数理物質科学研究科

理工学研究科

微分幾何学 II

等質空間の積分幾何学

田崎博之

2002 年度

微分幾何学 II

Differential Geometry II

開講授業科目概要

等質空間における積分幾何学の解説を行なう。多様体上の積分に関するいくつかの準備を行なった後、等質空間の Poincaré の積分公式を定式化する。複素射影空間の場合に積分公式をさらに詳しく調べる。積分公式の変分問題への応用についても考察する。

目 次

第1章　多様体上の積分

一つのベクトル空間からその上のテンソル代数と外積代数を定め、元のベクトル空間の内積から外積代数の内積を定める。この外積代数の内積を使って Riemann 多様体上の測度を定義し、その測度に関する積分の基本的性質を述べる。特に、1.5 節で述べる余面積公式（定理 1.5.5）は積分幾何学において重要な役割を演じる。

1.1　テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間 V に対して、$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q}$ 上で定義された $p+q$ 変数の実数値多重線形写像を V 上の (p,q) **型テンソル** と呼び、その全体を $T^{(p,q)}(V)$ で表す。$T^{(p,q)}(V)$ を (p,q) **型テンソル代数** と呼ぶ。$T^{(p,q)}(V)$ は自然な加法とスカラー倍によって実ベクトル空間になる。V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と V^* の元 $f_1, \ldots, f_q$ に対して、

$$
\begin{aligned}
& (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q)(g_1, \ldots, g_p, v_1, \ldots, v_q) \\
= \ & g_1(u_1) \cdots g_p(u_p) f_1(v_1) \cdots f_q(v_q) \\
& (g_1, \ldots, g_p \in V^*,\ v_1, \ldots, v_q \in V)
\end{aligned}
$$

によって写像

$$
u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q} \longrightarrow \mathbf{R}
$$

を定めると、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q$ は V 上の (p,q) 型テンソルになる。

命題 1.1.2 V を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$
\begin{array}{ccc}
\overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{q} & \longrightarrow & T^{(p,q)}(V) \\
(u_1, \ldots, u_p, f_1, \ldots, f_q) & \longmapsto & u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q
\end{array}
$$

は多重線形写像にになる。

証明　定義 1.1.1 での定め方より、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q$ は u_i と f_j に関して線形になる。したがって、上の写像は多重線形写像になる。

命題 1.1.3 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とする。すると、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。特に、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になる。

証明　まず $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} = 0 \qquad (a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \in \mathbf{R})$$

とする。$1 \leq k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q \leq n$ となる $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q$ をとり、

$$(f^{k_1}, \ldots, f^{k_p}, u_{l_1}, \ldots, u_{l_q})$$

を上の式に代入すると $a^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} = 0$ となる。したがって $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$ は線形独立である。

次に $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$ は $T^{(p,q)}V$ を生成することを示す。$T^{(p,q)}V$ の元 A を任意に一つとる。V の元 v に対して

$$v = \sum_{i=1}^{n} f^i(v) u_i$$

となり、V^* の元 g に対して

$$g = \sum_{j=1}^{n} g(u_j) f^j$$

となるので、A の多重線形性より $g_1, \ldots, g_p \in V^*$ と $v_1, \ldots, v_q \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
& A(g_1, \ldots, g_p, v_1, \ldots, v_q) \\
= \; & A\left(\sum_{j_1=1}^{n} g_1(u_{j_1}) f^{j_1}, \ldots, \sum_{j_p=1}^{n} g_p(u_{j_p}) f^{j_p}, \sum_{i_1=1}^{n} f^{i_1}(v_1) u_{i_1}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n} f^{i_q}(v_q) u_{i_q}\right) \\
= \; & \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_q=1 \\ j_1,\ldots,j_p=1}}^{n} g_1(u_{j_1}) \cdots g_p(u_{j_p}) f^{i_1}(v_1) \cdots f^{i_q}(v_q) A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_q}) \\
= \; & \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_q=1 \\ j_1,\ldots,j_p=1}}^{n} A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_q}) \\
& \times (u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_p} \otimes f^{i_1} \otimes \cdots \otimes f^{i_q})(g_1, \ldots, g_p, v_1, \ldots, v_q).
\end{aligned}$$

よって、

$$A = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_q=1\\ j_1,\ldots,j_p=1}}^{n} A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p},u_{i_1},\ldots,u_{i_q})u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_p}\otimes f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_q}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ は $T^{(p,q)}V$ を生成する。
　以上で

$$u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\quad (1\le i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\le n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になることがわかった。これより、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になる。

命題 1.1.4 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F:V\longrightarrow W$ を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像

$$F^{(p,0)}:T^{(p,0)}(V)\longrightarrow T^{(p,0)}(W)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $v_1,\ldots,v_p\in V$ に対して

$$F^{(p,0)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=F(v_1)\otimes\cdots\otimes F(v_p)$$

が成り立つ。また次の条件を満たす線形写像

$$F^{(0,q)}:T^{(0,q)}(W)\longrightarrow T^{(0,q)}(V)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $f_1,\ldots,f_q\in W^*$ に対して

$$F^{(0,q)}(f_1\otimes\cdots\otimes f_q)=(f_1\circ F)\otimes\cdots\otimes(f_q\circ F)$$

が成り立つ。

　証明　$T^{(p,0)}V$ の元 A に対して

$$F^{(p,0)}(A)(f_1,\ldots,f_p)=A(f_1\circ F,\ldots,f_p\circ F)\qquad (f_1,\ldots,f_p\in W^*)$$

とおくと、$f_1,\ldots,f_p$ に関して多重線形になり $F^{(p,0)}(A)\in T^{(p,0)}(W)$ となる。上の定義式から $F^{(p,0)}$ が線形写像であることもわかる。$f_1,\ldots,f_p\in W^*$ に対して

$$\begin{aligned}F^{(p,0)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)(f_1,\ldots,f_p) &= (v_1\otimes\cdots\otimes v_p)(f_1\circ F,\ldots,f_p\circ F)\\ &= (f_1\circ F)(v_1)\cdots(f_p\circ F)(v_p)\\ &= (F(v_1)\otimes\cdots\otimes F(v_p))(f_1,\ldots,f_p)\end{aligned}$$

となるので、

$$F^{(p,0)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=F(v_1)\otimes\cdots\otimes F(v_p)$$

が成り立つ。命題 1.1.3 より条件は $T^{(p,0)}(V)$ の基底の像を定めているので、このような $F^{(p,0)}$ は一意的である。

$T^{(0,q)}W$ の任意の元 B に対して

$$F^{(0,q)}(B)(v_1,\ldots,v_q)=B(F(v_1),\ldots,F(v_q))\qquad(v_1,\ldots,v_q\in V)$$

とおくと、$v_1,\ldots,v_q$ に関して多重線形になり $F^{(0,q)}(B)\in T^{(0,q)}(V)$ となる。上の定義式から $F^{(0,q)}$ が線形写像であることもわかる。$v_1,\ldots,v_q\in V$ に対して

$$\begin{aligned}F^{(0,q)}(f_1\otimes\cdots\otimes f_q)(v_1,\ldots,v_q) &= (f_1\otimes\cdots\otimes f_q)(F(v_1),\ldots,F(v_q))\\ &= f_1(F(v_1))\cdots f_q(F(v_q))\\ &= ((f_1\circ F)\otimes\cdots\otimes(f_q\circ F))(v_1,\ldots,v_q)\end{aligned}$$

となるので、

$$F^{(p,0)}(f_1\otimes\cdots\otimes f_q)=(f_1\circ F)\otimes\cdots\otimes(f_q\circ F)$$

が成り立つ。命題 1.1.3 より条件は $T^{(0,q)}(W)$ の基底の像を定めているので、このような $F^{(0,q)}$ は一意的である。

1.2　外積代数

定義 1.2.1 有限次元実ベクトル空間 V に関する $T^{(p,0)}(V)$ の元 A と $1\le i<j\le p$ に対して

$$(t_{i,j}A)(f_1,\ldots,f_p)=A(f_1,\ldots,\overset{i}{\smile}{f_j},\ldots,\overset{j}{\smile}{f_i},\ldots,f_p)\qquad(f_1,\ldots,f_p\in V^*)$$

とおくと、線形写像 $t_{i,j}:T^{(p,0)}(V)\to T^{(p,0)}(V)$ が定まる。

$$\wedge^pV=\{A\in T^{(p,0)}(V)\mid t_{i,j}A=-A\ (1\le i<j\le p)\}$$

を p **次外積代数** と呼ぶ。

補題 1.2.2 $\{1,\ldots,p\}$ の元の置換全体から成る群を S_p で表す。V の元 $u_1,\ldots,u_p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_p=\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)}$$

とおくと、$\wedge^pV$ の元 $u_1\wedge\cdots\wedge u_p$ が定まる。

証明　$\{1,\ldots,p\}$ の二元 i,j $(i<j)$ に対して、i と j の互換を $\tau\in S_p$ で表すことにする。$f_1,\ldots,f_p\in V^*$ について、

$$(u_1\wedge\cdots\wedge u_p)(f_1,\ldots,\overset{i}{\smile}{f_j},\ldots,\overset{j}{\smile}{f_i},\ldots,f_p)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)})(f_1,\ldots,\overset{i}{\breve{f_j}},\ldots,\overset{j}{\breve{f_i}},\ldots,f_p) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)f_1(u_{\sigma(1)})\cdots f_j(\overset{i}{\breve{u}}_{\sigma(i)})\cdots f_i(\overset{j}{\breve{u}}_{\sigma(j)})\cdots f_p(u_{\sigma(p)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)f_1(u_{\sigma\tau(1)})\cdots f_p(u_{\sigma\tau(p)}) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma\tau)f_1(u_{\sigma\tau(1)})\cdots f_p(u_{\sigma\tau(p)}) \\
&= -\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)f_1(u_{\sigma(1)})\cdots f_p(u_{\sigma(p)}) \\
&= -(u_1\wedge\cdots\wedge u_p)(f_1,\ldots,f_p).
\end{aligned}
$$

したがって、$u_1\wedge\cdots\wedge u_p\in\wedge^p V$ が成り立つ。

命題 1.2.3 有限次元実ベクトル空間 V に対して、写像

$$
\begin{array}{ccc}
\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p} & \longrightarrow & \wedge^p V \\
(u_1,\ldots,u_p) & \longmapsto & u_1\wedge\cdots\wedge u_p
\end{array}
$$

は多重線形写像になる。$u_1,\ldots,u_p\in V$ と $1\le i<j\le p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge\overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p = -u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つ。さらに p 次正方行列 $A=(A_{ij})$ に対して $v_j=\displaystyle\sum_{i=1}^p A_{ij}u_i$ とおくと

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_p = (\det A)u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つ。特に $v_1,\ldots,v_p$ が線形従属のとき、$v_1\wedge\cdots\wedge v_p=0$ が成り立つ。

証明　命題 1.1.2 より、対応 $(u_1,\ldots,u_p)\mapsto u_1\wedge\cdots\wedge u_p$ は多重線形になることがわかる。$u_1,\ldots,u_p\in V$ と $1\le i<j\le p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge\overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p = -u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つことを示そう。i と j の互換を $\tau\in S_p$ で表す。

$$
\begin{aligned}
&u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge\overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p \\
= &\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\tau\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\tau\sigma(p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\tau\sigma) u_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau\sigma(p)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)} \\
&= -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p
$$

が成り立つ。特に $u_1, \ldots, u_p$ の中で等しい元があるときは、$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$ となる。

S_p の任意の元は互換の積になることから、$\sigma \in S_p$ に対して

$$
u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)} = \operatorname{sgn}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p
$$

が成り立つ。さらに p 次正方行列 $A = (A_{ij})$ に対して $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_{ij} u_i$ とおくと

$$
\begin{aligned}
v_1 \wedge \cdots \wedge v_p &= \left(\sum_{i_1=1}^{p} A_{i_1 1} u_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^{p} A_{i_p p} u_{i_p} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} A_{\sigma(1)1} u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge A_{\sigma(p)p} u_{\sigma(p)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(p)p} u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \\
&= (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

$v_1, \ldots, v_p$ が線形従属のときは、行列 A を退化行列にとることができるので、上の等式より、$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$ となる。

命題 1.2.4 $u_1, \ldots, u_n$ を実ベクトル空間 V の基底とする。このとき

$$
u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)
$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。特に $\dim(\wedge^p V) = \dbinom{n}{p}$ となる。

証明　$u_1, \ldots, u_n$ の双対基底 $f^1, \ldots, f^n$ をとっておく。まず $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ が線形独立になることを示す。

$$
\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} = 0 \qquad (a_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R})
$$

とする。$1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$ となる $k_1, \ldots, k_p$ をとり、$(f^{k_1}, \ldots, f^{k_p})$ を上の式に代入すると $a_{k_1 \cdots k_p} = 0$ となる。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は線形独立である。

次に $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ は $\wedge^p V$ を生成することを示す。$\wedge^p V$ の元 A を任意に一つとる。V^* の元 g に対して

$$g = \sum_{j=1}^{n} g(u_j) f^j$$

となるので、$g_1, \ldots, g_p \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}
& A(g_1, \ldots, g_p) \\
= \ & A\left(\sum_{j_1=1}^{n} g_1(u_{j_1}) f^{j_1}, \ldots, \sum_{j_p=1}^{n} g_p(u_{j_p}) f^{j_p} \right) \\
= \ & \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} g_1(u_{j_1}) \cdots g_p(u_{j_p}) A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p}) \\
= \ & \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p})(u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_p})(g_1, \ldots, g_p) \\
= \ & \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} A(f^{j_{\sigma(1)}}, \ldots, f^{j_{\sigma(p)}})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g_1, \ldots, g_p) \\
= \ & \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g_1, \ldots, g_p) \\
= \ & \sum_{j_1 < \cdots < j_p} A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p})(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p})(g_1, \ldots, g_p).
\end{aligned}$$

よって、

$$A = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} A(f^{j_1}, \ldots, f^{j_p}) u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は $\wedge^p V$ を生成する。

以上で

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になることがわかった。このことから、$\wedge^p V$ の次元は $\binom{n}{p}$ になることもわかる。

命題 1.2.5 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする。命題 1.1.4 で定めた線形写像

$$F^{(p,0)} : T^{(p,0)}(V) \longrightarrow T^{(p,0)}(W)$$

は $F^{(p,0)}(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像

$$F^{(p,0)} : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p W$$

を誘導する。さらに $F^{(p,0)}$ は $F^{(p,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_p)$ を満たす。

証明　定義 1.2.1 で定めた $t^V_{i,j} : T^{(p,0)}(V) \to T^{(p,0)}(V)$, $t^W_{i,j} : T^{(p,0)}(W) \to T^{(p,0)}(W)$ と $F^{(p,0)}$ に関して、$F^{(p,0)} \circ t^V_{i,j} = t^W_{i,j} \circ F^{(p,0)}$ となることが、これらの定め方よりわかる。したがって $F^{(p,0)}$ は $F^{(p,0)}(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像 $F^{(p,0)} : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p W$ を誘導する。$v_i \in V$ に対して $F^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$ が成り立つので、$F^{(p,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_p)$ も成り立つ。

1.3　外積代数における内積

補題 1.3.1 V を有限次元実ベクトル空間とする。このとき $T^{(0,2)}(V)$ の元 A と V から V^* への線形写像 α は

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

によって一対一に対応する。この対応によって $T^{(0,2)}(V)$ と、V から V^* への線形写像全体の成すベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対応する $T^{(0,2)}(V)$ の元 A が対称になっていて、さらに、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき A は V 上の内積になる。

証明　$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対して

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

で定まる A は二重線形になり、$T^{(0,2)}(V)$ の元になる。逆に、$A \in T^{(0,2)}(V)$ に対して、上の等式で定まる α は $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元になる。定め方より、この対応は一対一になり、$T^{(0,2)}(V)$ と $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。

A が対称であり、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき、$A(x, x) > 0$ となり A は V 上の内積になる。

命題 1.3.2 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に補題 1.3.1 によって対応する $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元を α で表す。$\wedge^p V^*$ は自然に $(\wedge^p V)^*$ と同一視され、命題 1.2.5 によって $\alpha : V \to V^*$ が誘導する線形写像

$$\alpha^{(p,0)} : \wedge^p V \to \wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$$

に対応する $T^{(0,2)}(\wedge^p V)$ の元は、$\wedge^p V$ 上の内積になる。

証明 まず、$\wedge^p V^*$ と $(\wedge^p V)^*$ を同一視する対応を述べておく。$\wedge^p V^*$ の元 ϕ と $(\wedge^p V)^*$ の元 Φ は

$$\phi(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \qquad (v_1, \ldots, v_p \in V)$$

によって対応している。

$\alpha^{(p,0)}$ に対応する $T^{(0,2)}(\wedge^p V)$ の元を A で表すと、V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と $v_1, \ldots, v_p$ に対して、

$$\begin{aligned}
& A(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \; & (\alpha^{(p,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \; & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \; & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \alpha(u_{\sigma(p)}))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}))(v_1) \cdots (\alpha(u_{\sigma(p)}))(v_p) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\langle u_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle u_{\sigma(p)}, v_p \rangle \\
= \; & \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \le i,j \le p}.
\end{aligned}$$

そこで、$u_1, \ldots, u_n$ を V の正規直交基底とすると、

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。さらに、上の計算より、$1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ と $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$ をとると

$$A(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}$$

が成り立つ。したがって、A は $\wedge^p V$ 上の内積になり、上の基底はこの内積に関する正規直交基底になる。

注意 1.3.3 以後、特に断わらない限り、内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間 V の外積代数 $\wedge^p V$ の内積は命題 1.3.2 で示した A を考えることとし、A も $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。また、これらの内積から定まるノルムは $|\ \ |$ で表す。すなわち、$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$。

