)$ と $u\in P,\ A\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}(A^*_u) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\tilde{\phi}(u\exp tA)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(\exp tA)^{-1}\tilde{\phi}(u) \\ &= -d\rho(A)\tilde{\phi}(u) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} (D^\omega\tilde{\phi})(A^*_u) &= (d\tilde{\phi})(A^*_u)+d\rho(\omega(A^*_u))\tilde{\phi}(u) \\ &= -d\rho(A)\tilde{\phi}(u)+d\rho(A)\tilde{\phi}(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって、$\tilde{\phi}\in\Omega^0_\rho(P;V)$ に対して $D^\omega\tilde{\phi}$に垂直ベクトルを代入すると 0 になる。次に一般の $p>0$ に対して$\tilde{\phi}\in\Omega^p_\rho(P;V)$ をとると局所的には$\tilde{\psi}\in\Omega^0_\rho(P;V)$ と$\alpha\in\Omega^p(M)$ によって、$\tilde{\phi}=\tilde{\psi}\pi^*\alpha$と書き表すことができる。

$$\begin{aligned} D^\omega\tilde{\phi} &= D^\omega(\tilde{\psi}\pi^*\alpha) \\ &= d(\tilde{\psi}\pi^*\alpha)+d\rho(\omega)\wedge(\tilde{\psi}\pi^*\alpha) \\ &= d\tilde{\psi}\wedge\pi^*\alpha+\tilde{\psi}d\pi^*\alpha+d\rho(\omega)\tilde{\psi}\wedge\pi^*\alpha \\ &= \tilde{\psi}\pi^*d\alpha+(d\tilde{\psi}+d\rho(\omega)\tilde{\psi})\wedge\pi^*\alpha \\ &= \tilde{\psi}\pi^*d\alpha+(D^\omega\tilde{\psi})\wedge\pi^*\alpha \end{aligned}$$

となり、$X_1,\dots,X_{p+1}\in T_uP$の内少なくとも一つが垂直ならば、

$$(D^\omega\tilde{\phi})(X_1,\dots,X_{p+1})=0$$

となることがわかる。

以上で$\tilde{\phi}\in\Omega^p_\rho(P;V)$ に対して $D^\omega\tilde{\phi}\in\Omega^{p+1}_\rho(P;V)$ となることがわかる。これより

$$D^\omega:\Omega^p_\rho(P;V)\to\Omega^{p+1}_\rho(P;V)$$

が定まる。

$$\nabla:\Omega^0(M;E)\to\Omega^1(M;E)$$

が同伴ベクトル束 Eの共変微分になることを次に示す。$\phi,\psi\in\Omega^0(M;E)$ に対して、$\nabla(\phi+\psi)$ に対応する$\Omega^1_\rho(P;V)$ の元は

$$\begin{aligned} D^\omega(\tilde{\phi}+\tilde{\psi}) &= d(\tilde{\phi}+\tilde{\psi})+d\rho(\omega)\wedge(\tilde{\phi}+\tilde{\psi}) \\ &= d\tilde{\phi}+d\tilde{\psi}+d\rho(\omega)\wedge\tilde{\phi}+d\rho(\omega)\wedge\tilde{\psi} \\ &= D^\omega\tilde{\phi}+D^\omega\tilde{\psi} \end{aligned}$$

となるので

$$\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi$$

が成り立つ。次に$\phi\in\Omega^0(M;E)$ と $f\in C^\infty(M)$ に対して $\nabla(f\phi)$ に対応する$\Omega^1_\rho(P;V)$ の元は補題 3.4.3より

$$\begin{aligned} D^\omega((\pi^*f)\tilde{\phi}) &= d(\pi^*f)\tilde{\phi}+(\pi^*f)D^\omega\tilde{\phi} \\ &= (\pi^*df)\tilde{\phi}+(f\nabla\phi)^\sim \\ &= (df\phi+f\nabla\phi)^\sim \end{aligned}$$

となるので

$$\nabla(f\phi)=df\phi+f\nabla\phi$$

が成り立つ。以上より ∇ は同伴ベクトル束 Eの共変微分になる。

この共変微分に関する共変外微分 d^∇は

$$(d^\nabla\phi)^\sim=D^\omega\tilde{\phi} \qquad (\phi\in\Omega^p(M;E))$$

を満たすことを以下で示す。

$\phi\in\Omega^p(M;E)$ をとると局所的には$\psi\in\Omega^0(M;E)$ と$\alpha\in\Omega^p(M)$ によって、$\phi=\psi\alpha$と書き表すことができる。$d^\nabla\phi$に対応する$\Omega^{p+1}_\rho(P;V)$ の元は

$$\begin{aligned} (d^\nabla\phi)^\sim &= (d^\nabla(\psi\alpha))^\sim \\ & \quad (\text{定理 3.2.5より}) \\ &= ((\nabla\psi)\wedge\alpha+\psi d\alpha)^\sim \\ & \quad (\text{補題 3.4.3より}) \\ &= (\nabla\psi)^\sim\wedge\pi^*\alpha+\tilde{\psi}\pi^*(d\alpha) \\ &= (d\tilde{\psi}+d\rho(\omega)\tilde{\psi})\wedge\pi^*\alpha+\tilde{\psi}d(\pi^*\alpha) \\ &= d(\tilde{\psi}\pi^*\alpha)+d\rho(\omega)\wedge\tilde{\psi}\pi^*\alpha \\ &= d\tilde{\phi}+\rho(\omega)\wedge\tilde{\phi} \\ &= D^\omega\tilde{\phi} \end{aligned}$$

