

理工学研究科

# 微分幾何学 I

---

## 等長変換群の微分幾何学

田崎博之

2001 年度

## L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X に関する覚書

2001年8月に通常使うOSをWindows98からVine Linux 2.1 (その後2.1.5)に変更したので、それにもなって通常使うL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>XもL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2.09からL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ に変更した。この講義ノートはL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2.09で作りはじめたが、二学期の講義内容からL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ を使って入力した。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2.09ではjreport.styに変更を加えた独自のスタイルファイルを使っていたが、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ では標準のjreport.clsをそのまま使うことにした。ただし、テキストの幅を広く使いたいのと、奇数ページと偶数ページのマージンがデフォルトのままだと逆になっているようなので、次のようにプリアンプルに書いてレイアウトを少し変えた。

```
\textwidth 16cm
\textheight 22.7cm
\oddsidemargin 0pt
\evensidemargin 0pt
```

一般にはL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2.09とL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ の出力結果は異なってしまいが、このレイアウトで出力するとほぼ同じになる。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>位相群と Lie 群</b>	<b>1</b>
1.1	位相群 . . . . .	1
1.2	古典群 . . . . .	5
1.3	Lie 群と Lie 環 . . . . .	13
1.4	コンパクト古典群 . . . . .	21
<b>第2章</b>	<b>多様体上の微分</b>	<b>37</b>
2.1	ベクトル束 . . . . .	37
2.2	ベクトル束の接続 . . . . .	40
2.3	Levi-Civita 接続 . . . . .	45
2.4	テンソル場の共変微分 . . . . .	47
2.5	テンソル場の Lie 微分 . . . . .	50
<b>第3章</b>	<b>部分多様体</b>	<b>55</b>
3.1	第二基本形式と法接続 . . . . .	55
3.2	基本方程式 . . . . .	58
3.3	高橋の定理 . . . . .	62
<b>第4章</b>	<b>等長変換群の軌道</b>	<b>65</b>
4.1	Lie 変換群 . . . . .	65
4.2	等長変換群 . . . . .	68
4.3	Riemann サブマーシオン . . . . .	73
4.4	等長変換群の断面 . . . . .	78

# 第1章 位相群とLie群

## 1.1 位相群

**定義 1.1.1** Hausdorff 空間  $G$  が群構造を持ち、写像  $G \times G \rightarrow G; (g, h) \mapsto gh^{-1}$  が連続になるとき、 $G$  を位相群と呼ぶ。各  $g \in G$  について  $L_g(x) = gx$  によって写像  $L_g : G \rightarrow G$  を定める。 $g, h \in G$  について  $L_g \circ L_h = L_{gh}$  と  $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$  が成り立ち、 $L_g : G \rightarrow G$  は位相同型写像になる。 $L_g$  を左移動と呼ぶ。同様に、各  $g \in G$  について  $R_g(x) = xg^{-1}$  によって写像  $R_g : G \rightarrow G$  を定める。 $g, h \in G$  について  $R_g \circ R_h = R_{gh}$  と  $R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$  が成り立ち、 $R_g : G \rightarrow G$  は位相同型写像になる。 $R_g$  を右移動と呼ぶ。

**補題 1.1.2** 位相群  $G$  の部分群  $H$  の閉包  $\bar{H}$  は  $G$  の部分群になる。 $H$  が正規部分群ならば、 $\bar{H}$  も正規部分群になる。

**証明** 写像  $\mu : G \times G \rightarrow G$  を  $\mu(g, h) = gh^{-1}$  ( $g, h \in G$ ) によって定める。位相群の定義より  $\mu$  は連続写像になる。 $H$  が部分群であることから  $\mu(H \times H) = H$  が成り立つ。さらに、連続写像と閉包の関係から

$$\mu(\bar{H} \times \bar{H}) = \mu(\overline{H \times H}) \subset \overline{\mu(H \times H)} = \bar{H}.$$

したがって、 $\bar{H}$  は部分群になる。

$H$  が正規部分群のときは、任意の  $g \in G$  に対して  $L_g R_g(H) = gHg^{-1} = H$  が成り立つ。 $L_g R_g : G \rightarrow G$  は連続写像になるので、連続写像と閉包の関係から

$$L_g R_g(\bar{H}) \subset \overline{L_g R_g(H)} = \bar{H}.$$

したがって、 $\bar{H}$  は正規部分群になる。

**補題 1.1.3**  $G$  を位相群とし、 $H$  を  $G$  の開部分群とすると、 $H$  は閉部分群になる。

**証明**  $\{gH \mid g \in G\}$  は  $G$  の開被覆になり、

$$H = G - \cup\{gH \mid g \in G, gH \neq H\}$$

が成り立つ。 $\cup\{gH \mid g \in G, gH \neq H\}$  は開集合だから、 $H$  は閉集合になる。

**命題 1.1.4**  $G$  を位相群とし、 $G_0$  を  $G$  の単位元を含む連結成分とする。このとき、 $G_0$  は正規部分群になる。

証明  $G_0 \times G_0$  は連結だから、補題 1.1.2 の証明中定めた写像  $\mu$  を使うと、 $\mu(G_0 \times G_0)$  も連結になり、さらに単位元を含む。よって、 $\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0$  が成り立ち、 $G_0$  は部分群になる。任意の  $g \in G$  に対して、 $L_g R_g(G_0)$  は連結になり単位元を含むので、 $L_g R_g(G_0) \subset G_0$  が成り立ち、 $G_0$  は正規部分群になる。

命題 1.1.5 (Schreier) 連結位相群  $G$  の離散正規部分群  $N$  は  $G$  の中心に含まれる。

証明  $n \in N$  に対して  $\phi_n(g) = gng^{-1}$  ( $g \in G$ ) によって連続写像  $\phi_n : G \rightarrow N$  を定める。 $G$  は連結だから  $\phi_n(G)$  も連結になり、 $\phi_n(G)$  は  $n$  を含む。 $N$  の位相は離散的だから、 $\phi_n(G) = \{n\}$  となり、 $gng^{-1} = n$  が任意の  $g \in G$  について成り立つ。したがって、 $N$  は  $G$  の中心に含まれる。

命題 1.1.6  $H$  を位相群  $G$  の閉部分群とする。商空間  $G/H$  に自然な射影  $\pi : G \rightarrow G/H$  から定まる商位相を入れる、すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を  $G/H$  の開集合系として定めると、 $G/H$  は Hausdorff 空間になり、 $\pi : G \rightarrow G/H$  は連続開写像になる。

証明 商位相の定め方から、 $\pi : G \rightarrow G/H$  は連続写像になる。開集合  $U \subset G$  に対して

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{uh \mid u \in U, h \in H\} = \bigcup_{h \in H} Uh$$

は  $G$  の開集合になるので、 $\pi(U)$  は  $G/H$  の開集合になる。すなわち、 $\pi$  は開写像になる。

$G/H$  が Hausdorff 空間になることを示すために、 $g_1 H \neq g_2 H$  となる  $g_1, g_2 \in G$  をとる。このとき、 $g_1^{-1} g_2 \notin H$  となる。 $H$  は閉部分群だから、 $G$  の単位元  $e$  の近傍  $V$  が存在し、 $V g_1^{-1} g_2 V \cap H = \emptyset$  が成り立つ。 $V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\}$  は  $e$  の近傍になり、 $W = V \cap V^{-1}$  も  $e$  の近傍になり、 $W^{-1} = W$  が成り立つ。 $W \subset V$  だから、 $W$  は  $W g_1^{-1} g_2 W \cap H = \emptyset$  を満たす。これより

$$\emptyset = g_1^{-1} g_2 W \cap W^{-1} H = g_1^{-1} g_2 W \cap W H$$

となり、 $g_2 W \cap g_1 W H = \emptyset$  を得る。したがって、 $\pi(g_2 W) \cap \pi(g_1 W) = \emptyset$  が成り立ち、 $G/H$  は Hausdorff 空間になる。

定義 1.1.7  $G$  を位相群とし、 $X$  を位相空間とする。連続写像  $\nu : G \times X \rightarrow X$  が与えられていて、

$$(1) \nu(g_1, \nu(g_2, x)) = \nu(g_1 g_2, x) \quad (g_1, g_2 \in G, x \in X),$$

$$(2) \nu(e, x) = x \quad (x \in X)$$

を満たすとき、 $G$  を  $X$  の位相変換群と呼ぶ。 $\nu$  を特に指定する必要のないときは、 $\nu(g, x)$  を単に  $gx$  と書く。各  $g \in G$  は  $x \mapsto gx$  によって  $X$  の位相同型を誘導する。この誘導する位相同型が恒等写像になる  $G$  の元が単位元のみするとき、 $G$  は  $X$  に効果的に作用するという。誘導する位相同型が不動点を持つ  $G$  の元が単位元のみするとき、 $G$  は  $X$  に自由に作用するという。 $X$  の任意の二点  $x, y$  に対して、 $y = gx$  となる  $g \in G$  が存在するとき、 $G$  は  $X$  に推移的に作用するという。 $x \in X$  に対して

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

を  $G$  の  $x$  における固定化群という。

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

を  $x$  の  $G$  による軌道と呼ぶ。

**補題 1.1.8**  $G$  を Hausdorff 空間  $X$  の位相変換群とする。任意の  $x \in X$  に対して、 $G$  の  $x$  における固定化群  $G_x$  は  $G$  の閉部分群になる。

**証明** 任意に  $g, h \in G_x$  をとる。 $gx = x$  より  $x = g^{-1}x$  となり  $g^{-1} \in G_x$  が成り立つ。さらに、 $ghx = gx = x$  となるので  $gh \in G_x$  が成り立つ。以上より  $G_x$  は  $G$  の部分群になる。

写像  $\pi : G \rightarrow X$  を  $\pi(g) = gx$  ( $g \in G$ ) によって定めると、 $\pi$  は連続写像になる。 $X$  は Hausdorff 空間だから、一点  $\{x\}$  は閉集合になる。したがって、 $G_x = \pi^{-1}(x)$  は閉集合になる。

**定理 1.1.9** 可算開基を持つ局所コンパクト位相群  $G$  が局所コンパクト Hausdorff 空間  $X$  に推移的に作用していると仮定する。このとき、任意の  $x \in X$  に対して写像

$$\pi : G \rightarrow X ; g \mapsto gx$$

は写像  $\bar{\pi} : G/G_x \rightarrow X$  を誘導し、 $G/G_x$  の商位相に関して、 $\bar{\pi}$  は位相同型になる。

この定理を証明するためには若干の準備が必要になるので、ここでは定理の証明は省略する。その代わりに仮定を強くした次の命題を示しておく。

**命題 1.1.10** コンパクト位相群  $G$  が Hausdorff 空間  $X$  に推移的に作用していると仮定する。このとき、任意の  $x \in X$  に対して写像

$$\pi : G \rightarrow X ; g \mapsto gx$$

は写像  $\bar{\pi} : G/G_x \rightarrow X$  を誘導し、 $G/G_x$  の商位相に関して、 $\bar{\pi}$  は位相同型になる。

証明  $G$  が  $X$  に推移的に作用しているので、写像  $\pi : G \rightarrow X$  は全射になる。 $g_1G_x = g_2G_x$  と仮定すると、 $g_1^{-1}g_2 \in G_x$  となり、 $g_1^{-1}g_2x = x$ 、すなわち、 $\pi(g_1) = g_1x = g_2x = \pi(g_2)$  が成り立つ。これより、 $\pi : G \rightarrow X$  は写像  $\bar{\pi} : G/G_x \rightarrow X$  を誘導する。 $\pi$  が全射だから、 $\bar{\pi}$  も全射になる。次に  $\pi(g_1) = \pi(g_2)$  と仮定すると、 $g_1x = g_2x$  だから  $g_1^{-1}g_2 \in G_x$  となり、 $g_1G_x = g_2G_x$  が成り立つ。すなわち、 $\bar{\pi} : G/G_x \rightarrow X$  は全単射になる。商位相の定め方から、 $\bar{\pi}$  は連続写像になる。ここまでの議論は定理 1.1.9 の仮定のもとで成立する。

$G$  がコンパクトだから、その商空間  $G/G_x$  もコンパクトになる。 $X$  は Hausdorff 空間だから、連続全単射  $\bar{\pi} : G/G_x \rightarrow X$  は位相同型になる。

位相空間  $X$  上で定義された実数値関数  $f$  に対して

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

を  $f$  の台と呼ぶ。 $X$  上のコンパクトな台を持つ実数値連続関数全体がつくるベクトル空間を  $\mathcal{K}(X)$  で表す。 $G$  を位相群とし、

$$L_g^* f(x) = f(L_g^{-1}x) = f(g^{-1}x) \quad (g \in G, f \in \mathcal{K}(G), x \in G)$$

とすると  $L_g^* f \in \mathcal{K}(G)$  が成り立つ。

定理 1.1.11  $G$  をコンパクト位相群とすると次の条件を満たす線形写像  $\mu : \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathbf{R}$  が一意的に存在する。

$$(1) \mu(L_g^* f) = \mu(f) \quad (g \in G, f \in \mathcal{K}(G)),$$

$$(2) f \in \mathcal{K}(G), f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0,$$

$$(3) \mu(1) = 1.$$

さらに  $\tau(x) = x^{-1}$  ( $x \in G$ ) とおくと、 $\mu$  は次の性質を持つ。

$$(4) \mu(f \circ R_g) = \mu(f) \quad (g \in G, f \in \mathcal{K}(G)),$$

$$(5) \mu(f \circ \tau) = \mu(f) \quad (f \in \mathcal{K}(G)),$$

$$(6) f \in \mathcal{K}(G), f \geq 0, f \neq 0 \Rightarrow \mu(f) > 0,$$

$$(7) |\mu(f)| \leq \mu(|f|) \quad (f \in \mathcal{K}(G)).$$

この定理の証明については、位相群の教科書等を参照せよ。

定義 1.1.12 定理 1.1.11 の線形写像  $\mu : \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathbf{R}$  を  $G$  の Haar 積分と呼ぶ。

$$\mu(f) = \int_G f d\mu = \int_G f(x) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{K}(G))$$

という表し方をすることもある。

例 1.1.13 絶対値 1 の複素数全体のつくる位相群  $U(1)$  の  $n$  個の積を  $T^n$  で表すと  $T^n$  はコンパクト位相群になる。

$$\mu(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int f(e^{\sqrt{-1}t_1}, \dots, e^{\sqrt{-1}t_n}) dt_1 \cdots dt_n \quad (f \in \mathcal{K}(T^n))$$

とおくと  $\mu$  は  $T^n$  上の Haar 積分になる。

$U(1)$  を一般化した  $n$  次ユニタリ行列全体のつくるユニタリ群  $U(n)$  については、次の節で扱う。

## 1.2 古典群

古典群を定義する際に必要になる実数体  $\mathbf{R}$  と複素数体  $\mathbf{C}$  はあらためて説明はしないが、四元数体  $\mathbf{H}$  について基本的な事項を述べておく。

定義 1.2.1 実数  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  によって

$$x = a1 + bi + cj + dk$$

によって表される数  $x$  を四元数と呼び、1 が積の単位元になり、

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \end{aligned}$$

と分配法則を満たすように積を定める。四元数全体を  $\mathbf{H}$  で表し、 $\mathbf{H}$  を四元数体と呼ぶ。実際、 $\mathbf{H}$  は非可換体になる。四元数の実部を次の等式で定める。

$$\operatorname{Re}(a1 + bi + cj + dk) = a.$$

また、四元数の共役元を次の等式で定める。

$$\overline{a1 + bi + cj + dk} = a1 - bi - cj - dk.$$

四元数  $x$  の絶対値  $|x|$  を  $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$  によって定める。

上の四元数の定義から、次の命題は容易に証明できる。

命題 1.2.2 四元数  $x, y$  に対して、次の等式や不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(xy) &= \operatorname{Re}(yx), \\ \overline{x+y} &= \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}, \\ |x+y| &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$



**定義 1.2.3**  $K$  で  $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  のいずれか一つの体を表す。 $K$  の元を成分に持つ  $(m, n)$  行列全体を  $M(m, n; K)$  で表す。特に  $m = n$  のとき、つまり  $n$  次正方行列全体は  $M(n, K)$  で表す。 $A \in M(m, n; K)$  に対して、 $A$  の転置行列を  ${}^tA$  で表し、 $A$  の各成分を共役元にした行列を  $\bar{A}$  で表す。さらに、 $A^* = {}^t\bar{A}$  と表す。

**命題 1.2.4**  $A, B \in M(n, K)$  に対して  $(AB)^* = B^*A^*$  が成り立つ。 $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のときは  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  が成り立つ。

この命題も定義から容易に証明できる。

**定義 1.2.5** 実一般線形群  $GL(n, \mathbf{R})$ , 複素一般線形群  $GL(n, \mathbf{C})$ , 四元数一般線形群  $GL(n, \mathbf{H})$ , 実特殊線形群  $SL(n, \mathbf{R})$ , 複素特殊線形群  $SL(n, \mathbf{C})$ , 直交群  $O(n)$ , ユニタリ群  $U(n)$ , シンプレクティック群  $Sp(n)$ , 回転群  $SO(n)$ , 特殊ユニタリ群  $SU(n)$  を次の等式で定める。

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbf{R}) &= \{g \in M(n, \mathbf{R}) \mid g \text{ は正則行列}\}, \\ GL(n, \mathbf{C}) &= \{g \in M(n, \mathbf{C}) \mid g \text{ は正則行列}\}, \\ GL(n, \mathbf{H}) &= \{g \in M(n, \mathbf{H}) \mid g \text{ は正則行列}\}, \\ SL(n, \mathbf{R}) &= \{g \in M(n, \mathbf{R}) \mid \det g = 1\}, \\ SL(n, \mathbf{C}) &= \{g \in M(n, \mathbf{C}) \mid \det g = 1\}, \\ O(n) &= \{g \in M(n, \mathbf{R}) \mid g {}^t g = 1\}, \\ U(n) &= \{g \in M(n, \mathbf{C}) \mid g g^* = 1\}, \\ Sp(n) &= \{g \in M(n, \mathbf{H}) \mid g g^* = 1\}, \\ SO(n) &= \{g \in O(n) \mid \det g = 1\}, \\ SU(n) &= \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}. \end{aligned}$$

これらの群を総称して古典群と呼ぶ。

上で定めた古典群が実際に行列の積に関して群になることは、行列の積の定義、命題 1.2.4、行列式の性質等を使って証明することができる。

**注意 1.2.6**  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合は

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbf{R}) &= \{g \in M(n, \mathbf{R}) \mid \det g \neq 0\}, \\ GL(n, \mathbf{C}) &= \{g \in M(n, \mathbf{C}) \mid \det g \neq 0\} \end{aligned}$$

によって一般線形群  $GL(n, \mathbf{R}), GL(n, \mathbf{C})$  を定義できるが、 $K = \mathbf{H}$  の場合は有効な行列式  $\det$  を定義できないので、このように定義できない。 $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合、行列式は

$$\det(g_{i,j}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) g_{1,\sigma(1)} g_{2,\sigma(2)} \cdots g_{n,\sigma(n)}$$

によって定義できる。この定義式から、行列式が行ベクトルや列ベクトルに関して多重線形写像になっていることは体の積の可換性から従う。ところが、四元数体の積は可換ではないので、上のように行列式を定義しても、行ベクトルや列ベクトルに関して多重線形写像にならない。さらに、 $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合の行列式は

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (A, B \in M(n, K))$$

が成り立つことから、 $\det GL(n, K) \rightarrow K - \{0\}$  は群の準同型写像になる。特に、その核は正規部分群になる。ところが、 $GL(n, \mathbf{H})$  は単純 Lie 群になることが知られており、非自明な正規 Lie 部分群は存在しないので、 $GL(n, \mathbf{H})$  から  $\mathbf{H} - \{0\}$  への非自明な準同型写像も存在しない。

例 1.2.7 定義より

$$SO(1) = \{1\}, \quad SU(1) = \{1\}.$$

絶対値の定め方より、

$$\begin{aligned} O(1) &= \{g \in \mathbf{R} \mid |g| = 1\} = S^0, & U(1) &= \{g \in \mathbf{C} \mid |g| = 1\} = S^1, \\ Sp(1) &= \{g \in \mathbf{H} \mid |g| = 1\} = S^3. \end{aligned}$$

ここで、 $S^n$  は  $n$  次元単位球面である。 $O(1)$  と  $U(1)$  は可換になるが、 $Sp(1)$  は非可換である。定義より、

$$SL(1, \mathbf{R}) = \{1\}, \quad SL(1, \mathbf{C}) = \{1\}.$$

定義より、

$$GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}, \quad GL(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{0\}, \quad GL(1, \mathbf{H}) = \mathbf{H} - \{0\}.$$

正の実数全体のつくる乗法群を  $\mathbf{R}_+$  で表し、 $O(n), U(n), Sp(n)$  を  $U(n, K)$  で表すことにすると、

$$\mathbf{K} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}_+ \times U(1, K); g \mapsto (|g|, g/|g|)$$

は位相群の同型写像になる。したがって、

$$GL(1, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}_+ \times O(1), \quad GL(1, \mathbf{C}) \cong \mathbf{R}_+ \times U(1), \quad GL(1, \mathbf{H}) \cong \mathbf{R}_+ \times Sp(1).$$

上で得た結果から

$$GL(1, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}_+ \times S^0, \quad GL(1, \mathbf{C}) \cong \mathbf{R}_+ \times S^1, \quad GL(1, \mathbf{H}) \cong \mathbf{R}_+ \times S^3.$$

以上より、

$$SO(1), SU(1), U(1), Sp(1), SL(1, \mathbf{R}), SL(1, \mathbf{C}), GL(1, \mathbf{C}), GL(1, \mathbf{H})$$

は連結になり、 $O(1), GL(1, \mathbf{R})$  の単位元の連結成分はそれぞれ

$$O(1)_0 = \{1\}, \quad GL(1, \mathbf{R})_0 = \mathbf{R}_+$$

になる。

定義と若干の計算から次の等式がわかる。

$$SO(2) = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right] \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

さらに

$$SO(2) \rightarrow U(1); \left[ \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right] \mapsto e^{i\theta}$$

は位相群の同型写像になる。したがって、

$$SO(2) \cong U(1) = S^1.$$

よって、 $SO(2)$  は可換かつ連結になる。

定義と若干の計算から次の等式がわかる。

$$SU(2) = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{array} \right] \mid a, b \in \mathbf{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

さらに

$$SU(2) \rightarrow Sp(1); \left[ \begin{array}{cc} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{array} \right] \mapsto a + jb$$

は位相群の同型写像になる。したがって、

$$SU(2) \cong Sp(1) = S^3.$$

特に  $SU(2)$  は連結になる。

$SO(2)$  の具体的表示を求める場合の計算と同様にして、

$$\begin{aligned} O(2) &= \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{array} \right] \mid \theta \in \mathbf{R} \right\} \\ &= SO(2) \cup SO(2) \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって、 $O(2)$  は連結成分を二つ持ち、単位元の連結成分は  $O(2)_0 = SO(2)$  となる。

$$U(1) \times SU(2) \rightarrow U(2); (z, g) \mapsto zg$$

は全射準同型写像になる。核は  $\{(1, I_2), (-1, -I_2)\}$  になり、この準同型写像は二重被覆写像になることがわかる。しかし、 $U(1) \times SU(2)$  と  $U(2)$  は位相群として同型にはならない。なぜならば、 $U(1) \times SU(2)$  と  $U(2)$  の中心はそれぞれ

$$U(1) \times \{I_2\} \cup U(1) \times \{-I_2\}, \quad \{zI_2 \mid z \in U(1)\}$$

になり前者は連結ではないが、後者は連結になり同型にならないからである。ところが、

$$U(1) \times SU(2) \rightarrow U(2); (z, g) \mapsto \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g$$

は位相同型写像になり、 $U(1) \times SU(2)$  と  $U(2)$  は位相空間として同型になる。もちろん、上の写像は群の同型にはなっていない。

**定義 1.2.8**  $K$  で  $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  のいずれか一つの体を表す。  $X \in M(n, K)$  に対して

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = I_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \dots$$

によって  $\exp X$  を定める。この  $X$  に  $\exp X$  を対応させる写像を指数写像と呼ぶ。

**命題 1.2.9**  $X, Y \in M(n, K)$  が  $XY = YX$  を満たすならば、

$$\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$$

が成り立つ。

積の可換性から、実数や複素数の指数関数の場合と同様に証明できる。

**命題 1.2.10**  $X \in M(n, K)$  と  $T \in GL(n, K)$  に対して以下の等式が成り立つ。

- (1)  $\exp X \in GL(n, K)$  かつ  $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$  である。
- (2)  $T(\exp X)T^{-1} = \exp(TXT^{-1})$ .
- (3)  $(\exp X)^* = \exp(X^*)$ .
- (4)  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合、 ${}^t(\exp X) = \exp {}^tX$ .
- (5)  $K = \mathbf{C}$  の場合、 $X$  の固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とすると、 $\exp X$  の固有値は  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  である。
- (6)  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合、 $\det(\exp X) = e^{\operatorname{tr} X}$ 、さらに  $K = \mathbf{R}$  の場合、 $\det(\exp X) > 0$ .
- (7)  $\frac{d}{dt} \exp(tX) = X \exp(tX) = \exp(tX) X$  である。さらに、 $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のとき、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det \exp(tX) = \operatorname{tr} X.$$