系 1.3.4 命題 1.3.2 の条件のもとで、V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と $v_1, \ldots, v_p$ に対して、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det[\langle u_i, v_j \rangle]_{1 \le i,j \le p}$$

が成り立つ。さらに、V の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとると、

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \qquad (1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)$$

は $\wedge^p V$ の正規直交基底になる。

注意 1.3.5 上の系 1.3.4 より V の元 u_1, u_2 に対して

$$|u_1 \wedge u_2|^2 = \langle u_1 \wedge u_2, u_1 \wedge u_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{vmatrix} = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2$$

となる。他方、u_1 と u_2 のなす角度を θ で表すと $\langle u_1, u_2 \rangle = |u_1| \cdot |u_2| \cos\theta$ が成り立つ。これより、u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積の二乗は

$$|u_1|^2 |u_2|^2 \sin^2\theta = |u_1|^2 |u_2|^2 (1 - \cos^2\theta) = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2 = |u_1 \wedge u_2|^2$$

となるので、$|u_1 \wedge u_2|$ は u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積になる。このように $\wedge^2 V$ の内積によって、V 内の平行四辺形の面積を求めることができる。3 個以上の元の外積の長さについても同様である。

注意 1.3.6 $\mathbf{R}^n$ の元を横ベクトルとみなす。横ベクトル u を縦ベクトルにしたものを u^* で表す。$m \leq n$ として $\mathbf{R}^n$ の元 $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ をとり、$u_i = [u_{ij}]$, $v_i = [v_{ij}]$ とおく。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [v_1^* \ \cdots \ v_m^*] = [u_i v_j^*] = [\langle u_i, v_j \rangle].$$

これらは m 次正方行列になり、両辺の行列式をとると、補題 1.3.4 より

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \right) &= \det[\langle u_i, v_j \rangle] \\ &= \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \rangle. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^n$ の標準的正規直交基底を $e_1, \ldots, e_n$ で表すと、

$$u_i = [u_{i1} \ \ldots \ u_{in}] = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j.$$

外積の多重線形性と交代性 (命題 1.2.3) より

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_m &= \left(\sum_{j_1=1}^{n} u_{1j_1} e_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_m=1}^{n} u_{1j_m} e_{j_m} \right) \\ &= \sum_{\#\{j_1, \ldots, j_m\} = m} u_{1j_1} \cdots u_{mj_m} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}$$

となり、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \rangle = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \right) \\ = & \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} \\ = & \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{mj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1j_m} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る。$m = n$ の場合は、正方行列の積の行列式がそれぞれの正方行列の行列式の積に等しいというよく知られた等式になる。

命題 1.3.7 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。V の元 $u_1, \ldots, u_p$ に対して、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^{p} |u_i|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、$u_1, \ldots, u_p$ が互いに直交していることである。

証明　u_i から v_i と w_i を以下のように帰納的に構成する。まず $v_1 = 0,\ w_1 = u_1$ とおく。$v_{i-1},\ w_{i-1}$ まで定まっていると仮定して、v_i と w_i を次のように定める。

$$u_i = v_i + w_i, \qquad v_i \in \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{i-1}\},\ w_i \in \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}^{\perp}$$

となるように v_i と w_i をとる。すると、$|w_i|^2 \leq |u_i|^2$ となり、さらに

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_i = w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \qquad (1 \leq i \leq p)$$

が成り立つ。特に

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$$

となる。さらに $i < j$ のとき $\langle u_i, w_j \rangle = 0$ となることに注意しておく。系 1.3.4 を使うと

$$\begin{aligned}
|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p|^2 &= |w_1 \wedge \cdots \wedge w_p|^2 \\
&= \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle \\
&= \det(\langle w_i, w_j \rangle) \\
&= \det \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_p, w_p \rangle \end{bmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{p} \langle w_i, w_i \rangle \leq \prod_{i=1}^{p} \langle u_i, u_i \rangle = \prod_{i=1}^{p} |u_i|^2.
\end{aligned}$$

したがって、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^{p} |u_i|$$

が成り立つ。

等号が成立するための必要十分条件は、すべての i について $\langle w_i, w_i \rangle = \langle u_i, u_i \rangle$ が成り立つことだから、これは $v_i = 0$ と同値になり、$u_1, \ldots, u_p$ が互いに直交していることである。

補題 1.3.8 V と W をそれぞれ内積を持つ m 次元と n 次元のベクトル空間とし $(m \geq n)$、$F : V \to W$ を線形写像とする。

$$JF = \sup\{|F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)| \mid u_1, \ldots, u_n \text{は} V \text{の正規直交系}\}$$

とおく。F が全射でないときは、$JF = 0$ となり、F が全射のときは、$(\mathrm{ker} F)^\perp$ の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に対して

$$JF = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

証明　F が全射でないときは $\dim(\mathrm{im} F) < n$ となり、V の任意の正規直交系 $u_1, \ldots, u_n$ に対して $F(u_1), \ldots, F(u_n)$ は線形従属になる。したがって

$$F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n) = 0$$

となり、$JF = 0$ が成り立つ。

次に F が全射の場合を考える。$(\mathrm{ker}F)^{\perp}$ の任意の基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとる。さらに $(\mathrm{ker}F)^{\perp}$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ をとる。これらの間の変換行列を (a_{ij}) で表す。すなわち、

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

とおく。すると、命題 1.2.3 より

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &= \det(a_{ij}) u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, \\ F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \det(a_{ij}) F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})||F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|\det(a_{ij})||u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= \frac{|F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

系 1.3.4 より $|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n| = 1$ となることを最後の等式に使った。これより、

$$JF \geq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

V の任意の正規直交系 $w_1 \ldots, w_n$ に対して

$$w_i = w_i^1 + w_i^2, \quad w_i^1 \in (\mathrm{ker}F)^{\perp},\ w_i^2 \in \mathrm{ker}F$$

とおくと $|w_i^1| \leq |w_i| = 1$ となり、さらに

$$\begin{aligned} F^{(n,0)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= F(w_1) \wedge \cdots \wedge F(w_n) \\ &= F(w_1^1) \wedge \cdots \wedge F(w_n^1) \\ &= F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1). \end{aligned}$$

ここで、$w_1^1, \ldots, w_n^1$ が線形従属の場合は命題 1.2.3 より

$$F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1) = 0$$

となり、線形独立の場合は $(\mathrm{ker}F)^{\perp}$ の基底になる。このときは、上で示したことより、

$$\frac{|F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)|}{|w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1|} = |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|$$

命題 1.3.7 を使うと

$$\begin{aligned}
|F^{(n,0)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n)| &= |F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)| \\
&= |w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1| \cdot |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\
&\leq |w_1^1| \cdots |w_n^1| \cdot |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\
&\leq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|.
\end{aligned}$$

よって

$$JF \leq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

以上の結果より、

$$JF \leq \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \leq JF.$$

したがって、

$$JF = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

1.4　Riemann 多様体上の測度

この節では一般の測度と積分について簡単に復習してから、Riesz の表現定理 (定理 1.4.7) を使って、定義 1.4.9 で Riemann 多様体上の Riemann 測度を定義する。これらの測度と積分に関する基本事項については証明なしで述べるにとどめる。

定義 1.4.1 集合 X の部分集合全体 2^X 上で定義された $[0, \infty]$ に値を持つ関数 μ が次の条件を満たすとき、μ を X 上の**測度**と呼ぶ。

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) X の部分集合の可算族 $\{A_i\}$ と $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を満たす $A \in 2^X$ に対して

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定義 1.4.2 μ を集合 X 上の測度とする。X の部分集合 A に対して、

$$\mu(T) = \mu(T - A) + \mu(T \cap A)$$

が任意の $T \in 2^X$ について成り立つとき、A を X の μ **可測部分集合**という。

定義 1.4.3 f を測度 μ を持つ集合 X の部分集合 S 上で定義された $[-\infty, \infty]$ に値を持つ関数とする。さらに $\mu(X-S)=0$ を仮定する。$[-\infty, \infty]$ の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ が X の μ 可測部分集合になるとき、f を μ **可測関数**と呼ぶ。

注意 1.4.4 以上の概念を使って集合上の測度に関する積分論を $\mathbf{R}^n$ における Lebesgue 積分論と同様に展開することができ、Lebesgue の収束定理や Fubini の定理等が成り立つ。

定義 1.4.5 位相空間 X の開集合全体が生成する σ 集合族の元を **Borel 集合**と呼ぶ。μ を X 上の測度とする。X の Borel 集合がすべて μ 可測になり、任意の $A \subset X$ に対して Borel 集合 B が存在し、$A \subset B$ と $\mu(A) = \mu(B)$ を満たすとき、μ を **Borel 正則測度**と呼ぶ。

定義 1.4.6 X を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X 上の Borel 正則測度 μ が、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $\mu(K) < \infty$ を満たすとき、μ を **Radon 測度**と呼ぶ。

定理 1.4.7 (Riesz の表現定理) X を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X 上の台がコンパクトになる実数値連続関数の全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す。$\mathcal{K}(X)$ 上の実数値線形汎関数 $L : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ が、

(1) $f \geq 0$ となる $f \in \mathcal{K}(X)$ に対して $L(f) \geq 0$

(2) コンパクト集合 $K \subset X$ に対して

$$\sup\{L(f) \mid f \in \mathcal{K}(X),\ |f| \leq 1,\ \mathrm{supp} f \subset K\} < \infty$$

を満たすとき、Radon 測度 μ が X 上に存在し、

$$L(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。

注意 1.4.8 この講義では多様体は可算開基を持つ C^∞ 級多様体のみ考えることにする。可算開基を持つ多様体は可分になるので、ここでの多様体は定理 1.4.7 の仮定を満たしている。

定義 1.4.9 (M, g) を Riemann 多様体とする。M の局所座標系 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。各 $x \in U$ に対して $\wedge^n T_x(M)$ に Riemann 計量から自然に定まる内積を入れておく。$\mathrm{supp} f \subset U$ となる $f \in \mathcal{K}(M)$ に対して

$$L(f) = \int_U f(x_1, \ldots, x_n) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

によって $L(f)$ を定める。右辺は Euclid 空間における Lebesgue 積分である。被積分関数はコンパクトな台を持つ連続関数だから、Riemann 積分に一致している。この値 $L(f)$ は

積分の変数変換の公式から、局所座標系のとり方に依存しないことがわかる。さらに一つの局所座標近傍に台が含まれない $\mathcal{K}(M)$ の元に対しては、単位の分割を使うことによって $L:\mathcal{K}(M)\longrightarrow\mathbf{R}$ を定義することができる。これも単位の分割のとり方に依存しないことがわかる。さらに L は定理 1.4.7 の仮定を満たすので、Radon 測度 μ が M 上に存在し、

$$L(f)=\int_M f d\mu \qquad (f\in\mathcal{K}(M))$$

が成り立つ。この測度 μ を M の **Riemann 測度**と呼ぶ。今後 Riemann 多様体上の測度は Riemann 測度のみを考えることにする。μ を $\mu_{(M,g)}$ と記したり、Riemann 計量がわかっているときは μ_M と記したりする。$\mathrm{vol}(M)=\mu_M(M)$ と表し、$\mathrm{vol}(M)$ を M の**体積**と呼ぶ。通常 M の次元が 1 のときは、**長さ**と呼び、M の次元が 2 のときは、**面積**と呼ぶ。

注意 1.4.10 n 次元多様体上のコンパクトな台を持つ n 次連続微分形式の積分の定義をするためには、多様体に向きがついていることが必要になるが、Riemann 多様体上のコンパクトな台を持つ連続関数の積分を定義するためには、多様体の向きは必要ない。

命題 1.4.11 M を Riemann 多様体とし、$(U;x_1,\dots,x_n)$ を M の局所座標近傍とする。U 上定義された μ_M 可測関数 ϕ が、μ_M 可積分であるかまたは $\phi\geq 0$ であるとき、

$$\int_U \phi d\mu_M=\int_U \phi(x_1,\dots,x_n)\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right|dx_1\cdots dx_n$$

が成り立つ。

1.5　余面積公式

積分幾何学の種々の公式を証明するうえで基本的な役割を果たす余面積公式を示し、その簡単な応用として Fenchel の定理を証明する。余面積公式を述べる上で必要になる多様体間の写像の臨界値と正則値に関する準備から始めることにする。臨界値に関する Sard の定理と正則値に関する陰関数定理が基本的である。

定義 1.5.1 $f:M\longrightarrow N$ を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x\in M$ に対して、$df_x:T_x(M)\longrightarrow T_{f(x)}(N)$ が全射になるとき、x を f の**正則点**と呼ぶ。M の正則点ではない点を**臨界点**と呼ぶ。$y\in N$ に対して、$f(x)=y$ となる f の臨界点 x が存在するとき、y を f の**臨界値**と呼ぶ。N の臨界値ではない点を**正則値**と呼ぶ。

定理 1.5.2 (Sard の定理) U を $\mathbf{R}^n$ 内の開集合とし、$f:U\to\mathbf{R}^p$ を C^∞ 級写像とする。f の臨界点の全体を C で表し、$\mathbf{R}^p$ の Lebesgue 測度を μ で表すと、$\mu(f(C))=0$ が成り立つ。

定理 1.5.3 $f:M\longrightarrow N$ を Riemann 多様体 M から Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。f の臨界点の全体を C で表すと、$\mu_N(f(C))=0$ が成り立つ。

証明　M と N は可算開基を持っているので、M と N の可算開被覆 $\{U_i\}$ と $\{V_i\}$ を、各 i について

(1) U_i は M の局所座標近傍に含まれる、

(2) $\bar{V}_i$ はコンパクトで、N の局所座標近傍に含まれる、

(3) $f(U_i) \subset V_i$ を満たす

が成り立つようにとることができる。$C_i = C \cap U_i$ とおいて、$\bar{V}_i$ を含む N の局所座標近傍を $(V_i'; x_1, \ldots, x_p)$ で表す。$V_i' \subset \mathbf{R}^p$ とみなし、$\mathbf{R}^p$ の Lebesgue 測度を μ と書くことにすると、定理 1.5.2 より、$\mu(f(C_i)) = 0$ が成り立つ。

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p}\right|$$

は V_i' 上の連続関数になり、$\bar{V}_i(\subset V_i')$ はコンパクトだから

$$A = \sup_{\bar{V}_i}\left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p}\right|$$

が存在する。したがって、命題 1.4.11 より、

$$0 \leq \mu_N(f(C_i)) \leq A\mu(f(C_i)) = 0$$

となり、$\mu_N(f(C_i)) = 0$。これより、

$$0 \leq \mu_N(f(C)) \leq \sum_i \mu_N(f(C_i)) = 0,$$

つまり、$\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定義 1.5.4 $m \geq n$ とし、$f : M \longrightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x \in M$ に対して補題 1.3.8 の J を使って、$Jf(x) = Jdf_x$ とおく。

定理 1.5.5 (余面積公式) $f : M \longrightarrow N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とし、ϕ を M 上の μ_M 可測関数とする。$m \geq n$ と仮定する。このとき、N の元 y に対して $\displaystyle\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、ϕJf が M 上 μ_M 可積分であるか、または $\phi \geq 0$ のとき、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)\right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

証明　各 $x \in M$ について、$V_x^n(M)$ で $T_x(M)$ 内の n 個の正規直交系全体の成す Stiefel 多様体とし、

$$V^n(M) = \bigcup_{x \in M} V_x^n(M)$$

とおくと、$V^n(M)$ は $V^n(M) \to M$ を射影とし Stiefel 多様体をファイバーとするファイバー束の全空間になり、特に $V^n(M)$ は多様体になる。

$$V^n(M) \to \mathbf{R}\,;(u_1,\ldots,u_n) \mapsto |df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)|$$

は連続関数になり、

$$Jf(x) = \sup\{|df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)| \mid (u_1,\ldots,u_n) \in V_x^n(M)\}$$

は M から $\mathbf{R}$ への連続関数になることがわかる。したがって、

$$O = \{x \in M \mid Jf(x) \neq 0\}$$

は M の開集合になる。特に、O は μ_M 可測集合になり、

$$\int_M \phi(x)Jf(x)d\mu_M(x) = \int_O \phi(x)Jf(x)d\mu_M(x)$$

が成り立つ。各 $x \in O$ に対して、陰関数定理より x の局所座標近傍 U_x が存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f : U_x \to f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、f 自身が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、まず定理の公式を証明する。

N が $\mathbf{R}^n$ の開集合になっていて、F が $\mathbf{R}^{m-n}$ の開集合で $M = N \times F$ となり、

$$f : M = N \times F \to N;\ (y,t) \mapsto y$$

である場合を考える。$y_1,\ldots,y_n$ を $N \subset \mathbf{R}^n$ の座標とし、$x_1,\ldots,x_m$ を $M = N \times F \subset \mathbf{R}^m$ の座標とする。ただし、$y_i \circ f = x_i\ (1 \leq i \leq n)$ となるようにとっておく。このとき、$x_{n+1},\ldots,x_m$ は F の座標になる。ϕ は M 上の可測関数だから、

$$\phi(y,t)\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \circ f$$

も M 上の可測になる。したがって、Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
y \mapsto \quad & \int_F \phi(y,t)\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \circ f dx_{n+1}\cdots dx_m(t) \\
&= \left(\int_F \phi(y,t)\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M dx_{n+1}\cdots dx_m(t)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \\
&= \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x)d\mu_{f^{-1}(y)}(x)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N
\end{aligned}$$