となるので、$(d^\nabla\phi)^\sim=D^\omega\tilde{\phi}$が成り立つ。

命題 3.4.5 定理3.4.4の設定のもとで、同伴ベクトル束 Eの接続ωから定まる共変微分 ∇ の曲率 $R\in\Omega^2(M;\mathrm{End}E)$ に対応する$\Omega^2_{\rho\otimes\rho^*}(P;\mathrm{End}V)$ の元は、ωの曲率形式Ωを使って $d\rho(\Omega)$ と表すことができる。すなわち、$\tilde{R}=d\rho(\Omega)$ が成り立つ。さらに、Eの共変微分 ∇ から定まる $\mathrm{End}E$の共変微分 ∇ (命題 3.2.11) は、$\rho\otimes\rho^*$から定まる

$$\bar{D}^\omega\tilde{\Phi}=d\tilde{\Phi}+d(\rho\otimes\rho^*)(\omega)\wedge\tilde{\Phi} \qquad (\tilde{\Phi}\in\Omega^p_{\rho\otimes\rho^*}(P;\mathrm{End}V))$$

に対応している。これによって

$$\bar{D}^\omega d\rho(\Omega) = d\rho(d\Omega + [\omega \wedge \Omega])$$

となり、主ファイバー束の曲率形式に関する Bianchi の恒等式 (命題 3.3.7) より、再びベクトル束の曲率に関する Bianchi の恒等式 (命題 3.2.13) $d^\nabla R = 0$ を得る。

証明 まず表現$\rho : G \to GL(V)$ から定まる表現$\rho \otimes \rho^* : G \to GL(\mathrm{End}V)$ について説明しておく。

$$(\rho \otimes \rho^*)(g)T = \rho(g)T\rho(g)^{-1} \qquad (g \in G,\ T \in \mathrm{End}V)$$

によって$\rho \otimes \rho^* : G \to GL(\mathrm{End}V)$ は定まっていて、$P \times_{\rho\otimes\rho^*} \mathrm{End}V$は M上のベクトル束として $\mathrm{End}(P \times_\rho V)$ と同型になる。$\rho \otimes \rho^*$の微分表現は、$X \in \mathfrak{g},\ T \in \mathrm{End}V$に対して

$$\begin{aligned}
(d(\rho \otimes \rho^*)(X))T &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho \otimes \rho^*)(\exp tX)T \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp tX)T\rho(\exp tX)^{-1} \\
&= d\rho(X)T - Td\rho(X) \\
&= [d\rho(X), T]
\end{aligned}$$

を満たす。

$\phi \in \Omega^0(M; E)$ に対して $D^\omega D^\omega \tilde{\phi}$を計算する。

$$\begin{aligned}
D^\omega D^\omega \tilde{\phi} &= D^\omega(d\tilde{\phi} + d\rho(\omega)\tilde{\phi}) \\
&= d(d\tilde{\phi} + d\rho(\omega)\tilde{\phi}) + d\rho(\omega) \wedge (d\tilde{\phi} + d\rho(\omega)\tilde{\phi}) \\
&= d\rho(d\omega)\tilde{\phi} - d\rho(\omega) \wedge d\tilde{\phi} + d\rho(\omega) \wedge d\tilde{\phi} + d\rho(\omega) \wedge d\rho(\omega)\tilde{\phi} \\
&= (d\rho(d\omega) + d\rho(\omega) \wedge d\rho(\omega))\tilde{\phi}.
\end{aligned}$$

ここで $u \in P$と $X, Y \in T_uP$に対して

$$\begin{aligned}
(d\rho(\omega) \wedge d\rho(\omega))(X, Y) &= d\rho(\omega(X))d\rho(\omega(Y)) - d\rho(\omega(Y))d\rho(\omega(X)) \\
&= [d\rho(\omega(X)), d\rho(\omega(Y))] \\
&\quad (d\rho \text{は Lie 環の準同型写像だから}) \\
&= d\rho[\omega(X), \omega(Y)] \\
&= \frac{1}{2} d\rho[\omega \wedge \omega](X, Y)
\end{aligned}$$