証明 (1)  $X$  と  $-X$  は可換だから命題 1.2.9 より

$$\exp X \exp(-X) = \exp(X - X) = \exp 0 = I_n.$$

したがって、 $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$  が成り立ち、 $\exp X \in GL(n, K)$  を得る。

(2)  $TX^kT^{-1} = (TXT^{-1})^k$  より、

$$\begin{aligned} T(\exp X)T^{-1} &= T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right) T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} TX^kT^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (TXT^{-1})^k \\ &= \exp(TXT^{-1}). \end{aligned}$$

(3) 命題 1.2.4 より  $(X^k)^* = (X^*)^k$  が成り立つ。したがって、

$$(\exp X)^* = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^k)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^*)^k = \exp(X^*).$$

(4) 命題 1.2.4 より  ${}^t(X^k) = ({}^tX)^k$  が成り立つ。したがって、

$${}^t(\exp X) = {}^t \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} {}^t(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ({}^tX)^k = \exp({}^tX).$$

(5) 次の例 1.2.11 の計算からわかる。

(6) (5) の設定のもとで、

$$\det(\exp X) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr} X}.$$

さらに  $K = \mathbf{R}$  の場合は、 $\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X} > 0$  が成り立つ。

(7) 指数写像の定義を項別微分すると

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} (tX)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} X^k = X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tX)^k = X \exp(tX).$$

$\frac{d}{dt} \exp(tX) = \exp(tX)X$  も同様にわかる。さらに、 $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のとき、(6) より

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det \exp(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{\operatorname{tr} tX} = \operatorname{tr} X.$$

例 1.2.11 複素行列の指数関数の射影分解による計算法について述べる。 $n$  次複素正方行列  $A$  の固有多項式を  $\gamma_A(t)$  で表す。 $\gamma_A(t)$  を因数分解し  $\gamma_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \cdots (t - \lambda_k)^{p_k}$  とする。次に部分分数展開:

$$\frac{1}{\gamma_A(t)} = \frac{h_1(t)}{(t - \lambda_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{h_k(t)}{(t - \lambda_k)^{p_k}}$$

を行う。

$$1 = h_1(t) \frac{\gamma_A(t)}{(t - \lambda_1)^{p_1}} + \dots + h_k(t) \frac{\gamma_A(t)}{(t - \lambda_k)^{p_k}}$$

となり、 $\gamma_A(t)$  は  $(t - \lambda_i)^{p_i}$  を因子に持っているので  $\frac{\gamma_A(t)}{(t - \lambda_i)^{p_i}}$  は  $t$  の多項式である。そこ

で  $\pi_i(t) = h_i(t) \frac{\gamma_A(t)}{(t - \lambda_i)^{p_i}}$  とおくと  $\pi_i(t)$  も  $t$  の多項式になり

$$1 = \pi_1(t) + \dots + \pi_k(t), \quad (t - \lambda_i)^{p_i} \pi_i(t) = h_i(t) \gamma_A(t)$$

が成り立つ。  $P_i = \pi_i(A)$  とおくと

$$I_n = P_1 + \dots + P_k.$$

これを射影分解と呼ぶ。 Cayley-Hamilton の定理より

$$(A - \lambda_i I_n)^{p_i} P_i = h_i(A) \gamma_A(A) = 0.$$

以上の結果を使うと

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{i=1}^k e^{tA} P_i = \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i I_n + t(A - \lambda_i I_n)} P_i \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} e^{t(A - \lambda_i I_n)} P_i = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i I_n)^j P_i \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i I_n)^j P_i. \end{aligned}$$

**命題 1.2.12**  $X \in M(n, \mathbf{R})$  が  ${}^t X = -X$  を満たす (交代行列) ならば、  $\exp X \in SO(n)$  が成り立つ。逆に任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in O(n)$  ならば、  $\exp(tX) \in SO(n)$  となり  ${}^t X = -X$  が成り立つ。

**証明** 命題 1.2.10 の (4) と (1) より、

$${}^t(\exp X) = \exp({}^t X) = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}.$$

よって、  $\exp X \in O(n)$  が成り立つ。  $O(n)$  の元の行列式は  $\pm 1$  であって、命題 1.2.10 の (6) より  $\det \exp X > 0$  だから  $\det \exp X = 1$  となり、  $\exp X \in SO(n)$  を得る。

$\det \exp X = 1$  は次のようにして得ることもできる。命題 1.2.10 の (6) より

$$\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X} = e^0 = 1.$$

任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in O(n)$  ならば、  $t \mapsto \det \exp(tX)$  は連続であって  $\pm 1$  を値としてとるので  $\det \exp(tX) = 1$  となり、  $\exp(tX) \in SO(n)$  が成り立つ。さらに、  ${}^t(\exp(tX)) = \exp(-tX)$  の両辺を  $t = 0$  で微分すると、命題 1.2.10 の (4) と (7) より  ${}^t X = -X$  を得る。

**命題 1.2.13**  $X \in M(n, \mathbf{C})$  が  $X^* = -X$  を満たす (交代 Hermite 行列) ならば、 $\exp X \in U(n)$  が成り立つ。さらに  $\operatorname{tr} X = 0$  ならば  $\exp X \in SU(n)$  が成り立つ。逆に任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in U(n)$  ならば、 $X^* = -X$  が成り立つ。さらに任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in SU(n)$  ならば、 $X^* = -X$  かつ  $\operatorname{tr} X = 0$  が成り立つ。

**証明** 命題 1.2.10 の (4) と (1) より、

$$(\exp X)^* = \exp(X^*) = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}.$$

よって、 $\exp X \in U(n)$  が成り立つ。 $\operatorname{tr} X = 0$  の場合は、命題 1.2.10 の (6) より

$$\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X} = e^0 = 1$$

となり、 $\exp X \in SU(n)$  を得る。

任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in U(n)$  ならば、 $(\exp(tX))^* = \exp(-tX)$  の両辺を  $t = 0$  で微分すると、命題 1.2.10 の (3) と (7) より  $X^* = -X$  を得る。さらに任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in SU(n)$  ならば、 $\det \exp(tX) = 1$  の両辺を  $t = 0$  で微分すると、命題 1.2.10 の (7) より  $\operatorname{tr} X = 0$  が成り立つ。

**命題 1.2.14**  $X \in M(n, \mathbf{H})$  が  $X^* = -X$  を満たすならば、 $\exp X \in Sp(n)$  が成り立つ。逆に任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in Sp(n)$  ならば、 $X^* = -X$  が成り立つ。

**証明** 命題 1.2.10 の (4) と (1) より、

$$(\exp X)^* = \exp(X^*) = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}.$$

よって、 $\exp X \in Sp(n)$  が成り立つ。

任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in Sp(n)$  ならば、 $(\exp(tX))^* = \exp(-tX)$  の両辺を  $t = 0$  で微分すると、命題 1.2.10 の (3) と (7) より  $X^* = -X$  を得る。

**命題 1.2.15**  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  の場合、 $X \in M(n, K)$  が  $\operatorname{tr} X = 0$  を満たすならば、 $\exp X \in SL(n, K)$  が成り立つ。逆に任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in SL(n, K)$  ならば、 $\operatorname{tr} X = 0$  が成り立つ。

**証明** 命題 1.2.10 の (6) より

$$\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X} = e^0 = 1$$

となり、 $\exp X \in SL(n, K)$  を得る。

任意の  $t \in \mathbf{R}$  について  $\exp(tX) \in SL(n, K)$  ならば、 $\det \exp(tX) = 1$  の両辺を  $t = 0$  で微分すると、命題 1.2.10 の (7) より  $\operatorname{tr} X = 0$  が成り立つ。

## 1.3 Lie 群と Lie 環

定義 1.3.1 多様体  $G$  が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \rightarrow G; (x, y) \mapsto xy, \quad G \rightarrow G; x \mapsto x^{-1}$$

が  $C^\infty$  級写像になるとき、 $G$  を Lie 群と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は  $e$  で表す。)

例 1.3.2  $V$  を有限次元実ベクトル空間とすると、 $V$  の正則線形変換の全体  $GL(V)$  は Lie 群になる。 $GL(\mathbb{R}^n)$  は  $GL(n, \mathbb{R})$  に他ならない。 $GL(V)$  も実一般線形群と呼ぶ。

定義 1.3.3 Lie 群  $G$  の元  $g$  に対して左移動と右移動  $L_g, R_g$  は微分同型写像になる。 $G$  上のベクトル場  $X$  が、 $G$  の任意の元  $g$  に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき左不変ベクトル場と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg^{-1}} \quad (x \in G)$$

を満たすとき右不変ベクトル場と呼ばれる。

定義 1.3.4 実ベクトル空間  $\mathfrak{g}$  に双線形写像  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  があり、すべての元  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、 $\mathfrak{g}$  を Lie 環と呼ぶ。Lie 環  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間  $\mathfrak{h}$  が、演算  $[\cdot, \cdot]$  に関して閉じているとき、 $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Lie 部分環と呼ぶ。

例 1.3.5 多様体  $M$  上のベクトル場の全体  $\mathfrak{X}(M)$  は Lie ブラケット  $[\cdot, \cdot]$  に関して Lie 環になる。

例 1.3.6  $V$  をベクトル空間とする。 $\text{End}(V)$  の元  $X, Y$  に対して  $[X, Y] = XY - YX$  と定めると  $\text{End}(V)$  は Lie 環になる。この Lie 環を  $\mathfrak{gl}(V)$  で表す。 $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$  は  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  と書く。

定理 1.3.7  $G$  を Lie 群とし、 $G$  の左不変ベクトル場の全体を  $\mathfrak{g}$  で表す。すると、 $\mathfrak{g}$  は Lie 環  $\mathfrak{X}(G)$  の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に  $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$  が成り立つ。

定義 1.3.8 Lie 群  $G$  の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環  $\mathfrak{g}$  を Lie 群  $G$  の Lie 環と呼ぶ。



**定義 1.3.9** Lie群の間の  $C^\infty$  級写像  $f: G \rightarrow H$  が群の準同型写像でもあるとき、 $f$  を Lie群の準同型写像と呼ぶ。さらに  $f$  が逆写像  $f^{-1}$  を持ち、 $f^{-1}$  も Lie群の準同型写像であるとき、 $f$  を Lie群の同型写像と呼び Lie群  $G$  と  $H$  は同型であるという。Lie環の間の線形写像  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、 $f$  を Lie環の準同型写像と呼ぶ。さらに  $f$  が逆写像  $f^{-1}$  を持つとき、 $f$  を Lie環の同型写像と呼び、Lie環  $\mathfrak{g}$  と  $\mathfrak{h}$  は同型であるという。

**定義 1.3.10** 実数全体  $\mathbf{R}$  を加法に関して Lie群とみなしたとき、 $\mathbf{R}$  から Lie群  $G$  への Lie群の準同型写像を  $G$  の一径数部分群と呼ぶ。

**定理 1.3.11**  $G$  を Lie群とし、その Lie環を  $\mathfrak{g}$  とする。Lie環  $\mathfrak{g}$  の元全体と  $G$  の一径数部分群の全体は次の対応で 1対1に対応する。 $X \in \mathfrak{g}$  に対して  $X$  の積分曲線  $c: \mathbf{R} \rightarrow G$  で  $c(0) = e$  となるものがただ1つ存在し、 $c$  は  $G$  の一径数部分群になり、 $X \in \mathfrak{g}$  にこの  $c$  を対応させる。逆に  $G$  の一径数部分群  $c$  に対して、定理 1.3.7 によって  $\frac{dc}{dt}(0)$  に対応する  $\mathfrak{g}$  の元  $X$  を  $c$  に対応させる。

**例 1.3.12**  $GL(n, \mathbf{R})$  の一径数部分群を求めてみよう。 $GL(n, \mathbf{R})$  の接ベクトルを  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  の元と同一視する。 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$  に対応する  $GL(n, \mathbf{R})$  上の左不変ベクトル場を  $\tilde{X}$  で表すと、 $\tilde{X}_g = gX$  ( $g \in GL(n, \mathbf{R})$ ) となる。したがって、 $X$  に対応する  $GL(n, \mathbf{R})$  の一径数部分群  $c$  は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。行列の指数関数:  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  を使うと  $c(t) = e^{tX}$  となる。

**定義 1.3.13**  $G$  を Lie群とし、その Lie環を  $\mathfrak{g}$  とする。 $X \in \mathfrak{g}$  に対して定理 1.3.11 で存在を示した  $X$  の積分曲線  $c: \mathbf{R} \rightarrow G$  で  $c(0) = e$  となるものをとり、 $\exp X = c(1)$  とおくことによって写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  を定義する。 $\exp$  を Lie群  $G$  の指数写像と呼ぶ。

**例 1.3.14** 例 1.3.12 で示したように  $GL(n, \mathbf{R})$  の Lie環  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  の元  $X$  に対応する一径数部分群は  $e^{tX}$  になるので、 $GL(n, \mathbf{R})$  の指数写像は行列の指数関数に一致する。

**命題 1.3.15**  $G$  を Lie群とし、その Lie環を  $\mathfrak{g}$  とする。 $X \in \mathfrak{g}$  に対して定理 1.3.11 の対応で対応する  $G$  の一径数部分群は  $t \mapsto \exp tX$  になる。

**命題 1.3.16**  $G$  を Lie群とし、その Lie環を  $\mathfrak{g}$  とすると、 $G$  の指数写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  は  $C^\infty$  級写像である。

**定理 1.3.17** Lie群  $G$  とその Lie環  $\mathfrak{g}$  に対して、 $G$  の指数写像  $\exp$  は  $\mathfrak{g}$  における 0 のある開近傍と  $G$  における  $e$  のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

命題 1.3.18  $G$  を Lie 群とし、その Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とする。  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $f \in C^\infty(G)$ ,  $g \in G$  に対して

$$(Xf)(g) = \left. \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right|_{t=0}$$

$$([X, Y]f)(g) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1}) \right|_{s=t=0}$$

が成り立つ。

系 1.3.19 Lie 群  $G$  が可換ならば  $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の任意の元  $X, Y$  に対して  $[X, Y] = 0$  となる。

定義 1.3.20 Lie 環  $\mathfrak{g}$  の任意の元  $X, Y$  に対して  $[X, Y] = 0$  となるとき、 $\mathfrak{g}$  は可換であるという。この用語を使うと系 1.3.19 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

命題 1.3.21 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。 Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 1.3.22  $G, H$  を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とおく。  $f : G \rightarrow H$  を Lie 群の準同型写像とする。定理 1.3.7 の線形同型写像を  $\alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$ ,  $\alpha_H : \mathfrak{h} \rightarrow T_e(H)$  とすると、  $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  は Lie 環の準同型写像になる。

定義 1.3.23 Lie 群の準同型写像  $f : G \rightarrow H$  に対して、  $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  を  $f$  の微分と呼ぶ。この用語を使うと定理 1.3.22 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 1.3.24  $A, B, C$  を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  とおく。  $A$  の恒等写像の微分は  $\mathfrak{a}$  の恒等写像である。また  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  を Lie 群の準同型写像とすると、  $d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$  が成り立つ。

系 1.3.25  $A, B$  を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  とおく。  $f : A \rightarrow B$  を Lie 群の同型写像とすると、  $df : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$  は Lie 環の同型写像になる。

命題 1.3.26  $G, H$  を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とおく。  $f : G \rightarrow H$  を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の  $\exp$  は  $G$  の指数写像で右辺の  $\exp$  は  $H$  の指数写像である。

定義 1.3.27 Lie 群  $G$  と有限次元ベクトル空間  $V$  に対して、  $G$  から  $GL(V)$  への Lie 群の準同型写像を  $G$  の表現と呼ぶ。 Lie 環  $\mathfrak{g}$  とベクトル空間  $V$  に対して、  $\mathfrak{g}$  から  $\mathfrak{gl}(V)$  への Lie 環の準同型写像を  $\mathfrak{g}$  の表現と呼ぶ。

**命題 1.3.28** Lie 環  $\mathfrak{g}$  の元  $X$  に対して  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$  として  $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  を定めると  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は Lie 環の表現になる。

**定義 1.3.29** Lie 環  $\mathfrak{g}$  に対して定まる表現  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  を  $\mathfrak{g}$  の随伴表現と呼ぶ。

**定理 1.3.30** Lie 群  $G$  の元  $g$  に対して  $\text{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$  とおく。  $G$  の Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とすると、  $\text{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$  となり  $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X)$  ( $g \in G, X \in \mathfrak{g}$ ) が成り立つ。さらに、  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  は Lie 群の表現になり  $\text{Ad}$  の微分は  $\mathfrak{g}$  の随伴表現に一致する。

**定義 1.3.31** Lie 群  $G$  に対して定まる表現  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の随伴表現と呼ぶ。

**例 1.3.32** 有限次元ベクトル空間  $V$  に対する一般線形群  $GL(V)$  の随伴表現を求めてみよう。例 1.3.14 より、  $GL(V)$  の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。  $g \in GL(V)$ ,  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  に対して

$$\text{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt}(g e^{tX} g^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{tgXg^{-1}} \right|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

**定義 1.3.33** Lie 群  $H$  が Lie 群  $G$  の Lie 部分群であるとは、  $H$  が  $G$  の部分多様体であり同時に  $H$  が  $G$  の部分群であることをいう。

**補題 1.3.34**  $G$  を Lie 群とし、その Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とする。  $G$  の Lie 部分群  $H$  の包含写像を  $\iota : H \rightarrow G$  とすると  $d\iota : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  は Lie 環の同型写像になる。

**定義 1.3.35** 補題 1.3.34 において、  $d\iota(\mathfrak{h})$  を Lie 部分群  $H$  に対応する Lie 部分環と呼ぶ。今後、  $d\iota$  によって  $\mathfrak{h}$  と  $d\iota(\mathfrak{h})$  を同一視する。

**命題 1.3.36**  $G$  を Lie 群とし、  $H$  を  $G$  の Lie 部分群とする。  $G, H$  の Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とし、指数写像を  $\exp_G, \exp_H$  とする。このとき  $X \in \mathfrak{h}$  に対して  $\exp_G(X) = \exp_H(X)$  が成り立つ。

**定理 1.3.37**  $G$  を Lie 群とし  $H$  を  $G$  の部分群とする。  $H$  が  $G$  の閉集合ならば、  $H$  は相対位相に関して Lie 部分群になる。

**定義 1.3.38** 定理 1.3.37 より、 Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を閉 Lie 部分群と呼ぶことにする。

**命題 1.3.39** Lie 群  $G$  とその Lie 部分群  $H$  の Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H(t \in \mathbf{R}), t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続}\}$$

が成り立つ。  $H$  が閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H(t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

系 1.3.40 Lie 群  $G$  の閉 Lie 部分群  $H, K$  の Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$  とおくと  $H \cap K$  は  $G$  の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$  である。

定義 1.3.41 一般線形群の閉 Lie 部分群を線形 Lie 群と呼ぶ。

定理 1.3.42  $GL(n, \mathbf{R})$  は  $n$  次正方形行列全体  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  の開集合だから、接ベクトル空間  $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$  を  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  と同一視できる。Lie 群  $GL(n, \mathbf{R})$  の Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とし、 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  に対して  $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$  を  $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$  ( $g \in GL(n, \mathbf{R})$ ) によって定めると、写像

$$\tilde{\cdot}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

命題 1.3.43  $V$  を  $n$  次元ベクトル空間とすると、Lie 群  $GL(V)$  と  $GL(n, \mathbf{R})$  は同型になり、Lie 環  $\mathfrak{gl}(V)$  と  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  は同型になる。

注意 1.3.44 定理 1.3.42 の Lie 環の同型写像  $\tilde{\cdot}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathfrak{g}$  によって Lie 環  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  と Lie 群  $GL(n, \mathbf{R})$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  を同一視し、今後は  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$  を  $GL(n, \mathbf{R})$  の Lie 環とみなすことにする。命題 1.3.43 の同型より、有限次元ベクトル空間  $V$  に対しても  $\mathfrak{gl}(V)$  を  $GL(V)$  の Lie 環とみなすことにする。

例 1.3.45 定義 1.2.5 で定めた古典群は線形 Lie 群になることを示しておく。さらにそれらの Lie 環も求めておく。

実行列から作られる  $SL(n, \mathbf{R}), O(n), SO(n)$  は  $GL(n, \mathbf{R})$  の閉 Lie 部分群になるので、線形 Lie 群になる。

$M(n, \mathbf{C})$  の元  $A$  に対して

$$A = B + \sqrt{-1}C \quad (B, C \in M(n, \mathbf{R}))$$

と分解し、 $A$  に

$$\iota(A) = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbf{R})$$

を対応させることにより、 $M(n, \mathbf{C})$  から  $M(2n, \mathbf{R})$  への単射線形写像  $\iota$  が定まる。

$$A_p = B_p + \sqrt{-1}C_p \quad (p = 1, 2, B_p, C_p \in M(n, \mathbf{R}))$$

に対して

$$A_1 A_2 = (B_1 + \sqrt{-1}C_1)(B_2 + \sqrt{-1}C_2) = (B_1 B_2 - C_1 C_2) + \sqrt{-1}(B_1 C_2 + C_1 B_2).$$

他方、

$$\begin{aligned} \iota(A_1)\iota(A_2) &= \begin{bmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & -C_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 B_2 - C_1 C_2 & -(B_1 C_2 + C_1 B_2) \\ B_1 C_2 + C_1 B_2 & B_1 B_2 - C_1 C_2 \end{bmatrix} \\ &= \iota(A_1 A_2). \end{aligned}$$

したがって、 $\iota$  は積も保存し代数準同型写像になる。さらに、

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbf{R})$$

とおくと、

$$\iota(M(n, \mathbf{C})) = \{X \in M(2n, \mathbf{R}) \mid JX = XJ\}$$

が成り立つ。特に  $\iota(M(n, \mathbf{C}))$  は  $M(2n, \mathbf{R})$  内の閉集合になる。さらに

$$\iota(GL(n, \mathbf{C})) = \{X \in GL(2n, \mathbf{R}) \mid JX = XJ\}$$

となるので、 $\iota(GL(n, \mathbf{C}))$  は  $GL(2n, \mathbf{R})$  の閉 Lie 部分群になる。 $\iota$  は単射準同型写像だから、 $\iota$  によって  $GL(n, \mathbf{C})$  と  $\iota(GL(n, \mathbf{C}))$  を同一視することにより、 $GL(n, \mathbf{C})$  は線形 Lie 群とみなせる。 $SL(n, \mathbf{C}), U(n), SU(n)$  は  $GL(n, \mathbf{C})$  の閉 Lie 部分群になるので、これらも線形 Lie 群になる。

$M(n, \mathbf{H})$  の元  $A$  に対して

$$A = B + jC \quad (B, C \in M(n, \mathbf{C}))$$

と分解し、 $A$  に

$$\iota(A) = \begin{bmatrix} B & -\bar{C} \\ C & \bar{B} \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbf{C})$$

を対応させることにより、 $M(n, \mathbf{H})$  から  $M(2n, \mathbf{C})$  への単射線形写像  $\iota$  が定まる。

$$A_p = B_p + jC_p \quad (p = 1, 2, B_p, C_p \in M(n, \mathbf{C}))$$

に対して

$$A_1 A_2 = (B_1 + jC_1)(B_2 + jC_2) = (B_1 B_2 - \bar{C}_1 C_2) + j(\bar{B}_1 C_2 + C_1 B_2).$$

他方、

$$\begin{aligned} \iota(A_1)\iota(A_2) &= \begin{bmatrix} B_1 & -\bar{C}_1 \\ C_1 & \bar{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & -\bar{C}_2 \\ C_2 & \bar{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 B_2 - \bar{C}_1 C_2 & -(\bar{B}_1 C_2 + C_1 B_2) \\ \bar{B}_1 C_2 + C_1 B_2 & \overline{B_1 B_2 - \bar{C}_1 C_2} \end{bmatrix} \\ &= \iota(A_1 A_2). \end{aligned}$$

したがって、 $\iota$  は積も保存し代数準同型写像になる。さらに、

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbf{C})$$

とおくと、

$$\iota(M(n, \mathbf{H})) = \{X \in M(2n, \mathbf{C}) \mid JX = \bar{X}J\}$$

が成り立つ。特に  $\iota(M(n, \mathbf{C}))$  は  $M(2n, \mathbf{R})$  内の閉集合になる。さらに

$$\iota(GL(n, \mathbf{H})) = \{X \in GL(2n, \mathbf{C}) \mid JX = \bar{X}J\}$$

となるので、 $\iota(GL(n, \mathbf{H}))$  は  $GL(2n, \mathbf{C})$  の閉 Lie 部分群になる。 $\iota$  は単射準同型写像だから、 $\iota$  によって  $GL(n, \mathbf{H})$  と  $\iota(GL(n, \mathbf{H}))$  を同一視することにより、 $GL(n, \mathbf{H})$  は線形 Lie 群とみなせる。 $Sp(n)$  は  $GL(n, \mathbf{H})$  の閉 Lie 部分群になるので、これも線形 Lie 群になる。

次に古典群の Lie 環を求める。命題 1.2.15 と命題 1.3.39 より実特殊線形群  $SL(n, \mathbf{R})$  の Lie 環  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$  は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \mid \text{tr}X = 0\}$$

となる。

命題 1.2.12 と命題 1.3.39 より直交群  $O(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{o}(n)$  は

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$$

となる。さらに回転群  $SO(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{so}(n)$  は  $\mathfrak{o}(n)$  と同一視される。