は N 上の可測関数になり、

$$\begin{aligned}
&\int_M \phi(y,t)\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \circ f dx_1\cdots dx_m \\
=\ &\int_N\left(\int_{f^{-1}(y)}\phi(x)d\mu_{f^{-1}(y)}(x)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N dy_1\cdots dy_n(y) \\
=\ &\int_N\left(\int_{f^{-1}(y)}\phi(x)d\mu_{f^{-1}(y)}(x)\right)d\mu_N(y)
\end{aligned}$$

が成り立つ。各 $1\le i\le n$ について、$M=N\times F$ の接ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を F に接する成分と直交する成分に分解する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_F+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{F^\perp}.$$

すると

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{F^\perp}\right).$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \\
=\ &\left|df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\wedge\cdots\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right|_N \\
=\ &\left|df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\right)\wedge\cdots\wedge df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right)\right|_N.
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_m}$ は F に接しているので、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \\
=\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \\
=\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right|_M\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M.
\end{aligned}$$

以上の計算と補題 1.3.8 より、

$$\begin{aligned}
&\int_M \phi(y,t)\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \circ f dx_1\cdots dx_m \\
=\ &\int_M \phi(x)\frac{\left|df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\right)\wedge\cdots\wedge df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right)\right|_N}{\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right|_M}d\mu_M(x) \\
=\ &\int_M \phi Jf d\mu_M
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi J f d\mu_M$$

を得る。これで f が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、定理の証明ができた。

一般の場合にもどる。各 $x \in O$ に対して、x の局所座標近傍 U_x が存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f: U_x \to f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、このような開集合を O の各点でとると、$\{U_x\}_{x \in O}$ は O の開被覆になる。M は可算開基を持つので、O も可算開基を持つ。したがって O の開被覆 $\{U_x\}_{x \in O}$ から可算個 $\{U_k\}$ をとり、$\{U_k\}$ が O の開被覆になるようにできる。$\{U_k\}$ に付随する単位の分割 $\{\psi_k\}$ をとる。f の U_k への制限を

$$f_k : U_k \to V_k = f(U_k)$$

で表すことにして、すでに示したことを $\psi_k \phi$ に適用すると、

$$y \mapsto \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は V_k 上の μ_N 可測関数になり、

$$\int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) = \int_{U_k} \psi_k \phi J f d\mu_{U_k}.$$

よって

$$y \mapsto \sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。各 y について $\{\psi_k|_{f^{-1}(y)}\}$ は $f^{-1}(y)$ の単位の分割になるので、

$$\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) = \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

となる。これより

$$y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。$\phi J f$ が M 上 μ_M 可積分のときは Lebesgue の有界収束定理を使い、$\phi \geq 0$ のときは Lebesgue の単調収束定理を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_M \phi J f d\mu_M &= \sum_k \int_{U_k} \psi_k \phi J f d\mu_{U_k} \\
&= \sum_k \int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_N \left(\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \\
&= \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\int_M \phi J f d\mu_M = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)
$$

を得る。

系 1.5.6 定理 1.5.5 において $m = n$ の場合、N の元 y に対して $\displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、

$$
\int_N \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) J f(x) d\mu_M(x)
$$

が成り立つ。

注意 1.5.7 系 1.5.6 を適用する際に、次のことに注意しておくと、右辺の $\displaystyle\int_M \phi J f d\mu_M$ の計算が簡単になる。証明中に示したように、M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ において

$$
\int_U \phi J f d\mu_M = \int \phi \left| df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \right| dx_1 \cdots dx_n.
$$

したがって M の接ベクトル空間の正規直交基底をとる必要はない。他方、N の接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとって、$x \in U$ に対して $f(x)$ での変換行列 $F(x)$ を

$$
\left[df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdots df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right] = [e_1 \cdots e_n] F(x)
$$

で定めると、

$$
\left| df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right| = |\det F(x)|
$$

となり、

$$
\int_U \phi J f d\mu_M = \int \phi(x) |\det F(x)| dx_1 \cdots dx_n.
$$

定理 1.5.8 (Fenchel) c を平面閉曲線とする。c の弧長パラメーターを s で表し、曲率を $\kappa(s)$ で表す。このとき、

$$
2\pi \leq \int_c |\kappa(s)| ds
$$

が成り立つ。

証明　$\mathbf{R}^2$ 内の 1 次元部分ベクトル空間全体が成す 1 次元実射影空間を $\mathbf{R}P^1$ で表す。$\mathbf{R}P^1$ の元

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = 0\}$$

に θ を対応させると、θ は $\mathbf{R}P^1$ の局所座標系になる。$d\theta \otimes d\theta$ は $\mathbf{R}P^1$ 全体で定義される Riemann 計量になる。このとき、$\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1) = \pi$ となることに注意しておく。

曲線 c の点 $c\ (s)$ に対して、$c\ (s)$ での接線を $\mathbf{R}^2$ の原点を通るように平行移動したものを対応させる写像を g で表すと、$g : c \to \mathbf{R}P^1$ は C^∞ 級写像になる。c 上恒等的に 1 に等しい関数と g に余面積公式（系 1.5.6）を適用すると、

$$\int_{\mathbf{R}P^1} \sharp(g^{-1}(l))d\mu_{\mathbf{R}P^1}(l) = \int_c Jg d\mu_c = \int_c |\kappa(s)|ds$$

を得る。ただし、$\sharp X$ は集合 X の元の個数を表す。各 $l \in \mathbf{R}P^1$ に対して c を l に平行な直線ではさむことにより、$\sharp(g^{-1}(l)) \geq 2$ となることがわかる。したがって

$$\int_c |\kappa(s)|ds \geq 2\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1) = 2\pi.$$

注意 1.5.9 定理 1.5.8 の証明方法を Euclid 空間内のコンパクト部分多様体に適用すると、被積分関数は高さの関数の臨界点の個数になるので、Morse 理論より位相不変量で下から評価することができる。これが Chern-Lashof の定理の証明の概略である。

第2章　Lie群と等質空間

2.1　Lie群とLie環

定義 2.1.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 2.1.2 連結 Lie 群は可算開基を持つことが知られている。したがって、可算連結成分を持つ Lie 群も可算開基を持つ。

例 2.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、V の正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。$GL_+(V)$ で行列式が正になる正則線形変換の全体を表すことにすると、$GL_+(V)$ は連結 Lie 群になる。さらに、$GL(V)$ は $GL_+(V)$ に関して二つの剰余類を持ち、それぞれ $GL_+(V)$ に微分同型になるので、$GL(V)$ は二つの連結成分を持つ。したがって、注意 2.1.2 で述べたことより、$GL(V)$ は可算開基を持つ。

定義 2.1.4 Lie 群 G の元 g に対して微分同型写像 L_g, R_g を

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg^{-1}$$

によって定め、それぞれ g による**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 X は、G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg^{-1}} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

定義 2.1.5 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

例 2.1.6 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 2.1.7 V をベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

定理 2.1.8 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表す。すると、$\mathfrak{g}$ は Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

定義 2.1.9 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

定義 2.1.10 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f : G \to H$ が群の準同型写像でもあるとき、f を **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、f を **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と H は**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、f を **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、f を **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

定理 2.1.11 $GL(n, \mathbf{R})$ は $\det = 0$ という代数方程式の零点集合の補集合だからベクトル空間 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合になり、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場 $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

注意 2.1.12 定理 2.1.11 の Lie 環の同型写像 $\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ を $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環とみなすことにする。Lie 環の演算を計算するには $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の方が扱いやすい。

定義 2.1.13 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 2.1.14 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 2.1.8 によって $\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X を c に対応させる。

例 2.1.15 $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n, \mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元と同一視する。$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$ で表すと、$\tilde{X}_g = gX \ (g \in GL(n, \mathbf{R}))$ となる。したがって、X に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。行列の指数関数 : $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ を使うと $c(t) = e^{tX}$ となる。

定義 2.1.16 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.1.14 で存在を示した X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 2.1.17 例 2.1.15 で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、$GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 2.1.18 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 2.1.14 の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

定理 2.1.19 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。さらに、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

命題 2.1.20 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 2.1.21 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 2.1.8 の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G), \ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

定義 2.1.22 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$ に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を f の**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 2.1.21 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 2.1.23 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

系 2.1.24 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$ を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

命題 2.1.25 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は H の指数写像である。

定義 2.1.26 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 2.1.27 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

定義 2.1.28 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 2.1.29 Lie 群 G の元 g に対して $\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_g)$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

定義 2.1.30 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 2.1.31 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 2.1.17 より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(g e^{tX} g^{-1})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{tgXg^{-1}}\Big|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

定義 2.1.32 Lie 群 H が Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

定理 2.1.33 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。H が G の閉集合ならば、H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 2.1.34 定理 2.1.33 より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

定義 2.1.35 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

補題 2.1.36 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、det の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

定義 2.1.37 V を有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) | \det g = 1\}$ と表すと、補題 2.1.36 より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 2.1.36 より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。$SL(n, \mathbf{R})$ は連結になることが知られているので、注意 2.1.2 で述べたことより、可算開基を持つ。

定義 2.1.38 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。V の A に関する直交変換の全体を $O(V) = O(V; A)$ で表すと $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) | A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0 \ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。$O(V)$ は二つの連結成分を持つことが知られているので、注意 2.1.2 で述べたことより、$O(V)$ は可算開基を持つ。

注意 2.1.39 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 2.1.40 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。

$$SO(V) = SO(V; A) = SL(V) \cap O(V; A)$$

と表すと、$SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V; A)$ で表すと $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。$SO(V)$ は連結になることが知られているので、注意 2.1.2 で述べたことより、$SO(V)$ は可算開基を持つ。

2.2　等質空間の多様体構造

定義 2.2.1 M を多様体とし G を Lie 群とする。C^∞ 級写像 $G \times M \to M; (g, x) \mapsto g \cdot x$ が存在し任意の $g_1, g_2 \in G, x \in M$ に対して $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ を満たすとき、G を M の **Lie 変換群**と呼ぶ。さらに任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$ となるとき G は M に**推移的**に作用しているという。

注意 2.2.2 Lie 群 G が多様体 M の Lie 変換群のとき、各 $g \in G$ に対して

$$g : M \to M; x \mapsto g \cdot x$$

は M の微分同型写像になる。逆写像は g^{-1} が誘導する写像である。

定理 2.2.3 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。射影 $\pi : G \to G/H; g \mapsto gH$ によって G の H による剰余類の全体 G/H に商位相を入れる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を G/H の開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって G が G/H の Lie 変換群になるような G/H の多様体構造が存在する。

定義 2.2.4 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。定理 2.2.3 で存在を示した多様体構造を持つ G/H を G の**等質空間**と呼ぶ。G は G/H に推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定理 2.2.5 G は多様体 M に推移的に作用している Lie 変換群で G の連結成分の個数は可算であるとする。$p \in M$ をとり

$$G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$$

とおくと、G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに写像

$$\alpha : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

は等質空間 G/G_p と M との間の微分同型写像になる。

命題 2.2.6 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。$\pi : G \to G/H$ を自然な射影としたとき、等質空間 G/H から多様体 M への写像 f が C^∞ 級写像になるための必要十分条件は $f \circ \pi$ が C^∞ 級写像になることである。

命題 2.2.7 G を多様体 M の Lie 変換群とする。$p \in M$ をとり $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$ とおくと、G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに $G(p) = \{g \cdot p | g \in G\}$ は等質空間 G/G_p と微分同型であるような M の部分多様体になる。

2.3　等質空間の不変 Riemann 計量

この節では、等質空間に不変 Riemann 計量を定める方法について述べる。

定義 2.3.1 Riemann 計量を持つ Lie 群の任意の左移動が等長的になっているとき、その Riemann 計量を**左不変**という。任意の右移動も等長的になる左不変 Riemann 計量を、両側不変 Riemann 計量という。

命題 2.3.2 Lie 群 G の左不変 Riemann 計量の全体と、その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積の全体は一対一に対応する。さらに、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

証明　G 上の左不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ があるとする。$\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して、$\langle X, Y\rangle$ は G 上の左不変関数になるので、定数である。明らかにこれは $\mathfrak{g}$ の内積を定める。

逆に、$\mathfrak{g}$ に内積が定まっているとする。G の任意の点 $g \in G$ の接ベクトル空間 T_gG の内積 $\langle\ ,\ \rangle_g$ を

$$\langle X, Y\rangle_g = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle \qquad (X, Y \in T_gG)$$

で定める。ただし、$\tilde{X}, \tilde{Y}$ はそれぞれ X, Y を左不変ベクトル場に拡張したものであり、定理 2.1.8 より、このような拡張は可能である。さらに定理 2.1.8 と同様に、$\langle\ ,\ \rangle_g$ が g に対して滑らかに依存していることがわかる。したがって、$\{\langle\ ,\ \rangle_g\}_{g\in G}$ は、G 上の Riemann 計量を定める。さらに、この Riemann 計量は、定め方より、左不変であることがわかる。

随伴表現 Ad の定め方 (定理 2.1.29) より、G の元 g に対して

$$\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$$

だから、G の Riemann 計量が両側不変ならば、対応する $\mathfrak{g}$ の内積は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変になる。逆も上の等式からわかる。

注意 2.3.3 命題 2.3.2 より Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積から G の左不変 Riemann 計量が定まり、定義 1.4.9 よりこの左不変 Riemann 計量から G 上に測度が定まる。

系 2.3.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とする。V 上の G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle d\rho(X)u, v\rangle + \langle u, d\rho(X)v\rangle = 0 \qquad (X \in \mathfrak{g},\ u, v \in V)$$

を満たす。すなわち、$d\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(V; \langle\ ,\ \rangle)$ となる。さらに G が連結のときは、V 上の G 不変内積全体と、$d\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(V; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たす V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の全体は一対一に対応する。

証明　$\langle\ ,\ \rangle$ が V 上の G 不変内積のとき、$u, v \in V$ と $g \in G$ に対して

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle = \langle u, v\rangle$$

が成り立つ。$X \in \mathfrak{g}$ をとり、$g = \exp(tX)$ とおくと、

$$\langle \rho(\exp(tX))u, \rho(\exp(tX))v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

両辺を $t = 0$ で t に関して微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \rho(\exp(tX))u, \rho(\exp(tX))v \rangle \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tX))u, v \right\rangle + \left\langle u, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tX))v \right\rangle \\ &= \langle d\rho(X)u, v \rangle + \langle u, d\rho(X)v \rangle. \end{aligned}$$

したがって、各 $d\rho(X)$ は V の交代線形写像になり、$d\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(V; \langle\ ,\ \rangle)$ が成り立つ。

G が連結の場合を考える。$d\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(V; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たす V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が、G 不変になることを示せば十分である。$X \in \mathfrak{g}$ と $u, v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \rho(\exp(tX))u, \rho(\exp(tX))v \rangle \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tX))u, v \right\rangle + \left\langle u, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tX))v \right\rangle \\ &= \langle d\rho(X)u, v \rangle + \langle u, d\rho(X)v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって

$$\langle \rho(\exp(tX))u, \rho(\exp(tX))v \rangle = \langle u, v \rangle$$

となり、内積は $\rho(\exp \mathfrak{g})$ 不変になる。ところが、G は連結だから次の補題 2.3.5 より単位元の近傍は G を生成し、定理 2.1.19 より $\exp \mathfrak{g}$ は G を生成する。したがって、内積は $\rho(G)$ 不変になることがわかる。

補題 2.3.5 G を連結 Lie 群とし、U を G の単位元 e の近傍とする。このとき $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ が成り立つ。ただし、$U^n = \{g_1 \dots g_n | g_i \in U\}$。

証明　$U^{-1} = \{g^{-1} | g \in U\}$ も e の近傍になるので、$V = U \cap U^{-1}$ は e の近傍である。$H = \cup\{V^n | n \in \mathbf{N}\}$ とおく。$V \subset U$ だから、$G = H$ を示せばよい。$g, h \in H$ に対してある自然数 m, n があって $g \in V^m, h \in V^n$ となる。よって $gh \in V^{m+n} \subset H$。$g = g_1 \dots g_m,\ g_i \in V$ とすると、$g^{-1} = g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$ で $g_i^{-1} \in V$ だから $g^{-1} \in V^m \subset H$。したがって H は G の部分群である。V は e の近傍で $V \subset H$ だから、任意の $h \in H$ に対して $L_h(V)$ は h の近傍になり $L_h(V) \subset H$。したがって H は G の開集合である。G を H の剰余類によって分解すると、

$$G = H \cup (\cup\{L_g(H) | g \in G, g \notin H\})$$

となり各 $L_g(H)$ は G の開集合だから、H は G の閉集合である。G は連結だから $G = H$ が成り立つ。

系 2.3.6 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G 上の両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle [X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle = 0 \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$$

を満たす。すなわち、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g};\langle\ ,\ \rangle)$ となる。さらに G が連結のとき、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g};\langle\ ,\ \rangle)$ を満たす $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の全体は一対一に対応する。