となるので

$$d\rho(\omega) \wedge d\rho(\omega) = \frac{1}{2} d\rho[\omega \wedge \omega]$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} D^\omega D^\omega \tilde{\phi} &= \left(d\rho(d\omega) + \frac{1}{2} d\rho[\omega \wedge \omega] \right) \tilde{\phi} = d\rho \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \right) \tilde{\phi} \\ &= d\rho(\Omega)\tilde{\phi}. \end{aligned}$$

$X_1, X_2 \in T_u P$の内の少なくとも一つが垂直のときは

$$d\rho(\Omega)(X_1, X_2) = d\rho(\Omega(X_1, X_2)) = 0$$

が成り立つ。さらに $a \in G$ に対して、上で示したことから

$$\begin{aligned} R_a^* d\rho(\Omega) &= d\rho(R_a^*\Omega) = d\rho(\mathrm{Ad}(a)^{-1}\Omega) \\ &= \rho(a)^{-1} d\rho(\Omega) d\rho(a) = (\rho \otimes \rho^*)(a)^{-1} d\rho(\Omega) \end{aligned}$$

となるので、$d\rho(\Omega) \in \Omega^2_{\rho\otimes\rho^*}(P; V)$ となり、∇ の曲率 Rに対応する$\Omega^2_{\rho\otimes\rho^*}(P; V)$ の元は $d\rho(\Omega)$ になる。

$\rho \otimes \rho^*$から定まる

$$\bar{D}^\omega \tilde{\Phi} = d\tilde{\Phi} + d(\rho \otimes \rho^*)(\omega) \wedge \tilde{\Phi} \qquad (\tilde{\Phi} \in \Omega^p_{\rho\otimes\rho^*}(P; \mathrm{End}V))$$

は次の等式を満たすことを示しておく。

$$D^\omega(\tilde{\Phi}\tilde{\phi}) = (\bar{D}^\omega \tilde{\Phi})\tilde{\phi} + \tilde{\Phi} D^\omega \tilde{\phi}. \qquad (\tilde{\Phi} \in \Omega^0_{\rho\otimes\rho^*}(P; \mathrm{End}V),\ \tilde{\phi} \in \Omega^0_\rho(P; V))$$

D^ωの定め方から

$$\begin{aligned} & D^\omega(\tilde{\Phi}\tilde{\phi}) \\ =\ & d(\tilde{\Phi}\tilde{\phi}) + d\rho(\omega)\tilde{\Phi}\tilde{\phi} \\ =\ & (d\tilde{\Phi})\tilde{\phi} + \tilde{\Phi} d\tilde{\phi} + d\rho(\omega)\tilde{\Phi}\tilde{\phi} - \tilde{\Phi} d\rho(\omega)\tilde{\phi} + \tilde{\Phi} d\rho(\omega)\tilde{\phi} \\ =\ & (d\tilde{\Phi} + d\rho(\omega)\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} d\rho(\omega))\tilde{\phi} + \tilde{\Phi}(d\tilde{\phi} + d\rho(\omega)\tilde{\phi}) \\ =\ & (\bar{D}^\omega \tilde{\Phi})\tilde{\phi} + \tilde{\Phi} D^\omega \tilde{\phi}. \end{aligned}$$

この等式より、命題 3.2.11で定めた End$E$の共変微分が$\bar{D}^\omega$に対応していることがわかる。

$\bar{D}^\omega$を $d\rho(\Omega)$ に作用させると

$$\begin{aligned} \bar{D}^\omega d\rho(\Omega) &= d(d\rho(\Omega)) + d(\rho \otimes \rho^*)(\omega) \wedge d\rho(\Omega) \\ &= d\rho(d\Omega) + [d\rho(\omega) \wedge d\rho(\Omega)] \\ &= d\rho(d\Omega) + d\rho[\omega \wedge \Omega] \\ &= d\rho(d\Omega + [\omega \wedge \Omega]). \end{aligned}$$

主ファイバー束の曲率形式に関する Bianchi の恒等式 (命題 3.3.7) より $d\Omega + [\omega \wedge \Omega] = 0$ となるので、再びベクトル束の曲率に関する Bianchi の恒等式 (命題 3.2.13) $d^\nabla R = 0$ を得る。

第 4 章 Riemann 接続

4.1 線形接続

この節では多様体 Mの接ベクトル束 TMのフレーム束上の接続について、特に詳しく考察する。

第 1.4節で曲面の正規直交フレーム束上に定めた $\mathbf{R}^2$に値を持つ 1 次微分形式$\tilde{\theta}$を一般の多様体に対して定める。

定義 4.1.1 多様体 Mの接ベクトル束 TMのフレーム束 Pを単に Mの**フレーム束**と呼ぶことにする。$\dim M = n$ とおく。P上の $\mathbf{R}^n$に値を持つ 1 次微分形式θを

$$\theta_u(X) = u^{-1} d\pi_u(X) \qquad (u \in P,\ X \in T_uP)$$

によって定める。θを Pの**標準形式**と呼ぶ。

命題 4.1.2 n 次元多様体 Mのフレーム束の標準形式θは、構造群 $GL(n,\mathbf{R})$ の自然な表現 $1 : GL(n,\mathbf{R}) \to GL(n,\mathbf{R})$ に関する$\Omega^1_1(P;\mathbf{R}^n)$ に属し、命題 3.4.1によって対応する TMに値を持つ 1 次微分形式は TMの恒等変換になる。