命題 1.2.15 と命題 1.3.39 より複素特殊線形群  $SL(n, \mathbf{C})$  の Lie 環  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \mid \text{tr}X = 0\}$$

となる。

命題 1.2.13 と命題 1.3.39 よりユニタリ群  $U(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{u}(n)$  は

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \mid X^* + X = 0\}$$

となる。さらに特殊ユニタリ群  $SU(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{su}(n)$  は

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \mid X^* + X = 0, \text{tr}X = 0\}$$

となる。

命題 1.2.14 と命題 1.3.39 よりシンプレクティック群  $Sp(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{sp}(n)$  は

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{H}) \mid X^* + X = 0\}$$

となる。

すでに述べたように

$$GL(n, \mathbf{C}) = \{g \in GL(2n, \mathbf{R}) \mid JgJ^{-1} = g\}$$

とみなせる。これより  $X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{R})$  が任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $\exp(tX) \in GL(n, \mathbf{C})$  となるための必要十分条件は、

$$\exp(tX) = J \exp(tX) J^{-1} = \exp(tJXJ^{-1}) \quad (t \in \mathbf{R})$$

が成り立つことである。 $t = 0$  で微分すると  $X = JXJ^{-1}$  が成り立つ。これより、 $JX = XJ$  となる。逆に  $JX = XJ$  が成り立つとき、 $X = JXJ^{-1}$  となり

$$\exp(tX) = \exp(tJXJ^{-1}) = J \exp(tX) J^{-1} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

命題 1.3.39 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{R}) \mid JX = XJ\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix} \mid B, C \in M(n, \mathbf{R}) \right\} \end{aligned}$$

となる。

すでに述べたように

$$GL(n, \mathbf{H}) = \{g \in GL(2n, \mathbf{C}) \mid JgJ^{-1} = \bar{g}\}$$

とみなせる。これより  $X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C})$  が任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $\exp(tX) \in GL(n, \mathbf{H})$  となるための必要十分条件は、

$$\exp(t\bar{X}) = \overline{\exp(tX)} = J \exp(tX) J^{-1} = \exp(tJXJ^{-1}) \quad (t \in \mathbf{R})$$

が成り立つことである。 $t = 0$  で微分すると  $\bar{X} = JXJ^{-1}$  が成り立つ。これより、 $JX = \bar{X}J$  となる。逆に  $JX = \bar{X}J$  が成り立つとき、 $\bar{X} = JXJ^{-1}$  となり

$$\overline{\exp(tX)} = \exp(t\bar{X}) = \exp(tJXJ^{-1}) = J \exp(tX) J^{-1} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

命題 1.3.39 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbf{H}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) \mid JX = \bar{X}J\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} B & -\bar{C} \\ C & \bar{B} \end{bmatrix} \mid B, C \in M(n, \mathbf{C}) \right\} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $Sp(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{sp}(n)$  をこの Lie 部分環として記述する。 $X \in M(n, \mathbf{H})$  に対して

$$X = Y + jZ \quad (Y, Z \in M(n, \mathbf{C}))$$

と分解したとき、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{Y} + \overline{jZ} = \bar{Y} + \bar{Z}j = \bar{Y} - \bar{Z}j = \bar{Y} - jZ, \\ X^* &= {}^t\bar{Y} - j {}^tZ = Y^* - j {}^tZ. \end{aligned}$$

これより、 $X \in \mathfrak{sp}(n)$  となるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} X^* + X &= 0, \\ Y^* - j {}^tZ + Y + jZ &= 0, \\ Y^* + Y = 0 \text{ かつ } Z - {}^tZ &= 0. \end{aligned}$$

以上の計算より、 $\mathfrak{sp}(n)$  は次のように表すことができる。

$$\mathfrak{sp}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} Y & -\bar{Z} \\ Z & \bar{Y} \end{bmatrix} \mid Y, Z \in M(n, \mathbf{C}), Y^* + Y = 0, Z = {}^t Z \right\}$$

補題 1.3.46 Lie 環  $\mathfrak{g}$  の表現  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  と  $v \in V$  に対して  $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X)v = 0\}$  とおくと  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Lie 部分環になる。

補題 1.3.47 Lie 群  $G$  の表現  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  と  $v \in V$  に対して

$$H = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$$

とおくと  $H$  は  $G$  の閉 Lie 部分群になる。 $\mathfrak{h}$  を  $H$  の Lie 環とすると

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\rho(X)v = 0\}$$

が成り立つ。

## 1.4 コンパクト古典群

この節ではコンパクト連結 Lie 群で一般的に成り立つ事項をコンパクト古典群の場合に具体的計算で示す。まずコンパクト古典群の連結性を調べておく。

命題 1.4.1  $SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$  は連結になる。 $O(n)$  は連結成分を二つ持ち、単位元の連結成分は  $SO(n)$  に一致する。

証明 任意に  $A \in SO(n)$  をとる。直交行列  $A$  を標準形にする。すなわち、ある  $g \in O(n)$  が存在し、

$$gAg^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_m & \\ & & & (1) \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

となる。ただし、最後の (1) は  $n$  が奇数のときのみ現れる。そこで、 $\mathfrak{o}(n)$  の元

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_m & \\ & & & (0) \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_k \\ \theta_k & 0 \end{bmatrix}$$

をとる。ただし、最後の (1) は  $n$  が奇数のときのみ現れる。すると、 $\exp X_k = R_k$  となるので、 $\exp X = gAg^{-1}$  が成り立つ。よって、 $A = g^{-1}(\exp X)g$  となり、 $SO(n)$  の一径数部分群  $g^{-1}(\exp tX)g$  は単位元と  $A$  を結ぶことになり、 $SO(n)$  は連結になる。



任意に  $A \in U(n)$  をとる。ユニタリ行列  $A$  を標準形にする。すなわち、ある  $g \in U(n)$  が存在し、

$$gAg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{bmatrix}, \quad \theta_k \in \mathbf{R}$$

となる。そこで、 $\mathfrak{u}(n)$  の元

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix}$$

をとる。すると  $\exp X = gAg^{-1}$  が成り立つ。よって、 $A = g^{-1}(\exp X)g$  となり、 $U(n)$  の一径数部分群  $g^{-1}(\exp tX)g$  は単位元と  $A$  を結ぶことになり、 $U(n)$  は連結になる。

例 1.2.7 で示した  $U(1) \times SU(2)$  から  $U(2)$  への位相同型写像と同様の写像を次のように定める。

$$U(1) \times SU(n) \rightarrow U(n); (z, g) \mapsto \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g.$$

この写像も位相同型写像になり、 $U(n)$  は連結だから  $SU(n)$  も連結になる。

任意に  $A \in Sp(n)$  をとる。  $A$  を標準形にできることが知られている。すなわち、ある  $g \in Sp(n)$  が存在し、

$$gAg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}, \quad \theta_k \in \mathbf{R}$$

となる。そこで、 $\mathfrak{sp}(n)$  の元

$$X = \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{bmatrix}$$

をとる。すると  $\exp X = gAg^{-1}$  が成り立つ。よって、 $A = g^{-1}(\exp X)g$  となり、 $Sp(n)$  の一径数部分群  $g^{-1}(\exp tX)g$  は単位元と  $A$  を結ぶことになり、 $Sp(n)$  は連結になる。

$SO(n)$  は連結だから、 $SO(n)$  の剰余類による  $O(n)$  の分解は、連結成分への分解に一致する。 $SO(n)$  の剰余類は二つあるので、 $O(n)$  の連結成分は二つになる。単位元を含む連結成分は  $SO(n)$  に一致する。

定理 1.4.2  $G$  をコンパクト連結 Lie 群とし、 $G$  の極大トーラス  $T$  をとる。このとき、次の等式が成り立つ。

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}.$$

例 1.4.3  $SO(n)$  の部分群  $T$  を

$$T = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{array} \right] \middle| R_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \right\} \quad (1)$$

によって定めると、 $T$  は  $SO(n)$  の極大トーラスになる。命題 1.4.1 の証明中に見たことは、

$$SO(n) = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

に他ならない。

$U(n)$  の部分群  $T$  を

$$T = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_k \in \mathbf{R} \right\}$$

によって定めると、 $T$  は  $U(n)$  の極大トーラスになる。命題 1.4.1 の証明中に見たことは、

$$U(n) = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

に他ならない。

$SU(n)$  の部分群  $T$  を

$$T = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_k \in \mathbf{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0 \right\}$$

によって定めると、 $T$  は  $SU(n)$  の極大トーラスになる。さらに、

$$SU(n) = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

が成り立つ。

$Sp(n)$  の部分群  $T$  を

$$T = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_k \in \mathbf{R} \right\}$$

によって定めると、 $T$  は  $Sp(n)$  の極大トーラスになる。命題 1.4.1 の証明中に見たことは、

$$Sp(n) = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

に他ならない。

定理 1.4.4  $G$  をコンパクト連結 Lie 群とし  $G$  の極大トーラス  $T$  を一つとる。  $\mathfrak{g}$  と  $\mathfrak{t}$  をそれぞれ  $G$  と  $T$  の Lie 環とする。  $\mathfrak{g}$  の複素化を  $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$  で表し、  $\mathfrak{t}$  の双対空間を  $\mathfrak{t}^*$  で表す。

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_\alpha &= \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\alpha(H)X \ (H \in \mathfrak{t})\} \quad (\alpha \in \mathfrak{t}^*) \\ \Delta(G) &= \{\alpha \in \mathfrak{t}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}\end{aligned}$$

とおくと  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$  となり

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ。さらに、右辺の和は直和になる。

定義 1.4.5 定理 1.4.4 の  $\Delta(G)$  の元をルート、  $\Delta(G)$  をルート系、  $\mathfrak{g}_\alpha$  をルート空間分解、 Lie 環の複素化の直和分解をルート空間分解と呼ぶ。

例 1.4.6 ユニタリ群  $U(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{u}(n)$  のルート空間分解を求める。  $Z \in M(n, \mathbf{C})$  を

$$Z = X + \sqrt{-1}Y \quad (X, Y \in M(n, \mathbf{R}))$$

と  $Z$  を分解する。  $Z$  が  $\mathfrak{u}(n)$  に含まれるための必要十分条件は  $Z^* + Z = 0$  だから、これを  $X, Y$  で表すと

$${}^tX - \sqrt{-1}{}^tY + Z + X + \sqrt{-1}Y = 0$$

となる。すなわち、  $X$  は交代行列になり、  $Y$  は交代行列になる。よって

$$\mathfrak{u}(n) = \{X + \sqrt{-1}Y \mid X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), X : \text{交代}, Y : \text{対称}\}.$$

$Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathfrak{u}(n)$  に対して

$$\sqrt{-1}Z = \sqrt{-1}X - Y = -Y + \sqrt{-1}X$$

となる。よって

$$\sqrt{-1}\mathfrak{u}(n) = \{X + \sqrt{-1}Y \mid X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), X : \text{対称}, Y : \text{交代}\}.$$

これより  $\mathfrak{u}(n) \cap \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n) = \{0\}$  となり、

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) = \mathfrak{u}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n).$$

したがって、  $\mathfrak{u}(n)^{\mathbf{C}}$  は  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$  に一致する。例 1.4.3 にあるように  $U(n)$  の極大トーラス  $T$  を定め  $T$  の Lie 環を  $\mathfrak{t}$  とおくと、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{array} \right] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

1 から  $n$  までの互いにことなる  $i, j$  に対して  $(i, j)$  成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような  $n$  次正方行列を  $E_{i,j}$  で表す。すると  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  に対して

$$\left[ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix}, E_{i,j} \right] = \sqrt{-1}(x_i - x_j)E_{i,j}.$$

そこで

$$e_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{R}; \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \mapsto x_i$$

とおくと  $e_i \in \mathfrak{t}^*$  となり、

$$\Delta(U(n)) = \{e_i - e_j | 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

がわかる。さらに上の計算より

$$\mathfrak{u}(n)_{e_i - e_j} = \mathbf{C}E_{i,j}$$

となり

$$\mathfrak{u}(n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{C}E_{i,j}$$

が  $\mathfrak{u}(n)^{\mathbf{C}}$  の  $\mathfrak{t}$  に関するルート空間分解になる。

例 1.4.7 特殊ユニタリ群  $SU(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{su}(n)$  のルート空間分解を求める。例 1.4.6 より

$$\mathfrak{u}(n) = \{X + \sqrt{-1}Y \mid X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), X : \text{交代}, Y : \text{対称}, \text{tr}Y = 0\}.$$

となるので  $\mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}}$  は  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  に一致する。例 1.4.3 にあるように  $SU(n)$  の極大トーラス  $T$  を定め  $T$  の Lie 環を  $\mathfrak{t}$  とおくと、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}, x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}.$$

例 1.4.6 と同様の記号を使い、例 1.4.6 の  $e_i$  を  $SU(n)$  の極大トーラスの Lie 環に制限したものを  $f_i$  とおくと

$$\Delta(SU(n)) = \{f_i - f_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

$$\mathfrak{su}(n)_{f_i - f_j} = \mathbf{C}E_{i,j}$$

がわかる。さらに

$$\mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{C}E_{i,j}$$

が  $\mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}}$  の  $\mathfrak{t}$  に関するルート空間分解になる。

例 1.4.8 シンプレクティック群  $Sp(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{sp}(n)$  のルート空間分解を求める。例 1.3.45 の最後に見たように、 $\mathfrak{sp}(n)$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(n) &= \left\{ \left[ \begin{array}{cc} Y & -\bar{Z} \\ Z & \bar{Y} \end{array} \right] \mid Y, Z \in M(n, \mathbf{C}), Y^* + Y = 0, Z = {}^t Z \right\} \\ &= \left\{ \left[ \begin{array}{cc} Y & -\bar{Z} \\ Z & -{}^t Y \end{array} \right] \mid Y, Z \in M(n, \mathbf{C}), Y \in \mathfrak{u}(n), Z = {}^t Z \right\}.\end{aligned}$$

例 1.4.6 より、対角成分の複素化は

$$\{(Y, -{}^t Y) \mid Y \in \mathfrak{u}(n)\}^{\mathbf{C}} = \{(Y, -{}^t Y) \mid Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})\}.$$

次に複素対称行列  $Z$  を

$$Z = Z_1 + \sqrt{-1}Z_2 \quad (Z_1, Z_2 \in M(n, \mathbf{R}))$$

と表すと、 $Z_1, Z_2$  はどちらも実対称行列になる。よって

$$\begin{aligned}& \{(Z, -\bar{Z}) \mid Z \in M(n, \mathbf{C}), Z: \text{対称}\} \\ &= \{(Z_1 + \sqrt{-1}Z_2, -Z_1 + \sqrt{-1}Z_2) \mid Z_i \in M(n, \mathbf{R}), Z_i: \text{対称}\} \\ &= \{(Z_1, -Z_1) + \sqrt{-1}(Z_2, Z_2) \mid Z_i \in M(n, \mathbf{R}), Z_i: \text{対称}\}.\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}& \{(Z, -\bar{Z}) \mid Z \in M(n, \mathbf{C}), Z: \text{対称}\}^{\mathbf{C}} \\ &= \{(Z_1, Z_2) \mid Z_i \in M(n, \mathbf{C}), Z_i: \text{対称}\}\end{aligned}$$

を得る。先の結果と合わせると、

$$\mathfrak{sp}(n)^{\mathbf{C}} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} Y & Z_1 \\ Z_2 & -{}^t Y \end{array} \right] \mid Y, Z_1, Z_2 \in M(n, \mathbf{C}), Z_i: \text{対称} \right\}.$$

例 1.4.3 にあるように  $Sp(n)$  の極大トーラス  $T$  を定め  $T$  の Lie 環を  $\mathfrak{t}$  とおくと、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} ix_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ix_n \end{array} \right] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{H}).$$

対応する  $\mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C})$  内の Lie 環も  $\mathfrak{t}$  で表すことにすると、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} X & 0 \\ 0 & -X \end{array} \right] \mid X = \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{array} \right], x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\} \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}).$$

$x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  に対して

$$H = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} [H, E_{i,n+j} + E_{j,n+i}] &= \sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) & (1 \leq i \leq j \leq n) \\ [H, E_{n+i,j} + E_{n+j,i}] &= -\sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) & (1 \leq i \leq j \leq n) \\ [H, E_{i,j} - E_{n+j,n+i}] &= \sqrt{-1}(x_i - x_j)(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) & (1 \leq i \neq j \leq n). \end{aligned}$$

そこで、上の  $H$  に対して

$$e_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{R}; H \mapsto x_i$$

とおくと  $e_i \in \mathfrak{t}^*$  となり、

$$\Delta(\mathfrak{Sp}(n)) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

がわかる。さらに上の計算より  $1 \leq i \leq j \leq n$  のとき、

$$\mathfrak{sp}(n)_{e_i+e_j} = \mathbf{C}(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}), \quad \mathfrak{sp}(n)_{-e_i-e_j} = \mathbf{C}(E_{n+i,j} + E_{n+j,i})$$

となり、 $1 \leq i \neq j \leq n$  のとき、

$$\mathfrak{sp}(n)_{e_i-e_j} = \mathbf{C}(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}).$$

したがって、

$$\mathfrak{sp}(n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \sum_{i \leq j} \mathbf{C}(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + \sum_{i \leq j} \mathbf{C}(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) + \sum_{i \neq j} \mathbf{C}(E_{i,j} - E_{n+j,n+i})$$

が  $\mathfrak{sp}(n)^{\mathbf{C}}$  の  $\mathfrak{t}$  に関するルート空間分解になる。

例 1.4.9 回転群  $SO(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$  のルート空間分解を求める。例 1.3.45 で見たように

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \mid {}^t X + X = 0\}$$

だから、

$$\mathfrak{o}(n)^{\mathbf{C}} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$$

となる。例 1.4.3 にあるように  $SO(n)$  の極大トーラス  $T$  を定め  $T$  の Lie 環を  $\mathfrak{t}$  とおく。 $n$  が偶数の場合と奇数の場合で  $T$  の形が異なるので、それぞれの場合に分けてルート空間分解を考える。

まず  $\mathfrak{o}(2n)$  の場合を考える。

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{array} \right] \mid X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

$F_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \in \mathfrak{o}(2n)$  とする。  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  に対して

$$H = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} [H, F_{2j-1,2k-1}] &= -x_j F_{2j,2k-1} - x_k F_{2j-1,2k}, \\ [H, F_{2j,2k}] &= x_j F_{2j-1,2k} + x_k F_{2j,2k-1}, \\ [H, F_{2j-1,2k}] &= -x_j F_{2j,2k} + x_k F_{2j-1,2k-1}, \\ [H, F_{2j,2k-1}] &= x_j F_{2j-1,2k-1} - x_k F_{2j,2k}. \end{aligned}$$

これらより、

$$\begin{aligned} [H, F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k}] &= (x_j - x_k)(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}), \\ [H, F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}] &= -(x_j - x_k)(F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k}). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & [H, F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} + \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1})] \\ &= -\sqrt{-1}(x_j - x_k)(F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} + \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1})). \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} [H, F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}] &= -(x_j + x_k)(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}), \\ [H, F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}] &= (x_j + x_k)(F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}). \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & [H, F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} \pm \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1})] \\ &= \pm \sqrt{-1}(x_j + x_k)(F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} \pm \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1})). \end{aligned}$$

そこで  $1 \leq i, j \leq n$  となる  $i, j$  に対して

$$\begin{aligned} G_{jk} &= F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} + \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}) \quad (j \neq k), \\ G_{jk}^{\pm} &= F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} \pm \sqrt{-1}(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}) \quad (j < k) \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} [H, G_{jk}] &= -\sqrt{-1}(x_j - x_k)G_{jk} \\ [H, G_{jk}^\pm] &= \pm\sqrt{-1}(x_j + x_k)G_{jk}^\pm \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、上の  $H$  に対して

$$e_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{R}; H \mapsto x_i$$

とおくと  $e_i \in \mathfrak{t}^*$  となり、

$$\Delta(SO(2n)) = \{\pm e_j \pm e_k \mid 1 \leq j < k \leq n\}$$

がわかる。さらに上の計算より  $1 \leq j \neq k \leq n$  のとき、

$$\mathfrak{o}(n)_{e_j - e_k} = \mathbf{C}G_{k,j}$$

となり、 $1 \leq j < k \leq n$  のとき、

$$\mathfrak{o}(n)_{\pm(e_j - e_k)} = \mathbf{C}G_{j,k}^\pm.$$

したがって、

$$\mathfrak{o}(2n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbf{C}} + \sum_{j \neq k} \mathbf{C}G_{j,k} + \sum_{j < k} \mathbf{C}G_{j,k}^+ + \sum_{j < k} \mathbf{C}G_{j,k}^-$$

が  $\mathfrak{o}(2n)^{\mathbf{C}}$  の  $\mathfrak{t}$  に関するルート空間分解になる。

次に  $\mathfrak{o}(2n+1)$  の場合を考える。

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 0 \end{array} \right] \mid X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

$x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  に対して

$$H = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、 $\mathfrak{o}(2n)$  のルート空間分解に以下のものが加わる。

$$[H, F_{2j-1,2n+1} \pm \sqrt{-1}F_{2j,2n+1}] = \pm\sqrt{-1}x_j(F_{2j-1,2n+1} \pm \sqrt{-1}F_{2j,2n+1})$$

となる。そこで  $1 \leq j \leq n$  に対して

$$D_j^\pm = F_{2j-1,2n+1} \pm \sqrt{-1}F_{2j,2n+1}$$



とおくと

$$[H, D_j^\pm] = \pm\sqrt{-1}x_j D_j^\pm$$

が成り立つ。先の  $\mathfrak{o}(2n)$  の結果と合わせて

$$\Delta(SO(2n+1)) = \{\pm e_j \pm e_k \mid 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq n\}$$

がわかる。さらに上の計算より  $1 \leq j \leq n$  のとき、

$$\mathfrak{o}(n)_{\pm e_j} = CD_j^\pm.$$

したがって、

$$\mathfrak{o}(2n+1)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C}G_{j,k} + \sum_{j < k} \mathbb{C}G_{j,k}^+ + \sum_{j < k} \mathbb{C}G_{j,k}^- + \sum_j \mathbb{C}D_j^+ + \sum_j \mathbb{C}D_j^-$$

が  $\mathfrak{o}(2n+1)^{\mathbb{C}}$  の  $\mathfrak{t}$  に関するルート空間分解になる。

**命題 1.4.10**  $G$  をコンパクト Lie 群とし  $\mathfrak{g}$  をその Lie 環とする。このとき、 $\mathfrak{g}$  には  $\text{Ad}(G)$  の作用に関して不変な内積が存在する。

**証明**  $\mathfrak{g}$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を一つとる。定理 1.1.11 の Haar 積分  $\mu_G$  を使って、

$$\langle X, Y \rangle = \int_G (\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) d\mu_G(g) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を定める。Haar 積分の線形性から、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{g}$  上の対称二次形式である。 $X \neq 0$  となる  $X \in \mathfrak{g}$  をとると、任意の  $g \in G$  について  $(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)X) > 0$  だから、

$$\langle X, X \rangle = \int_G (\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)X) d\mu_G(g) > 0$$

となることがわかり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は正定値になる。よって  $\mathfrak{g}$  上の内積になる。

次に  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が  $\text{Ad}(G)$  の作用に関して不変になることを示す。任意の  $h \in G$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}(h)X, \text{Ad}(h)Y \rangle &= \int_G (\text{Ad}(g)\text{Ad}(h)X, \text{Ad}(g)\text{Ad}(h)Y) d\mu_G(g) \\ &= \int_G (\text{Ad}(gh)X, \text{Ad}(gh)Y) d\mu_G(g) \\ &= \int_G (\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) d\mu_G(g) \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\text{Ad}(G)$  の作用に関して不変になる。

例 1.4.11 命題 1.4.10 の証明では、具体的なコンパクト Lie 群の不変内積がどのような形になるのか明らかではない。そこで、ここでは各コンパクト古典群の不変内積を具体的に与える。

$O(n)$  の場合。

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を定める。トレースの性質から、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{o}(n)$  上の対称二次形式になることがわかる。例 1.3.45 より  $\mathfrak{o}(n)$  の元は実交代行列になる。よって、

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_{i,j} Y_{j,i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_{i,j} Y_{i,j} = \sum_{i < j} X_{i,j} Y_{i,j} \end{aligned}$$

となり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{o}(n)$  上の内積になることがわかる。

例 1.3.32 より、

$$\operatorname{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in O(n), X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\operatorname{Ad}(g)X \operatorname{Ad}(g)Y) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(gXg^{-1}gYg^{-1}) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\operatorname{Ad}(O(n))$  の作用に関して不変になる。

$SO(n)$  の場合。  $SO(n)$  は  $O(n)$  の部分群であり、Lie 環は一致しているので、

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

は  $SO(n)$  の不変内積にもなる。

$U(n)$  の場合。

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{u}(n))$$

によって  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を定める。  $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$  に対して

$$\overline{\operatorname{tr}(XY)} = \operatorname{tr}(\bar{X}\bar{Y}) = \operatorname{tr}[(-{}^t X)(-{}^t Y)] = \operatorname{tr}({}^t X {}^t Y) = \operatorname{tr}({}^t(YX)) = \operatorname{tr}(YX) = \operatorname{tr}(XY).$$

このこととトレースの性質から、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{u}(n)$  上の対称実二次形式になることがわかる。さらに