証明 定理 2.1.29 より $d\mathrm{Ad} = \mathrm{ad}$ となるので、命題 2.3.2 と系 2.3.4 を適用すればよい。

定理 2.3.7 G をコンパクト Hausdorff 位相群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の Radon 測度 μ_G が一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(3) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(4) G 上の μ_G 可積分関数 f に対して

$$\int_G f(x^{-1})d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

定義 2.3.8 定理 2.3.7 で定まるコンパクト Hausdorff 位相群 G 上の測度を、G の **Haar 測度**と呼ぶ。

命題 2.3.9 G をコンパクト Hausdorff 位相群とし、μ_G を G の Haar 測度とする。G の表現 (ρ, V) に対して ρ を G から $\mathrm{Hom}(V,V)$ への写像とみなして $P = \int \rho d\mu_G \in \mathrm{Hom}(V,V)$ とおくと、$P^2 = P$ が成り立つ。また

$$V_G = \{v \in V | \rho(g)(v) = v\ (g \in G)\}$$

とおくと、$\mathrm{Im}P = V_G$ となる。

証明 $v \in V$ に対して積分の線形性より

$$P(v) = \int \rho(x)d\mu_G(x)(v) = \int \rho(x)(v)d\mu_G(x)$$

となる。これより $v \in V_G$ ならば $P(v) = v$ となり $v \in \mathrm{Im}P$。よって $V_G \subset \mathrm{Im}P$。また任意の $v \in V$ と $g \in G$ について

$$\begin{aligned}
\rho(g)P(v) &= \rho(g)\int \rho(x)(v)d\mu_G x \\
&= \int \rho(g)\rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\rho(g)\text{ の作用の線形性}) \\
&= \int \rho(gx)(v)d\mu_G x \\
&= \int \rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\text{Haar 積分の左不変性}) \\
&= P(v) \qquad (\mu_G(G) = 1\text{ だから})
\end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{Im}P \subset V_G$ となり、$\mathrm{Im}P = V_G$ がわかる。さらに

$$\begin{aligned}
P^2(v) &= \int \rho(x)P(v)d\mu_G x \\
&= \int P(v)d\mu_G x \qquad (P(v) \in V_G) \\
&= P(v) \qquad (\mu_G(G) = 1\text{ だから})
\end{aligned}$$

となるので、$P^2 = P$ が成り立つ。

命題 2.3.10 (ρ, V) をコンパクト Hausdorff 位相群 G の表現とすると、ρ が直交（ユニタリ）表現になるような V の内積が存在する。

証明　G の Haar 測度を μ_G としておく。

V が実ベクトル空間の場合 V 上の対称二次形式の全体がつくる実ベクトル空間を $S(V)$ で表す。

$$(\rho_S(g)A)(v, w) = A(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(w)) \qquad (g \in G,\ A \in S(V),\ v, w \in V)$$

によって ρ_S を定めると $(\rho_S, S(V))$ は G の表現になる。正定値の元 $A_0 \in S(V)$ を 1 つとる。$P = \int \rho_S d\mu_G$ とおくと、命題 2.3.9 より、$P(A_0) \in S(V)_G$ となる。また任意の $v(\neq 0) \in V$ について

$$P(A_0)(v, v) = \int A_0(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(v))d\mu_G g > 0$$

となるので、$P(A_0)$ も正定値になる。この内積 $P(A_0)$ によって (ρ, V) は直交表現になる。

V が複素ベクトル空間の場合も、V 上の Hermite 形式の全体がつくる複素ベクトル空間を考えることにより、同様に証明できる。

系 2.3.11 コンパクト Lie 群には、両側不変 Riemann 計量が存在する。

証明　G をコンパクト Lie 群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。G の随伴表現に命題 2.3.10 を適用すると、$\mathfrak{g}$ 上に $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積が存在する。したがって、命題 2.3.2 より、この内積に対応する G 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 2.3.12 コンパクト線形 Lie 群の場合は、Haar 測度を使わなくても、以下のように具体的に両側不変 Riemann 計量を構成することができる。コンパクト線形 Lie 群 $G \subset GL(n, \mathbf{R})$ に対して、命題 2.3.10 より

$$G \subset O(\mathbf{R}^n; B)$$

となる $\mathbf{R}^n$ の内積 B が存在する。$\mathbf{R}^n$ の B に関する正規直交基底をとり、それについて行列表示することにより、$G \subset O(n)$ とみなす。このとき、$O(n)$ に両側不変 Riemann 計量を構成すれば、G に誘導される Riemann 計量も両側不変になる。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^t XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^t XY) = -\mathrm{tr}(XY) = -\mathrm{tr}(YX) = \mathrm{tr}({}^t YX) = \langle Y, X \rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X = (X_{ij}) \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\langle X, X \rangle = \mathrm{tr}({}^t XX) = \sum_{i,j} X_{ij}^2$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。さらに $g \in O(n)$ に対して例 2.1.31 より

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \qquad (X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle &= -\mathrm{tr}(gXg^{-1}gYg^{-1}) = -\mathrm{tr}(gXYg^{-1}) \\ &= -\mathrm{tr}(XY) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(O(n))$ 不変になり、命題 2.3.2 より、対応する $O(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

命題 2.3.13 G を Lie 群とし、H を G の閉 Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

証明　任意の $h \in H$ に対して、$L_h \circ R_{h^{-1}}$ は H を不変にするので、その微分 $\mathrm{Ad}_G(h)$ は $\mathfrak{h}$ を不変にする。したがって、線形写像 $\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は、商ベクトル空間の線形写像 $\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を誘導する。上にあるように、誘導された線形写像も同じ記号で表すことにする。

G/H の H 自身による剰余類を G/H の原点と呼び、o で表すことにする。定理 2.1.8 で定めた線形同型写像 $\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ と自然な射影 $\pi : G \to G/H$ の微分写像 $d\pi_e$ を使って、線形写像の合成

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha} T_e(G) \xrightarrow{d\pi_e} T_o(G/H)$$

を β とおく。β の核は $\mathfrak{h}$ になる。よって、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ と $T_o(G/H)$ は、β の誘導する線形写像によって線形同型になる。β の誘導する線形写像も β で表すことにする。H の元 h は G/H の原点 o を動かさないので、

$$dh_o : T_o(G/H) \to T_o(G/H)$$

を誘導する。dh_o に対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の線形写像を求めてみよう。$X \in \mathfrak{g}$ をとる。

$$\begin{aligned} dh_o d\pi_e \alpha(X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\pi(\exp tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tX)H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tXh^{-1})H = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp t\mathrm{Ad}(h)X)H \\ &= d\pi_e \alpha(\mathrm{Ad}(h)X). \end{aligned}$$

したがって、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(h)"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[d, "\beta"', "\cong"] \\ T_o(G/H) \arrow[r, "dh_o"] & T_o(G/H) \end{tikzcd}$$

以上の準備のもとに命題を証明する。G/H に G 不変 Riemann 計量があるとすると、$T_o(G/H)$ における計量は、各 $h \in H$ に対して dh_o で不変になる。線形同型写像 β で対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の内積は、上の可換図式より、$\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積になる。

逆に $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積があるとすると、β で対応する $T_o(G/H)$ 上の内積は、各 $h \in H$ に対して dh_o で不変になる。その内積を $\langle\ ,\ \rangle_o$ で表す。任意の元 $x \in G/H$ における内積を

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle dgX, dgY \rangle_o \qquad (X, Y \in T_x(G/H),\ gx = o)$$

で定義する。内積の定義が、$gx = o$ となる $g \in G$ のとり方によらないことは、次のようにしてわかる。$g_1 x = g_2 x = o$ とすると、$x = g_1^{-1} o$ となり、

$$o = g_2 x = g_2 g_1^{-1} o.$$

よって $g_2 g_1^{-1} \in H$ となる。そこで、$h = g_2 g_1^{-1} \in H$ とおくと、

$$\begin{aligned} \langle dg_1 X, dg_1 Y \rangle_o &= \langle dhdg_1 X, dhdg_1 Y \rangle_o \qquad (\langle\ ,\ \rangle_o \text{の不変性}) \\ &= \langle dg_2 dg_1^{-1} dg_1 X, dg_2 dg_1^{-1} dg_1 Y \rangle_o \\ &= \langle dg_2 X, dg_2 Y \rangle_o. \end{aligned}$$

これにより G/H に G 不変な Riemann 計量が定まる。

系 2.3.14 G を Lie 群とし、H を G の Lie 部分群とする。$\mathrm{Ad}_G(H)$ はコンパクトであると仮定する。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

を満たす。等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

証明　命題 2.3.10 より、$\mathfrak{g}$ には $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変内積が存在する。その内積に関する $\mathfrak{h}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ で表す。任意の $h \in H$ について、

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

は内積を保ち、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ を満たすので、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ も成り立つ。さらに、

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G(h)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathfrak{m} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G(h)"] & \mathfrak{m}
\end{tikzcd}$$

は可換になるので、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体と、一対一に対応する。よって、命題 2.3.13 より、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体とも一対一に対応する。

G がコンパクトだから、K もコンパクトになり、命題 2.3.10 より、$\mathfrak{m}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積が存在する。したがって、G/H に G 不変 Riemann 計量が存在する。

2.4 Riemann 対称空間

この節では Riemann 対称空間の基本事項について解説する。

定義 2.4.1 連結 Riemann 多様体 M の各点 x に対して、M の等長変換 s_x が存在し、$s_x^2 = 1$ を満たし、x が s_x の孤立不動点になるとき、M を **Riemann 対称空間**と呼ぶ。s_x を x における**点対称**と呼ぶ。

例 2.4.2 $n \geq 1$ のとき、n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ がその内積から自然に誘導される Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になることを示す。$\mathbf{R}^n$ が連結になることはすぐにわかるので、各点 $x \in \mathbf{R}^n$ における点対称 s_x の存在を示せばよい。

$$s_x(y) = 2x - y \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

とおく。$s_x(y)$ は y を -1 倍し、$2x$ 平行移動して得られるので、等長変換になっている。

$$s_x s_x(y) = s_x(2x-y) = 2x-(2x-y) = y$$

となるので、$s_x^2 = 1$ を満たす。$s_x(y) = y$ とすると $2x-y=y$ となり、$y=x$ が成り立つ。すなわち、s_x の不動点は x だけである。特に x は s_x の孤立不動点になる。以上より、$\mathbf{R}^n$ は Riemann 対称空間になる。

例 2.4.3 $n \geq 1$ のとき、n 次元単位球面

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

が $\mathbf{R}^{n+1}$ から自然に誘導される Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になることを示す。S^n が連結になることはすぐにわかるので、各点 $x \in S^n$ における点対称 s_x の存在を示せばよい。$\mathbf{R}^{n+1}$ を x を含む一次元部分ベクトル空間 $\mathbf{R}x$ とその直交補空間 $(\mathbf{R}x)^\perp$ に直交直和分解する。$\mathbf{R}x$ を固有値 1 の固有空間として持ち、$(\mathbf{R}x)^\perp$ を固有値 -1 の固有空間として持つ線形写像を s_x で表すと、s_x は等長線形写像になる。よって $s_x(S^n) = S^n$ が成り立ち、s_x は S^n の等長変換とみなすことができる。s_x の固有値は ± 1 だから $s_x^2 = 1$ を満たす。s_x の固有値 1 の固有ベクトル空間は $\mathbf{R}x$ だから、s_x の S^n への作用の不動点は $\pm x$ になる。特に x は s_x の孤立不動点になる。以上より、S^n は Riemann 対称空間になる。

例 2.4.4 コンパクト連結 Lie 群が両側不変 Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になることを示す。系 2.3.11 より両側不変 Riemann 計量は存在する。まず

$$\tau(y) = y^{-1} \qquad (y \in G)$$

によって τ を定めると、τ は等長変換になることを示しておく。$x \in G$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} d\tau_x(dL_x X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tau(x \exp tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x \exp tX)^{-1} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-tX)x^{-1} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^{-1} \exp(-t\mathrm{Ad}(x)X) = -dL_{x^{-1}}\mathrm{Ad}(x)X. \end{aligned}$$

したがって、$d\tau_x = -dL_{x^{-1}}\mathrm{Ad}(x)dL_x^{-1}$ が成り立つ。命題 2.3.2 より $\mathrm{Ad}(x)$ は等長的なので、$d\tau_x$ も等長的になる。よって、τ は等長変換になる。

　$x \in G$ に対して

$$s_x(y) = xy^{-1}x \qquad (y \in G)$$

とおく。$s_x = L_x R_{x^{-1}} \tau$ となるので、s_x は等長変換になっている。

$$s_x s_x(y) = s_x(xy^{-1}x) = x(xy^{-1}x)^{-1}x = y$$

となるので、$s_x^2 = 1$ を満たす。

まず s_e の不動点を考える。$s_e = \tau$ となる。定理 2.1.19 より、$\mathfrak{g}$ の原点 0 の開近傍 U と G の e の開近傍 V が存在し、$\exp : U \to V$ は微分同型写像になる。$X \in U$ に対して

$$s_e \exp(X) = (\exp(X))^{-1} = \exp(-X)$$

となるので、V における s_e の不動点は e のみである。特に e は s_e の個立不動点になる。任意の $x, y \in G$ に対して

$$s_x(y) = xy^{-1}x = x(x^{-1}y)^{-1} = L_x s_e L_{x^{-1}}(y)$$

となるので、$s_x = L_x s_e L_{x^{-1}}$ が成り立つ。これより、s_x が x を孤立不動点として持つことがわかる。以上より、コンパクト連結 Lie 群 G は両側不変 Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になる。

定義 2.4.5 G を連結 Lie 群とし、K を G の閉 Lie 部分群とする。対 (G, K) が次の条件を満たすとき、(G, K) を **Riemann 対称対**と呼ぶ。$\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトになり、G の位数 2 の自己同型写像 θ が存在して

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおいて、G_θ の単位連結成分を G_θ^0 で表したとき、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ が成り立つ。

定理 2.4.6 M を Riemann 対称空間とし、o を M の一点とする。このとき、M の等長変換全体の成す群 $I(M)$ は M の Lie 変換群になる。さらに、$I(M)$ の単位連結成分を G で表し、

$$K = \{g \in G \mid go = o\}$$

とおくと、K はコンパクトになり、

$$G/K \to M \ ; \ gK \mapsto go$$

は微分同型写像になる。写像

$$\theta : G \to G \ ; \ g \mapsto s_o g s_o$$

は G の位数 2 の自己同型写像になり、この θ に関して (G, K) は Riemann 対称対になる。

定義 2.4.7 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$K(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって、$\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** K を定める。トレースの性質から K は対称二次形式になることがわかる。K が非退化になるとき、$\mathfrak{g}$ を**半単純**という。Lie 群の Lie 環が半単純になるとき、その Lie 群も**半単純**という。

定理 2.4.8 Riemann 対称対 (G, K) に対して、等質空間 G/K に G 不変 Riemann 計量を入れると ($\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトであることからこのような計量は存在する)、G/K は Riemann 対称空間になる。

注意 2.4.9 定理 2.4.8 の設定のもとで、G の位数 2 の自己同型写像を θ とし、θ が誘導する G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型写像も θ で表す。$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解すると、自然な射影 $G \to G/K$ の微分写像によって、$\mathfrak{p}$ は G/K の原点 o の接ベクトル空間 $T_o(G/K)$ と同一視することができる。(以後、$T_o(G/K)$ と $\mathfrak{p}$ を同一視する。)

例 2.4.10 例 2.4.2 で扱った Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対応する Riemann 対称対について考える。$\mathbf{R}^n$ の等長変換全体の成す群の単位連結成分を G で表すと、

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; A \in SO(n),\ x \in \mathbf{R}^n \right\}$$

とみなすことができる。G の $\mathbf{R}^n$ への作用は $y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ay + x \\ 1 \end{bmatrix}$$

によって定める。このとき、

$$K = \{g \in G \mid g0 = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; A \in SO(n) \right\} \cong SO(n).$$

したがって、$\mathbf{R}^n$ は G/K と微分同型になる。さらに、原点 0 における点対称 s_0 は

$$s_0 = \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in I(\mathbf{R}^n).$$

これより

$$s_0 \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\theta \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

によって $\theta : G \to G$ を定めると、θ は G の位数 2 の自己同型写像になり、この θ に関して (G, K) は Riemann 対称対になる。

例 2.4.11 例 2.4.3 で扱った n 次元単位球面 S^n に対応する Riemann 対称対について考える。S^n の等長変換全体の成す群の単位連結成分は $SO(n+1)$ になる。さらに S^n の原点 o を e_{n+1} に選べば

$$\{g \in SO(n+1) \mid go = o\} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \;\middle|\; A \in SO(n) \right\} \cong SO(n).$$

したがって、S^n は $SO(n+1)/SO(n)$ と微分同型になる。さらに、原点 0 における点対称 s_o は

$$s_o = \left[\begin{array}{cc} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \in O(n+1).$$

これより $\theta(g) = s_o g s_o$ によって $\theta : G \to G$ を定めると、θ は G の位数 2 の自己同型写像になり、この θ に関して $(SO(n+1), SO(n))$ は Riemann 対称対になる。

次の定理は Lie 群と Lie 環に関する定理だが、直交対称 Lie 代数の定義で必要になる Lie 環の内部自己同型群の定義に使うので、ここで述べておく。

定理 2.4.12 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるものが一意に存在する。

定義 2.4.13 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $GL(\mathfrak{g})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群を $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で表し、Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**内部自己同型群**と呼ぶ。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ がコンパクトになるとき、$\mathfrak{g}$ を**コンパクト Lie 環**という。

定義 2.4.14 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と位数 2 の自己同型写像 θ の組 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対して、

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

とおくと、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ に対応する $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 内の連結 Lie 部分群がコンパクトになるとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ を**直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。さらに、$\mathfrak{g}$ の中心と $\mathfrak{k}$ の共通部分が $\{0\}$ になるとき、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ は**効果的**と言われる。Lie 群の組 (G, K) に対して G は Lie 環 $\mathfrak{g}$ を持つ連結 Lie 群で、K は Lie 環 $\mathfrak{k}$ を持つ Lie 部分群であるとき、(G, K) は直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応しているという。