証明 $u \in P$における垂直接ベクトル Xに対して

$$\theta_u(X) = u^{-1} d\pi_u(X) = 0.$$

次に $a \in GL(n,\mathbf{R})$ と $u \in P,\ X \in T_uP$に対して

$$\begin{aligned}(R_a^*\theta)_u(X) &= \theta_{ua}(dR_aX) = (ua)^{-1} d\pi_{ua} dR_a X \\ &= a^{-1}u^{-1}d(\pi R_a)_u X = a^{-1}u^{-1}d\pi_u X \\ &= a^{-1}\theta_u(X)\end{aligned}$$

となるので、$R_a^*\theta = a^{-1}\theta$が成り立つ。したがって、$\theta \in \Omega^1_1(P;\mathbf{R}^n)$ を得る。

$\Omega^1(M;TM)$ は自然に$\Omega^0(M;\mathrm{End}TM)$ と同一視することができる。$x \in M$と $X \in T_xM$ に対して$\pi(u) = x,\ d\pi_u(\tilde{X}) = X$を満たす $u \in P$と$\tilde{X} \in T_uP$をとる。θに対応する$\phi \in \Omega^1(M;TM)$ は

$$\phi_x(X) = u\theta_u(\tilde{X}) = uu^{-1}d\pi_u(\tilde{X}) = X$$

を満たすので、$\phi_x : T_xM \to T_xM$は恒等変換になる。

定義 4.1.3 多様体 M のフレーム束 P 上の接続を M の**線形接続**と呼ぶ。$\dim M = n$ とする。M の線形接続があるとき、$\xi \in \mathbf{R}^n$ に対して、各点 $u \in P$ における水平接ベクトル $B(\xi)$ を $d\pi_u(B(\xi)_u) = u(\xi)$ となるように定める。$B(\xi)$ を ξ に対応する**標準水平ベクトル場**と呼ぶ。

命題 4.1.4 n 次元多様体 M の線形接続が定まっているとき、標準水平ベクトル場は次の性質を持つ。

(1) $\theta(B(\xi)) = \xi \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n)$

(2) $dR_a(B(\xi)) = B(a^{-1}\xi) \qquad (a \in GL(n, \mathbf{R}),\ \xi \in \mathbf{R}^n)$

(3) $\xi \neq 0$ のとき、任意の点で $B(\xi)$ は 0 にはならない。

証明 (1) 任意の $u \in P$ において

$$\theta_u(B(\xi)_u) = u^{-1}d\pi_u(B(\xi)_u) = u^{-1}u(\xi) = \xi$$

となるので、$\theta(B(\xi)) = \xi$ が成り立つ。

(2) 命題 3.3.5 より $dR_a H_u = H_{ua}$ だから、$dR_a(B(\xi)_u) \in H_{ua}$ が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} d\pi_{ua} dR_a(B(\xi)_u) &= d(\pi R_a)_u(B(\xi)_u) = d\pi_u(B(\xi)_u) \\ &= u(\xi) = ua(a^{-1}\xi) \\ &= d\pi_{ua}(B(a^{-1}\xi)_{ua}) \end{aligned}$$

となるので、$dR_a(B(\xi)_u) = B(a^{-1}\xi)_{ua}$ が成り立ち、$dR_a(B(\xi)) = B(a^{-1}\xi)$ を得る。

(3) 対偶を証明する。ある点 $u \in P$ で $B(\xi)_u = 0$ になると仮定すると、

$$u(\xi) = d\pi_u(B(\xi)_u) = 0$$

となり、$u : \mathbf{R}^n \to T_{\pi(u)}M$ は線形同型写像だから $\xi = 0$ となる。

定義 4.1.5 ω を n 次元多様体 M の線形接続とする。ω の**振率形式** Θ を

$$\Theta = D^\omega \theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

によって定める。$\Theta \in \Omega^2_1(P; \mathbf{R}^n)$ となり、Θ には TM に値を持つ 2 次微分形式が対応する。

命題 4.1.6 ω を多様体 M の線形接続とし、Ω と Θ をそれぞれ ω の曲率形式と振率形式とする。このとき次の等式が成り立つ。

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta, \qquad d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega.$$

これらをそれぞれ**第一構造方程式**、**第二構造方程式**と呼ぶ。

証明　これらは捩率形式と曲率形式の定義と次の等式から従う。

$$(\omega \wedge \omega)(X, Y) = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X) = [\omega(X), \omega(Y)] = \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](X, Y).$$