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_{i,j} Y_{j,i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_{i,j} \bar{Y}_{i,j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_{i,i} \bar{Y}_{i,i} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (X_{i,j} \bar{Y}_{i,j} + X_{j,i} \bar{Y}_{j,i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_{i,i} \bar{Y}_{i,i} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (X_{i,j} \bar{Y}_{i,j} + \bar{X}_{i,j} Y_{i,j}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(X_{i,i}) \operatorname{Im}(Y_{i,i}) + \sum_{i < j} (\operatorname{Re}(X_{i,j}) \operatorname{Re}(Y_{i,j}) + \operatorname{Im}(X_{i,j}) \operatorname{Im}(Y_{i,j})) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(X_{i,i}) \operatorname{Im}(Y_{i,i}) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\operatorname{Re}(X_{i,j}) \operatorname{Re}(Y_{i,j}) + \operatorname{Im}(X_{i,j}) \operatorname{Im}(Y_{i,j})) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\operatorname{Re}(X_{i,j}) \operatorname{Re}(Y_{i,j}) + \operatorname{Im}(X_{i,j}) \operatorname{Im}(Y_{i,j}))
\end{aligned}$$

となり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{u}(n)$  上の内積になることがわかる。

$g \in U(n)$ ,  $X \in \mathfrak{u}(n)$  に対して、

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\operatorname{Ad}(g)X \operatorname{Ad}(g)Y) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(gXg^{-1}gYg^{-1}) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \\
&= \langle X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\operatorname{Ad}(U(n))$  の作用に関して不変になる。

$SU(n)$  の場合。  $SU(n)$  は  $U(n)$  の部分群であり、

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{su}(n))$$

は  $SU(n)$  の不変内積にもなる。

$SU(n)$  の場合。  $SU(n)$  は  $U(n)$  の部分群であり、

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{su}(n))$$

は  $SU(n)$  の不変内積にもなる。

$Sp(n)$  の場合。例 1.3.45 で示したように  $GL(n, \mathbf{H})$  は  $GL(2n, \mathbf{C})$  の部分群である。さらに例 1.4.8 の最初に示したことから

$$\mathfrak{sp}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} Y & -\bar{Z} \\ Z & -{}^t Y \end{bmatrix} \mid Y, Z \in M(n, \mathbf{C}), Y \in \mathfrak{u}(n), Z = {}^t Z \right\}.$$

これより、 $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$  となることがわかる。さらに  $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{su}(2n)$  となっている。対応する Lie 群  $Sp(n), SU(2n), U(2n)$  はすべて連結なので、 $Sp(n) \subset SU(2n) \subset U(2n)$  が成り立つ。そこで、上で定めた  $\mathfrak{u}(2n)$  の不変内積を  $\mathfrak{sp}(n)$  に誘導すると、これは  $\mathfrak{sp}(n)$  の不変内積にもなる。

$$X_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & -\bar{Z}_1 \\ Z_1 & -{}^t Y_1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} Y_2 & -\bar{Z}_2 \\ Z_2 & -{}^t Y_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(n)$$

をとる。  $u(n)$  の不変内積の表示から

$$\begin{aligned} \langle X_1, X_2 \rangle &= \sum_{i,j=1}^n [\operatorname{Re}((Y_1)_{i,j})\operatorname{Re}((Y_2)_{i,j}) + \operatorname{Im}((Y_1)_{i,j})\operatorname{Im}((Y_2)_{i,j})] \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n [\operatorname{Re}((Z_1)_{i,j})\operatorname{Re}((Z_2)_{i,j}) + \operatorname{Im}((Z_1)_{i,j})\operatorname{Im}((Z_2)_{i,j})]. \end{aligned}$$

すなわち  $X, Y \in \mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{H})$  とみなせば、

$$\langle X, Y \rangle = -\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(XY)]$$

に一致する。

**定理 1.4.12** 定理 1.4.4 の設定のもとで、Lie 環  $\mathfrak{g}$  に不変内積を入れる。このとき、各ルート  $\alpha \in \Delta(G)$  に対して  $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$  の正規直交基底  $A_\alpha, B_\alpha$  が存在し、次の等式を満たす。

$$[H, A_\alpha] = \alpha(H)B_\alpha, \quad [H, B_\alpha] = -\alpha(H)A_\alpha \quad (H \in \mathfrak{t}).$$

各コンパクト古典群について、定理 1.4.12 の基底を構成する。

**例 1.4.13** ユニタリ群  $U(n)$  に対して、定理 1.4.12 の基底を具体的に構成する。例 1.4.6 の記号はそのまま使うことにする。

$$H = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{t}$$

とおくと、  $1 \leq i \neq j \leq n$  に対して

$$\begin{aligned} [H, E_{i,j}] &= \sqrt{-1}(x_i - x_j)E_{i,j}, \\ [H, E_{j,i}] &= \sqrt{-1}(x_j - x_i)E_{j,i}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} [H, E_{i,j} - E_{j,i}] &= \sqrt{-1}(x_i - x_j)E_{i,j} - \sqrt{-1}(x_j - x_i)E_{j,i} \\ &= \sqrt{-1}x_i(E_{i,j} + E_{j,i}) - \sqrt{-1}x_j(E_{i,j} + E_{j,i}) \\ &= (x_i - x_j)\sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i}), \\ [H, \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i})] &= -(x_i - x_j)E_{i,j} - (x_j - x_i)E_{j,i} \\ &= -x_i(E_{i,j} - E_{j,i}) + x_j(E_{i,j} - E_{j,i}) \\ &= -(x_i - x_j)(E_{i,j} - E_{j,i}). \end{aligned}$$

ここで、 $E_{i,j} - E_{j,i}, \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i}) \in \mathfrak{u}(n)$  であり、例 1.4.11 で構成した  $\mathfrak{u}(n)$  の不変内積に関して

$$\begin{aligned}\langle E_{i,j} - E_{j,i}, \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i}) \rangle &= 0, \\ \langle E_{i,j} - E_{j,i}, E_{i,j} - E_{j,i} \rangle &= 1, \\ \langle \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i}), \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i}) \rangle &= 1\end{aligned}$$

となるので、 $E_{i,j} - E_{j,i}, \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i})$  は  $\mathfrak{u}(n) \cap (\mathfrak{u}(n)_{e_i - e_j} + \mathfrak{u}(n)_{e_j - e_i})$  の正規直交基底になる。よって、

$$A_{e_i - e_j} = E_{i,j} - E_{j,i}, \quad B_{e_i - e_j} = \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i})$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。

例 1.4.14 特殊ユニタリ群  $SU(n)$  に対して、定理 1.4.12 の基底は、例 1.4.13 で構成した

$$A_{e_i - e_j} = E_{i,j} - E_{j,i}, \quad B_{e_i - e_j} = \sqrt{-1}(E_{i,j} + E_{j,i})$$

をそのまま使うことができる。

例 1.4.15 シンプレクティック群  $Sp(n)$  に対して、定理 1.4.12 の基底を具体的に構成する。例 1.4.8 の記号はそのまま使うことにする。

$$H = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix}$$

とおくと、 $H \in \mathfrak{t}$  となり、

$$\begin{aligned}[H, E_{i,n+j} + E_{j,n+i}] &= \sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) & (1 \leq i \leq j \leq n) \\ [H, E_{n+i,j} + E_{n+j,i}] &= -\sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) & (1 \leq i \leq j \leq n) \\ [H, E_{i,j} - E_{n+j,n+i}] &= \sqrt{-1}(x_i - x_j)(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) & (1 \leq i \neq j \leq n).\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}& [H, (E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) - (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})] \\ &= \sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + \sqrt{-1}(x_i + x_j)(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) \\ &= (x_i + x_j)\sqrt{-1}[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})], \\ & \quad [H, \sqrt{-1}[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})]] \\ &= -(x_i + x_j)(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + (x_i + x_j)(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) \\ &= -(x_i + x_j)[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) - (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})].\end{aligned}$$

ここで、

$$(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) - (E_{n+i,j} + E_{n+j,i}), \quad \sqrt{-1}[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})]$$

は  $\mathfrak{sp}(n) \cap (\mathfrak{sp}(n)_{e_i+e_j} + \mathfrak{sp}(n)_{-e_i-e_j})$  の元になり、ノルムは  $\sqrt{2}$  になる。さらに直交することもわかるので、

$$\begin{aligned} A_{e_i+e_j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) - (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})] \\ B_{e_i+e_j} &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}[(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})] \end{aligned}$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。また、

$$\begin{aligned} & [H, (E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) - (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})] \\ &= \sqrt{-1}(x_i - x_j)(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) - \sqrt{-1}(x_j - x_i)(E_{j,i} - E_{n+i,n+j}) \\ &= (x_i - x_j)\sqrt{-1}[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) + (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})], \\ & [H, \sqrt{-1}[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) + (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})]] \\ &= -(x_i - x_j)(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) + (x_j - x_i)(E_{j,i} - E_{n+i,n+j}) \\ &= -(x_i - x_j)[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) - (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})]. \end{aligned}$$

ここで、

$$(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) - (E_{j,i} - E_{n+i,n+j}), \quad \sqrt{-1}[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) + (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})]$$

は  $\mathfrak{sp}(n) \cap (\mathfrak{sp}(n)_{e_i-e_j} + \mathfrak{sp}(n)_{e_j-e_i})$  の元になり、ノルムは  $\sqrt{2}$  になる。さらに直交することもわかるので、

$$\begin{aligned} A_{e_i-e_j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) - (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})] \\ B_{e_i-e_j} &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}[(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) + (E_{j,i} - E_{n+i,n+j})] \end{aligned}$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。

**例 1.4.16** 回転群  $SO(n)$  に対して、定理 1.4.12 の基底を具体的に構成する。例 1.4.9 の記号はそのまま使うことにする。

まず  $\mathfrak{o}(2n)$  の場合を考える。

$$H = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、 $H \in \mathfrak{t}$  となり、

$$\begin{aligned} [H, F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k}] &= (x_j - x_k)(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}), \\ [H, F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}] &= -(x_j - x_k)(F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k}). \end{aligned}$$

ここで

$$F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k}, \quad F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}$$

は  $\mathfrak{o}(2n) \cap (\mathfrak{o}(2n)_{e_j - e_k} + \mathfrak{o}(2n)_{e_k - e_j})$  の元になり、ノルムは  $\sqrt{2}$  になる。さらに直交することもわかるので、

$$A_{e_j - e_k} = F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} \quad B_{e_j - e_k} = F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。また

$$\begin{aligned} [H, F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}] &= -(x_j + x_k)(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}), \\ [H, F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}] &= (x_j + x_k)(F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}). \end{aligned}$$

ここで、

$$F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}, \quad F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}$$

は  $\mathfrak{o}(2n) \cap (\mathfrak{o}(2n)_{e_j + e_k} + \mathfrak{o}(2n)_{-e_k - e_j})$  の元になり、ノルムは  $\sqrt{2}$  になる。さらに直交することもわかるので、

$$A_{e_j - e_k} = F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}, \quad B_{e_j - e_k} = F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k}$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。

次に  $\mathfrak{o}(2n+1)$  の場合を考える。

$$H = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、 $H \in \mathfrak{t}$  となり、上で示した  $\mathfrak{o}(2n)$  の場合の  $e_j \pm e_k$  に対応する基底に以下のものが加わる。

$$\begin{aligned} [H, F_{2j,2n+1}] &= x_j F_{2j-1,2n+1}, \\ [H, F_{2j-1,2n+1}] &= -x_j F_{2j,2n+1}. \end{aligned}$$

ここで、

$$F_{2j,2n+1}, \quad F_{2j-1,2n+1}$$

は  $\mathfrak{o}(2n+1) \cap (\mathfrak{o}(2n+1)_{e_j} + \mathfrak{o}(2n+1)_{-e_j})$  の元になり、ノルムは 1 になる。さらに直交することもわかるので、

$$A_{e_j} = F_{2j,2n+1}, \quad B_{e_j} = F_{2j-1,2n+1}$$

とおけば、これらは定理 1.4.12 の基底になる。

## 第2章 多様体上の微分

### 2.1 ベクトル束

定義 2.1.1  $\pi_E : E \rightarrow M$  が次の条件を満たすとき、多様体  $M$  上のベクトル束と呼ぶ。

- (1)  $E, M$  は多様体であり、 $\pi_E : E \rightarrow M$  は多様体間の  $C^\infty$  級写像である。
- (2) ある自然数  $k$  が存在し、 $M$  の各点  $p$  に対して  $p$  の開近傍  $U$  と微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^k$$

が存在し、 $u \in \pi_E^{-1}(U)$  に対して  $\Phi_U(u)$  の  $U$  成分は  $\pi_E(u)$  に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \quad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、 $x \in U$  に対して  $\pi_E^{-1}(x)$  はベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \rightarrow \mathbf{R}^k$$

は線形同型写像になる。

$E$  をベクトル束の全空間、 $M$  を底空間、 $\pi_E$  を射影、 $\pi_E^{-1}(x)$  を  $x$  のファイバーと呼ぶ。 $k$  をベクトル束の階数と呼び、 $\text{rank} E$  で表す。

定義 2.1.2  $\pi : E \rightarrow M$  と  $\pi' : E' \rightarrow M$  を多様体  $M$  上のベクトル束とする。微分同型写像  $\phi : E \rightarrow E'$  が  $\pi = \pi' \circ \phi$  を満たし、各  $x \in M$  に対して

$$\phi|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_x$$

が線形同型写像になるとき、 $\phi$  をベクトル束の同型写像と呼び、 $E$  と  $E'$  は同型であるという。 $V$  をベクトル空間とし、 $M \times V$  から  $M$  への射影を考えることによって、 $M \times V$  は  $M$  上のベクトル束になる。 $M$  上のベクトル束  $E$  が  $M \times V$  と同型になるとき、 $E$  を自明ベクトル束と呼ぶ。 $M$  の接ベクトル束  $TM$  が自明であるとき、 $M$  は絶対平行性を持つという。

命題 2.1.3 Lie 群は絶対平行性を持つ。



証明  $G$  を Lie 群とし、 $\mathfrak{g}$  をその Lie 環とする。

$$\phi : G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG ; (g, X) \mapsto X_g$$

によって写像  $\phi$  を定めると、 $\phi$  はベクトル束の同型写像になり、 $TG$  は自明ベクトル束になる。したがって、 $G$  は絶対平行性を持つ。

例 2.1.4  $M$  を多様体とし、各  $x \in M$  における  $M$  の接ベクトル空間を  $T_x M$  で表す。

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

とおく。 $u \in TM$  に対して  $u \in T_x M$  となる  $x \in M$  が一つ定まるので、 $\pi(u) = x$  とおくと、写像

$$\pi : TM \rightarrow M$$

が定まる。 $M$  の各点  $p$  に対して  $p$  を含む座標近傍系  $(U; x^1, \dots, x^n)$  をとる。 $U$  の各点  $x$  において

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_x$$

は接ベクトル空間  $T_x M$  の基底になるので、 $\pi^{-1}(U)$  の各元  $u$  は

$$u = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^1, \dots, \xi^n) \quad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n$$

を定める。これによって、 $\pi^{-1}(U)$  上の座標  $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$  をとることができる。他の座標近傍系  $(V; y^1, \dots, y^n)$  をとると、各元  $v \in \pi^{-1}(V)$  は

$$v = \eta^i \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{\pi(v)}$$

と表すことができる。 $\pi^{-1}(V)$  の座標は  $(y^1, \dots, y^n, \eta^1, \dots, \eta^n)$  になり、

$$\eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

よって、座標変換は、

$$(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n) \rightarrow \left( y^1, \dots, y^n, \xi^j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}, \dots, \xi^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j} \right)$$

となり、 $C^\infty$  級微分同型写像になる。これによって、 $TM$  は多様体になる。

$\pi$  の定め方より、

$$\pi(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n) = (x^1, \dots, x^n)$$

となり、 $\pi : TM \rightarrow M$  は  $C^\infty$  級写像になる。 $\Phi_U$  の定め方より、 $\Phi_U(u)$  の  $U$  成分は  $\pi(u)$  に一致し、

$$\phi_U \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

となるので、各  $x \in U$  に対して  $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbf{R}^n$  は線形同型写像になる。

以上より、 $\pi : TM \rightarrow M$  がベクトル束になることがわかった。これを多様体  $M$  の接ベクトル束と呼ぶ。

**定義 2.1.5**  $\pi_E : E \rightarrow M$  を多様体  $M$  上のベクトル束とする。 $C^\infty$  級写像  $\sigma : M \rightarrow E$  で  $\pi_E \circ \sigma = 1_M$  を満たすものを、ベクトル束  $E$  の断面と呼ぶ。 $E$  の断面の全体を  $\Gamma(M, E)$  または単に  $\Gamma(E)$  で表す。

**定義 2.1.6** 多様体  $M$  の各点  $p \in M$  の接ベクトル空間  $T_p M$  に内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  が存在し、 $M$  上の任意の  $C^\infty$  級ベクトル場  $X, Y$  に対して  $\langle X, Y \rangle$  が  $M$  上の  $C^\infty$  級関数になるとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $M$  上の Riemann 計量と呼び、 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を Riemann 多様体と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

**定義 2.1.7**  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$  を多様体  $M$  から Riemann 多様体  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  への挿入とする。すなわち  $M$  の各点  $x$  での  $\iota$  の微分写像  $d\iota_x : T_x M \rightarrow T_{\iota(x)} \tilde{M}$  が単射であるとする。このとき、 $\tilde{M}$  上の Riemann 計量  $\tilde{g}$  の  $d\iota$  による引き戻し  $g = \iota^* \tilde{g}$  は  $M$  上の Riemann 計量になる。この  $(M, g)$  を  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  の Riemann 部分多様体と呼ぶ。

**注意 2.1.8** 定義 2.1.7 では、 $\tilde{M}$  の Riemann 計量から  $M$  の Riemann 計量を誘導したが、 $M$  の Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体  $(M, g)$  から  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  への  $C^\infty$  級写像  $\iota$  が、 $M$  の各点  $x$  に対して  $d\iota_x : T_x M \rightarrow T_{\iota(x)} \tilde{M}$  は等長線形写像になるという条件をみたすとき、 $\iota$  を等長的挿入と呼び、 $(M, g)$  を  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  の Riemann 部分多様体と呼ぶ。

**例 2.1.9**  $\iota : M \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  を Riemann 多様体  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  の Riemann 部分多様体とする。各  $x \in M$  に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)} \tilde{M} \mid \langle u, d\iota_x(T_x M) \rangle = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x \in M} T_x^\perp M$$

で  $T^\perp M$  を定める。 $u \in T^\perp M$  に対して  $u \in T_x^\perp M$  となる  $x \in M$  が一つ定まるので、 $\pi(u) = x$  とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \rightarrow M$$

が定まる。このとき、 $\pi : T^\perp M \rightarrow M$  はベクトル束になる。 $\pi : T^\perp M \rightarrow M$  を、Riemann 部分多様体  $M$  の法ベクトル束と呼ぶ。法ベクトル束  $T^\perp M$  の断面を  $M$  上の法ベクトル場と呼ぶ。

**定義 2.1.10**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とする。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $E$  の各ファイバーの内積を定めていて、 $E$  の任意の断面  $s, t$  に対して

$$\langle s, t \rangle(x) = \langle s(x), t(x) \rangle \quad (x \in M)$$

によって定まる  $M$  上の関数  $\langle s, t \rangle$  が  $C^\infty$  級になるとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  をベクトル束  $E$  の計量といい、 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を計量ベクトル束と呼ぶ。

**例 2.1.11** 定義 2.1.6 で定めた多様体の Riemann 計量は、接ベクトル束の計量に他ならない。また、Riemann 多様体の Riemann 部分多様体の法ベクトル束にも、全体の Riemann 多様体の計量から自然に定まる計量が入る。

## 2.2 ベクトル束の接続

**定義 2.2.1**  $M$  を多様体とし、 $E$  を  $M$  上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E); (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、 $\nabla$  を  $E$  上の共変微分と呼ぶ。

$$(1) \nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi, \quad (X, Y \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E))$$

$$(2) \nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi, \quad (X \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

$$(3) \nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi, \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M))$$

$$(4) \nabla_X(f\phi) = f\nabla_X\phi + (Xf)\phi. \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M))$$

任意の  $X \in \Gamma(TM)$  に対して  $\nabla_X\phi = 0$  を満たす  $\phi \in \Gamma(E)$  を平行な断面という。

**定義 2.2.2**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を多様体  $M$  上の計量ベクトル束  $E$  とする。 $E$  上の共変微分  $\nabla$  が

$$X\langle \phi, \psi \rangle = \langle \nabla_X\phi, \psi \rangle + \langle \phi, \nabla_X\psi \rangle \quad (X \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、共変微分  $\nabla$  は計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を保つという。

$\nabla$  を多様体  $M$  上のベクトル束  $E$  上の共変微分とする。 $\phi \in \Gamma(E)$  をとる。定義 2.2.1 より各  $x \in M$  における接ベクトル  $X \in T_x M$  に対して  $\nabla_X\phi \in E_x$  が定まる。すなわち  $M$  の各点  $x$  において  $\nabla\phi$  が  $T_x M$  上の  $E_x$  に値を持つ一次形式を定めているとみなすことができる。ベクトル束上の共変微分をこの立場で扱うためには、次に定義するベクトル束に値を持つ微分形式を考える必要がある。

**定義 2.2.3**  $E$  を  $n$  次元多様体  $M$  上のベクトル束とする。 $M$  の各点  $x$  に対して  $\wedge^p(T_x(M), E_x)$  の元  $\omega_x$  を対応させる対応  $\omega$  が次の条件を満たすとき、 $\omega$  を  $E$  に値を持つ  $M$  上の  $p$  次微分形式と呼ぶ。(条件)  $M$  の任意の局所座標近傍  $(U; x^1, \dots, x^n)$  に対して、

$$x \mapsto \omega_x \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right|_x \right)$$

がすべての  $i_1, \dots, i_p$  について  $U$  上の  $E$  の  $C^\infty$  級断面になる。

$M$  上の  $E$  に値を持つ  $p$  次微分形式全体の成すベクトル空間を  $\Omega^p(M; E)$  で表す。

ベクトル束に値を持つ微分形式を使うと、ベクトル束上の共変微分の定義 (定義 2.2.1) は次のように書き換えることができる。

**定義 2.2.4**  $M$  を多様体とし、 $E$  を  $M$  上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Omega^0(M; E) \rightarrow \Omega^1(M; E); \phi \mapsto \nabla \phi$$

が、次の (1) と (2) を満たすとき、 $\nabla$  を  $E$  上の共変微分と呼ぶ。

$$(1) \nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi, \quad (\phi, \psi \in \Omega^0(M; E))$$

$$(2) \nabla(f\phi) = f\nabla\phi + df\phi. \quad (\phi \in \Omega^0(M; E), f \in C^\infty(M))$$

計量ベクトル束上の計量を保つ共変微分の定義も次のように書き換えることができる。

**定義 2.2.5**  $\langle, \rangle$  を多様体  $M$  上の計量ベクトル束  $E$  とする。 $E$  上の共変微分  $\nabla$  が

$$d\langle\phi, \psi\rangle = \langle\nabla\phi, \psi\rangle + \langle\phi, \nabla\psi\rangle \quad (\phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、共変微分  $\nabla$  は計量  $\langle, \rangle$  を保つという。

$E$  を多様体  $M$  上の階数  $r$  のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  上の共変微分とする。ベクトル束  $E$  は局所的には積多様体だから、 $M$  の各点にはある開近傍  $U$  が存在し線形独立な断面  $e_1, \dots, e_r \in \Omega^0(U; E)$  をとることができる。 $\nabla e_i \in \Omega^1(U; E)$  は  $U$  上の 1 次微分形式  $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$  を係数に持つ  $e_1, \dots, e_r$  の線形結合で書き表すことができ、

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^r e_j \omega_i^j$$

となる。 $\omega = (\omega_i^j) \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$  とみなすこともできる。 $E$  の  $U$  上の断面  $\phi$  に対して  $\phi = \sum e_i \phi^i$  と表すと、共変微分の定義より

$$\nabla\phi = \sum e_i (d\phi^i) + \sum \nabla e_j \phi^j = \sum e_i \left( d\phi^i + \sum \omega_j^i \phi^j \right)$$

となる。これより、 $E$  の共変微分は局所的には  $\omega$  によって定まる。 $\omega$  を局所接続形式と呼ぶ。

**定理 2.2.6**  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし  $M$  を  $n$  次元多様体とする。  $\omega \in \Omega^p(M; V)$  に対して次の条件を満たす  $d\omega \in \Omega^{p+1}(M; V)$  が一意的に存在する。(条件)  $M$  の局所座標近傍  $(U; x^1, \dots, x^n)$  における  $\omega$  の局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) (dx^{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると

$$(d\omega)_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i}(x) (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

**定義 2.2.7**  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし  $M$  を多様体とする。定理 2.2.6 より定まる写像  $d : \Omega^p(M; V) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; V)$  を微分形式の外微分と呼ぶ。

**定理 2.2.8**  $E$  を  $n$  次元多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。  $\omega \in \Omega^p(M; E)$  に対して次の条件を満たす  $d^\nabla \omega \in \Omega^{p+1}(M; E)$  が一意的に存在する。(条件)  $M$  の局所座標近傍  $(U; x^1, \dots, x^n)$  における  $\omega$  の局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) (dx^{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると (ここで  $a_{i_1 \dots i_p} \in \Omega^0(U; E)$  である)

$$(d^\nabla \omega)_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{i=1}^n \nabla a_{i_1 \dots i_p} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right) (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