定義 2.4.15 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解する。$\mathfrak{g}$ は半単純であって、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の非自明イデアルを含まず、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{p}$ に既約に作用するとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ を**既約直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応する Lie 群の組 G, K は、$(\mathfrak{g}, \theta)$ が既約のとき、**既約**と言う。Riemann 対称空間 M に対して、M の等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分を G とし、M の一点を固定する G の部分群を K とすると、定理 2.4.6 より、(G, K) は Riemann 対称対になる。(G, K) が既約のとき、M を**既約 Riemann 対称空間**と呼ぶ。

例 2.4.16 (G,K) を Riemann 対称対とする。定義 2.4.5 より、G の位数 2 の自己同型写像 θ が存在して

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおくと、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ が成り立つ。そこで、θ の誘導する $\mathfrak{g}$ の自己同型写像も θ で表すと、これも位数 2 になり、$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解される。さらに、$(\mathfrak{g},\theta)$ は直交対称 Lie 代数になることがわかる。Riemann 対称対 (G,K) は、定義 2.4.14 の意味で、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\theta)$ に対応している。

命題 2.4.17 $(\mathfrak{g},\theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{k}$ を θ の不動点全体とする。Lie 群の組 (G,K) が $(\mathfrak{g},\theta)$ に対応していて、G は単連結であり、K は連結であると仮定する。このとき、(G,K) は Riemann 対称対になる。

定義 2.4.18 $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 環とし、σ で複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 内の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像とする。$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{k}$ と部分ベクトル空間 $\mathfrak{p}$ による直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が **Cartan 分解**であるとは、$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 内にあるコンパクト半単純 Lie 部分環 $\mathfrak{g}_k$ が存在し、

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_k^{\mathbf{C}}, \quad \sigma\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap (\sqrt{-1}\mathfrak{g}_k)$$

を満たすことをいう。

定理 2.4.19 $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 環とすると、$\mathfrak{g}$ には Cartan 分解が存在し、しかも、$\mathfrak{g}$ のどの Cartan 分解も $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像で移り合う。

例 2.4.20 $\mathfrak{g}$ を非コンパクト実半単純 Lie 代数とし、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{k} \text{ が部分 Lie 環})$$

を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする。定理 2.4.19 より、このような分解が存在し、しかも、$\mathfrak{g}$ の内部自己同型を除いて一意的である。このとき、

$$\theta(T + X) = T - X \qquad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{p})$$

によって線形写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を定めると、$(\mathfrak{g},\theta)$ は直交対称 Lie 代数になる。

定義 2.4.21 $(\mathfrak{g},\theta)$ を直交対称 Lie 代数とすると、$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解される。

(1) $\mathfrak{g}$ がコンパクト半単純 Lie 環のとき、$(\mathfrak{g},\theta)$ は**コンパクト型**であるといわれる。

(2) $\mathfrak{g}$ が非コンパクト半単純 Lie 環であって、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解になっているとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は**非コンパクト型**であるといわれる。

(3) $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の可換イデアルになっているとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ は **Euclid 型**であるといわれる。

Riemann 対称空間や Riemann 対称対に対しても、対応する直交対称 Lie 代数の型の名前をそのまま使う。

命題 2.4.22 $(\mathfrak{g}, \theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解する。$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ によって $\mathfrak{g}^*$ を定め、θ を $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ に複素線形に拡張して $\mathfrak{g}^*$ に制限したものを θ^* で表す。このとき、$(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ も直交対称 Lie 代数になる。さらに、$(\mathfrak{g}, \theta)$ がコンパクト型ならば、$(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ は非コンパクト型になり、逆も成り立つ。

定義 2.4.23 直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対して、命題 2.4.22 で定めた直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$ を $(\mathfrak{g}, \theta)$ の**双対**と呼ぶ。

注意 2.4.24 Riemann 対称対 (G, K) と (G^*, K) に対応する直交対称 Lie 代数が互いの双対になっているとき、これら Riemann 対称対の線形イソトロピー表現は同値になる。

例 2.4.25 $SL(n, \mathbf{R})$ は連結 Lie 群であり、$SO(n)$ は $SL(n, \mathbf{R})$ 内のコンパクト部分群になっている。$SO(n)$ はコンパクトだから、$\mathrm{Ad}_{SL(n,\mathbf{R})}(SO(n))$ もコンパクトになる。以後、$\mathrm{Ad}_{SL(n,\mathbf{R})}$ を単に Ad と書くことにする。

$$\theta : SL(n, \mathbf{R}) \to SL(n, \mathbf{R})\ ; g \mapsto {}^t g^{-1}$$

によって、$SL(n, \mathbf{R})$ の自己同型写像 θ を定める。すると、θ は位数 2 の自己同型写像になり、

$$SO(n) = \{g \in SL(n, \mathbf{R}) \mid \theta(g) = g\}$$

が成り立つ。以上より、$(SL(n, \mathbf{R}), SO(n))$ は Riemann 対称対になる。

$SL(n, \mathbf{R})$ の自己同型写像 θ に対応する Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ の自己同型写像 θ は

$$\theta : \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})\ ; X \mapsto -{}^t X$$

になる。よって、θ による $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ の分解は、

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \mid {}^t X = X\}$$

となる。$(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}), \theta)$ は、Riemann 対称対 $(SL(n, \mathbf{R}), SO(n))$ から定まっているので、直交対称 Lie 代数になる。

Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ は非コンパクト単純 Lie 環になることが知られている。$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ の複素化は $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ になり、$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ 内の $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ に関する複素共役写像 σ は、通常の複素共役写

像、つまり行列の各成分の複素共役をとる写像に一致する。$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ 内のコンパクト単純 Lie 環になることが知られている。

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{o}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

となるので、$\mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ が成り立つ。上の $\mathfrak{su}(n)$ の分解より、$\sigma\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n)$ が成り立つこともわかる。さらに、

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \cap \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{o}(n), \qquad \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \cap (\sqrt{-1}\mathfrak{su}(n)) = \mathfrak{p}$$

が成り立つので、分解

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) \mid {}^tX = X\}$$

は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ の Cartan 分解になる。したがって、$(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}),\theta)$ は非コンパクト型直交対称 Lie 代数になり、$(SL(n,\mathbf{R}),SO(n))$ は非コンパクト型 Riemann 対称対になる。

上で示したことより、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{o}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{su}(n)$$

となり、

$$\theta^* : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)\ ; X \mapsto -{}^tX.$$

さらに $(\mathfrak{su}(n),\theta^*)$ は、コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。対応するコンパクト型 Riemann 対称対は、$(SU(n),SO(n))$ であって、$SU(n)$ の位数 2 の自己同型写像は

$$\theta^* : SU(n) \to SU(n)\ ; g \mapsto {}^tg^{-1}$$

になる。

2.5　実空間形と複素空間形

定義 2.5.1 単連結で断面曲率一定の完備 Riemann 多様体を**実空間形**と呼ぶ。$n \geq 2$ とすると、n 次元実空間形は Riemann 計量を正の定数倍することにより、次の三つのうちのいずれか一つと等長的になることが知られている。

(1) $\mathbf{R}^n$ に標準的な平坦な Riemann 計量を入れたもの。

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle|\ a \in SO(n),\ x \in \mathbf{R}^n \right\}, \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle|\ a \in SO(n) \right\} \cong SO(n) \end{aligned}$$

とおくと、自然に等質空間 G/K は $\mathbf{R}^n$ に同一視される。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ X \in \mathfrak{o}(n),\ x \in \mathbf{R}^n \right\}, \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ X \in \mathfrak{o}(n) \right\} \cong \mathfrak{o}(n) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ x \in \mathbf{R}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) \\ & \quad \left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{k} \right) \\ \left\langle \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle x, y \rangle \\ & \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p} \right) \end{aligned}$$

によって $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ に内積を定め、$\mathfrak{g}$ 全体には $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ が直交するように内積を定める。この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の左不変 Riemann 計量になる。この左不変 Riemann 計量から誘導される G/K 上の Riemann 計量は、$\mathbf{R}^n$ の Riemann 計量に一致する。この Riemann 計量に関して、$\mathbf{R}^n$ は定曲率 0 の実空間形になる。

$$\left[\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & Xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。$\mathfrak{p}$ が可換であることもわかるので、$\mathbf{R}^n$ は Euclid 型 Riemann 対称空間になる。

(2) $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の単位球面 S^n に $\mathbf{R}^{n+1}$ の Riemann 計量から誘導された Riemann 計量を入れたもの。ただし、$n \geq 2$ とする。

$$\begin{aligned} G &= SO(n+1) \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ a \in SO(n) \right\} \cong SO(n) \end{aligned}$$

とおくと、自然に等質空間 G/K は S^n に同一視される。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(n+1) \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; X \in \mathfrak{o}(n) \right\} \cong \mathfrak{o}(n) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{R}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって $\mathfrak{g}$ に内積を定めると、

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t y & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) + \langle x, y \rangle \\ & \left(\begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t y & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g} \right) \end{aligned}$$

となり、特に、$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ は直交する。さらに

$$\langle gXg^{-1}, gYg^{-1} \rangle = \langle X, Y \rangle \qquad (g \in G,\ X, Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つので、この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の両側不変 Riemann 計量になる。この両側不変 Riemann 計量から誘導される G/K 上の Riemann 計量は、S^n の Riemann 計量に一致する。この Riemann 計量に関して、S^n は定曲率 1 の実空間形になる。$SO(n+1)$ はコンパクト半単純 Lie 群になり、さらに $n \neq 3$ のとき $SO(n+1)$ はコンパクト単純 Lie 群になることが知られている。特に、S^n はコンパクト型 Riemann 対称空間になる。

(3) $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の二次形式 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ は非退化だから、

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} |\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,\ x_{n+1} > 0\}$$

とおくと、H^n は $\mathbf{R}^{n+1}$ の正規部分多様体になる。C^∞ 級写像

$$\mathbf{R}^n \to H^n\ ;\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1})$$

は $\mathbf{R}^n$ と H^n の間の微分同型写像を与えるので、特に、H^n は連結で単連結になる。$\mathbf{R}^{n+1}$ の正定値ではない計量

$$dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n - dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}$$

から誘導された計量を H^n に入れる。これは Riemann 計量になる。上の二次形式を表す行列を

$$I_{n,1} = \begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とし、

$$\begin{aligned} G' &= \{g \in GL(n+1, \mathbf{R}) \mid {}^t g I_{n,1} g = I_{n,1}\}, \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in SO(n) \right\} \cong SO(n) \end{aligned}$$

とおくと、G' は $I_{n,1}$ の定める二次形式を不変にする $\mathbf{R}^{n+1}$ の線形同型写像の全体になる。次の Witt の定理（定理 2.5.2）より、G' は H^n に推移的に作用するので、G' の単位元の連結成分 G も H^n に推移的に作用し、自然に等質空間 G/K は H^n に同一視される。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & x \\ {}^t x & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, X \in \mathfrak{o}(n),\ x \in \mathbf{R}^n \right\}, \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, X \in \mathfrak{o}(n) \right\} \cong \mathfrak{o}(n) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t x & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbf{R}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) \\ & \qquad \left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{k} \right) \\ \left\langle \begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ {}^t y & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle x, y \rangle \\ & \qquad \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ {}^t y & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p} \right) \end{aligned}$$

によって $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ に内積を定め、$\mathfrak{g}$ 全体には $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ が直交するように内積を定める。この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の左不変 Riemann 計量になる。この左不変 Riemann 計量から誘導される G/K 上の Riemann 計量は、H^n の Riemann

計量に一致する。この Riemann 計量に関して、H^n は定曲率 -1 の実空間形になる。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 内で $\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ を考える。写像 $f:\mathfrak{o}(n+1)\to\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ を

$$f\begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \sqrt{-1}x \\ \sqrt{-1}{}^t x & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める。

$$\begin{aligned} \left[\begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t y & 0 \end{bmatrix}\right] &= \begin{bmatrix} XY - x{}^t y - YX + y{}^t x & Xy - Yx \\ -{}^t xY + {}^t yX & 0 \end{bmatrix}, \\ \left[f\begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t x & 0 \end{bmatrix}, f\begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t y & 0 \end{bmatrix}\right] &= \begin{bmatrix} XY - x{}^t y - YX + y{}^t x & \sqrt{-1}(Xy - Yx) \\ \sqrt{-1}({}^t xY - {}^t yX) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので、f は Lie 環の同型写像になり、さらに直交対称 Lie 代数の同型写像にもなる。つまり、H^n に対応する直交対称 Lie 代数の双対は球面に対応する直交対称 Lie 代数になる。したがって、命題 2.4.22 より H^n は非コンパクト型 Riemann 対称空間になる。または、次のように $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ が Cartan 分解であることを直接確かめることもできる。$\mathfrak{g}_k=\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ とおくと、$\mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{o}(n+1)$ と同型になるので、$\mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ のコンパクト半単純 Lie 部分環になる。$\mathfrak{g}_k$ の定め方から

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_k^{\mathbf{C}}, \quad \sigma\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}\cap(\sqrt{-1}\mathfrak{g}_k)$$

が成り立つことがわかる。したがって、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解になる。

今後、特に断らない限り、実空間形は上の (1)、(2)、(3) のうちのいずれかとする。(3) の実空間形を**双曲空間**と呼ぶ。注意 2.4.24 より球面と双曲空間の線形イソトロピー表現は同値になる。このことは上の構成方法からも直接わかる。

定理 2.5.2 (Witt) $\langle\ ,\ \rangle$ をベクトル空間 V 上の非退化二次形式とする。V の部分ベクトル空間 U と U から V への線形写像 $f:U\to V$ が

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle \qquad (u\in U)$$

を満たすとき、f は V の線形同型写像 $\bar{f}$ で

$$\langle \bar{f}(v), \bar{f}(v)\rangle = \langle v, v\rangle \qquad (v\in V)$$

を満たすものに拡張できる。

定義 2.5.3 単連結で正則断面曲率一定の完備 Hermite 多様体を**複素空間形**と呼ぶ。n 次元複素空間形は Riemann 計量を正の定数倍することにより、次の三つのうちのいずれか一つと等長的になる。

(1) $\mathbf{C}^n$ に標準的な平坦な Riemann 計量を入れたもの。

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & u \end{bmatrix} \middle| \ A \in U(n),\ u \in U(1),\ x \in \mathbf{C}^n \right\}, \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \middle| \ A \in U(n),\ u \in U(1) \right\} \cong U(n) \times U(1) \end{aligned}$$

とおくと、自然に等質空間 G/K は $\mathbf{C}^n$ に同一視される。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & x \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| \ X \in \mathfrak{u}(n),\ z \in \mathfrak{u}(1),\ x \in \mathbf{C}^n \right\}, \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| \ X \in \mathfrak{u}(n),\ z \in \mathfrak{u}(1) \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ x \in \mathbf{C}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) - xw \\ & \quad \left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \in \mathfrak{k} \right) \\ \left\langle \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle x, y \rangle \\ & \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p} \right) \end{aligned}$$

によって $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ に内積を定め、$\mathfrak{g}$ 全体には $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ が直交するように内積を定める。この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の左不変 Riemann 計量になる。この左不変 Riemann 計量から誘導される G/K 上の Riemann 計量は、$\mathbf{C}^n$ の Riemann 計量に一致する。この Riemann 計量に関して、$\mathbf{C}^n$ は定曲率 0 の複素空間形になる。Euclid 型実空間形の場合と同様に、原点 0 における点対称 s_0 は

$$s_0 = \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G.$$

これより

$$s_0 \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & u \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -x \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\theta\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -x \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

によって $\theta : G \to G$ を定めると、θ は G の位数 2 の自己同型写像になり、この θ に関して (G, K) は Riemann 対称対になる。したがって $G/K = \mathbf{C}^n$ は Riemann 対称空間になる。

$$\left[\begin{bmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & Xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。$\mathfrak{p}$ が可換であることもわかるので、$\mathbf{C}^n$ は Euclid 型 Riemann 対称空間になる。

(2) $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の 1 次元複素部分ベクトル空間全体が成す**複素射影空間** $P^n(\mathbf{C})$ に以下で定める標準的な Riemann 計量を入れたもの。

$$\begin{aligned} G &= U(n+1) \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \middle| \ a \in U(n), u \in U(1) \right\} \end{aligned}$$

とおくと、自然に等質空間 G/K は $P^n(\mathbf{C})$ に同一視される。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{u}(n+1) \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| \ X \in \mathfrak{u}(n), z \in \mathfrak{u}(1) \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -{}^t\overline{x} & 0 \end{bmatrix} \middle| \ x \in \mathbf{C}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって $\mathfrak{g}$ に内積を定めると、

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t\overline{x} & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t\overline{y} & w \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) + \langle x, y \rangle - \frac{1}{2}zw \\ & \left(\begin{bmatrix} X & x \\ -{}^t\overline{x} & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ -{}^t\overline{y} & w \end{bmatrix} \in \mathfrak{g} \right) \end{aligned}$$

となり、特に、$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ は直交する。さらに

$$\langle gXg^{-1}, gYg^{-1} \rangle = \langle X, Y \rangle \qquad (g \in G,\ X, Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つので、この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の両側不変 Riemann 計量になる。この両側不変 Riemann 計量は、G/K 上の Riemann 計量を誘導する。この Riemann 計量に関して、$P^n(\mathbf{C})$ は定正則断面曲率 4 の複素空間形になる。$U(n+1)$ の中心を取り除いた $SU(n+1)$ はコンパクト単純 Lie 群になることが知られている。このことから、$P^n(\mathbf{C})$ はコンパクト型 Riemann 対称空間になることがわかる。