命題 4.1.7 ωを多様体 Mの線形接続とし、ΩとΘをそれぞれωの曲率形式と捩率形式とする。このとき次の等式が成り立つ。

$$D^\omega \Theta = \Omega \wedge \theta, \qquad D^\omega \Omega = 0.$$

これらをそれぞれ **Bianchi の第一恒等式**、**Bianchi の第二恒等式**と呼ぶ。

証明　命題 3.4.5の証明中に示したことから、

$$D^\omega \Theta = D^\omega D^\omega \theta = \Omega \wedge \theta.$$

$D^\omega \Omega = 0$ も命題 3.4.5より従う。

命題 4.1.8 パラコンパクト多様体のフレーム束は絶対平行性を持つ。

証明　n 次元多様体 Mには、命題 3.3.3より線形接続ωが存在する。Mのフレーム束を P で表し、

$$\phi : TP \to P \times (\mathbf{R}^n \times \mathfrak{g})\ ; X \mapsto (\pi(X), \theta(X), \omega(X))$$

によって写像ϕを定めると、命題 4.1.4より、ϕはベクトル束の同型写像になり、TPは自明になる。したがって、Pは絶対平行性を持つ。

多様体の線形接続からテンソル場の共変微分を定めその性質を調べるため、テンソル場の基本事項をまずまとめておく。

定義 4.1.9 有限次元実ベクトル空間 Vに対して、$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q}$上で定義された $p+q$変数の実数値多重線形写像を V上の (p, q) **型テンソル** と呼び、その全体を $T^{(p,q)}V$ で表す。$T^{(p,q)}V$を (p, q) **型テンソル空間**と呼ぶ。$T^{(p,q)}V$は自然な加法とスカラー倍によって実ベクトル空間になる。また定義より$\wedge^p V \subset T^{(0,p)}$は部分ベクトル空間になる。$T^{(p,q)}V$ の元 A と $T^{(r,s)}V$の元 Bに対して、

$$\begin{aligned} & (A \otimes B)(g^1, \ldots, g^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) \\ = \ & A(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) B(g^{p+1}, \ldots, g^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) \\ & (g^1, \ldots, g^{p+r} \in V^*,\ v_1, \ldots, v_{q+s} \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$A \otimes B : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p+r} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q+s} \longrightarrow \mathbf{R}$$

を定めると、$A \otimes B$は V上の $(p+r, q+s)$ 型テンソルになる。$A \otimes B$を A と Bの**テンソル積**と呼ぶ。

命題 4.1.10 Vを有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}V \times T^{(r,s)}V & \longrightarrow & T^{(p+r,q+s)}V \\ (A,B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

は双線形写像になる。

命題 4.1.11 Vを有限次元実ベクトル空間とする。$T \in T^{(p,q)}V$と $g \in GL(V)$ に対して

$$\begin{aligned} (\rho^{(p,q)}(g)T)(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) &= T(f^1g,\dots,f^pg,g^{-1}v_1,\dots,g^{-1}v_q) \\ & \quad (f^i \in V^*,\ v_j \in V) \end{aligned}$$

によって$\rho^{(p,q)}(g)T$を定めると、$\rho^{(p,q)}(g)T \in T^{(p,q)}V$となり、

$$\rho^{(p,q)} : GL(V) \to GL(T^{(p,q)}V)$$

は $GL(V)$ の表現になる。さらに $A \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\begin{aligned} & (d\rho^{(p,q)}(A)T)(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) \\ = & \sum_{i=1}^{p} T(f^1,\dots,f^iA,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) - \sum_{j=1}^{q} T(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,Av_j,\dots,v_q) \\ & (f^i \in V^*,\ v_j \in V) \end{aligned}$$

によって微分表現 $d\rho^{(p,q)}$は与えられる。また $S \in T^{(p,q)}V$と $T \in T^{(r,s)}V$に対して

$$\begin{aligned} \rho^{(p+r,q+s)}(g)(S \otimes T) &= (\rho^{(p,q)}(g)S) \otimes (\rho^{(r,s)}(g)T), \qquad (g \in G) \\ d\rho^{(p+r,q+s)}(A)(S \otimes T) &= (d\rho^{(p,q)}(A)S) \otimes T + S \otimes (d\rho^{(r,s)}(A)T) \qquad (A \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} & (\rho^{(p,q)}(gh)T)(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) \\ = & T(f^1gh,\dots,f^pgh,(gh)^{-1}v_1,\dots,(gh)^{-1}v_q) \\ = & T((f^1g)h,\dots,(f^pg)h,h^{-1}(g^{-1}v_1),\dots,h^{-1}(g^{-1}v_q)) \\ = & (\rho^{(p,q)}(h)T)(f^1g,\dots,f^pg,g^{-1}v_1,\dots,g^{-1}v_q) \\ = & (\rho^{(p,q)}(g)(\rho^{(p,q)}(h)T))(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) \end{aligned}$$