**定義 2.2.9**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。定理 2.2.8 より定まる写像  $d^\nabla : \Omega^p(M; E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; E)$  を  $E$  に値を持つ微分形式の  $\nabla$  に関する共変外微分と呼ぶ。

**定理 2.2.10**  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし  $M$  を多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M; V) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; V)$$

は実線形写像になる。さらに、 $V_1, V_2, V_3$  を有限次元実ベクトル空間とし、 $A : V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$  を双線形写像とする。  $\phi \in \Omega^p(M; V_1), \psi \in \Omega^q(M; V_2)$  に対して

$$dA(\phi \wedge \psi) = A(d\phi \wedge \psi) + (-1)^p A(\phi \wedge d\psi)$$

が成り立つ。

定理 2.2.11  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。共変外微分

$$d^\nabla : \Omega^p(M; E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; E)$$

は実線形写像になる。さらに、 $\phi \in \Omega^p(M; E)$  と  $\psi \in \Omega^q(M)$  に対して

$$d^\nabla(\phi \wedge \psi) = d^\nabla\phi \wedge \psi + (-1)^p\phi \wedge d\psi$$

が成り立つ。

定理 2.2.12  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし  $M$  を多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M; V) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M; V)$$

は  $d \circ d = 0$  を満たす。

系 2.2.13  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。 $\phi \in \Omega^0(M; E)$  と  $\psi \in \Omega^p(M)$  に対して

$$d^\nabla d^\nabla(\phi\psi) = (d^\nabla d^\nabla\phi) \wedge \psi$$

が成り立つ。特に  $p = 0$  のときは  $d^\nabla d^\nabla(\phi\psi) = (d^\nabla d^\nabla\phi)\psi$  となり、

$$d^\nabla d^\nabla : \Omega^0(M; E) \rightarrow \Omega^2(M; E)$$

は、各  $x \in M$  に対して

$$d^\nabla d^\nabla : E_x \rightarrow \wedge^2(T_x M, E_x)$$

を定める。したがって  $R^\nabla = d^\nabla d^\nabla \in \Omega^2(M; \text{End}E)$  とみなすことができ、次が成り立つ。

$$d^\nabla d^\nabla\phi = R^\nabla \wedge \phi. \quad (\phi \in \Omega^p(M; E))$$

定義 2.2.14 系 2.2.13 の条件下で、 $R^\nabla$  を共変微分  $\nabla$  の曲率と呼ぶ。

定理 2.2.15  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし  $M$  を多様体とする。 $\omega \in \Omega^p(M; V)$  と  $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$\begin{aligned} & d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ & \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

が成り立つ

**定理 2.2.16**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。 $\omega \in \Omega^p(M; E)$  と  $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$\begin{aligned} & d^\nabla \omega(X_1, \dots, X_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \nabla_{X_i} (\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ & \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

が成り立つ。

**系 2.2.17**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。 $\nabla$  の曲率  $R^\nabla$  は次の等式を満たす。

$$R^\nabla(X, Y)\phi = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\phi. \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M), \phi \in \Omega^0(M; E))$$

この等式を Ricci の恒等式と呼ぶ。

**命題 2.2.18**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。このとき、 $\Phi \in \Omega^0(M; \text{End} E)$  に対して

$$(\bar{\nabla}_X \Phi)\phi = \nabla_X(\Phi\phi) - \Phi(\nabla_X \phi) \quad (X \in \mathfrak{X}(M), \phi \in \Omega^0(M; E))$$

によって  $\bar{\nabla}_X \Phi \in \Omega^0(M; \text{End} E)$  を定めると、 $\bar{\nabla}$  はベクトル束  $\text{End} E$  の共変微分を定める。

**定理 2.2.19**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。このとき、 $\Phi \in \Omega^p(M; \text{End} E)$  と  $\psi \in \Omega^q(M; E)$  に対して

$$d^\nabla(\Phi \wedge \psi) = d^\nabla \Phi \wedge \psi + (-1)^p \Phi \wedge d^\nabla \psi$$

が成り立つ。

**命題 2.2.20**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。 $\nabla$  の曲率  $R^\nabla$  は次の等式を満たす。

$$d^\nabla R^\nabla = 0.$$

この等式を Bianchi の恒等式と呼ぶ。

**命題 2.2.21**  $E$  を多様体  $M$  上のベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  の共変微分とする。 $M$  の開集合  $U$  上で定義された  $E$  の局所フレーム  $\sigma = [e_1, \dots, e_r]$  に関する局所接続形式を  $\omega$  とする。

$$R^\nabla \sigma = \sigma \Omega$$

によって  $\Omega \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$  を定めると、

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

が成り立つ。この等式を局所接続形式の構造方程式と呼ぶ。さらに、

$$(d^{\nabla} R^{\nabla})\sigma = \sigma(d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega)$$

となり、Bianchi の恒等式から

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が成り立つ。この等式も Bianchi の恒等式と呼ぶ。

## 2.3 Levi-Civita 接続

定理 2.3.1 Riemann 多様体  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  の接ベクトル束には、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (X, Y \in C^\infty(TM))$$

を満たし、Riemann 計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を保つ線形接続が、一意的に存在する。

定義 2.3.2 定理 2.3.1 で定めた Riemann 多様体の接ベクトル束の共変微分  $\nabla$  を Riemann 多様体の Levi-Civita 接続と呼ぶ。

系 2.3.3 Riemann 多様体  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  の Levi-Civita 接続  $\nabla$  は、ベクトル場  $X, Y, Z$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle) \end{aligned}$$

を満たす。

今後、多様体の局所座標近傍  $(U; x^1, \dots, x^n)$  におけるベクトル場  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  を簡単に  $\partial_i$  で表すことにする。

命題 2.3.4 Riemann 多様体  $(M, g)$  の局所座標近傍  $(U; x^1, \dots, x^n)$  において、 $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$  によって  $U$  上の  $C^\infty$  級関数  $\Gamma_{ij}^k$  を定めると、ベクトル場  $X = X^i \partial_i$ ,  $Y = Y^j \partial_j$  に対して、 $\nabla_X Y$  の局所表示は

$$\nabla_X Y = (XY^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_k$$

となる。Riemann 計量の局所表示を  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  とし、行列  $(g_{ij})$  の逆行列の成分を  $g^{ij}$  で表すと、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

が成り立つ。もう一つの局所座標近傍  $(V; y^1, \dots, y^n)$  において、 $\frac{\partial}{\partial y^p}$  を  $\bar{\partial}_p$  で表し、 $\nabla_{\bar{\partial}_p} \bar{\partial}_q = \bar{\Gamma}_{pq}^r \bar{\partial}_r$  とする。このとき、 $U \cap V$  において、

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q} \frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

が成り立つ。



定義 2.3.5 命題 2.3.4 で定めた  $\Gamma_{ij}^k$  を Christoffel の記号と呼ぶ。

注意 2.3.6 今後、局所座標近傍を明示しなくても、Riemann 計量の成分、Christoffel の記号等は上で定めた記号を使うことにする。

命題 2.3.7 Riemann 多様体  $(M, \cdot)$  の曲線  $c$  に沿って定義されたベクトル場  $X$  に対して、

$$\nabla_{c'(t)} X = \left( c'(t) X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j \right) \partial_k$$

によって  $c$  に沿ったベクトル場  $\nabla_{c'(t)} X$  を定めると、これは局所座標近傍のとり方に依存しない。

定義 2.3.8 命題 2.3.7 で定まる  $\nabla_{c'(t)} X$  を  $X$  の曲線に沿った共変微分と呼ぶ。 $\nabla_{c'(t)} X = 0$  を満たすベクトル場  $X$  を曲線に沿った平行ベクトル場と呼ぶ。これを  $X$  に関する常微分方程式とみなすと、局所表示は、

$$\frac{dX^k(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

となり、未知関数  $X^k$  に関する連立線形常微分方程式系になる。したがって、曲線  $c$  が定義されている区間では、任意の初期条件に対して平行ベクトル場が一意に存在する。特に、曲線  $c$  の定義区間が  $[a, b]$  のとき、 $u \in T_{c(a)}M$  に対して  $X(a) = u$  を満たす平行ベクトル場  $X$  が一意に存在し、 $u$  に  $X(b) \in T_{c(b)}M$  を対応させると、 $T_{c(a)}M$  から  $T_{c(b)}M$  への線形同型写像になる。この線形同型写像を曲線に沿った平行移動と呼び、 $\tau_c$  で表す。

命題 2.3.9 Riemann 多様体の曲線に沿った平行移動は等長線形写像になる。

証明 曲線  $c$  に沿った平行ベクトル場  $X, Y$  に対して、

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = c'(t) \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_{c'(t)} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{c'(t)} Y \rangle = 0.$$

したがって、平行ベクトル場の内積は一定になる。特に、平行移動は内積を保つことになり、等長線形写像になる。

命題 2.3.10 Riemann 多様体上のベクトル場  $X, Y$  と点  $x$  に対して、 $c(0) = x$  と  $c'(0) = X_x$  を満たす曲線  $c$  をとる。曲線  $c$  に沿った  $c(t)$  から  $c(0)$  までの平行移動を  $\tau_0^t$  で表すと、

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

証明  $T_x M$  の正規直交基底  $e_1, \dots, e_n$  をとり、 $c$  に沿って平行ベクトル場に拡張したものを  $e_i(t)$  で表す。  $Y(c(t)) = Y^i(t)e_i(t)$  と表すことにすると、

$$(\nabla_X Y)(x) = \nabla_{c'(0)}(Y^i(t)e_i(t)) = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

他方、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(Y^i(t) - Y^i(0))e_i = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

したがって、

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

## 2.4 テンソル場の共変微分

定義 2.4.1 多様体  $M$  の各点  $x \in M$  の接ベクトル空間  $T_x M$  上の  $(p, q)$  型テンソル空間  $T^{(p,q)}(T_x M)$  を  $T_x^{(p,q)} M$  で表す。

$$T^{(p,q)} M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)} M$$

とおくと、 $T^{(p,q)} M$  は  $M$  上のベクトル束になる (命題 2.4.2)。  $T^{(p,q)} M$  上の  $C^\infty$  級断面を  $(p, q)$  型テンソル場と呼ぶ。テンソル場の和、関数倍、テンソル積は、多様体の各点の接ベクトル空間上のテンソル空間における演算で定める。

命題 2.4.2  $T^{(p,q)} M$  は  $M$  上のベクトル束になる。

証明の概略  $u \in T^{(p,q)} M$  に対して  $u \in T_x^{(p,q)} M$  となる  $x \in M$  が唯一つ定まるので、  $\pi(u) = x$  とおくと、写像

$$\pi : T^{(p,q)} M \rightarrow M$$

が定まる。  $M$  の各点  $x$  に対して  $x$  を含む  $M$  の座標近傍系  $(U; x^1, \dots, x^n)$  をとる。  $\pi^{-1}(U)$  の各元  $u$  は

$$u = u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_{\pi(u)} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \Big|_{\pi(u)} \otimes dx_{\pi(u)}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{\pi(u)}^{j_q}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \quad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^{n^{p+q}}$$

を定める。これによって、  $\pi^{-1}(U)$  上の座標  $(x^1, \dots, x^n, u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$  をとることができ、  $T^{(p,q)} M$  は多様体になる。

$\pi$  の定め方より、

$$\pi(x^1, \dots, x^n, u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (x^1, \dots, x^n)$$

となり、 $\pi : T^{(p,q)}M \rightarrow M$  は  $C^\infty$  級写像になる。 $\Phi_U$  の定め方より、 $\Phi_U(u)$  の  $U$  成分は  $\pi(u)$  に一致し、

$$\phi_U \left( u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \right) = (u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$$

となるので、各  $x \in U$  に対して  $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbf{R}^{n^{p+q}}$  は線形同型写像になる。

以上より、 $\pi : T^{(p,q)}M \rightarrow M$  がベクトル束になることがわかった。

例 2.4.3 Riemann 計量は  $(0, 2)$  型テンソル場になる。

命題 2.4.4 Riemann 多様体上のベクトル場  $X$  に対してテンソル場  $T$  に  $\nabla_X T$  を対応させる対応で、次の条件を満たすものが一意に存在する。

(1)  $\nabla_X$  はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場  $S, T$  に対して

$$\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T.$$

(2)  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して  $\nabla_X f = Xf$  となり、ベクトル場  $Y$  に対しては  $\nabla_X Y$  は Levi-Civita 接続による共変微分に一致する。

証明の概略 まず、条件を満たす  $\nabla_X$  が存在すると仮定する。 $(0, 1)$  型テンソル場、すなわち 1 次微分形式  $\omega$  と  $(1, 0)$  型テンソル場、すなわちベクトル場  $Y$  に対して、 $\omega \otimes Y$  の縮約は

$$C^{(1,1)}(\omega \otimes Y) = C^{(1,1)} \left( \omega_i Y^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i Y^i = \omega(Y)$$

となることに注意しておく。これより

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

となり、これによって  $\nabla_X \omega$  が一意に定まることがわかる。よって、 $(0, 0)$  型テンソル場、 $(1, 0)$  型テンソル場、 $(0, 1)$  型テンソル場への  $\nabla_X$  の作用が一意に定まる。

$(p, q)$  型テンソル場  $T$  の場合を考える。1 次微分形式  $\omega^1, \dots, \omega^p$  とベクトル場  $X_1, \dots, X_q$  をとる。 $C$  で全成分に関する縮約を表すと、

$$C(T \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_q) = T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)$$

となることに注意しておく。これより

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & \quad - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_q) \end{aligned}$$

となり、 $\nabla_X T$  が一意的に定まることがわかる。

逆に、一意性を示した等式で  $\nabla_X$  の作用を定めることにより、対応  $T \mapsto \nabla_X T$  を定める。この対応が条件を満たすことを以下で示す。

$C^\infty$  級関数  $f$  に対して

$$(\nabla_X \omega)(fY) = f(\nabla_X \omega)(Y)$$

が成り立つので、 $\nabla_X \omega$  は  $(0, 1)$  型テンソル場になる。さらに

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(T^{(0,1)}M) \rightarrow C^\infty(T^{(0,1)}M); (X, \omega) \mapsto \nabla_X \omega$$

は  $T^{(0,1)}M$  上の共変微分になることもわかる。

$(p, q)$  型テンソル場  $T$  に対して、 $\nabla_X T$  も  $(p, q)$  型テンソル場になることを示す。上で示したことより、

$$\nabla_X (f\omega^k) = (Xf)\omega^k + f\nabla_X \omega^k$$

が成り立つことに注意する。これより

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, f\omega^k, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= f(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q), \\ & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, fX_l, \dots, X_q) \\ &= f(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \end{aligned}$$

が成り立ち、 $\nabla_X T$  は  $(p, q)$  型テンソル場になる。

$(p, q)$  型テンソル場  $S$  と  $(r, s)$  型テンソル場  $T$  に対して、

$$\begin{aligned} & \nabla_X (S \otimes T)(\omega^1, \dots, \omega^{p+r}, X_1, \dots, X_{q+s}) \\ &= (\nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^{p+r}, X_1, \dots, X_{q+s}). \end{aligned}$$

したがって、

$$\nabla_X (S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$$

が成り立つ。

さらに

$$C^{(r,s)} \nabla_X T = \nabla_X C^{(r,s)} T$$

が成り立つこともわかり、 $\nabla_X$  は縮約と可換になる。

系 2.4.5  $(p, q)$  型テンソル場  $T$  に対して、

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & \quad - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_q) \end{aligned}$$

が成り立つ。

系 2.4.6 命題 2.4.4 で定めた写像

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(T^{(p,q)}M) \rightarrow C^\infty(T^{(p,q)}M); (X, T) \mapsto \nabla_X T$$

は  $T^{(p,q)}M$  上の共変微分になる。

系 2.4.7  $(p, q)$  型テンソル場  $T$  に対して  $\nabla T$  を

$$\begin{aligned} (\nabla T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q; X) &= (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &\quad (\omega^i \in C^\infty(T^{(0,1)}M), X_j, X \in C^\infty(T^{(1,0)}M)) \end{aligned}$$

によって定めると、 $\nabla T$  は  $(p, q+1)$  型テンソル場になる。

定義 2.4.8  $\nabla T = 0$  となるテンソル場を平行テンソル場と呼ぶ。

例 2.4.9 Riemann 多様体  $(M, g)$  の Levi-Civita 接続  $\nabla$  は、

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

を満たすので、 $\nabla g = 0$  となり、Riemann 計量は平行テンソル場になる。

命題 2.4.10  $(p, q)$  型テンソル場  $T$  の局所表示を

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla T &= T_{j_1 \dots j_q; k}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \\ &= \nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \end{aligned}$$

の成分は、

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{a=1}^p \Gamma_{kl}^{i_a} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots l \dots i_p} - \sum_{b=1}^q \Gamma_{kj_b}^m T_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

で与えられる。ここで、 $l$  は  $a$  番目であり、 $m$  は  $b$  番目である。

## 2.5 テンソル場の Lie 微分

定義 2.5.1  $\phi : M \rightarrow N$  を多様体間の微分同型写像とする。任意の  $p \in M$  に対して

$$\begin{aligned} \phi_p^* &: T_{\phi(p)}N \rightarrow T_pM ; Y \mapsto (d\phi_p)^{-1}Y \\ \phi_p^* &: T_{\phi(p)}^*N \rightarrow T_p^*M ; \omega \mapsto \omega \circ d\phi_p \end{aligned}$$

によって写像  $\phi_p^*$  を定める。さらに  $N$  上の任意の型のテンソルに対しては

$$\phi_p^*(T_1 \otimes T_2) = (\phi_p^*T_1) \otimes (\phi_p^*T_2)$$

を満たすように  $\phi_p^*$  の作用を拡張する。

$X$  を多様体  $M$  上のベクトル場とし、 $X$  の生成する局所一径数変換群を  $\phi_t$  で表す。 $M$  上のテンソル場  $T$  に対して、 $T$  の  $X$  による Lie 微分  $L_X T$  を

$$L_X T = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* T$$

によって定める。

命題 2.5.2  $M$  を多様体とし、 $X$  を  $M$  上のベクトル場とする。

(1)  $L_X$  はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場  $S, T$  に対して

$$L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T.$$

(2)  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して  $L_X f = Xf$  となり、ベクトル場  $Y$  に対しては  $L_X Y = [X, Y]$  が成り立つ。

証明  $X$  の生成する局所一径数変換群を  $\phi_t$  で表す。

(2) 点  $p \in M$  に対して

$$\begin{aligned} (L_X f)(p) &= \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f \right) (p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_t(p)) = df_p \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p) \right) \\ &= df_p(X_p) = (Xf)(p). \end{aligned}$$

したがって、 $L_X f = Xf$  が成り立つ。

次に

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p f &= \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y \right)_p f = \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_t)_p^{-1} Y_{\phi_t(p)} \right) f \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_t^{-1}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_t^{-1}) - Y_p f] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_t^{-1}) - Y_{\phi_t(p)} f + Y_{\phi_t(p)} f - Y_p f] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\phi_t(p)} \frac{1}{t} (f \circ \phi_t^{-1} - f) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((Yf)(\phi_t(p)) - (Yf)(p)) \\ &= -(YXf)(p) + (XYf)(p) = ([X, Y]f)(p). \end{aligned}$$

したがって、 $L_X Y = [X, Y]$  が成り立つ。

(1) Lie 微分の定義より

$$\begin{aligned}
 L_X(S \otimes T) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*(S \otimes T) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^*S) \otimes (\phi_t^*T) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^*S) \otimes (\phi_t^*T) - S \otimes T] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^*S) \otimes (\phi_t^*T) - (\phi_t^*S) \otimes T + (\phi_t^*S) \otimes T - S \otimes T] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (\phi_t^*S) \otimes \frac{1}{t} (\phi_t^*T - T) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*S - S) \otimes T \\
 &= S \otimes L_X T + L_X S \otimes T.
 \end{aligned}$$

したがって、 $L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T$  が成り立つ。

次に  $(0, 1)$  型テンソル場、すなわち一次微分形式  $\omega$  に対して

$$\begin{aligned}
 (L_X \omega)(Y_p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega(Y_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(d\phi_t Y_p) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\omega_{\phi_t(p)}(d\phi_t Y_p) - \omega_p(Y_p)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \omega_{\phi_t(p)}(d\phi_t Y_p - Y_{\phi_t(p)}) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\omega_{\phi_t(p)}(Y_{\phi_t(p)}) - \omega_p(Y_p)) \\
 &= -\lim_{t \rightarrow 0} \omega_{\phi_t(p)} d\phi_t \frac{1}{t} (d\phi_t^{-1} Y_{\phi_t(p)} - Y_p) + X(\omega(Y)) \\
 &= -\omega_p(L_X Y) + X_p(\omega(Y)).
 \end{aligned}$$

したがって、 $(L_X \omega)(Y) = -\omega(L_X Y) + X(\omega(Y))$  が成り立つ。

縮約を  $C$  で表すとベクトル場  $Y$  と一次微分形式  $\omega$  に対して

$$C(Y \otimes \omega) = \omega(Y).$$

これより

$$\begin{aligned}
 CL_X(Y \otimes \omega) &= C(L_X Y \otimes \omega + Y \otimes L_X \omega) \\
 &= \omega(L_X Y) + (L_X \omega)(Y) \\
 &= \omega(L_X Y) - \omega(L_X Y) + X(\omega(Y)) \\
 &= L_X C(Y \otimes \omega).
 \end{aligned}$$

よって、 $(1, 1)$  型テンソル場に対しては縮約と Lie 微分は可換になる。一般の型のテンソル場に対しても、 $(1, 1)$  型の場合と

$$L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T$$

より縮約と Lie 微分が可換になることがわかる。

系 2.5.3  $(p, q)$  型テンソル場  $T$  に対して、

$$\begin{aligned} & (L_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, L_X \omega^i, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &\quad - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, L_X X_j, \dots, X_q) \end{aligned}$$

が成り立つ。

定義 2.5.4 多様体  $M$  上のベクトル場  $X$  と  $p$  次微分形式  $\omega$  に対して  $p = 0$  の場合は  $i_X \omega = 0$  とし、 $p \geq 1$  の場合は

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}) \quad (X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M))$$

によって、 $M$  上の  $p-1$  次微分形式  $i_X \omega$  を定める。 $i_X \omega$  を  $\omega$  の  $X$  による内部積と呼ぶ。

定理 2.5.5 多様体  $M$  上のベクトル場  $X$  と微分形式  $\omega$  に対して次の等式が成り立つ。

$$(di_X + i_X d)\omega = L_X \omega.$$

証明 微分形式  $\omega$  の次数を  $p$  で表す。 $p = 0$  の場合は

$$(di_X + i_X d)\omega = i_X d\omega = d\omega(X) = X\omega = L_X \omega.$$

$p > 0$  の場合、定理 2.2.15 を利用する。ベクトル場  $X_1, \dots, X_p$  に対して

$$\begin{aligned} & (di_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} X_i((i_X \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (i_X \omega)([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} X_i(\omega(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p). \end{aligned}$$

他方、

$$\begin{aligned} & (i_X d\omega)(X_1, \dots, X_p) \\ &= d\omega(X, X_1, \dots, X_p) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= X(\omega(X_1, \dots, X_p)) + \sum_{i=1}^p (-1)^i X_i(\omega(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^p (-1)^j \omega([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&(i_X d\omega + di_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\
&= X(\omega(X_1, \dots, X_p)) + \sum_{j=1}^p (-1)^j \omega([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \\
&= X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{j=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_{p+1}) \\
&= X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{j=1}^p \omega(X_1, \dots, L_X X_j, \dots, X_{p+1}) \\
&= (L_X \omega)(X_1, \dots, X_p).
\end{aligned}$$

以上で定理が証明された。

## 第3章 部分多様体

### 3.1 第二基本形式と法接続

定義 3.1.1 ベクトル空間  $V, W$  に対して、 $L^k(V, W)$  で  $W$  に値を持つ  $V$  上の  $k$  多重線形写像全体の成すベクトル空間を表す。 $k = 1$  のときは単に  $L(V, W)$  と書くことにする。 $E, F$  を多様体  $M$  上のベクトル束とする。 $M$  の各点  $x$  に対して、

$$L_x^k(E, F) = L^k(E_x, F_x)$$

とおき、

$$L^k(E, F) = \bigcup_{x \in M} L_x^k(E, F)$$

で  $L^k(E, F)$  を定める。自然に  $C^\infty$  級写像

$$\pi : L^k(E, F) \rightarrow M$$

が定まり、 $\pi : L^k(E, F) \rightarrow M$  はベクトル束になる。

この節では、今後  $\iota : M \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  を Riemann 多様体  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  の Riemann 部分多様体として議論する。

命題 3.1.2  $\tilde{M}$  の Levi-Civita 接続を  $\tilde{\nabla}$  で表す。 $M$  上のベクトル場  $X, Y \in C^\infty(TM)$  に対して、 $\tilde{\nabla}_X Y$  はベクトル束  $T\tilde{M}|_M$  の  $C^\infty$  級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (\nabla_X Y \in TM, h(X, Y) \in T^\perp M)$$

と分解すると、 $\nabla$  は Riemann 部分多様体  $M$  の Levi-Civita 接続に一致し、 $h$  はベクトル束  $L^2(TM, T^\perp M)$  の  $C^\infty$  級断面になる。さらに、 $h$  は対称になる。