(3) $\mathbf{C}^{n+1}$ 上の Hermite 形式 $z_1\bar{z}_1+\cdots+z_n\bar{z}_n-z_{n+1}\bar{z}_{n+1}$ を不変にする行列式が 1 の複素線形変換の全体を考える。つまり、上の Hermite 形式を表す行列を

$$I_{n,1}=\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とし、

$$\begin{aligned} G &= U(n,1)=\{g\in GL(n+1,\mathbf{C}) \mid {}^t g I_{n,1}\bar{g}=I_{n,1}\}, \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \;\middle|\; a\in U(n), u\in U(1) \right\} \end{aligned}$$

とおく。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & x \\ {}^t\bar{x} & z \end{bmatrix} \;\middle|\; X\in\mathfrak{u}(n), z\in\mathfrak{u}(1), x\in\mathbf{C}^n \right\}, \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \;\middle|\; X\in\mathfrak{u}(n), z\in\mathfrak{u}(1) \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\mathfrak{p}=\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t\bar{x} & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x\in\mathbf{C}^n \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は直和分解になる。

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)-\frac{1}{2}zw \\ & \qquad \left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \in\mathfrak{k} \right) \\ \left\langle \begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t\bar{x} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ {}^t\bar{y} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle x, y\rangle \\ & \qquad \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t\bar{x} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y \\ {}^t\bar{y} & 0 \end{bmatrix} \in\mathfrak{p} \right) \end{aligned}$$

によって $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ に内積を定め、$\mathfrak{g}$ 全体には $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ が直交するように内積を定める。この $\mathfrak{g}$ 上の内積を G 全体に左不変に拡張すると、G 上の左不変 Riemann 計量になる。この左不変 Riemann 計量から誘導される $H^n(\mathbf{C}) = G/K$ 上の Riemann 計量に関して、$H^n(\mathbf{C})$ は定正則断面曲率 -4 の複素空間形になる。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 内で $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ を考える。

$$\begin{aligned} & \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p} \\ = & \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{u}(n), z \in \mathfrak{u}(1) \right\} + \sqrt{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ {}^t\bar{x} & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbf{C}^n \right\} \\ = & \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{u}(n), z \in \mathfrak{u}(1) \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -{}^t\bar{x} & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbf{C}^n \right\} \\ = & \mathfrak{u}(n+1) \end{aligned}$$

となるので、$H^n(\mathbf{C})$ に対応する直交対称 Lie 代数の双対は複素射影空間に対応する直交対称 Lie 代数になる。したがって、命題 2.4.22 より $H^n(\mathbf{C})$ は非コンパクト型 Riemann 対称空間になる。または、次のように $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が Cartan 分解であることを直接確かめることもできる。$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ とおくと、$\mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{u}(n+1)$ に一致するので、$\mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ のコンパクト半単純 Lie 部分環になる。$\mathfrak{g}_k$ の定め方から

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_k^{\mathbf{C}}, \quad \sigma\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap (\sqrt{-1}\mathfrak{g}_k)$$

が成り立つことがわかる。したがって、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解になる。

今後、特に断らない限り、複素空間形は上の (1)、(2)、(3) のうちのいずれかとする。(3) の複素空間形を**複素双曲空間**と呼ぶ。注意 2.4.24 より複素射影空間と複素双曲空間の線形イソトロピー表現は同値になる。このことは上の構成方法からも直接わかる。

第3章　等質空間におけるPoincaréの公式

3.1　Howardによる定式化

等質空間の接ベクトル空間の部分ベクトル空間の間の不変角度を定義し、これを使って等質空間内の二つの部分多様体について Poincaré の公式の一般化を定式化し証明する。この一般的な Poincaré の公式の定式化は、

R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).
によるものである。

定義 3.1.1 E を内積を持つ有限次元実ベクトル空間とし、V と W を E の部分ベクトル空間とする。V の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_p$ と W の正規直交基底 $w_1, \ldots, w_q$ をとり、

$$\sigma(V, W) = |v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q|$$

によって $\sigma(V, W)$ を定義する。この定義は V と W の正規直交基底のとり方に依存しない。

上の定義が V と W の正規直交基底のとり方に依存しないことを示しておく。V の別の正規直交基底 $v'_1, \ldots, v'_p$ と W の別の正規直交基底 $w'_1, \ldots, w'_q$ をとる。すると直交行列 A, B が存在し、

$$[v'_1, \ldots, v'_p] = [v_1, \ldots, v_p]A, \qquad [w'_1, \ldots, w'_q] = [w_1, \ldots, w_q]B$$

が成り立つ。$\det A = \pm 1$, $\det B = \pm 1$ だから、命題 1.2.3 より

$$v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_p = \pm v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, \qquad w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_q = \pm w_1 \wedge \cdots \wedge w_q$$

が成り立つ。したがって、

$$|v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_p \wedge w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_q| = |v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q|$$

となり、上の定義は正規直交基底のとり方には依存しない。

命題 3.1.2 定義 3.1.1 において

$$0 \leq \sigma(V, W) \leq 1$$

が成り立つ。$\sigma(V, W) = 0$ となるための必要十分条件は $V \cap W$ が 1 次元以上になることである。また $\sigma(V, W) = 1$ となるための必要十分条件は V と W が直交することである。

証明　V の正規直交基底 $v_1, \dots, v_p$ と W の正規直交基底 $w_1, \dots, w_q$ をとると、定義3.1.1より

$$\sigma(V, W) = |v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q|.$$

したがって、$0 \leq \sigma(V, W)$ が成り立つ。また命題1.3.7より、$\sigma(V, W) \leq 1$ を得る。

$\sigma(V, W) = 0$ となる必要十分条件は

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q = 0$$

であり、これは $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q$ が線形従属になることと同値になる。

$$p + q - 1 \geq \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

だから、これは $V \cap W$ が1次元以上になることと同値になる。

$\sigma(V, W) = 1$ となる必要十分条件は命題1.3.7より、$v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q$ が互いに直交していることだから、V と W が直交することになる。

定義 3.1.3 G を左不変 Riemann 計量を持つ Lie 群とし、K を G のコンパクト部分群とする。さらに G/K は自然に Riemann 等質空間になるとする。すなわち、G の Riemann 計量は K 上両側不変になっている。$T_x(G/K)$ の部分空間 V と $T_y(G/K)$ の部分空間 W に対して、$g_x o = x$ と $g_y o = y$ を満たす $g_x, g_y \in G$ をとり、

$$\sigma_K(V, W) = \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k)$$

によって $\sigma_K(V, W)$ を定義する。この定義は $g_x o = x$ と $g_y o = y$ を満たす $g_x, g_y \in G$ のとり方に依存しない。

上の定義が $g_x, g_y \in G$ のとり方に依存しないことを示しておく。$g'_x o = x$ と $g'_y o = y$ を満たす別の $g'_x, g'_y \in G$ をとる。$k_x = (g'_x)^{-1} g_x$, $k_y = (g'_y)^{-1} g_y$ とおくと、$k_x o = o$, $k_y o = o$ が成り立ち $k_x, k_y \in K$ となる。

$$\begin{aligned}
& \int_K \sigma((dg'_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dg'_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k) \\
= & \int_K \sigma((dg'_x)_o^{-1}(dg_x)_o(dg_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dg'_y)_o^{-1}(dg_y)_o(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k) \\
= & \int_K \sigma((dk_x)_o(dg_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dk_y)_o(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k) \\
= & \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1} V, (dk_x)_o^{-1} dk_o^{-1}(dk_y)_o(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k) \\
= & \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1} V, d(k_y^{-1} k_o k_x)^{-1}(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k) \\
= & \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k)
\end{aligned}$$

となるので、この量は $g_x, g_y \in G$ のとり方に依存しない。

命題 3.1.4 定義 3.1.3 において

$$0 \leq \sigma_K(V, W) \leq \mathrm{vol}(K)$$

が成り立つ。また σ_K は次のような不変性も持つ。

$$\sigma_K(V, W) = \sigma_K(dgV, W) = \sigma_K(V, dgW) \qquad (g \in G).$$

証明 命題 3.1.2 より

$$0 \leq \sigma((dg_x)_o^{-1}V, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1}W) \leq 1$$

となるので、辺々を K 上で積分すると

$$0 \leq \sigma_K(V, W) \leq \mathrm{vol}(K)$$

を得る。

$z = gx$ とおくと $z = gg_x o$ だから、σ_K の定義において g_x の代りに gg_x を使うと

$$\begin{aligned}
\sigma_K(dgV, W) &= \int_K \sigma(d(gg_x)_o^{-1}dgV, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1}W)d\mu_K(k) \\
&= \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1}V, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1}W)d\mu_K(k) \\
&= \sigma_K(V, W).
\end{aligned}$$

同様にすると $\sigma_K(V, dgW) = \sigma_K(V, W)$ も得られる。

定理 3.1.5 (Howard) G/K を Riemann 等質空間とし、G はユニモジュラーであると仮定する。G/K の部分多様体 M, N で

$$\dim M + \dim N \geq \dim(G/K)$$

を満たすものに対して、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N)d\mu_G(g) = \int_{M\times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N)d\mu_{M\times N}(x, y)$$

が成り立つ。

証明 $G \times (G/K)^2$ の部分集合 $I(G \times (G/K)^2)$ を

$$I(G \times (G/K)^2) = \{(g, x, y) \in G \times (G/K)^2 \mid gx = y\}$$

で定める。まず、$I(G\times(G/K)^2)$ が $G\times(G/K)^2$ 内の正規部分多様体になることを示そう。

$$p : G \times (G/K)^2 \to (G/K)^2 \ \ ; \ (g, x, y) \mapsto (gx, y)$$

で写像 p を定義すると、p は C^∞ 級写像になる。さらに p の定義から、p の各点の微分写像は全射になるので、p は submersion になる。

$$D(G/K) = \{(x,x) \in (G/K)^2 \mid x \in G/K\}$$

とおくと、$D(G/K)$ は $(G/K)^2$ 内の正規部分多様体になる。したがって、その submersion による逆像 $p^{-1}(D(G/K))$ は $G \times (G/K)^2$ 内の正規部分多様体になる。定め方より、

$$I(G \times (G/K)^2) = p^{-1}(D(G/K))$$

となり、$I(G \times (G/K)^2)$ は $G \times (G/K)^2$ 内の正規部分多様体になる。

$$\begin{aligned} \dim I(G \times (G/K)^2) &= \dim G + 2\dim(G/K) - \dim(G/K) \\ &= \dim G + \dim(G/K). \end{aligned}$$

次に写像 q を

$$q : I(G \times (G/K)^2) \to (G/K)^2 \ ; \ (g,x,y) \mapsto (x,y)$$

によって定義する。これが、ファイバー K のファイバー束になることを示す。各 $(x,y) \in (G/K)^2$ について、$g_x o = x,\ g_y o = y$ を満たす $g_x, g_y \in G$ をとる。すると

$$q^{-1}(x,y) \supset (g_y K g_x^{-1}) \times \{(x,y)\}$$

となることはすぐにわかる。逆に $(g,x,y) \in q^{-1}(x,y)$ に対して $gx = y$ だから

$$o = g_y^{-1} y = g_y^{-1} g x = g_y^{-1} g g_x o.$$

よって、$g_y^{-1} g g_x \in K$ となり、$g \in g_y K g_x^{-1}$。以上より、

$$q^{-1}(x,y) = (g_y K g_x^{-1}) \times \{(x,y)\}$$

が成り立つ。これは K と微分同型になる。G/K は Riemann 等質空間だから、G は K の上で両側不変になるような左不変 Riemann 計量を持つ。その Riemann 計量は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積で、$\mathrm{Ad}_G(K)$ 不変なものを誘導する。K に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{k}$ で表す。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

を $\mathfrak{g}$ の直交直和分解とする。$\mathrm{Ad}_G(K)\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ だから、$\mathrm{Ad}_G(K)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ が成り立つ。G/K の多様体構造を構成するときに示すように、$\mathfrak{p}$ の原点 0 の開近傍 U と G/K の原点 o の開近傍 V が存在し、

$$U \to V \ ; \ u \mapsto \exp u(o)$$

は微分同型写像になる。これより、

$$\begin{aligned} &U \to g_x V \ ; \ u \mapsto g_x \exp u(o) \\ &U \to g_y V \ ; \ u \mapsto g_y \exp u(o) \end{aligned}$$

もまた微分同型写像になる。そこで写像

$$\varphi : K \times g_xV \times g_yV \to q^{-1}(g_xV \times g_yV)$$

を

$$\begin{aligned} & \varphi(k, g_x \exp u(o), g_y \exp v(o)) \\ = \ & (g_y \exp v k \exp(-u) g_x^{-1}, g_x \exp u(o), g_y \exp v(o)) \end{aligned}$$

によって定義すると、φ は C^∞ 級写像になる。φ の逆写像

$$\varphi^{-1} : q^{-1}(g_xV \times g_yV) \to K \times g_xV \times g_yV$$

は

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1}(g, g_x \exp u(o), g_y \exp v(o)) \\ = \ & (\exp(-v) g_y^{-1} g g_x \exp u, g_x \exp u(o), g_y \exp v(o)) \end{aligned}$$

で与えられ、これも C^∞ 級写像になるので、φ は微分同型写像になる。したがって、φ は $q : I(G \times (G/K)^2) \to (G/K)^2$ の局所自明性を与えることになり、$q : I(G \times (G/K)^2) \to (G/K)^2$ はファイバー K のファイバー束になる。

あとで必要になるので、φ の (k, x, y) における微分写像を計算しておく。$T \in \mathfrak{k}$ に対して

$$\begin{aligned} d\varphi_{(k,x,y)}(dL_kT, 0, 0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g_y k \exp(tT) g_x^{-1}, x, y) \\ &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_y k g_x^{-1} \exp(t\mathrm{Ad}_G(g_x)T), 0, 0 \right) \\ &= (dL_{\varphi(k,x,y)} \mathrm{Ad}_G(g_x)T, 0, 0). \end{aligned}$$

$X \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\begin{aligned} & d\varphi_{(k,x,y)}(0, dg_xX, 0) \\ = \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g_y k \exp(-tX) g_x^{-1}, g_x \exp(tX)(o), y) \\ = \ & \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_y k g_x^{-1} \exp(-t\mathrm{Ad}_G(g_x)X), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_x \exp(tX)(o), 0 \right) \\ = \ & (-dL_{\varphi(k,x,y)} \mathrm{Ad}_G(g_x)X, dg_xX, 0). \end{aligned}$$

$Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\begin{aligned} & d\varphi_{(k,x,y)}(0, 0, dg_yY) \\ = \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g_y \exp(tY) k g_x^{-1}, x, g_y \exp(tY)(o)) \\ = \ & \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_y k g_x^{-1} \exp(t\mathrm{Ad}_G(g_x)\mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y)), 0, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_y \exp(tY)(o) \right) \\ = \ & (dL_{\varphi(k,x,y)} \mathrm{Ad}_G(g_x)\mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y, 0, dg_yY). \end{aligned}$$

したがって $T \in \mathfrak{k}$, $X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\begin{aligned} & d\varphi_{(k,x,y)}(dL_k T, dg_x X, dg_y Y) \\ = \;& (dL_{\varphi(k,x,y)} \mathrm{Ad}_G(g_x)(T - X + \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y), dg_x X, dg_y Y). \end{aligned}$$

$q : I(G \times (G/K)^2) \to (G/K)^2$ は submersion になっているので、

$$I(M, N) = q^{-1}(M \times N)$$

は $I(G \times (G/K)^2)$ の部分多様体になる。

$$\begin{aligned} \dim I(M, N) &= (\dim G + \dim(G/K)) - \mathrm{codim}(M \times N) \\ &= (\dim G + \dim(G/K)) - (2\dim(G/K) - \dim M - \dim N) \\ &\geq \dim G. \end{aligned}$$

写像 f を

$$f : I(M, N) \to G \;\; ; \; (g, x, y) \mapsto g$$

で定義すると、f は C^∞ 級写像になる。$I(M, N)$ 上恒等的に 1 に等しい関数と $f : I(M, N) \to G$ に定理 1.5.5 を適用すると、

$$\int_{I(M,N)} Jf d\mu_{I(M,N)} = \int_G \mathrm{vol}(f^{-1}(g)) d\mu_G(g)$$

を得る。

$$\begin{aligned} f^{-1}(g) &= I(M, N) \cap (\{g\} \times (G/K)^2) \\ &= \{(g, x, gx) \mid x \in M, \; gx \in N\} \\ &= \{(g, x, gx) \mid gx \in gM \cap N\} \end{aligned}$$

より、

$$\psi : gM \cap N \to f^{-1}(g); \; gx \mapsto (g, x, gx)$$

は全単射になる。g が f の正則値のとき、$f^{-1}(g)$ は $I(M, N)$ の部分多様体になる。$gM \cap N$ も G/K の部分多様体になる。さらに、ψ は微分同型写像になる。X を $g^{-1}(gM \cap N)$ の接ベクトルとすると、

$$d\psi(dgX) = (0, X, dgX).$$

dg は線形等長写像だから、

$$\langle d\psi(dgX), d\psi(dgY) \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle dgX, dgY \rangle = 2\langle X, Y \rangle.$$

そこで、

$$r = \dim(f^{-1}(g)) = \dim(gM \cap N) = \dim M + \dim N - \dim(G/K)$$

とおくと、

$$\mathrm{vol}(f^{-1}(g)) = 2^{r/2}\mathrm{vol}(gM \cap N).$$

したがって

$$\int_{I(M,N)} Jf d\mu_{I(M,N)} = 2^{r/2}\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g).$$