となるので、$\rho^{(p,q)}(gh)T = \rho^{(p,q)}(g)(\rho^{(p,q)}(h)T)$ が成り立ち、

$$\rho^{(p,q)} : GL(V) \to GL(T^{(p,q)}V)$$

は表現になる。

$T \in T^{(p,q)}V$の多重線形性より、$A \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
& (d\rho^{(p,q)}(A)T)(f^1, \ldots, f^p, v_1, \ldots, v_q) \\
= & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho^{(p,q)}(\exp tA)T)(f^1, \ldots, f^p, v_1, \ldots, v_q) \\
= & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(f^1 \exp tA, \ldots, f^p \exp tA, \exp(-tA)v_1, \ldots, \exp(-tA)v_q) \\
= & \sum_{i=1}^{p} T(f^1, \ldots, f^i A, \ldots, f^p, v_1, \ldots, v_q) - \sum_{j=1}^{q} T(f^1, \ldots, f^p, v_1, \ldots, Av_j, \ldots, v_q).
\end{aligned}$$

また $S \in T^{(p,q)}V$と $T \in T^{(r,s)}V$に対して

$$\rho^{(p+r,q+s)}(g)(S \otimes T) = (\rho^{(p,q)}(g)S) \otimes (\rho^{(r,s)}(g)T) \qquad (g \in G)$$

が成り立つことは、この表現の定義からわかる。$A \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
d\rho^{(p+r,q+s)}(A)(S \otimes T) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho^{(p+r,q+s)}(\exp tA)(S \otimes T) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho^{(p,q)}(\exp tA)S) \otimes (\rho^{(r,s)}(\exp tA)T) \\
&\quad \text{(命題 4.1.10のテンソル積の双線形性より)} \\
&= (d\rho^{(p,q)}(A)S) \otimes T + S \otimes (d\rho^{(r,s)}(A)T)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

注意 4.1.12 命題 4.1.11の設定のもとで、$T^{(1,0)}V = (V^*)^* = V$とみなすことができる。$g \in GL(V)$ と $v \in V$, $f \in V^*$に対して

$$\langle \rho^{(1,0)}(g)v, f \rangle = \langle v, fg \rangle = \langle gv, f \rangle$$

となるので、$\rho^{(1,0)} = 1$ とみなせる。

定義 4.1.13 多様体 Mの各点 $x \in M$の接ベクトル空間 T_xM上の (p,q) 型テンソル空間 $T^{(p,q)}(T_xM)$ を $T_x^{(p,q)}M$で表す。

$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)}M$$

とおくと、接ベクトル束 TMの場合 (例 2.2.4) と同様にして、$T^{(p,q)}M$は M上のベクトル束になることがわかる。$T^{(p,q)}M$上の断面を (p,q) **型テンソル場**と呼ぶ。テンソル場の和、関数倍、テンソル積は、多様体の各点の接ベクトル空間上のテンソル空間における演算で定める。このとき、$\Omega^p(M) \subset \Gamma(T^{(0,p)}M)$ は $C^\infty(M)$ 部分加群になる。

命題 4.1.14 命題 4.1.11の設定のもとで $V=\mathbf{R}^n$とする。表現$\rho^{(p,q)}: GL(n,\mathbf{R}) \to T^{(p,q)}\mathbf{R}^n$ による n 次元多様体 Mのフレーム束の同伴ベクトル束 $P\times_{\rho^{(p,q)}} T^{(p,q)}\mathbf{R}^n$は $T^{(p,q)}M$とベクトル束として同型になる。

証明 写像$\phi: P\times_{\rho^{(p,q)}} T^{(p,q)}\mathbf{R}^n \to T^{(p,q)}M$ を次のように定める。$[u,T]\in P\times_{\rho^{(p,q)}} T^{(p,q)}\mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\phi[u,T](f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q) &= T(f^1u,\dots,f^pu,u^{-1}v_1,\dots,u^{-1}v_q)\\ &\quad (f^i\in T^*_{\pi(u)}M,\ v_j\in T_{\pi(u)}M)\end{aligned}$$

とする。この定め方が同値類 $[u,T]$ の代表元のとり方に依存しないことを示す。$a\in GL(n,\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}&\phi[ua,\rho^{(p,q)}(a^{-1})T](f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q)\\ =\ &(\rho^{(p,q)}(a^{-1})T)(f^1ua,\dots,f^pua,(ua)^{-1}v_1,\dots,(ua)^{-1}v_q)\\ =\ &(\rho^{(p,q)}(a^{-1})T)(f^1ua,\dots,f^pua,a^{-1}u^{-1}v_1,\dots,a^{-1}u^{-1}v_q)\\ =\ &T(f^1uaa^{-1},\dots,f^puaa^{-1},aa^{-1}u^{-1}v_1,\dots,aa^{-1}u^{-1}v_q)\\ =\ &T(f^1u,\dots,f^pu,u^{-1}v_1,\dots,u^{-1}v_q)\end{aligned}$$