証明  $x \in M$  に対して、 $c(0) = x$  と  $c'(0) = X_x$  を満たす  $M$  の曲線  $c$  をとる。曲線  $c$  に沿った  $c(t)$  から  $c(0)$  までの  $\tilde{\nabla}$  に関する平行移動を  $\tau_0^t$  で表すと、

$$(\tilde{\nabla}_X Y)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。よって、 $\tilde{\nabla}_X Y$  はベクトル束  $T\tilde{M}|_M$  の  $C^\infty$  級断面として定まる。

$a, b$  を  $M$  上の  $C^\infty$  級関数とする。

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{aX}(bY) &= a((Xb)Y + b\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= (a(Xb)Y + ab\nabla_X Y) + abh(X, Y)\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\nabla_{aX}(bY) &= a(Xb)Y + ab\nabla_X Y \\ h(aX, bY) &= abh(X, Y)\end{aligned}$$

を得る。これより、 $\nabla$  は  $TM$  上の共変微分になり、 $h$  は  $L^2(TM, T^\perp M)$  の  $C^\infty$  級断面になることがわかる。

$\tilde{M}$  の Levi-Civita 接続の性質より、

$$\begin{aligned}0 &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + h(X, Y) - \nabla_Y X - h(Y, X) - [X, Y] \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + (h(X, Y) - h(Y, X)).\end{aligned}$$

上の等式の  $TM$  成分と  $T^\perp M$  成分をみることにより、

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] &= 0 \\ h(X, Y) - h(Y, X) &= 0\end{aligned}$$

を得る。第二式より、 $h$  は対称になる。第一式は、 $\nabla$  が  $M$  の Levi-Civita 接続になるための条件である。

$\tilde{\nabla}$  は  $\tilde{M}$  の Riemann 計量  $\tilde{g}$  を保つので、 $M$  上のベクトル場  $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$  に対して、

$$\begin{aligned}X(g(Y, Z)) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).\end{aligned}$$

よって、 $\nabla$  は  $M$  の Riemann 計量  $g$  を保つ。 $M$  の Levi-Civita は一意的に定まるので、 $\nabla$  は  $M$  の Levi-Civita に一致する。

**定義 3.1.3** 命題 3.1.2 で定めた  $h$  を  $M$  の第二基本形式と呼ぶ。 $M$  上のベクトル場  $X, Y$  に対する  $\tilde{\nabla}_X Y$  の分解

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (\nabla_X Y \in TM, h(X, Y) \in T^\perp M)$$

を Gauss の公式と呼ぶ。

命題 3.1.4  $\tilde{M}$  の Levi-Civita 接続を  $\tilde{\nabla}$  で表す。  $M$  上のベクトル場  $X$  と法ベクトル場  $\xi$  に対して、  $\tilde{\nabla}_X \xi$  はベクトル束  $T\tilde{M}|_M$  の  $C^\infty$  級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad (A_\xi X \in TM, \nabla_X^\perp \xi \in T^\perp M)$$

と分解すると、  $\nabla^\perp$  は  $T\tilde{M}$  の Riemann 計量から自然に誘導される  $T^\perp M$  の計量を保つ  $T^\perp M$  の共変微分になり、  $A$  は  $L(T^\perp M, \text{Sym}(TM))$  の  $C^\infty$  級断面になる。ここで、  $\text{Sym}(TM)$  は  $TM$  の各ファイバーの対称線形変換全体の成すベクトル束である。

証明  $\tilde{\nabla}_X \xi$  がベクトル束  $T\tilde{M}|_M$  の  $C^\infty$  級断面として定まることは、命題 3.1.2 の証明と同様。

$a, b$  を  $M$  上の  $C^\infty$  級関数とする。

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{aX}(b\xi) &= a((Xb)\xi + b\tilde{\nabla}_X \xi) \\ &= -abA_\xi X + (a(Xb)\xi + ab\nabla_X^\perp \xi) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \nabla_{aX}^\perp(b\xi) &= a(Xb)\xi + ab\nabla_X^\perp \xi \\ A_{b\xi}(aX) &= abA_\xi X \end{aligned}$$

を得る。  $\nabla^\perp$  は  $T^\perp M$  上の共変微分になり、  $A$  は  $L(T^\perp M, \text{End}(TM))$  の  $C^\infty$  級断面になることがわかる。

$\tilde{\nabla}$  は  $\tilde{M}$  の Riemann 計量  $\tilde{g}$  を保つので、  $M$  上の法ベクトル場  $\xi, \eta$  に対して、

$$\begin{aligned} X(\tilde{g}(\xi, \eta)) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X \eta) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X^\perp \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \nabla_X^\perp \eta). \end{aligned}$$

よって、  $\nabla^\perp$  は  $T^\perp M$  の計量  $\tilde{g}$  を保つ。

$A_\xi \in \text{Sym}(TM)$  となることは、次の補題から従う。

補題 3.1.5  $M$  上のベクトル場  $X, Y$  と法ベクトル場  $\xi$  に対して、

$$\tilde{g}(h(X, Y), \xi) = \tilde{g}(A_\xi X, Y)$$

が成り立つ。

証明  $Y$  は  $M$  の接ベクトル場であり  $\xi$  は  $M$  の法ベクトル場だから  $\tilde{g}(Y, \xi) = 0$  となり、

$$\begin{aligned} 0 &= X(\tilde{g}(Y, \xi)) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X \xi) \\ &= \tilde{g}(h(X, Y), \xi) + \tilde{g}(Y, -A_\xi X). \end{aligned}$$

したがって、

$$\tilde{g}(h(X, Y), \xi) = \tilde{g}(A_\xi X, Y)$$

が成り立つ。

命題 3.1.4 の証明の続き 補題 3.1.5 と命題 3.1.2 より、

$$\tilde{g}(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) = \tilde{g}(h(Y, X), \xi) = \tilde{g}(A_\xi Y, X).$$

したがって、 $A_\xi$  は対称線形変換になる。

定義 3.1.6 命題 3.1.4 で定めた  $\nabla^\perp$  を  $M$  の法接続と呼び、 $A$  を  $M$  のシェイプ作用素と呼ぶ。 $M$  上のベクトル場  $X$  と法ベクトル場  $\xi$  に対する  $\tilde{\nabla}_X \xi$  の分解

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad (A_\xi X \in TM, \nabla_X^\perp \xi \in T^\perp M)$$

を Weingarten の公式と呼ぶ。法接続  $\nabla^\perp$  の曲率テンソル  $R^{\nabla^\perp}$  を  $R^\perp$  で表し、法曲率テンソルと呼ぶ。 $M$  上の法ベクトル場  $\xi$  が  $\nabla^\perp \xi = 0$  を満たすとき、すなわち、任意のベクトル場  $X$  に対して  $\nabla_X^\perp \xi = 0$  を満たすとき、 $\xi$  を平行法ベクトル場と呼ぶ。

定義 3.1.7  $h = 0$  となる Riemann 部分多様体  $M$  を、全測地的部分多様体と呼ぶ。 $M$  が全測地的になるための必要十分条件は、 $M$  の任意の測地線が  $\tilde{M}$  の測地線になることである。

$$H = \text{tr}(h) = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (\{e_i\} \text{ は } TM \text{ の正規直交基底})$$

によって  $H$  を定めると、 $H$  は  $M$  上の法ベクトル場になる。 $H$  を  $M$  の平均曲率ベクトル場と呼ぶ。 $H = 0$  となる Riemann 部分多様体  $M$  を、極小部分多様体と呼ぶ。特に、全測地的部分多様体は極小部分多様体になる。

## 3.2 基本方程式

この節では、Riemann 部分多様体の三つの基本的な方程式、Gauss の方程式、Codazzi の方程式、Ricci の方程式を導く。この節でも、 $\iota: M \rightarrow \tilde{M}$  を Riemann 多様体  $\tilde{M}$  の Riemann 部分多様体として議論する。さらに、 $M$  と  $\tilde{M}$  の Riemann 計量は、どちらも  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表すことにする。

命題 3.2.1 (Gauss の方程式)  $\tilde{M}$  と  $M$  の曲率テンソルをそれぞれ  $\tilde{R}$  と  $R$  で表すと、 $M$  のベクトル場  $X, Y, Z, W$  に対して、

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle$$

が成り立つ。

証明 曲率テンソルの定義と Gauss の公式、Weingarten の公式より、

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}(X, Y)Z \\
&= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
&= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X, Z)) - (\nabla_{[X, Y]} Z + h([X, Y], Z)) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp (h(Y, Z)) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - h(Y, \nabla_X Z) + A_{h(X, Z)} Y - \nabla_Y^\perp (h(X, Z)) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - h([X, Y], Z) \\
&= R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)} X + A_{h(X, Z)} Y \\
&\quad + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\
&\quad + \nabla_X^\perp (h(Y, Z)) - \nabla_Y^\perp (h(X, Z)).
\end{aligned}$$

よって、補題 3.1.5 より、

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle A_{h(Y, Z)} X, W \rangle + \langle A_{h(X, Z)} Y, W \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle + \langle h(Y, W), h(X, Z) \rangle.
\end{aligned}$$

Codazzi の方程式を定式化するために、ベクトル束  $L^2(TM, T^\perp M)$  に共変微分を導入する。

補題 3.2.2  $a \in \Gamma(L^2(TM, T^\perp M))$  と  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  に対して

$$(\bar{\nabla}_X a)(Y, Z) = \nabla_X^\perp (a(Y, Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)$$

によって

$$\bar{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma(L^2(TM, T^\perp M)) \rightarrow \Gamma(L^2(TM, T^\perp M))$$

を定めると、 $\bar{\nabla}$  は  $L^2(TM, T^\perp M)$  上の共変微分になる。

証明  $M$  上の  $C^\infty$  級関数  $f, g$  に対して、

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X a)(fY, gZ) &= \nabla_X^\perp (a(fY, gZ)) - a(\nabla_X (fY), gZ) - a(fY, \nabla_X (gZ)) \\
&= X(fg)a(Y, Z) + fg\nabla_X^\perp (a(Y, Z)) \\
&\quad - (Xf)ga(Y, Z) - fga(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad - f(Xg)a(Y, Z) - fga(Y, \nabla_X Z) \\
&= fg(\nabla_X^\perp (a(Y, Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)) \\
&= fg(\bar{\nabla}_X a)(Y, Z)
\end{aligned}$$

となるので、 $\bar{\nabla}_X a$  は  $\Gamma(L^2(TM, T^\perp M))$  の元になる。

$\nabla$  は  $TM$  の共変微分であることと、 $\nabla^\perp$  は  $T^\perp M$  の共変微分であることから、

$$\bar{\nabla}_{fX}a = f\bar{\nabla}_Xa$$

が従う。

さらに、

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}_X(fa))(Y, Z) \\ &= \nabla_X^\perp(fa(Y, Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\ &= (Xf)a(Y, Z) + f\nabla_X^\perp(a(Y, Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\ &= (Xf)a(Y, Z) + (\bar{\nabla}_X a)(Y, Z) \end{aligned}$$

より、

$$\bar{\nabla}_X(fa) = (Xf)a + f\bar{\nabla}_Xa$$

となり、 $\bar{\nabla}$  は  $L^2(TM, T^\perp M)$  上の共変微分になる。

**命題 3.2.3 (Codazzi の方程式)**  $M$  上のベクトル場  $X, Y, Z$  に対して、 $\tilde{R}(X, Y)Z$  の法成分は

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

を満たす。

**証明** 命題 3.2.1 の証明中に得た等式

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y \\ &\quad + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - \nabla_Y^\perp(h(X, Z)). \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp &= h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - \nabla_Y^\perp(h(X, Z)) \\ &= h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h(\nabla_X Y, Z) + h(\nabla_Y X, Z) \\ &\quad + \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - \nabla_Y^\perp(h(X, Z)) \\ &= (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z). \end{aligned}$$

**命題 3.2.4 (Ricci の方程式)**  $M$  上のベクトル場  $X, Y$  と法ベクトル場  $\xi, \eta$  に対して、

$$\langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$$

が成り立つ。

証明 Weingarten の公式より、

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi, \eta \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla_Y^\perp \xi) - \tilde{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi) - (-A_\xi[X, Y] + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi), \eta \rangle \\
&= \langle h(X, -A_\xi Y) + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - h(Y, -A_\xi X) - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \eta \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle h(X, A_\xi Y), \eta \rangle + \langle h(Y, A_\xi X), \eta \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle + \langle A_\eta Y, A_\xi X \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle A_\xi A_\eta X, Y \rangle + \langle Y, A_\eta A_\xi X \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

命題 3.2.5  $\tilde{M}$  を曲率  $K$  の定曲率空間とすると、Riemann 部分多様体  $M$  の Gauss, Codazzi, Ricci の方程式は、次のようになる。 $M$  上のベクトル場  $X, Y, Z, W$  と法ベクトル場  $\xi, \eta$  に対して、

$$\begin{aligned}
& K(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle, \\
& (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z), \\
& \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

証明  $\tilde{M}$  の曲率テンソル  $\tilde{R}$  は、 $\tilde{M}$  の接ベクトル  $S, T, U$  に対して、

$$\tilde{R}(S, T)U = K(\langle T, U \rangle S - \langle S, U \rangle T)$$

を満たしている。命題 3.2.1(Gauss の方程式) より、

$$\begin{aligned}
& K(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle
\end{aligned}$$

を得る。命題 3.2.3(Codazzi の方程式) より、

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z) &= (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp \\
&= K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)^\perp \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって、

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

を得る。命題 3.2.4(Ricci の方程式) より、

$$\begin{aligned}
\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle &= \langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle \\
&= K(\langle Y, \xi \rangle \langle X, \eta \rangle - \langle X, \xi \rangle \langle Y, \eta \rangle) \\
&= 0.
\end{aligned}$$



よって、

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$$

を得る。

### 3.3 高橋の定理

補題 3.3.1 Riemann 多様体上の  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して、 $(0, 2)$  型テンソル場  $\nabla^2 f$  は対称になる。

証明 ベクトル場  $X, Y$  に対して

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)(X; Y) &= (\nabla_Y(\nabla f))(X) = Y(\nabla f(X)) - (\nabla f)(\nabla_Y X) \\ &= Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (\nabla_X Y + [Y, X])f = X(Yf) - (\nabla_X Y)f \\ &= (\nabla^2 f)(Y; X). \end{aligned}$$

定義 3.3.2  $\nabla^2 f$  を  $C^\infty$  級関数  $f$  の Hessian と呼ぶ。

定義 3.3.3 Riemann 多様体上の  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して、 $\Delta f = -\text{tr}(\nabla^2 f)$  によって  $\Delta$  を定める。 $\Delta$  を Laplacian と呼ぶ。 $\Delta f = 0$  となる関数  $f$  を調和関数と呼ぶ。

補題 3.3.4  $M$  を  $\mathbf{R}^N$  内の Riemann 部分多様体とし、その挿入を  $x : M \rightarrow \mathbf{R}^N$  で表す。 $M$  の第二基本形式と平均曲率ベクトルを、それぞれ  $h$  と  $H$  で表す。このとき、

$$h = \nabla^2 x, \quad \Delta x = -H$$

が成り立つ。特に、 $M$  が極小部分多様体になるための必要十分条件は、 $x$  が調和関数になることである。

証明  $M$  の第二基本形式を  $h$  で表し、 $\mathbf{R}^N$  の Levi-Civita 接続を  $\tilde{\nabla}$  で表す。補題 3.3.1 の証明中に示したことから、 $M$  上のベクトル場  $X, Y$  に対して

$$\begin{aligned} (\nabla^2 x)(Y, X) &= YXx - (\nabla_Y X)x = YX - \nabla_Y X \\ &= \tilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y X = h(Y, X) \end{aligned}$$

となるので、 $x$  の Hessian  $\nabla^2 x$  は  $M$  の第二基本形式に一致する。

$$\Delta x = -\text{tr}(\nabla^2 x) = -\text{tr}(h) = -H$$

となるので、 $x$  の Laplacian  $\Delta x$  は  $-H$  に一致する。 $M$  が極小部分多様体になるということは  $H = 0$  ということであり、 $x$  が調和関数になるということは  $\Delta x = 0$  ということだから、 $M$  が極小部分多様体になることと  $x$  が調和関数になることは同値になる。

定理 3.3.5 (高橋)  $M$  を  $\mathbf{R}^N$  内の  $n$  次元 Riemann 部分多様体とし、その挿入を  $x : M \rightarrow \mathbf{R}^N$  で表す。ある 0 でない定数  $\lambda$  が存在し、 $x$  が  $\Delta x = \lambda x$  を満たすとすると、 $\lambda$  は正の定数になり、 $M$  は  $\mathbf{R}^N$  内の原点中心で半径  $\sqrt{n/\lambda}$  の球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  の極小部分多様体になる。逆に、 $M$  が  $\mathbf{R}^N$  内の原点中心で半径  $a$  の球面  $S^{N-1}(a)$  の極小部分多様体ならば、 $\lambda = n/a^2$  とおくと、 $x$  は  $\Delta x = \lambda x$  を満たす。

証明 最初に位置ベクトル  $x$  が接ベクトル空間  $T_x M$  に直交するとき、単位接ベクトル場  $e$  に対して  $\langle h(e, e), x \rangle = -1$  が成り立つことを示しておく。

$$\begin{aligned}\langle h(e, e), x \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_e e - \nabla_e e, x \rangle = \langle \tilde{\nabla}_e e, x \rangle = -\langle e, \tilde{\nabla}_e x \rangle \\ &= -\langle e, ex \rangle = -\langle e, e \rangle = -1.\end{aligned}$$

まず、ある 0 でない定数  $\lambda$  が存在し、 $x$  が  $\Delta x = \lambda x$  を満たすと仮定する。補題 3.3.4 より、

$$-H = \Delta x = \lambda x$$

となる。 $\lambda \neq 0$  だから、 $M$  の各点でベクトル  $x$  は  $M$  の法ベクトルになる。よって、 $M$  の任意のベクトル場  $X$  に対して、 $\langle X, x \rangle = 0$  となり、

$$X \langle x, x \rangle = 2 \langle \tilde{\nabla}_X x, x \rangle = 2 \langle X, x \rangle = 0.$$

よって、関数  $\langle x, x \rangle$  は局所的に定数になる。そこで、局所的に  $\langle x, x \rangle = r^2$  とする。証明の最初に示したことから

$$-\lambda x = H = \left\langle H, \frac{x}{r} \right\rangle \frac{x}{r} = \frac{1}{r^2} \sum_i \langle h(e_i, e_i), x \rangle x = -\frac{n}{r^2} x.$$

これより、 $\lambda = n/r^2$  となり、 $\lambda$  は正の定数であって、 $r = \sqrt{n/\lambda}$  が成り立つ。特に、 $\langle x, x \rangle$  は  $M$  全体で一定値  $n/\lambda$  をとる。したがって、挿入  $x$  の像は球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  に含まれる。

$M$  の球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  内の第二基本形式を  $h'$  とし、平均曲率ベクトルを  $H'$  で表す。さらに、球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  の  $\mathbf{R}^N$  内の第二基本形式を  $\tilde{h}$  で表すことにすると、 $M$  の接ベクトル空間上で  $h = h' + \tilde{h}$  が成り立つ。よって、

$$H = \sum_i h(e_i, e_i) = \sum_i h'(e_i, e_i) + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i) = H' + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i).$$

$H$  は  $x$  に比例しているのので、特に  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  に接する成分は 0 になる。 $H'$  は  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  に接する成分であり  $\sum_i \tilde{h}(e_i, e_i)$  は直交する成分だから、 $H' = 0$  が成り立つ。したがって、 $M$  は球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  内の極小部分多様体になる。

逆に、 $M$  は  $\mathbf{R}^N$  内の原点中心で半径  $a$  の球面  $S^{N-1}(a)$  の極小部分多様体であると仮定する。

$$H = \sum_i h(e_i, e_i) = \sum_i h'(e_i, e_i) + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i) = \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i)$$

より、 $H$  は  $x$  に比例する。よって、証明の最初に示したことから

$$-\Delta x = H = \left\langle H, \frac{x}{a} \right\rangle \frac{x}{a} = \frac{1}{a^2} \sum_i \langle h(e_i, e_i), x \rangle x = -\frac{n}{a^2} x.$$

そこで、 $\lambda = n/a^2$  とおくと、 $\Delta x = \lambda x$  が成り立つ。

**定理 3.3.6 (高橋)** コンパクト等質 Riemann 多様体  $M$  の線形イソトローピー表現が既約のとき、 $M$  は球面の極小部分多様体になり得る。

**証明**  $M$  はコンパクト Riemann 多様体なので、 $\Delta$  の 0 でない固有値はすべて正で可算個存在し、各固有値の固有空間は有限次元になることが、楕円型偏微分作用素の理論から知られている。そこで、 $\Delta$  の 0 でない固有値  $\lambda$  を一つとり、 $V_\lambda$  をその固有空間とする。すなわち、

$$V_\lambda = \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = \lambda f\}.$$

$M$  の等長変換群の単位連結成分を  $G$  で表すと、 $G$  はコンパクト連結 Lie 群になり、 $M$  に等長推移的に作用する。さらに、 $G$  は  $C^\infty(M)$  に  $L^2$  内積に関して等長的に作用し、 $G$  の作用は  $\Delta$  の作用と可換になるので、固有空間  $V_\lambda$  を不変にする。 $V_\lambda$  の正規直交基底  $f_1, \dots, f_N$  をとり、

$$\tilde{x}(p) = (f_1(p), \dots, f_N(p)) \quad (p \in M)$$

によって、 $C^\infty$  級写像  $\tilde{x} : M \rightarrow \mathbf{R}^N$  を定める。 $\mathbf{R}^N$  の内積の  $\tilde{x}$  による引戻しは、 $M$  上の  $G$  不変対称  $(0, 2)$  型テンソル  $\tilde{g}$  を定める。 $M$  の線形イソトローピー表現が既約であるという仮定より、コンパクト Lie 群の表現に関する Schur の補題を使うと、ある 0 でない定数  $c$  が存在し、 $\tilde{g} = c^2 g$  が成り立つ。ここで、 $g$  は  $M$  の Riemann 計量である。そこで、 $x = \tilde{x}/c$  とおくと、 $x : M \rightarrow \mathbf{R}^N$  は等長的挿入になる。さらに、 $\Delta x = \lambda x$  が成り立つので、定理 3.3.5 より、 $n = \dim M$  とすると、 $M$  は  $\mathbf{R}^N$  内の原点中心で半径  $\sqrt{n/\lambda}$  の球面  $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$  の極小部分多様体になる。

## 第4章 等長変換群の軌道

### 4.1 Lie 変換群

定義 4.1.1  $G$  を Lie 群とし、 $M$  を多様体とする。 $C^\infty$  級写像  $\rho : G \times M \rightarrow M$  が存在し

$$\rho(e, x) = x, \quad \rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x)) \quad (g_1, g_2 \in G, x \in M)$$

を満たすとき、 $G$  を  $M$  の Lie 変換群と呼ぶ。このとき、 $G$  は  $M$  に作用するという。 $M$  を  $G$  多様体ということもある。簡単に  $\rho(g, x) = \rho(g)x = gx$  と書くこともある。 $M$  が Riemann 多様体であり、各  $g \in G$  に体して

$$\rho(g) : M \rightarrow M; x \mapsto \rho(g)x = \rho(g, x)$$

が等長変換になるとき、 $G$  を  $M$  の Lie 等長変換群と呼ぶ。

定理 4.1.2  $G$  を Lie 群とし  $H$  を  $G$  の閉 Lie 部分群とする。射影  $\pi : G \rightarrow G/H; g \mapsto gH$  によって  $G$  の  $H$  による剰余類の全体  $G/H$  に商位相をいれる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を  $G/H$  の開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \rightarrow G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって  $G$  が  $G/H$  の Lie 変換群になるような  $G/H$  の多様体構造が存在する。

定義 4.1.3  $G$  を Lie 群とし  $H$  を  $G$  の閉 Lie 部分群とする。定理 4.1.2 で存在を示した多様体構造を持つ  $G/H$  を  $G$  の等質空間と呼ぶ。 $G$  は  $G/H$  に推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定義 4.1.4  $G$  を多様体  $M$  の Lie 変換群とする。 $x \in M$  に対して

$$\begin{aligned} Gx &= \{gx \mid g \in G\} \\ G_x &= \{g \in G \mid gx = x\} \end{aligned}$$

を定め、 $Gx$  を  $x$  を通る  $G$  軌道と呼び、 $G_x$  を  $x$  におけるイソトロピー部分群と呼ぶ。 $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の元  $X$  に対して

$$X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX)x \quad (x \in M)$$

によって  $M$  上のベクトル場を定める。

**定理 4.1.5**  $G$  を多様体  $M$  の Lie 変換群とする。  $x \in M$  をとると  $G_x$  は  $G$  の閉 Lie 部分群になる。さらに  $Gx$  は  $M$  の部分多様体になり、  $G/G_x \rightarrow Gx$  ;  $gG_x \mapsto gx$  によって  $G/G_x$  と  $Gx$  は微分同型になる。

**命題 4.1.6**  $G$  を多様体  $M$  の Lie 変換群とする。  $x, y \in M$  と  $g \in G$  に対して以下の (1) から (3) が成り立つ。

- (1)  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ .
- (2)  $Gx \cap Gy \neq \emptyset$  ならば  $Gx = Gy$  となる。
- (3)  $T_x(Gx) = \{X(x) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ .

**証明** (1)  $h \in G$  に対して  $h \in G_{gx}$  となるための必要十分条件は、  $hgx = gx$  だから  $g^{-1}hgx = x$  となり  $g^{-1}hg \in G_x$  になる。よって  $h \in gG_xg^{-1}$  となり、  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$  を得る。

(2) 共通部分の元を  $g_1x = g_2y$  ( $g_1, g_2 \in G$ ) で表す。  $g \in G$  に対して

$$\begin{aligned} gx &= gg_1^{-1}g_1x = gg_1^{-1}g_2y \in Gy, \\ gy &= gg_2^{-1}g_2y = gg_2^{-1}g_1x \in Gx \end{aligned}$$

となるので、  $Gx = Gy$  が成り立つ。

(3) 定理 4.1.5 の微分同型写像は等号  $T_x(Gx) = \{X(x) \mid X \in \mathfrak{g}\}$  を導く。

**定義 4.1.7**  $M$  と  $N$  を  $G$  多様体とする。  $C^\infty$  級写像  $F : M \rightarrow N$  が

$$F(gx) = gF(x) \quad (g \in G, x \in M)$$

を満たすとき、  $F$  を  $G$  同変写像という。関数  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  がすべての  $(g, x) \in G \times M$  に対して  $f(gx) = f(x)$  を満たすとき、  $f$  を  $G$  不変関数と呼ぶ。

**定義 4.1.8**  $G$  多様体  $M$  内の軌道  $Gx$  について、任意の  $y \in M$  に対し  $G_x \subset gG_yg^{-1}$  を満たす  $g \in G$  が存在するとき、軌道  $Gx$  を **主軌道** と言う。  $Gx$  が主軌道になるとき、  $x$  を **正則点** という。正則点ではない点を **特異点** という。  $x, y \in M$  に対してある  $g \in G$  が存在して  $G_y = gG_xg^{-1}$  が成り立つとき、軌道  $Gx$  と  $Gy$  は同じ型であるという。

コンパクト Lie 変換群の主軌道については次の定理が知られている。

**定理 4.1.9**  $G$  が多様体  $M$  のコンパクト Lie 変換群のとき、  $M$  には主軌道が存在する。

**定義 4.1.10**  $M$  を  $G$  多様体とし、  $S$  を  $M$  の部分多様体とする。軌道  $Gx$  の  $G$  不変な開近傍  $U$  と  $G$  同変レトラクション  $r : U \rightarrow Gx$  が存在し  $S = r^{-1}(x)$  となると、  $S$  を  $x$  における **スライス** という。

命題 4.1.11  $M$  を  $G$  多様体とし、 $S$  を  $x$  におけるスライスとする。このとき、次の (1) から (5) が成り立つ。

- (1)  $x \in S$  と  $G_x S \subset S$  が成り立つ。
- (2)  $gS \cap S \neq \emptyset$  ならば  $g \in G_x$  が成り立つ。
- (3)  $GS = \{gs \mid g \in G, s \in S\}$  は  $M$  の開集合になる。
- (4)  $y \in S$  に対して  $G_y \subset G_x$  が成り立つ。
- (5)  $Gx$  が主軌道であり  $G_x$  がコンパクトならば、任意の  $y \in S$  に対して  $G_y = G_x$  が成り立つ。特に  $Gx$  の近傍の軌道はすべて同じ型になる。

証明  $S$  は  $x$  におけるスライスだから、軌道  $Gx$  の  $G$  不変な開近傍  $U$  と  $G$  同変レトラクション  $r : U \rightarrow Gx$  が存在し  $S = r^{-1}(x)$  となる。

- (1)  $g \in G_x, s \in S$  とすると、 $r$  が  $G$  同変であることから

$$r(gs) = gr(s) = gx = x$$

となり  $gs \in r^{-1}(x) = S$  を得る。よって、 $G_x S \subset S$  が成り立つ。

- (2)  $y \in gS \cap S$  をとると、 $y = gz$  となる  $z \in S$  が存在する。 $r$  が  $G$  同変であることから、

$$gx = gr(z) = r(gz) = r(y) = x.$$

よって、 $g \in G_x$  が成り立つ。

(3)  $u \in U$  をとると  $r(u) \in Gx$  となるので、ある  $g \in G$  が存在し  $r(u) = gx$  と書ける。 $x = g^{-1}r(u) = r(g^{-1}u)$  となり  $g^{-1}u = s \in r^{-1}(x) = S$  が成り立つ。これより  $u = gs \in GS$  となり、 $U \subset GS$  を得る。逆に  $g \in G$  と  $s \in S$  をとると  $gs \in gr^{-1}(x) = r^{-1}(gx) \subset U$  となり  $GS \subset U$  を得る。以上より、 $GS = U$  となり  $GS$  は  $M$  の開集合になる。

- (4)  $y \in S$  と  $g \in G_y$  をとる。 $r$  が  $G$  同変であることから、

$$gx = gr(y) = r(gy) = r(y) = x.$$

よって、 $g \in G_x$  となり  $G_y \subset G_x$  を得る。

(5)  $y \in S$  とすると (4) より  $G_y \subset G_x$  であり、 $G_x$  はコンパクトだから  $G_y$  もコンパクトになる。 $Gx$  は主軌道だから  $G_x \subset gG_y g^{-1}$  を満たす  $g \in G$  が存在する。二つのコンパクト Lie 群  $G_x$  と  $G_y$  が互いにその部分群と同型になるので、Lie 環は同型になり単位連結成分は等しい。さらに、コンパクトであることから連結成分の個数は有限個で等しくなる。したがって、 $G_y = G_x$  が成り立つ。このことから、 $Gx$  の近傍の軌道はすべて同じ型になる。

## 4.2 等長変換群

補題 4.2.1  $M$  を Riemann 多様体とし、 $\phi : M \rightarrow M$  を等長写像とする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\phi(\text{Exp}_p(X)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(d\phi_p(X)) \quad (p \in M, X \in T_pM).$$

証明 Riemann 多様体の指数写像の定義から

$$\mathbf{R} \rightarrow M; t \mapsto \text{Exp}_p(tX)$$

は  $M$  の測地線になる。 $\phi$  は等長写像だから  $\phi(\text{Exp}_p(tX))$  も  $M$  の測地線になる。この測地線の初期条件は  $\phi(\text{Exp}_p(0X)) = \phi(p)$  であり、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\text{Exp}_p(tX)) = d\phi_p \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}_p(tX) \right) = d\phi_p(X).$$

初期条件が一致することから、 $\phi(\text{Exp}_p(tX)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(td\phi_p(X))$  が成り立つ。特に  $t = 1$  とすると、 $\phi(\text{Exp}_p(X)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(d\phi_p(X))$  を得る。

系 4.2.2  $M$  を Riemann 多様体とし、 $\phi : M \rightarrow M$  を等長写像とする。このとき、 $\phi$  の不動点全体

$$F(\phi) = \{x \in M \mid \phi(x) = x\}$$

は  $M$  の全測地的部分多様体になる。

証明  $p \in F(\phi)$  をとる。 $T_pM$  内の原点中心の開円板  $U$  を  $\text{Exp}_p : U \rightarrow V \subset M$  が微分同型写像になり、 $V$  が  $M$  の開集合になるようにとる。このとき、 $V$  の任意の点は  $p$  と最短測地線で一意的に結ばれる。そこで、 $y \in F(\phi) \cap V$  をとると  $Y \in U$  が存在し、 $y = \text{Exp}_p(Y)$  となり、さらに  $t \mapsto \text{Exp}_p(tY)$  は  $p$  と  $y$  を結ぶ唯一の最短測地線になる。ところが、補題 4.2.1 より  $\text{Exp}_p(d\phi_p(Y)) = \phi(\text{Exp}_p(Y)) = \phi(y) = y$  となり、 $t \mapsto \text{Exp}_p(td\phi_p(Y))$  も  $p$  と  $y$  を結ぶ測地線になる。したがって、これらの二つの測地線は一致し、特に  $d\phi_p(Y) = Y$  が成り立つ。逆に  $Y \in U$  が  $d\phi_p(Y) = Y$  を満たせば、 $\phi(\text{Exp}_p(Y)) = \text{Exp}_p(d\phi_p(Y)) = \text{Exp}_p(Y)$  となり、 $\text{Exp}_p(Y) \in F(\phi)$  を得る。以上より

$$F(\phi) \cap V = \text{Exp}_p(\{X \in T_pM \mid d\phi_p(X) = X\} \cap U)$$

が成り立ち、特に、 $F(\phi)$  は部分多様体になる。

上の考察より  $F(\phi)$  の  $p$  における接ベクトル空間は

$$\{X \in T_pM \mid d\phi_p(X) = X\}$$

になり、これに接する  $M$  の測地線は  $F(\phi)$  に含まれるので、 $F(\phi)$  は  $M$  の全測地的部分多様体になる。

**定義 4.2.3**  $N$  を Riemann 多様体  $M$  に埋め込まれた閉部分多様体とする。 $r > 0$  に対して

$$T_r^\perp N = \{X \in T_x^\perp N \mid x \in N, |X| < r\}$$

とおく。 $\text{Exp}(T_r^\perp N)$  が  $M$  の開集合になり、 $\text{Exp} : T_r^\perp N \rightarrow \text{Exp}(T_r^\perp N)$  が微分同型写像になるとき、 $\text{Exp}(T_r^\perp N)$  を  $N$  の管状近傍と呼ぶ。

**注意 4.2.4** Riemann 多様体の部分多様体  $N$  がコンパクトのときは、十分小さい  $r > 0$  に対して  $\text{Exp}(T_r^\perp N)$  は  $N$  の管状近傍になるが、一般には管状近傍は存在するとは限らない。

**命題 4.2.5**  $M$  を Riemann 多様体とし、 $G$  を  $M$  の Lie 等長変換群とする。ある  $x \in M$  と  $r > 0$  に対して  $\text{Exp}(T_r^\perp(Gx))$  が軌道  $Gx$  の管状近傍であると仮定する。 $y \in Gx$  に対して  $S_y = \text{Exp}_y(T_r^\perp(Gx) \cap T_y M)$  とおくと、次の (1) と (2) が成り立つ。

- (1)  $g \in G$  に対して  $S_{gx} = gS_x$ .
- (2)  $S_x$  は  $x$  におけるスライスになる。

**証明** (1) 補題 4.2.1 より

$$\begin{aligned} gS_x &= g\text{Exp}_x(T_r^\perp(Gx) \cap T_x M) = \text{Exp}_{gx}(dg_x(T_r^\perp(Gx) \cap T_x M)) \\ &= \text{Exp}_{gx}(T_r^\perp(Gx) \cap T_{gx} M) = S_{gx}. \end{aligned}$$

- (2)  $\text{Exp}(T_r^\perp(Gx))$  が軌道  $Gx$  の管状近傍であることより、

$$\text{Exp} : T_r^\perp(Gx) \rightarrow \text{Exp}(T_r^\perp(Gx))$$

は微分同型写像になる。この微分同型写像を通して自然な射影  $\pi : T_r^\perp(Gx) \rightarrow Gx$  にレトラクション  $r : \text{Exp}(T_r^\perp(Gx)) \rightarrow Gx$  が対応する。すなわち  $y \in Gx$  に対して  $r(S_y) = \{y\}$  が成り立つ。補題 4.2.1 より  $\text{Exp}(T_r^\perp(Gx))$  は  $G$  不変になり、 $X \in T_r^\perp(Gx) \cap T_y M$  と  $g \in G$  に対して

$$r(g\text{Exp}_y(X)) = r(\text{Exp}_{gy}(dg(X))) = gy = gr(\text{Exp}_y(X)).$$

よって  $r : \text{Exp}(T_r^\perp(Gx)) \rightarrow Gx$  は  $G$  同変レトラクションになる。さらに、 $r^{-1}(x) = S_x$  が成り立つので、 $S_x$  は  $x$  におけるスライスになる。

**定義 4.2.6** 命題 4.2.5 の (2) のスライスを法スライスと呼ぶ。

**定義 4.2.7**  $M$  を Riemann 多様体とし、 $G$  を  $M$  の Lie 等長変換群とする。 $x \in M$  におけるイソトロピー部分群  $G_x$  の作用は  $x$  における軌道  $Gx$  を不変にし  $x$  を固定するので、接ベクトル空間  $T_x(Gx)$  を不変にする。したがって、その直交補空間  $T_x^\perp(Gx)$  も不変にする。 $G_x$  の  $T_x^\perp(Gx)$  への表現をスライス表現と呼ぶ。



定義 4.2.8  $\phi: X \rightarrow Y$  を位相空間の間の写像とする。  $Y$  内の任意のコンパクト部分集合  $C$  に対して  $\phi^{-1}(C)$  が  $X$  のコンパクト部分集合になるとき、  $\phi$  を固有写像と呼ぶ。  $G$  が多様体  $M$  の Lie 変換群であり、写像

$$G \times M \rightarrow M \times M; (g, x) \mapsto (gx, x)$$

が固有写像であるとき、  $G$  の  $M$  への作用は固有であるといい、  $G$  を  $M$  の固有 Lie 変換群と呼ぶ。

命題 4.2.9  $G$  を多様体  $M$  の固有 Lie 変換群とすると、各  $x \in M$  に対してイソトロピー部分群  $G_x$  はコンパクトになる。

証明 写像

$$G \times M \rightarrow M \times M; (g, x) \mapsto (gx, x)$$

を  $\phi$  で表す。  $G \times M$  の第一成分への射影を  $p_1$  で表すと、  $p_1$  は連続になる。  $x \in M$  に対して  $\{(x, x)\}$  は  $M \times M$  のコンパクト部分集合になるので、  $\phi^{-1}(x, x)$  は  $G \times M$  のコンパクト部分集合になる。

$$\phi^{-1}(x, x) = \{(g, x) \in G \times M \mid gx = x\}$$

だから  $G_x = p_1(\phi^{-1}(x, x))$  となり、  $G_x$  はコンパクトになる。

命題 4.2.10  $G$  を多様体  $M$  のコンパクト Lie 変換群とすると、  $G$  の  $M$  への作用は固有になる。

証明 写像

$$G \times M \rightarrow M \times M; (g, x) \mapsto (gx, x)$$

を  $\phi$  で表す。  $M \times M$  の第二成分への射影を  $p_2$  で表すと、  $p_2$  は連続写像になる。  $M \times M$  のコンパクト部分集合  $C$  を任意にとる。  $C$  は  $M \times M$  の閉部分集合になり、  $\phi$  は連続だから  $\phi^{-1}(C)$  は  $G \times M$  の閉部分集合になる。  $p_2$  は連続だから  $p_2(C)$  は  $M$  のコンパクト部分集合になる。

$$\phi^{-1}(C) = \{(g, x) \in G \times M \mid (gx, x) \in C\} \subset G \times p_2(C)$$

となり、  $G \times p_2(C)$  はコンパクトになるので、  $\phi^{-1}(C)$  もコンパクトになる。したがって、  $G$  の  $M$  への作用は固有である。

命題 4.2.11  $G$  を多様体  $M$  の Lie 変換群とする。  $G$  の  $M$  への作用が固有であるための必要十分条件は、  $M$  の任意のコンパクト部分集合  $K, L$  に対して  $\{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$  がコンパクトになることである。

証明  $G$  の  $M$  への作用が固有であると仮定する。  $M$  の任意のコンパクト部分集合  $K, L$  に対して  $L \times K$  は  $M \times M$  のコンパクト部分集合になる。仮定より

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(L \times K) &= \{(g, x) \in G \times M \mid gx \in L, x \in K\} \\ &= \{(g, x) \in G \times M \mid gx \in gK \cap L\} \end{aligned}$$

はコンパクトになる。よってこの部分集合の第一成分への射影

$$p_1(\phi^{-1}(L \times K)) = \{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$$

もコンパクトになる。

逆に  $M$  の任意のコンパクト部分集合  $K, L$  に対して  $\{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$  がコンパクトになると仮定する。 $M \times M$  のコンパクト部分集合  $C$  を任意にとる。 $C$  の第一成分への射影を  $L$  とし第二成分への射影を  $K$  とすると、 $K, L$  は  $M$  のコンパクト部分集合になり、 $C \subset L \times K$  が成り立つ。このとき、

$$\phi^{-1}(C) \subset \phi^{-1}(L \times K) \subset \{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\} \times K$$

となるので、 $\phi^{-1}(C)$  はコンパクトになる。したがって、 $G$  の  $M$  への作用は固有になる。

**命題 4.2.12**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とする。このとき、任意の  $p \in M$  に対して軌道  $Gp$  の管状近傍が存在し、 $p$  における法スライスが存在する。

**証明**  $r > 0$  に対して

$$B_r = \{X \in T_p M \mid |X| \leq r\}$$

とおく。指数写像  $\text{Exp}_p : B_r \rightarrow \text{Exp}_p(B_r)$  が微分同型写像になるように  $r > 0$  をとる。

$$\text{Exp}_p(B_r) \cap Gp = \{g \in G \mid g\{p\} \cap \text{Exp}_p(B_r) \neq \emptyset\}p$$

となるので、命題 4.2.11 より  $\text{Exp}_p(B_r) \cap Gp$  はコンパクトになる。よって、 $\text{Exp}_p(B_r) \cap Gp$  の連結成分は有限個になる。 $p$  を含む連結成分が  $\text{Exp}(D_r)$  となるように  $D_r \subset B_r$  をとる。連結成分は開かつ閉集合だから、 $p$  を含む連結成分を除いた

$$\text{Exp}_p(B_r) \cap Gp - \text{Exp}_p(D_r)$$

もコンパクトになる。これは  $p$  を含まないコンパクト部分集合になるので

$$d(p, \text{Exp}_p(B_r) \cap Gp - \text{Exp}_p(D_r)) = s > 0$$

となる。この  $s$  を使うと  $\text{Exp}_p(B_{s/2}) \cap Gp$  は連結になる。

$$\text{Exp} : T^\perp(Gp) \rightarrow M$$

の微分写像は  $0 \in T_p^\perp(Gp)$  において恒等写像とみなせるので、ある  $0 < t < s$  が存在し

$$\text{Exp} : T_t^\perp(Gp \cap \text{Exp}_p(B_t)) \rightarrow \text{Exp}(T_t^\perp(Gp \cap \text{Exp}_p(B_t)))$$

は微分同型写像になる。この写像は  $G$  同変なので、

$$\text{Exp} : T_t^\perp(Gp) \rightarrow \text{Exp}(T_t^\perp(Gp))$$

は挿入になる。

$$\text{Exp} : T_{t/2}^\perp(Gp) \rightarrow \text{Exp}(T_{t/2}^\perp(Gp))$$

が微分同型写像になることを以下で示す。そのためには単射になることを示せば十分である。 $X_i \in T_{t/2}^\perp(Gp)$  が  $\text{Exp}(X_1) = \text{Exp}(X_2)$  を満たすと仮定する。 $X_i \in T_{g_i p}^\perp(Gp)$  とすると  $dg_1^{-1}X_1 \in T_p^\perp(Gp)$  となり、

$$\text{Exp}(dg_1^{-1}X_1) = g_1^{-1}\text{Exp}(X_1) = g_1^{-1}\text{Exp}(X_2) = \text{Exp}(dg_1^{-1}X_2)$$

が成り立つ。これより

$$d(p, g_1^{-1}(g_2p)) \leq d(p, \text{Exp}(dg_1^{-1}X_1)) + d(\text{Exp}(dg_1^{-1}X_2), g_1^{-1}(g_2p)) \leq t < s$$

となり  $g_1^{-1}(g_2p)$  は  $\text{Exp}(B_t) \cap Gp$  に含まれる。 $t$  のとり方から

$$p = g_1^{-1}g_1p = g_1^{-1}g_2p, \quad dg_1^{-1}X_1 = dg_1^{-1}X_2$$

となり、 $X_1 = X_2$  が成り立つ。したがって、

$$\text{Exp} : T_{t/2}^\perp(Gp) \rightarrow \text{Exp}(T_{t/2}^\perp(Gp))$$

は微分同型写像になる。

以上より  $\text{Exp}(T_{t/2}^\perp(Gp))$  は  $Gp$  の管状近傍になり、命題 4.2.5 より法スライスが存在する。

**命題 4.2.13**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とする。 $x \in M$  とする。 $Gx$  が主軌道ならば、 $x$  におけるスライス表現は自明になる。

**証明** 命題 4.2.12 より  $x$  における法スライス  $S$  が存在する。さらに命題 4.2.9 より  $G_x$  はコンパクトになる。命題 4.1.11 の (5) より、任意の  $y \in S$  に対して  $G_y = G_x$  が成り立つ。よって、任意の  $g \in G_x$  に対して  $gy = y$  が成り立つ。 $S$  は  $x$  における法スライスだから、 $X \in T_x^\perp(Gx)$  と十分小さい  $t$  に対して  $\text{Exp}_x(tX) \in S$  となり、補題 4.2.1 より

$$\text{Exp}_x(tX) = g\text{Exp}_x(tX) = \text{Exp}_x(tdg_x X).$$

両辺を  $t = 0$  で微分すると

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}_x(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}_x(tdg_x X) = dg_x X.$$

これより、 $x$  におけるスライス表現は自明になる。

**系 4.2.14**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とする。 $x \in M$  とし、 $Gx$  は主軌道であると仮定する。このとき、 $X \in T_x^\perp(Gx)$  に対して  $\tilde{X}(gx) = dg_x X$  ( $g \in G$ ) によって  $\tilde{X}$  を定めることによって  $Gx$  の法ベクトル場  $\tilde{X}$  が定まる。これによって、主軌道  $Gx$  の法ベクトル束は自明になる。

証明  $gx = hx$  とすると、 $g^{-1}hx = x$  となり  $g^{-1}h \in G_x$  が成り立つ。命題 4.2.13 より  $d(g^{-1}h)_x X = X$  となり、 $dg_x X = dh_x X$  を得る。これは、 $\tilde{X}$  が well-defined であることを示している。

$dg_x T_x(Gx) = T_{gx}(Gx)$  が成り立つので、 $dg_x T_x^\perp(Gx) = T_{gx}^\perp(Gx)$  となり  $\tilde{X}(gx) = dg_x X \in T_x^\perp(Gx)$  を得る。したがって、 $\tilde{X}$  は  $Gx$  の法ベクトル場になる。

$X_1, \dots, X_k$  を  $T_x^\perp(Gx)$  の正規直交基底とする。写像  $\Phi : Gx \times \mathbb{R}^k \rightarrow T^\perp(Gx)$  を

$$\Phi(y, t_1, \dots, t_k) = t_1 \tilde{X}_1(y) + \dots + t_k \tilde{X}_k(y)$$

によって定めると、 $\Phi$  はベクトル束の同型写像になり、法ベクトル束  $T^\perp(Gx)$  は自明になる。

### 4.3 Riemann サブマーシオン

定義 4.3.1  $E$  と  $B$  を Riemann 多様体とする。 $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであるとは、任意の  $x \in E$  に対して  $d\pi_x : T_x E \rightarrow T_{\pi(x)} B$  は全射になり、 $d\pi_x : (\ker d\pi_x)^\perp \rightarrow T_{\pi(x)} B$  が等長線形同型写像になることである。 $\mathcal{V}_x = \ker d\pi_x$  を垂直部分空間と呼び、 $\mathcal{V} = \cup_x \mathcal{V}_x$  を接ベクトル束  $TE$  の垂直部分束と呼ぶ。 $\mathcal{H}_x = (\ker d\pi_x)^\perp$  を水平部分空間と呼び、 $\mathcal{H} = \cup_x \mathcal{H}_x$  を接ベクトル束  $TE$  の水平部分束と呼ぶ。

命題 4.3.2  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。

- (1)  $c : I \rightarrow B$  を滑らかな曲線とする。 $t_0 \in I$  と  $x_0 \in \pi^{-1}(c(t_0))$  をとると、ただ一つの曲線  $\tilde{c} : I \rightarrow E$  が存在し、 $\tilde{c}'(t)$  は水平部分空間に含まれ  $\pi(\tilde{c}) = c$  かつ  $\tilde{c}(t_0) = x_0$  を満たす。 $\tilde{c}$  を  $c$  の  $x_0$  における水平持ち上げと呼ぶ。
- (2)  $B$  上のベクトル場  $X$  に対してただ一つの  $E$  上のベクトル場  $\tilde{X}$  が存在し、任意の  $x \in E$  について  $\tilde{X}_x$  は水平部分空間に含まれ  $d\pi_x \tilde{X}_x = X_{\pi(x)}$  を満たす。 $\tilde{X}$  を  $X$  の水平持ち上げと呼ぶ。

補題 4.3.3  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。 $E$  上のベクトル場  $X$  が各点で垂直部分空間に含まれ、 $Y$  が  $B$  上のあるベクトル場の水平持ち上げになっているとき、 $[X, Y]$  は各点で垂直部分空間に含まれる。

証明 仮定より

$$d\pi[X, Y] = [d\pi X, d\pi Y] = [0, d\pi Y] = 0.$$

したがって、 $[X, Y]$  は各点で垂直部分空間に含まれる。

補題 4.3.4 Riemann 多様体の滑らかな曲線  $c$  に対して、その長さを  $L(c)$  で表す。 $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定すると、 $E$  の曲線  $c$  に対して  $L(\pi \circ c) \leq L(c)$  が成り立つ。等号成立の必要十分条件は、 $c$  の速度ベクトルが水平ベクトルになることである。