以下では、この等式の左辺を計算する。そのために、$\mathfrak{k}$, $dg_x^{-1}T_xM$, $dg_y^{-1}T_yN$ の正規直交基底 $\{T_a\}$, $\{X_b\}$, $\{Y_c\}$ をそれぞれとる。すると、先の φ の微分の計算から、

$$\begin{aligned}
d\varphi_{(k,x,y)}(dL_kT_a, 0, 0) &= (dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)T_a, 0, 0)\\
d\varphi_{(k,x,y)}(0, dg_xX_b, 0) &= (-dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)X_b, dg_xX_b, 0)\\
d\varphi_{(k,x,y)}(0, 0, dg_yY_c) &= (dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)\mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c, 0, dg_yY_c)
\end{aligned}$$

は $T_{\varphi(k,x,y)}I(M \times N)$ の基底になる。

$$\begin{aligned}
&df_{\varphi(k,x,y)}d\varphi_{(k,x,y)}(dL_kT_a, dg_xX_b, dg_yY_c)\\
= \ &dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(T_a - X_b + \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c)
\end{aligned}$$

となるので、$Y_d = \mathrm{Ad}_G(k)X_d$ $(1 \le d \le r)$ とおいて、これを延長して $dg_y^{-1}T_yN$ の正規直交基底 $\{Y_c\}$ とすると、

$$d\varphi_{(k,x,y)}(0, dg_xX_d, dg_yY_d) = (0, dg_xX_d, dg_yY_d) \qquad (1 \le d \le r)$$

は $\ker df_{\varphi(k,x,y)}$ の基底になる。そこで、

$$\begin{aligned}
\bar{T}_a &= (dL_kT_a, 0, 0)\\
\bar{X}_b &= (0, dg_xX_b, 0) \qquad (r+1 \le b)\\
\bar{Y}_c &= (0, 0, dg_yY_c) \qquad (r+1 \le c)\\
\bar{Z}_d &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -dg_xX_d, dg_yY_d) \qquad (1 \le d \le r)
\end{aligned}$$

とおくと、これらは正規直交系になり、

$$d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{T}_a), \quad d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{X}_b), \quad d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{Y}_c), \quad d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{Z}_d)$$

は $(\ker df_{\varphi(k,x,y)})^{\perp}$ の基底になる。さらに、

$$\begin{aligned}
df_{\varphi(k,x,y)}d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{T}_a) &= dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(T_a)\\
df_{\varphi(k,x,y)}d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{X}_b) &= dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(-X_b)\\
df_{\varphi(k,x,y)}d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{Y}_c) &= dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(\mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c)\\
df_{\varphi(k,x,y)}d\varphi_{(k,x,y)}(\bar{Z}_d) &= dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(\sqrt{2}X_d).
\end{aligned}$$

よって、

$$Jf = \frac{|dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(\wedge_a T_a \wedge \wedge_b(-X_b) \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c) \wedge \wedge_d \sqrt{2}X_d|}{|d\varphi_{(k,x,y)}(\wedge_a \bar{T}_a \wedge \wedge_b \bar{X}_b \wedge \wedge_c \bar{Y}_c \wedge \wedge_d \bar{Z}_d)|}.$$

分子は

$$\begin{aligned}
& |dL_{\varphi(k,x,y)}\mathrm{Ad}_G(g_x)(\wedge_a T_a \wedge \wedge_b(-X_b) \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c) \wedge \wedge_d \sqrt{2}X_d| \\
= & \ 2^{r/2}|\mathrm{Ad}_G(g_x)(\wedge_a T_a \wedge \wedge_b(-X_b) \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c) \wedge \wedge_d X_d| \\
= & \ 2^{r/2}|\det \mathrm{Ad}_G(g_x)||\wedge_a T_a \wedge \wedge_b X_b \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c \wedge \wedge_d X_d| \\
& (G \text{ はユニモジュラーだから } |\det \mathrm{Ad}_G(g_x)| = 1) \\
= & \ 2^{r/2}|\wedge_a T_a \wedge \wedge_b X_b \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c \wedge \wedge_d X_d| \\
& (\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \text{ は直交直和で、} \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c \in \mathfrak{p}) \\
= & \ 2^{r/2}|\wedge_b X_b \wedge \wedge_c \mathrm{Ad}_G(k^{-1})Y_c \wedge \wedge_d X_d| \\
= & \ 2^{r/2}\sigma(dg_x^{-1}T_x^{\perp}M, \mathrm{Ad}_G(k^{-1})dg_y^{-1}T_y^{\perp}N) \\
= & \ 2^{r/2}\sigma(dg_x^{-1}T_x^{\perp}M, dk_o^{-1}dg_y^{-1}T_y^{\perp}N).
\end{aligned}$$

これの K における積分は $2^{r/2}\sigma_K(T_x^{\perp}M, T_y^{\perp}N)$ に一致するので、

$$\int_{I(M,N)} Jf d\mu_{I(M,N)} = 2^{r/2}\int_{M\times N} \sigma_K(T_x^{\perp}M, T_y^{\perp}N) d\mu_{M\times N}(x,y)$$

となり、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \int_{M\times N} \sigma_K(T_x^{\perp}M, T_y^{\perp}N) d\mu_{M\times N}(x,y)$$

を得る。

注意 3.1.6 線形イソトロピー表現 $K \to O(T_o(G/K))$ が直交表現として同値になる Riemann 等質空間は σ_K の定義式が同じになるので、定理 3.1.5 よりそれらの Riemann 等質空間では同じ形の Poincaré の公式が成り立つ。したがって、一つの Riemann 等質空間において Poincaré の公式が得られれば、線形イソトロピー表現が同値な他の Riemann 等質空間においても同じ形の Poincaré の公式が得られる。このことを Howard は**転送原理**と呼んでいる。

3.2　実空間形

実空間形の場合の Poincaré の公式を述べ、その応用として、Fáry-Milnor の定理や実射影空間等の体積最小部分多様体について解説する。

定理 3.2.1 G/K を n 次元実空間形とし、M と N はそれぞれ G/K の p 次元部分多様体と q 次元部分多様体であって、$p+q \geq n$ とする。このとき、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.1.5 より、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \int_{M\times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu_{M\times N}(x,y)$$

が成り立つ。そこで、σ_K を計算する。$K = SO(n)$ は $\mathbf{R}^n$ の p 次元部分ベクトル空間全体と q 次元部分ベクトル空間全体に推移的に作用するので、σ_K は定数になる。その定数を $\sigma_K(p,q)$ とおくことにすると、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。三種類の実空間形に対する $K = SO(n)$ の Riemann 計量はすべて同じものなので、$\sigma_K(p,q)$ はどの空間で求めてもよい。そこで $G/K = S^n$ とし、$M = S^p,\ N = S^q$ とおく。すると、

$$\int_{SO(n+1)} \mathrm{vol}(gS^p \cap S^q) d\mu_{SO(n+1)}(g) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)$$

となり、ほとんどすべての $g \in SO(n+1)$ に対して $\mathrm{vol}(gS^p \cap S^q) = \mathrm{vol}(S^{p+q-n})$ だから、

$$\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1)) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q).$$

よって

$$\sigma_K(p,q) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

を得る。

系 3.2.2 2 次元実空間形 G/K 内の二曲線 σ, τ に対して

$$\int_G \#(g\sigma \cap \tau) d\mu_G(g) = 4\mathrm{vol}(\sigma)\mathrm{vol}(\tau)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.2.1 を適用すると、

$$\int_G \sharp(g\sigma \cap \tau) d\mu_G(g) = \frac{2\mathrm{vol}(SO(3))}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^1)} \mathrm{vol}(\sigma)\mathrm{vol}(\tau)$$

を得る。上の等式の係数を計算すればよい。

$$\mathrm{vol}(S^1) = 2\pi$$

で、$S^2 = SO(3)/SO(2)$ だから、

$$\mathrm{vol}(SO(3)) = \mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(SO(2)) = 4\pi \cdot 2\pi.$$

したがって

$$\frac{2\mathrm{vol}(SO(3))}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^1)} = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 2\pi} = 4$$

となり、

$$\int_G \sharp(g\sigma \cap \tau) d\mu_G(g) = 4\mathrm{vol}(\sigma)\mathrm{vol}(\tau)$$

を得る。

系 3.2.3　c を R^{n+1} 内の閉曲線とする。c の弧長パラメーターを s で表し、曲率を $\kappa(s)$ で表す。このとき、

$$2\pi \leq \int_c \kappa(s) ds$$

が成り立つ。

証明　曲線 c の点 $c\,(s)$ に対して、$c\,(s)$ での速度ベクトルを対応させる写像を g で表すと、$g : c \to S^n$ は C^∞ 級写像になる。曲率の定義から

$$\kappa(s) = \left| \frac{dg}{ds}(s) \right|$$

だから $g : c \to S^n$ は C^∞ 級写像になる。

$$\int_c \kappa(s) ds = \int_c \left| \frac{dg}{ds}(s) \right| ds = \mathrm{vol}(g(c)).$$

S^n 内の S^{n-1} と $g(c)$ に定理 3.2.1 を適用すると、

$$\begin{aligned}
&\int_{SO(n+1)} \sharp(aS^{n-1} \cap g(c)) d\mu_{SO(n+1)}(a) \\
= \ &\frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^{n-1})\mathrm{vol}(S^1)} \mathrm{vol}(S^{n-1})\mathrm{vol}(g(c)) \\
= \ &\frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^1)} \mathrm{vol}(g(c))
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $a \in SO(n+1)$ に対して $aS^{n-1} \cap g(c)$ は、S^n の大円 aS^{n-1} を通る $\mathbf{R}^{n+1}$ の超平面と平行な超平面が c と接する接点における c の速度ベクトルの全体になる。したがって、すべての $a \in SO(n+1)$ に対して $2 \leq \sharp(aS^{n-1} \cap g(c))$ となるので、

$$2\mathrm{vol}(SO(n+1)) \leq \frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^1)}\mathrm{vol}(g(c))$$

となり、

$$2\pi \leq \mathrm{vol}(g(c)) = \int_c \kappa(s)ds$$

を得る。

定理 3.2.4 (Fáry, Milnor) $\mathbf{R}^3$ 内の閉曲線 c が自明でない結び目になっているとする。c の弧長パラメーターを s で表し、曲率を $\kappa(s)$ で表す。このとき、

$$4\pi \leq \int_c \kappa(s)ds$$

が成り立つ。

証明　系 3.2.3 の証明中に定めた $g : c \to S^n$ を使って証明する。既に示したように

$$\int_c \kappa(s)ds = \mathrm{vol}(g(c)) = \frac{\mathrm{vol}(S^1)}{2\mathrm{vol}(SO(3))}\int_{SO(3)} \sharp(aS^1 \cap g(c))d\mu_{SO(3)}(a)$$

が成り立つ。

以下でほとんどすべての $a \in SO(3)$ に対して $4 \leq \sharp(aS^1 \cap g(c))$ が成り立つことを示す。$\sharp(aS^1 \cap g(c))$ が奇数になる aS^1 は $g(c)$ と接するので、ほとんどすべての $a \in SO(3)$ に対して $\sharp(aS^1 \cap g(c))$ は偶数になる。系 3.2.3 の証明中に示したように $2 \leq \sharp(aS^1 \cap g(c))$ が成り立つ。そこで $2 = \sharp(aS^1 \cap g(c))$ が成り立つ $a \in SO(3)$ が存在すると仮定して、矛盾を導く。S^2 の大円 aS^1 を通る $\mathbf{R}^3$ の平面 P と平行な平面が c と接する接点を $c(s_0)$ と $c(s_1)$ とする。P の単位法ベクトルを e とし、

$$f : c \to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \langle x, e\rangle$$

によって c 上の C^∞ 級関数 f を定めると、f は $c(s_0)$ と $c(s_1)$ で最大値、最小値をとり、他の点は正則点になる。よって、$c - \{c(s_0), c(s_1)\}$ 上で f は単調になる。これより、P と平行な平面が $c(s_0)$ と $c(s_1)$ 以外の点で c と交わるとき、交点数は必ず 2 になる。その二つの交点を線分で結ぶと、c を境界とする曲面ができる。これは c が自明でない結び目であることに矛盾する。したがって、すべての $a \in SO(3)$ に対して $3 \leq \sharp(aS^1 \cap g(c))$ が成り立つことになり、ほとんどすべての $a \in SO(3)$ に対して $4 \leq \sharp(aS^1 \cap g(c))$ が成り立つ。よって上で示した積分等式より、

$$4\pi \leq \int_c \kappa(s)ds$$

を得る。

定義 3.2.5 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の 1 次元実部分ベクトル空間全体が成す n 次元**実射影空間**を $P^n(\mathbf{R})$ で表す。

$$S^n \to P^n(\mathbf{R})\ ;\ x \mapsto \mathbf{R}x$$

は被覆写像になる。その被覆変換は $S^n \to S^n\ ;\ x \mapsto -x$ だから等長変換になり、S^n の Riemann 計量から自然に $P^n(\mathbf{R})$ の Riemann 計量が定まる。

$$\begin{aligned} G &= SO(n+1) \\ K &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \middle| \ a \in O(n), \epsilon \in O(1), (\det a)\epsilon = 1 \right\} \end{aligned}$$

とおくと、自然に等質空間 G/K は $P^n(\mathbf{R})$ に同一視される。

補題 3.2.6 G/K を n 次元実射影空間とし、M と N はそれぞれ G/K の p 次元部分多様体と q 次元部分多様体であって、$p+q \geq n$ とする。このとき、

$$\int_{SO(n+1)} \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_{SO(n+1)}(g) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{R}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。

証明　被覆写像

$$\varphi : S^n \to P^n(\mathbf{R})\ ;\ x \mapsto \mathbf{R}x$$

を使い、球面における Poincaré の公式 (定理 3.2.1) を適用する。φ が二重被覆であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \int_{SO(n+1)} \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_{SO(n+1)}(g) \\ = & \int_{SO(n+1)} \frac{1}{2}\mathrm{vol}(g\varphi^{-1}(M) \cap \varphi^{-1}(N)) d\mu_{SO(n+1)}(g) \\ = & \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1))}{2\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}\mathrm{vol}(\varphi^{-1}(M))\mathrm{vol}(\varphi^{-1}(N)) \\ = & \frac{\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N). \end{aligned}$$

定理 3.2.7 (Berger, Fomenko) $P^n(\mathbf{R})$ 内に全測地的に埋め込まれた $P^k(\mathbf{R})$ は、$P^n(\mathbf{R})$ の $\mathbf{Z}_2$ 係数のホモロジー群 $H_k(P^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ の生成元を代表し、その中で体積最小部分多様体になる。

証明　$0 \leq i \leq n$ に対して $P_0^i(\mathbf{R}) = P^i(\mathbf{R}) - P^{i-1}(\mathbf{R})$ とおくと、各 $P_0^i(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^i$ 内の開円板と微分同型になり、特に胞体になる。さらに、$\{P_0^i(\mathbf{R})\}_{0 \leq i \leq n}$ は $P^n(\mathbf{R})$ の胞体分割を与える。そこで、

$$C_i(P^n(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}_2 P_0^i(\mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}_2$$

とおくと、$P^n(\mathbf{R})$ の胞複体 $\{C_i(P^n(\mathbf{R})), \partial_i\}$ を得る。$\partial_i(P_0^i(\mathbf{R}))$ は、幾何学的には $P_0^{i-1}(\mathbf{R})$ を同じ向きに二重に覆うので、

$$\partial_i : C_i(P^n(\mathbf{R})) \to C_{i-1}(P^n(\mathbf{R}))$$

は 0 写像になる。したがって

$$H_i(P^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = C_i(P^n(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}_2 P_0^i(\mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}_2$$

となり、$P^n(\mathbf{R})$ 内で $P^i(\mathbf{R})$ は、$H_i(P^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ の生成元を代表する。

$P^k(\mathbf{R})$ と $P^{n-k}(\mathbf{R})$ は、一般的な位置にすると $\sharp(P^{n-k}(\mathbf{R}) \cap P^k(\mathbf{R})) = 1$ となる。$P^k(\mathbf{R})$ のホモロジー類に含まれる部分多様体 N をとると、ほとんどすべての $g \in SO(n+1)$ に対して

$$\sharp(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) \equiv 1 \ (\mathrm{mod} 2)$$

となるので、$\sharp(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) \geq 1$ が成り立つ。そこで補題 3.2.6 を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(SO(n+1)) &\leq \int_{SO(n+1)} \sharp(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) d\mu_{SO(n+1)}(g) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{R}))} \mathrm{vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(N). \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{R})) \leq \mathrm{vol}(N)$$

となり、$P^k(\mathbf{R})$ は体積最小になる。

定義 3.2.8 $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ に対して

$$\rho(x)y = y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

によって x に関する鏡映 $\rho(x)$ を定める。

$$P_{k-1} = \{\rho(x)\rho(e_1) \mid x \in S^{k-1} \subset \mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n\}$$

によって $SO(n)$ 内の **Pontryagin サイクル** P_{k-1} を定義する。

$x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ に対して $\rho(x)$ はその定義式より線形写像になることがわかる。$\rho(x)$ は $\mathbf{R}x$ において固有値 -1 を持ち、$(\mathbf{R}x)^\perp$ において固有値 1 を持つので、等長変換になる。これは次のように直接計算してもわかる。

$$\begin{aligned} \langle \rho(x)y, \rho(x)z\rangle &= \left\langle y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x, z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x \right\rangle \\ &= \langle y, z\rangle - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, z\rangle - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}\frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, x\rangle \\ &= \langle y, z\rangle. \end{aligned}$$