となるので、ϕの定義は同値類の代表元のとり方によらない。さらにϕはベクトル束の同型写像になる。

命題 4.1.15 ωを n 次元多様体 Mの線形接続とする。表現$\rho^{(p,q)}: GL(n,\mathbf{R}) \to GL(T^{(p,q)}\mathbf{R}^n)$ に定理 3.4.4を適用して定まるベクトル束 $T^{(p,q)}M = P\times_{\rho^{(p,q)}} T^{(p,q)}\mathbf{R}^n$ の共変微分を $\nabla^{(p,q)}$ または単に ∇ で表す。$T\in\Gamma(T^{(p,q)}M)$, $f^i\in\Gamma(T^*M)$, $v,v_j\in\Gamma(TM)$ に対して

$$\begin{aligned}&(\nabla_vT)(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q)\\ =\ &v(T(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q))\\ &-\sum_{i=1}^p T(f^1,\dots,\nabla_vf^i,\dots,f^p,v_1,\dots,v_q)-\sum_{j=1}^q T(f^1,\dots,f^p,v_1,\dots,\nabla_vv_j,\dots,v_q)\end{aligned}$$

によって ∇ は与えられる。また $S\in\Gamma(T^{(p,q)}M)$ と $T\in\Gamma(T^{(r,s)}M)$ に対して

$$\nabla(S\otimes T) = (\nabla S)\otimes T + S\otimes(\nabla T)$$

が成り立つ。

証明 まず $(p,q)=(1,0)$ の場合は Tはベクトル場とみなされ、

$$(\nabla_vT)^\sim = (D^\omega\tilde{T})(\tilde{v}) = (d\tilde{T}+\omega\tilde{T})(\tilde{v}) = (d\tilde{T})(\tilde{v})+\omega(\tilde{v})\tilde{T} = \tilde{v}\tilde{T}+\omega(\tilde{v})\tilde{T}$$

を得る。次に $(p,q)=(0,1)$ の場合は Tは 1 次微分形式であり、命題 4.1.11より

$$(\nabla_vT)^\sim = (D^\omega\tilde{T})(\tilde{v}) = (d\tilde{T})(\tilde{v})+\rho^{(0,1)}(\omega(\tilde{v}))\tilde{T} = \tilde{v}\tilde{T}-\tilde{T}\omega(\tilde{v})$$

を得る。これらを使って一般の (p,q) の場合を考える。

$$
\begin{aligned}
& ((\nabla_v T)(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q))^{\sim} \\
= \;& (\nabla_v T)^{\sim}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
= \;& ((D^{\omega}\tilde{T})\tilde{v})(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
= \;& ((d\tilde{T})(\tilde{v}) + d\rho^{(p,q)}(\omega(\tilde{v}))\tilde{T})(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
= \;& (\tilde{v}\tilde{T} + d\rho^{(p,q)}(\omega(\tilde{v}))\tilde{T})(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
& (\text{命題 } 4.1.11\text{より}) \\
= \;& \tilde{v}(\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q)) \\
& -\sum_{i=1}^{p}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{v}\tilde{f}^i,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) - \sum_{j=1}^{q}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}\tilde{v}_j,\ldots,\tilde{v}_q) \\
& +\sum_{i=1}^{p}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^i\omega(\tilde{v}),\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) - \sum_{j=1}^{q}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\omega(\tilde{v})\tilde{v}_j,\ldots,\tilde{v}_q) \\
= \;& \tilde{v}(T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q))^{\sim} - \sum_{i=1}^{p}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{v}\tilde{f}^i - \tilde{f}^i\omega(\tilde{v}),\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}\tilde{v}_j + \omega(\tilde{v})\tilde{v}_j,\ldots,\tilde{v}_q) \\
& (\text{先に示した } (p,q)=(1,0),(0,1) \text{ の場合より}) \\
= \;& (v(T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q)))^{\sim} - \sum_{i=1}^{p}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,(\nabla_v f^i)^{\sim},\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q}\tilde{T}(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^p,\tilde{v}_1,\ldots,(\nabla_v v_j)^{\sim},\ldots,\tilde{v}_q) \\
= \;& (v(T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q)))^{\sim} - \sum_{i=1}^{p}(T(f^1,\ldots,\nabla_v f^i,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q))^{\sim} \\
& -\sum_{j=1}^{q}(T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,\nabla_v v_j,\ldots,v_q))^{\sim}.
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_v T)(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q) \\
= \;& v(T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q)) \\
& -\sum_{i=1}^{p}T(f^1,\ldots,\nabla_v f^i,\ldots,f^p,v_1,\ldots,v_q) - \sum_{j=1}^{q}T(f^1,\ldots,f^p,v_1,\ldots,\nabla_v v_j,\ldots,v_q)
\end{aligned}
$$