証明  $x \in E$  における接ベクトル  $X$  を水平成分と垂直成分に分解して

$$X = X^{\mathcal{H}} + X^{\mathcal{V}} \quad (X^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_x, X^{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}_x)$$

とすると、 $d\pi(X) = d\pi(X^{\mathcal{H}})$  となり

$$|d\pi(X)| = |d\pi(X^{\mathcal{H}})| = |X^{\mathcal{H}}| \leq \sqrt{|X^{\mathcal{H}}|^2 + |X^{\mathcal{V}}|^2} = |X|$$

が成り立つ。等号成立の必要十分条件は、 $X^{\mathcal{V}} = 0$  となることだから、 $X$  が水平ベクトルになることである。

曲線  $c$  の定義域を  $I$  で表すと、次の不等式を得る。

$$L(\pi \circ c) = \int_I |(\pi \circ c)'(t)| dt = \int_I |d\pi(c'(t))| dt \leq \int_I |c'(t)| dt = L(c).$$

等号成立の必要十分条件は  $|d\pi(c'(t))| = |c'(t)|$  だから、上で示したことから  $c'(t)$  が水平ベクトルになることである。

命題 4.3.5  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーションであると仮定する。 $B$  の測地線  $\gamma$  に対して、その水平持ち上げを  $\tilde{\gamma}$  で表す。このとき、次の (1) から (4) が成り立つ。

- (1)  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .
- (2) すべての  $t$  について  $\tilde{\gamma}$  は  $\pi^{-1}(\gamma(t))$  に直交する。
- (3)  $\gamma$  が  $B$  の二点  $p$  と  $q$  を結ぶ最短測地線るとき、 $L(\tilde{\gamma}) = d(\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q))$  が成り立つ。
- (4)  $\tilde{\gamma}$  は  $E$  の測地線になる。

証明 (1)  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  であり、 $\tilde{\gamma}$  の速度ベクトルは水平ベクトルになるので、補題 4.3.4 より  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$  が成り立つ。

(2) 各  $t \in I$  について  $T_{\tilde{\gamma}(t)}(\pi^{-1}(\gamma(t))) = \ker d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}$  であり、 $\tilde{\gamma}(t)$  は水平持ち上げだから  $\tilde{\gamma}'(t)$  は  $T_{\tilde{\gamma}(t)}(\pi^{-1}(\gamma(t)))$  に直交する。

(3)  $x, y \in E$  に対して

$$d(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ } E \text{ の曲線}\}.$$

さらに

$$d(\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \pi^{-1}(p), y \in \pi^{-1}(q)\}$$

だから、

$$\begin{aligned} & d(\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)) \\ &= \inf\{L(c) \mid \text{曲線 } c : [a, b] \rightarrow E \text{ は } c(a) \in \pi^{-1}(p), c(b) \in \pi^{-1}(q) \text{ を満たす.}\} \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、曲線  $c : [a, b] \rightarrow E$  であって  $c(a) \in \pi^{-1}(p)$ ,  $c(b) \in \pi^{-1}(q)$  を満たすものをとると、 $\pi \circ c$  は  $p$  と  $q$  を結ぶ曲線になるので、

$$L(c) \geq L(\pi \circ c) \geq L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}).$$

したがって、 $L(\tilde{\gamma}) = d(\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q))$  が成り立つ。

(4) 上の (3) で示したことより、 $\tilde{\gamma}$  は局所的には最短になるので、特に測地線になる。

系 4.3.6  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。 $c : I \rightarrow E$  が測地線であって、ある  $t_0 \in I$  に対して  $c'(t_0)$  が水平ベクトルならば、任意の  $t \in I$  に対して  $c'(t)$  は水平ベクトルになる。

証明  $\gamma(t_0) = \pi(c(t_0))$  かつ  $\gamma'(t_0) = d\pi(c'(t_0))$  を満たす  $B$  の測地線  $\gamma$  をとる。 $\tilde{\gamma}(t_0) = c(t_0)$  を満たす  $\gamma$  の水平持ち上げ  $\tilde{\gamma}$  をとると、命題 4.3.5 より  $\tilde{\gamma}$  は  $E$  の測地線になる。測地線の初期条件に関する一意性から  $\tilde{\gamma}(t) = c(t)$  が成り立つ。したがって、任意の  $t \in I$  に対して  $c'(t)$  は水平ベクトルになる。

系 4.3.7  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。

- (1) 水平部分束  $\mathcal{H}$  が積分可能ならば、その積分多様体は全測地的になる。
- (2) 水平部分束  $\mathcal{H}$  が積分可能であり、 $S$  をその積分多様体とすると、 $\pi|_S$  は局所等長写像になる。

証明 (1) は系 4.3.6 よりわかる。(2) は Riemann サブマーシオンの定義から従う。

定義 4.3.8 Riemann サブマーシオン  $\pi : E \rightarrow B$  の水平部分束が積分可能のとき、 $\pi : E \rightarrow B$  を積分可能という。

補題 4.3.9  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。 $E$  の接ベクトル  $X$  に対して、 $X$  の垂直成分を  $X^\nu$  で表し  $X$  の水平成分を  $X^{\mathcal{H}}$  で表す。 $E$  の接ベクトル  $X, Y$  に対して、

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= (\nabla_{X^\nu} Y^\nu)^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^\nu} Y^{\mathcal{H}})^\nu, \\ A(X, Y) &= (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^\nu + (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^\nu)^{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

によって  $T(X, Y)$  と  $A(X, Y)$  を定めると、 $T$  と  $A$  は  $E$  上の (1, 2) 型テンソル場になる。

証明  $E$  上の  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= (\nabla_{fX^\nu} Y^\nu)^{\mathcal{H}} + (\nabla_{fX^\nu} Y^{\mathcal{H}})^\nu = f(\nabla_{X^\nu} Y^\nu)^{\mathcal{H}} + f(\nabla_{X^\nu} Y^{\mathcal{H}})^\nu \\ &= fT(X, Y), \\ T(X, fY) &= (\nabla_{X^\nu} fY^\nu)^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^\nu} fY^{\mathcal{H}})^\nu \\ &= [(X^\nu f)Y^\nu + f\nabla_{X^\nu} Y^\nu]^{\mathcal{H}} + [(X^\nu f)Y^{\mathcal{H}} + f\nabla_{X^\nu} Y^{\mathcal{H}}]^\nu \\ &= f(\nabla_{X^\nu} Y^\nu)^{\mathcal{H}} + f(\nabla_{X^\nu} Y^{\mathcal{H}})^\nu \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

したがって、 $T$  は  $E$  上の (1, 2) 型テンソル場になる。

$$\begin{aligned} A(fX, Y) &= (\nabla_{fX^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} + (\nabla_{fX^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} = f(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} + f(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} \\ &= fA(X, Y), \\ A(X, fY) &= (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} fY^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} + (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} fY^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} \\ &= [(X^{\mathcal{H}} f)Y^{\mathcal{H}} + f\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}} + [(X^{\mathcal{H}} f)Y^{\mathcal{V}} + f\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}}]^{\mathcal{H}} \\ &= f(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} + f(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} \\ &= fA(X, Y). \end{aligned}$$

したがって、 $A$  は  $E$  上の (1, 2) 型テンソル場になる。

**定理 4.3.10**  $\pi : E \rightarrow B$  が Riemann サブマーシオンであると仮定する。次の (1) から (3) は同値になる。

- (1)  $\pi : E \rightarrow B$  は積分可能になる。
- (2) 任意の  $b \in B$  と  $X \in T_b B$  に対して、 $X$  の水平持ち上げ  $\tilde{X}$  は  $\pi^{-1}(b)$  の法接続に関する平行法ベクトル場になる。
- (3)  $A = 0$  が成り立つ。

**証明** (1) が成り立つと仮定する。 $\mathcal{H}$  の積分多様体の第二基本形式を  $h$  で表し、シェイプ作用素を  $S$  で表す。これらの定義から

$$A(X, Y) = h(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - S_{Y^{\mathcal{V}}} X^{\mathcal{H}}$$

が成り立つ。系 4.3.7 の (1) より積分多様体は全測地的になるので、 $h = 0$  と  $S = 0$  が成り立ち、 $A = 0$  となる。したがって、(3) が成り立つ。

逆に (3) が成り立つと仮定する。 $E$  上の各点で水平部分空間に含まれるベクトル場  $X, Y$  に対して

$$0 = A(X, Y) = (\nabla_X Y)^{\mathcal{V}}$$

となるので、 $\nabla_X Y$  は各点で水平部分空間に含まれる。よって、

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

も各点で水平部分空間に含まれ、水平部分束  $\mathcal{H}$  は積分可能になり (1) が成り立つ。

$E$  上のベクトル場  $X$  が各点で垂直部分空間に含まれ、 $Y$  が  $B$  上のあるベクトル場の水平持ち上げになっているとき、補題 4.3.3 より  $[X, Y]$  は各点で垂直部分空間に含まれる。

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

となり、(1) が成り立つとき  $\mathcal{H}$  の積分多様体は全測地的になるので、 $\nabla_Y X$  は各点で垂直部分空間に含まれる。したがって、 $\nabla_X Y$  も垂直部分空間に含まれる。これは  $B$  の各点の

$\pi$  による逆像上で  $Y$  が法接続に関して平行法ベクトル場になることを意味している。したがって、(2) が成り立つ。

逆に (2) が成り立つと仮定する。 $B$  上のベクトル場  $X, Y$  に対して、それらの水平持ち上げ  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  のブラケット  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  が水平になることを示せば、 $\pi : E \rightarrow B$  は積分可能になり (1) が成り立つ。

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}$$

より  $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  が水平になることを示せば十分である。任意の垂直ベクトル場  $T$  に対して

$$\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, T \rangle = -\langle \tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}} T \rangle = -\langle \tilde{Y}, [\tilde{X}, T] + \nabla_T \tilde{X} \rangle.$$

補題 4.3.3 より  $[\tilde{X}, T]$  は垂直ベクトル場になり、(2) より  $\nabla_T \tilde{X}$  の水平成分は 0 になる。したがって、 $\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, T \rangle = 0$  となり、 $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  は水平になる。 $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  も水平になり、 $\pi : E \rightarrow B$  は積分可能になる。これより (1) が成り立つ。

命題 4.3.11  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とし、 $G$  のすべての軌道は同じ型であると仮定する。このとき、軌道全体の集合  $\tilde{M}$  は多様体構造を持ち、

$$p : M \rightarrow \tilde{M}; x \rightarrow Gx$$

はファイバー束になる。さらに  $p : M \rightarrow \tilde{M}$  が Riemann サブマーシオンになるような  $\tilde{M}$  の Riemann 計量がただ一つ存在する。

証明 命題 4.2.12 より任意の  $x \in M$  に対して  $x$  における法スライス  $S$  が存在する。仮定よりすべての軌道は同じ型だから、特にすべての軌道が主軌道になる。命題 4.2.13 の証明中に示したように、任意の  $y \in S$  に対して  $G_y = G_x$  が成り立つ。 $p|_S$  が単射になることを示す。 $y, z \in S$  に対して  $p(y) = p(z)$  が成り立つと仮定する。このとき、ある  $g \in S$  が存在して  $z = gy$  が成り立つ。よって  $z \in gS \cap S$  となり、命題 4.1.11 の (2) より  $g \in G_x = G_y$  を得る。したがって、 $z = gy = y$  となり、 $p|_S$  は単射になる。そこで、 $p|_S : S \rightarrow p(S) \subset \tilde{M}$  が微分同型になるように  $p(S) \subset \tilde{M}$  に多様体構造を導入する。別の点  $x_1 \in M$  における法スライス  $S_1$  をとり、 $p(S) \cap p(S_1) \neq \emptyset$  と仮定する。命題 4.1.11 の (3) より  $GS_1$  は開集合だから、

$$\{y \in S \mid p(y) \in p(S) \cap p(S_1)\} = S \cap GS_1$$

は  $S$  の開部分集合になる。 $y \in S \cap GS_1$  に対して  $p(y) = p(y_1)$  となる  $y_1 \in S_1$  をとると、 $p|_{S_1}$  も単射であることから、このような  $y_1 \in S_1$  は一意的に定まる。そこで  $y_1 = \phi(y)$  と書く。

$$\Phi_S : G/G_x \times S \rightarrow GS; (gG_x, y) \mapsto gy$$

は微分同型写像になり、 $\phi(y) = pr_2 \circ \Phi_{S_1}^{-1} \circ \Phi_S(G_x, y)$  となるので、 $\phi$  は  $C^\infty$  級写像になる。同様に逆写像も  $C^\infty$  級写像になり、 $\phi$  は微分同型写像になる。したがって、 $p|_S : S \rightarrow p(S) \subset \tilde{M}$  によって定めた多様体構造は  $\tilde{M}$  全体に多様体構造を定める。

微分同型写像  $\Phi_S$  は  $GS$  における  $p : M \rightarrow \tilde{M}$  の局所自明性を示しているので、 $p : M \rightarrow \tilde{M}$  はファイバー束になる。



$p : M \rightarrow \tilde{M}$  がファイバー束になることから、特にサブマーシオンになる。よって、各  $x \in M$  に対して  $dp_x : T_x^\perp(Gx) \rightarrow T_{p(x)}\tilde{M}$  は線形同型写像になる。 $p : M \rightarrow \tilde{M}$  が Riemann サブマーシオンになるためには、この線形同型写像が等長的になるしかない。そこでこの線形同型写像が等長的になるように  $T_{p(x)}\tilde{M}$  に計量を導入する。他の  $y \in M$  についても  $p(y) = p(x)$  となるときは、ある  $g \in G$  が存在し  $y = gx$  を満たす。このとき  $gGx = Gy$  となるので、 $dg_x(T_x(Gx)) = T_y(Gy)$  となり  $dg_x(T_x^\perp(Gx)) = T_y^\perp(Gy)$  が成り立つ。さらに  $p \circ g = p$  だから  $dp_y \circ dg_x = dp_x$  となり、上の  $T_{p(x)}\tilde{M}$  の計量は  $x$  のとり方に依存しない。これによって  $\tilde{M}$  に Riemann 計量が定まり、 $p : M \rightarrow \tilde{M}$  は Riemann サブマーシオンになる。

#### 4.4 等長変換群の断面

**補題 4.4.1**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の等長 Lie 変換群とする。 $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の元  $X$  と  $M$  の測地線  $\gamma(t)$  に対して関数  $\langle \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle$  は一定になる。

**証明**  $X$  は等長変換から生成されるので、 $M$  上の Killing ベクトル場になる。よって任意のベクトル場  $Z$  に対して  $\langle \nabla_Z X, Z \rangle = 0$  が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle = \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle + \langle \gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} X(\gamma(t)) \rangle = 0$$

これより  $\langle \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle$  は一定になる。

**命題 4.4.2**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の等長 Lie 変換群とする。 $x \in M$  に対して  $T(x) = \text{Exp}_x(T_x^\perp(Gx))$  によって  $T(x)$  を定める。 $M$  の正則点の全体を  $M_r$  で表し、 $T_r(x) = T(x) \cap M_r$  とおく。このとき、 $x \in M$  に対して次の (1) から (3) が成り立つ。

- (1)  $g \in G$  に対して  $gT(x) = T(gx)$  と  $gT_r(x) = T_r(gx)$  が成り立つ。
- (2)  $v \in T_x^\perp(Gx)$  に対して測地線  $\gamma(t) = \text{Exp}_x(tv)$  は交わる軌道に直交する。
- (3)  $G$  がコンパクトならば、 $T(x)$  はすべての軌道と交わる。

**証明** (1)  $v \in T_x^\perp(Gx)$  に対して  $dg_x(v) \in T_{gx}^\perp(Gx)$  となるので、補題 4.2.1 より

$$g\text{Exp}_x(v) = \text{Exp}_{gx}(dg_x v) \in T(gx).$$

これより  $gT(x) \subset T(gx)$  となり、 $T(x) \subset g^{-1}T(gx) \subset T(x)$  だから、 $gT(x) = T(gx)$  を得る。さらに、 $G$  の作用は正則点を正則点に写すので、 $gT_r(x) = T_r(gx)$  が成り立つ。

(2) 命題 4.1.6 の (3) より、任意の  $y \in M$  に対して

$$T_y(Gy) = \{X(y) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

が成り立つことに注意しておく。  $X \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\langle \gamma'(0), X(x) \rangle = \langle v, X(x) \rangle = 0$$

だから、補題 4.4.1 より  $\langle \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle = 0$  が成り立つ。したがって、各  $t$  について  $\gamma'(t)$  は  $T_{\gamma(t)}(G\gamma(t))$  に直交する。

(3)  $G$  はコンパクトだから、任意の  $y \in M$  に対して  $Gy$  はコンパクトになる。したがって、 $x$  と  $Gy$  の距離を与える測地線  $\gamma(t)$  が存在する。距離を与えることから  $\gamma(t)$  は  $Gy$  に直交する。(2) より  $\gamma(t)$  は  $Gx$  とも直交することになり、 $\gamma(\mathbb{R}) \subset T(x)$  が成り立つ。したがって、 $T(x)$  は  $Gy$  と交わる。以上より  $T(x)$  はすべての軌道と交わる。

**定義 4.4.3**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の等長 Lie 変換群とする。  $\Sigma$  を  $M$  の連結閉部分多様体とする。  $\Sigma$  がすべての軌道と直交するとき、  $\Sigma$  を断面と呼ぶ。

**例 4.4.4**  $G$  をコンパクト連結 Lie 群とし、  $G$  の極大トーラス  $T$  をとる。このとき、定理 1.4.2 より

$$(*) \quad G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これより Lie 環に関しても同様の等式が成り立つ。

$$(**) \quad \mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \text{Ad}(g)\mathfrak{t}.$$

$G$  に両側不変 Riemann 計量を導入し、それから定まる内積を  $\mathfrak{g}$  に導入する。この  $\mathfrak{g}$  の内積は  $\text{Ad}(G)$  不変内積になる。したがって、  $G$  は  $\text{Ad}$  による作用によって  $\mathfrak{g}$  の等長 Lie 変換群になる。この作用に関して  $\mathfrak{t}$  が断面になることを示す。(\*\*) よりすべての軌道が  $\mathfrak{t}$  と交わることがわかる。  $H \in \mathfrak{t}$  に対して  $H$  を通る軌道  $\text{Ad}(G)H$  が  $\mathfrak{t}$  に直交することを示す。

$$T_H(\text{Ad}(G)H) = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tX)H \mid X \in \mathfrak{g} \right\} = \{[H, X] \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

任意の  $H_1 \in \mathfrak{t}$  に対して

$$\langle [H, X], H_1 \rangle = -\langle X, [H, H_1] \rangle = 0$$

となるので、  $T_H(\text{Ad}(G)H)$  は  $\mathfrak{t}$  に直交する。したがって、  $G$  の  $\text{Ad}$  による  $\mathfrak{g}$  への作用に関して  $\mathfrak{t}$  は断面になる。

$G$  は  $G$  自身に  $g \cdot x = gxg^{-1}$  によって作用する。この作用に関して  $G$  は  $G$  の等長 Lie 変換群になる。  $T$  がこの作用に関して断面になることを示す。(\*) よりすべての軌道が  $T$  と交わることがわかる。  $T$  の任意の元はある  $H \in \mathfrak{t}$  によって  $\exp H$  と表すことができるので、  $\exp H$  を通る軌道  $G \cdot \exp H$  が  $T$  に直交することを示す。

$$T_{\exp H}(G \cdot \exp H) = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX \exp H (\exp tX)^{-1} \mid X \in \mathfrak{g} \right\}$$

となるので、右辺の微分を計算する。

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX \exp H (\exp tX)^{-1} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp H \exp(t \operatorname{Ad}(\exp H)^{-1} X) \exp(-tX) \\ &= dL_{\exp H}(\operatorname{Ad}(\exp H)^{-1} X - X). \end{aligned}$$

ここで、 $dL_{\exp H} : T_e G \rightarrow T_{\exp H} G$  は等長線形同型写像であって、 $dL_{\exp H} \mathfrak{t} = T_{\exp H} T$  だから、 $T_{\exp H}(G \cdot \exp H)$  が  $T_{\exp H} T$  と直交することを示すためには、

$$\{\operatorname{Ad}(\exp H)^{-1} X - X \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

が  $\mathfrak{t}$  と直交することを示せばよい。任意の  $H_1 \in \mathfrak{t}$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Ad}(\exp H)^{-1} X - X, H_1 \rangle &= \langle \operatorname{Ad}(\exp H)^{-1} X, H_1 \rangle - \langle X, H_1 \rangle \\ &= \langle X, \operatorname{Ad}(\exp H) H_1 \rangle - \langle X, H_1 \rangle \\ &= \langle X, H_1 \rangle - \langle X, H_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $T_{\exp H}(G \cdot \exp H)$  は  $T_{\exp H} T$  に直交する。したがって、 $G$  の  $G$  自身への作用に関して  $T$  は断面になる。

**定義 4.4.5**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とする。このとき、 $G$  は  $M$  の正則点全体  $M_r$  の固有等長 Lie 変換群にもなる。さらに  $M_r$  におけるすべての軌道は同じ型になるので、命題 4.3.11 の仮定が満たされ、主軌道全体の集合  $\tilde{M}_r$  は多様体構造を持ち、

$$\pi : M_r \rightarrow \tilde{M}_r ; x \rightarrow Gx$$

はファイバー束になる。さらに  $\pi : M_r \rightarrow \tilde{M}_r$  が Riemann サブマーシオンになるような  $\tilde{M}_r$  の Riemann 計量がただ一つ存在する。この Riemann サブマーシオンに関する水平分布を  $M$  の主水平分布と呼ぶ。

**定理 4.4.6**  $G$  を Riemann 多様体  $M$  の固有等長 Lie 変換群とし、断面  $\Sigma$  を持つと仮定する。このとき、次が成り立つ。

- (1)  $\Sigma_r = \Sigma \cap M_r$  の各連結成分は主水平分布  $\mathcal{H}$  の積分多様体になる。
- (2)  $\mathcal{H}$  は積分可能になる。
- (3)  $\Sigma$  は全測地的部分多様体になる。
- (4)  $x \in M_r$  について  $T(x) = \operatorname{Exp}_x(T_x^\perp(Gx))$  は  $x$  を通る断面になる。

証明 (1)  $\Sigma$  が断面であることから  $\Sigma$  はすべての軌道と交わるので、 $p|_{\Sigma_r} : \Sigma_r \rightarrow \tilde{M}_r$  は全射になり各  $x \in \Sigma_r$  について  $T_x^\perp \Sigma_r \subset \ker dp_x = T_x(Gx)$  が成り立つ。また  $\Sigma$  はすべての軌道と直交するので、 $T_x^\perp \Sigma_r \supset T_x(Gx)$  となり、 $T_x^\perp \Sigma_r = T_x(Gx)$  を得る。したがって、 $T_x \Sigma_r = \mathcal{H}_x$  となり、 $\Sigma_r$  の各連結成分は  $\mathcal{H}$  の積分多様体になる。

(2) 任意の  $x \in M_r$  について、ある  $g \in G$  が存在し  $gx \in \Sigma_r$  が成り立つ。このとき、 $g^{-1}\Sigma_r$  の  $x$  を含む連結成分は  $x$  を通る  $\mathcal{H}$  の積分多様体になるので、主水平分布  $\mathcal{H}$  は積分可能になる。

(3) 系 4.3.7 の (1) より  $\Sigma$  は全測地的になる。さらに、正則点全体  $M_r$  は開集合であり  $M$  内で稠密になるので、 $\Sigma$  も全測地的になる。

(4)  $\Sigma$  に  $G$  を作用させることによって  $g\Sigma$  が  $x$  を含むようにできる。(3) より  $g\Sigma$  は全測地的になるので、 $g\Sigma = \text{Exp}_x(T_x^\perp(Gx))$  が成り立ち、これが  $x$  を通る断面になる。

例 4.4.7  $U(1)$  の  $\mathbb{C}^2$  への作用を

$$u \cdot (z_1, z_2) = (uz_1, uz_2) \quad (u \in U(1), (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)$$

によって定める。 $u \cdot (z_1, z_2) = (z_1, z_2)$  が成り立つための必要十分条件は、 $(z_1, z_2) \neq 0$  のとき  $u = 1$  であり、 $(z_1, z_2) = 0$  のとき  $u \in U(1)$  である。これより、正則点の全体  $\mathbb{C}_r^2$  は  $\mathbb{C}_r^2 = \mathbb{C}^2 - \{0\}$  となる。 $p = (1, 0)$  は正則点になる。 $p$  を通る軌道は次のようになる。

$$U(1)p = \{(z, 0) \mid |z| = 1\}.$$

もし  $p$  を通る断面  $\Sigma$  が存在するならば、定理 4.4.6 より  $\Sigma = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  が成り立つ。これらより  $\Sigma_r = \mathbb{R} \times \mathbb{C} - \{0\}$  となる。 $p_1 = (0, 1) \in \Sigma_r$  を通る軌道は次のようになる。

$$U(1)p_1 = \{(0, z) \mid |z| = 1\}.$$

これより  $U(1)p_1 \subset \Sigma_r$  となり、これらは直交しない。したがって、この  $U(1)$  の  $\mathbb{C}^2$  への作用に関する断面は存在しない。