を得る。

次に $S \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$ と $T \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ に対して

$$
(\nabla(S\otimes T))^{\sim} \;=\; (D^{\omega}(S\otimes T)^{\sim}) = (D^{\omega}(\tilde{S}\otimes\tilde{T}))
$$

$$
\begin{aligned}
&= (d(\tilde{S}\otimes\tilde{T}) + d\rho^{(p+r,q+s)}(\omega)(\tilde{S}\otimes\tilde{T})) \\
&\quad (\text{命題 } 4.1.11\text{より}) \\
&= (d\tilde{S})\otimes\tilde{T} + \tilde{S}\otimes(d\tilde{T}) + (d\rho^{(p,q)}(\omega)\tilde{S})\otimes\tilde{T} + \tilde{S}\otimes(d\rho^{(r,s)}(\omega)\tilde{T}) \\
&= (d\tilde{S} + d\rho^{(p,q)}(\omega)\tilde{S})\otimes\tilde{T} + \tilde{S}\otimes(d\tilde{T} + d\rho^{(r,s)}(\omega)\tilde{T}) \\
&= (D^{\omega}\tilde{S})\otimes\tilde{T} + \tilde{S}\otimes(D^{\omega}\tilde{T}) = (\nabla S)^{\sim}\otimes\tilde{T} + \tilde{S}\otimes(\nabla T)^{\sim} \\
&= ((\nabla S)\otimes T + S\otimes\nabla T)^{\sim}
\end{aligned}
$$

より

$$\nabla(S\otimes T) = (\nabla S)\otimes T + S\otimes(\nabla T)$$

が成り立つ。

4.2 Riemann 接続

この節では Riemann 多様体上の正規直交フレーム束を定め、その上の接続について考察する。その中でも特に Riemann 接続と呼ばれる Riemann 計量に対して一意的に存在する接続が重要になる。

定義 4.2.1 $\pi_T : TM \to M$を n 次元 Riemann 多様体 M上の接ベクトル束とする。各 $x \in M$ に対して

$$O_x(M) = \{(x;\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r) \mid \tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r \text{は } T_xM \text{の正規直交基底}\}$$

と定め、

$$O(M) = \bigcup_{x\in M} O_x(M)$$

とおくと、$O(M)$ は自然に多様体構造を持つ。自然な射影$\pi_O : O(M) \to M$に関して、これは M上の直交群 $O(n)$ を構造群とする主ファイバー束になる。$O(M)$ を Mの**正規直交フレーム束**と呼ぶ。

証明 TMがベクトル束になることから、$p \in M$に対して p の開近傍 Uと微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_T^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$$

が存在する。例 2.2.10で行った Gram-Schmidt の直交化法による方法でこの写像を通して $O_x(M)$ は $\mathbf{R}^n$の正規直交基底全体と一対一に対応するようにできる。$\mathbf{R}^n$の正規直交基底全体は直交群 $O(n)$ と一対一に対応し、これは線形 Lie 群だから、特に多様体構造を持つ。これより、

$$\Phi_U^r : \bigcup_{x\in U} O_x(M) \to U \times O(n)\,;(x;\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_r) \mapsto (x, \Phi_U(\tilde{e}_1),\ldots,\Phi_U(\tilde{e}_r))$$

が定まり、これらによって $O(M)$ に多様体構造を導入する。$\mathbf{R}^n$の標準的正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$で表す。$\mathbf{R}^n$から T_xMへの等長線形同型写像 u に対して $(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n))$ を対応させせることにより、

$$O_x(M) = \{u \mid u \text{ は } \mathbf{R}^n \text{から } T_xM \text{への等長線形同型写像 }\}$$

とみなすことができる。$\mathbf{R}^n$の等長線形自己同型写像 $a \in O(n)$ を $\mathbf{R}^n$から T_xMへの等長線形同型写像 u と合成し ua を考えることにより、$O(n)$ の $O_x(M)$ への右からの作用が定まり、さらに $O(n)$ の $O(M)$ への右からの作用が定まる。$u \in O_x(M)$ に x を対応させる写像を$\pi : O(M) \to M$で表すと、πは C^∞級写像になり、各 $x \in M$に対して$\pi^{-1}(x)$ に $O(n)$ は単純推移的に作用する。以上より射影$\pi_O : O(M) \to M$は Riemann 多様体 M上の構造群 $O(n)$ の主ファイバー束になる。

定義 4.2.2 Riemann 多様体 Mの正規直交フレーム束 $O(M)$ からフレーム束 $L(M)$ への自然な写像 $i : O(M) \to L(M)$ は、主ファイバー束の間の準同型写像になり、誘導する Mから Mへの写像は恒等写像になる。$O(M)$ 上の接続は命題 3.3.6より $L(M)$ 上の接続、すなわち線形接続を定める。このように $O(M)$ 上の接続から定まる線形接続を**計量接続**と呼ぶ。

命題 4.2.3 Riemann 多様体 (M, g) 上の線形接続が計量接続になるための必要十分条件は、その接続に関して gが平行になることである。