さらに $\rho(x)$ の行列式は -1 になるので、$\rho(x)\rho(e_1) \in SO(n)$ が成り立つ。これによって写像

$$\tilde{\iota} : S^{n-1} \to SO(n)\ ;\ x \to \rho(x)\rho(e_1)$$

が定まる。$x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ に対して

$$\rho(-x)y = y - \frac{2\langle -x, y\rangle}{\langle -x, -x\rangle}(-x) = y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}x = \rho(x)y \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

となるので、$\rho(-x) = \rho(x)$ が成り立つ。特に $x \in S^{n-1}$ に対して $\tilde{\iota}(-x) = \tilde{\iota}(x)$ となり、$\tilde{\iota} : S^{n-1} \to SO(n)$ は $\iota : P^{n-1}(\mathbf{R}) \to SO(n)$ を誘導する。この ι の像が Pontryagin サイクル P_{k-1} になる。ι と $SO(n)$ の作用との関係を調べておく。$g \in O(n)$ に対して

$$\rho(gx)y = y - \frac{2\langle gx, y\rangle}{\langle gx, gx\rangle}gx = g\left(g^{-1}y - \frac{2\langle x, g^{-1}y\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right) = g\rho(x)g^{-1}y$$

となるので、$\rho(gx) = g\rho(x)g^{-1}$ が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}(gx) &= \rho(gx)\rho(e_1) = g\rho(x)g^{-1}\rho(e_1) = g\rho(x)\rho(e_1)\rho(e_1)^{-1}g^{-1}\rho(e_1) \\ &= g\tilde{\iota}(x)(\rho(e_1)^{-1}g\rho(e_1))^{-1}. \end{aligned}$$

そこで $O(n)$ の $SO(n)$ への作用を

$$g \cdot x = gx(\rho(e_1)^{-1}g\rho(e_1))^{-1} \qquad (g \in O(n),\ x \in SO(n))$$

によって定める。

$$\begin{aligned} (g_1g_2) \cdot x &= (g_1g_2)x(\rho(e_1)^{-1}g_1g_2\rho(e_1))^{-1} \\ &= g_1g_2x(\rho(e_1)^{-1}g_1\rho(e_1)\rho(e_1)^{-1}g_2\rho(e_1))^{-1} \\ &= g_1g_2x(\rho(e_1)^{-1}g_2\rho(e_1))^{-1}(\rho(e_1)^{-1}g_1\rho(e_1))^{-1} \\ &= g_1(g_2 \cdot x)(\rho(e_1)^{-1}g_1\rho(e_1))^{-1} \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \end{aligned}$$

となるので、$O(n)$ の $SO(n)$ への作用になっていることがわかる。さらに $SO(n)$ の両側不変 Riemann 計量に関して、この作用は等長作用になる。上で得た結果と合わせると

$$\tilde{\iota}(gx) = g \cdot \tilde{\iota}(x) \qquad (g \in O(n),\ x \in S^{n-1})$$

となり

$$\iota(gx) = g \cdot \iota(x) \qquad (g \in O(n),\ x \in P^{n-1}(\mathbf{R})).$$

したがって、$\tilde{\iota} : S^{n-1} \to SO(n)$ と $\iota : P^{n-1}(\mathbf{R}) \to SO(n)$ はともに $O(n)$ の作用に関する同変写像になる。このこととコンパクト群の表言論から、S^{n-1} と $P^{n-1}(\mathbf{R})$ の Riemann 計量を定数倍変更すると $\tilde{\iota} : S^{n-1} \to SO(n)$ と $\iota : P^{n-1}(\mathbf{R}) \to SO(n)$ は等長挿入になるこ

とがわかる。次のように具体的な計算をすることからもわかる。さらにその定数を具体的に求めることができる。写像が同変であることから、一点の微分写像を調べればよい。$e_1 \in S^{n-1}$ における接ベクトル空間は自然に $\mathbf{R}^{n-1}$ と同一視される。

$$T_{e_1}S^{n-1} \ni \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \leftrightarrow v \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

さらに接ベクトルは群作用を使って表現することもできる。

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t v \\ v & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(n)$$

とおくと

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV)e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
d\tilde{\iota}_{e_1}(v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\iota}(\exp(tV)e_1) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV)\tilde{\iota}(e_1)(\rho(e_1)^{-1}\exp(tV)\rho(e_1))^{-1} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV)\tilde{\iota}(e_1)(\exp(t\rho(e_1)^{-1}V\rho(e_1)))^{-1} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV)\tilde{\iota}(e_1)(\exp(-t\rho(e_1)^{-1}V\rho(e_1))).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\tilde{\iota}(e_1) = \rho(e_1)\rho(e_1) = e : SO(n) \text{ の単位元}$$

であり、

$$\rho(e_1)^{-1} = \rho(e_1) = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1_{n-1} \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\rho(e_1)^{-1}V\rho(e_1) = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -{}^t v \\ v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1_{n-1} \end{bmatrix} = -V.$$

これらの計算より

$$d\tilde{\iota}_{e_1}(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV)\exp(tV) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t2V) = 2V.$$

そこで $u \in \mathbf{R}^{n-1}$ に対しても

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t u \\ u & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(n)$$

とおくと

$$\langle d\tilde{\iota}_{e_1}(u), d\tilde{\iota}_{e_1}(v)\rangle = \langle 2U, 2V\rangle = 4\left\langle \begin{bmatrix} 0 & -{}^t u \\ u & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -{}^t v \\ v & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 4\langle u, v\rangle.$$

したがって、$4\langle u, v\rangle$ を新たに S^{n-1} の Riemann 計量とすると $\tilde{\iota}$ は等長挿入になる。

定理 3.2.9 (Liu) すべての Pontryagin サイクル P_i $(1 \leq i \leq n-1)$ は、$SO(n)$ 内の $\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー類内で体積最小になる。

証明の概略　F は $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ のうちのいずれかであるとし、F の元を成分に持つ n 次正方行列全体の成す代数を $F(n)$ で表す。Clifford 代数 C_n は $F(2^m)$ または $F(2^m) \oplus F(2^m)$ と $\mathbf{R}$ 代数同型になることが知られている。したがって各 n について忠実表現 $\pi : C_n \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(W, W)$ が存在する。$\dim_{\mathbf{R}} W = N$ とおく。$SO(n)$ の普遍被覆群 $Spin(n)$ は C_n 内に実現することができるので、

$$\pi : Spin(n) \to S^{N^2-1} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(W, W)$$

とみなすことができる。さらに $\pi : Spin(n) \to S^{N^2-1}$ は

$$\pi' : SO(n) \to P^{N^2-1}(\mathbf{R})$$

を誘導する。Ponryagin サイクル $P_{k-1} \subset SO(n)$ に対して、$\pi'(P_{k-1})$ は $P^{N^2-1}(\mathbf{R})$ 内の全測地的部分多様体 $P^{k-1}(\mathbf{R})$ に一致することがわかる。したがって、定理 3.2.7 より $P_{k-1} \subset SO(n)$ はホモロジー類内で体積最小になる。

3.3　複素空間形の複素部分多様体

複素空間形においても Poincaré の公式の対象を複素部分多様体に限れば、前節の実空間形の場合と同様の Poincaré の公式が成り立つ。この公式は最初 Santaló が示し、Howard が再定式化した。

定理 3.3.1 G/K を複素 n 次元複素空間形とする. G/K の複素 p 次元複素部分多様体 M と複素 q 次元複素部分多様体 N が $p + q \geq n$ を満たすとき, 次の等式が成り立つ.

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(SU(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

証明　定理 3.1.5 より、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \int_{M \times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu_{M \times N}(x, y)$$

が成り立つ。そこで、σ_K を計算する。K は $\mathbf{C}^n$ の p 次元複素部分ベクトル空間全体と q 次元複素部分ベクトル空間全体に推移的に作用するので、σ_K は定数になる。その定数を $\sigma_K(p,q)$ とおくことにすると、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM\cap N)d\mu_G(g) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。三種類の複素空間形に対する K の Riemann 計量は同じものなので、$\sigma_K(p,q)$ はどの空間で求めてもよい。そこで $G/K = P^n(\mathbf{C})$ とし、$M = P^p(\mathbf{C}),\ N = P^q(\mathbf{C})$ とおく。すると、

$$\begin{aligned}&\int_{SU(n+1)} \mathrm{vol}(gP^p(\mathbf{C})\cap P^q(\mathbf{C}))d\mu_{SU(n+1)}(g)\\ =\ &\sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))\end{aligned}$$

となり、ほとんどすべての $g\in SU(n+1)$ に対して $\mathrm{vol}(gP^p(\mathbf{C})\cap P^q(\mathbf{C})) = \mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{C}))$ だから、

$$\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(SU(n+1)) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C})).$$

よって

$$\sigma_K(p,q) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(SU(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM\cap N)d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+q-n}(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(SU(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

を得る。

定義 3.3.2 N を $P^n(\mathbf{C})$ 内の k 次元コンパクト複素部分多様体とする。このとき、ほとんどすべての $g\in SU(n+1)$ に対して、$\sharp(gP^{n-k}(\mathbf{C})\cap N)$ は一定値になることが知られている。この一定値を N の**次数**と呼び、$\deg N$ で表す。

系 3.3.3 N を $P^n(\mathbf{C})$ 内の k 次元コンパクト複素部分多様体とする。このとき、

$$\mathrm{vol}(N) = \deg N\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{C}))$$

が成り立つ。

証明　定理 3.3.1 より、

$$\begin{aligned}&\int_{SU(n+1)} \sharp(gP^{n-k}(\mathbf{C})\cap N)d\mu_{SU(n+1)}(g)\\ =\ &\frac{\mathrm{vol}(SU(n+1))}{\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(P^{n-k}(\mathbf{C}))}\mathrm{vol}(P^{n-k}(\mathbf{C}))\mathrm{vol}(N)\end{aligned}$$

が成り立つ。ほとんどすべての $g\in SU(n+1)$ に対して、$\sharp(gP^{n-k}(\mathbf{C})\cap N) = \deg N$ となるので、

$$\mathrm{vol}(N) = \deg N\mathrm{vol}(P^k(\mathbf{C}))$$

を得る。

第4章　複素空間形におけるPoincaréの公式

4.1　全実部分多様体

定義 4.1.1 Hermite 多様体 X の概複素構造を J で表す。X 内の実部分多様体 M の各点 x に対して、J_xT_xM が T_xM と直交するとき、M を**全実部分多様体**と呼ぶ。

例 4.1.2 $P^n(\mathbf{C})$ 内に全測地的に埋め込まれた $P^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq n)$ は、$P^n(\mathbf{C})$ の全実部分多様体になっている。

定理 4.1.3 G/K を n 次元複素空間形とし、M と N はそれぞれ G/K 内の実 p 次元全実部分多様体と複素 q 次元複素部分多様体であって、$p+2q \geq 2n$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN)d\mu_G(g) &= \int_G \mathrm{vol}(N \cap gM)d\mu_G(g) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(P^{p+2q-2n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明　定理 3.1.5 より、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N)d\mu_G(g) = \int_{M\times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N)d\mu_{M\times N}(x,y)$$

が成り立つ。そこで、σ_K を計算する。$U(n)$ が $\mathbf{C}^n$ の実 p 次元全実部分ベクトル空間全体に推移的に作用することを示す。$\mathbf{R}^p$ は $\mathbf{C}^n$ の全実部分ベクトル空間になっている。$e_1,\ldots,e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準的な正規直交基底とする。$\mathbf{C}^n$ の全実部分ベクトル空間 V を一つとる。$v_1,\ldots,v_p$ を V の正規直交基底とし、これを $\mathbf{C}^n$ のユニタリ基底 $v_1,\ldots,v_n$ に延長する。実線形写像 $g:\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^n$ を $g(e_j)=v_j$ $(1 \leq j \leq n)$ となるようにとる。g を複素線形写像 $g^{\mathbf{C}}:\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ に拡張する。$\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{C}^n$ の全実部分ベクトル空間だから、$e_1,\ldots,e_n$ は $\mathbf{C}^n$ のユニタリ基底になる。したがって、g は $\mathbf{C}^n$ のユニタリ基底をユニタリ基底に写すことになり、$g \in U(n)$ が成り立つ。$g(\mathbf{R}^p)=V$ となっているので、$U(n)$ は $\mathbf{C}^n$ の実 p 次元全実部分ベクトル空間全体に推移的に作用することがわかる。このことより、σ_K は定数になる。その定数を $\sigma_K(p,q)$ とおくことにすると、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N)d\mu_G(g) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。三種類の複素空間形に対する K の Riemann 計量は同じものなので、$\sigma_K(p,q)$ はどの空間で求めてもよい。そこで $G/K = P^n(\mathbf{C})$ とし、$M = P^p(\mathbf{R}),\ N = P^q(\mathbf{C})$ とおく。すると、

$$\begin{aligned}&\int_{U(n+1)} \mathrm{vol}(gP^p(\mathbf{R}) \cap P^q(\mathbf{C}))d\mu_{U(n+1)}(g)\\ =\ &\sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))\end{aligned}$$

となり、ほとんどすべての $g \in U(n+1)$ に対して

$$\mathrm{vol}(gP^p(\mathbf{R}) \cap P^q(\mathbf{C})) = \mathrm{vol}(P^{p+2q-2n}(\mathbf{R}))$$

だから、

$$\mathrm{vol}(P^{p+2q-2n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(U(n+1)) = \sigma_K(p,q)\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C})).$$

よって

$$\sigma_K(p,q) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+2q-2n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_G \sharp(gM \cap N)d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(P^{p+2q-2n}(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^p(\mathbf{R}))\mathrm{vol}(P^q(\mathbf{C}))}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

を得る。

定理 4.1.4 (Howard) n 次元複素空間形 G/K 内の実 n 次元全実部分多様体 M と N に対して

$$\int_G \sharp(gM \cap N)d\mu_G(g) = \frac{(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^n(\mathbf{R}))^2}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.1.5 より、

$$\begin{aligned}&\int_{U(n+1)} \sharp(gM \cap N)d\mu_{U(n+1)}(g)\\ =\ &\int_{M\times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N)d\mu_{M\times N}(x,y)\end{aligned}$$

が成り立つ。

$U(n)$ は $\mathbf{C}^n$ の実 n 次元全実部分ベクトル空間全体に推移的に作用するので、σ_K は定数になる。よって

$$\int_{U(n+1)} \sharp(gM \cap N)d\mu_{U(n+1)}(g) = \sigma_K\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。三種類の複素空間形に対する K の Riemann 計量は同じものなので、σ_K はどの空間で求めてもよい。そこで $G/K = P^n(\mathbf{C})$ とし、$M = P^n(\mathbf{R}),\ N = P^n(\mathbf{R})$ とおく。すると、

$$\int_{U(n+1)} \sharp(gP^n(\mathbf{R}) \cap P^n(\mathbf{R}))d\mu_{U(n+1)}(g) = \sigma_K \mathrm{vol}(P^n(\mathbf{R}))^2$$

となり、ほとんどすべての $g \in U(n+1)$ に対して $\sharp(gP^n(\mathbf{R}) \cap P^n(\mathbf{R})) = n+1$ になることを後で示すので、

$$(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1)) = \sigma_K \mathrm{vol}(P^n(\mathbf{R}))^2.$$

よって

$$\sigma_K = \frac{(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^n(\mathbf{R}))^2}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_G \sharp(gM \cap N)d\mu_G(g) = \frac{(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(P^n(\mathbf{R}))^2}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

を得る。

最後に、ほとんどすべての $g \in U(n+1)$ に対して $\sharp(gP^n(\mathbf{R}) \cap P^n(\mathbf{R})) = n+1$ になることを示しておく。ほとんどすべての $g \in U(n+1)$ に対して $gP^n(\mathbf{R})$ と $P^n(\mathbf{R})$ はトランスバースに交わるので、$M = gP^n(\mathbf{R})$ と $N = P^n(\mathbf{R})$ とおいて、M と N はトランスバースに交わっていると仮定して議論を進める。$M \cap N$ は離散的になり、有限集合になる。$P^n(\mathbf{C})$ は正の断面曲率を持っていて M と N は全測地的なので、Frankel の定理より、$M \cap N$ は空集合にはならない。そこで一点 $x \in M \cap N$ をとる。$P^n(\mathbf{C})$ の x における最小軌跡を $C(x)$ で表すことにする。このとき、

$$M \cap N - \{x\} \subset C(x)$$

が成り立つことを示しておこう。ある $y \in M \cap N - \{x\}$ が $y \notin C(x)$ となっているとして、矛盾を導く。x, y を結ぶただ一つの最短測地線を $\overline{xy}$ で表すと、$\overline{xy} \subset M \cap N$ となり、M と N がトランスバースに交わることに矛盾する。以上で $M \cap N - \{x\} \subset C(x)$ の成り立つことがわかった。これより、

$$\sharp(M \cap N) = 1 + \sharp((M \cap C(x)) \cap (N \cap C(x)))$$

となる。ここで、$C(x)$ は $P^{n-1}(\mathbf{C})$ に等長的になる。$M \cap C(x)$ と $N \cap C(x)$ は $C(x)$ 内の部分多様体になり、トランスバースに交わる。また、$\dim(M \cap C(x)) \leq \dim M - 1$ と $\dim(N \cap C(x)) \leq \dim N - 1$ が成り立つ。$M \cap C(x)$ と $N \cap C(x)$ はともに $C(x) = P^{n-1}(\mathbf{C})$ 内の $P^{n-1}(\mathbf{R})$ に等長的な部分多様体になる。$n = 1$ のときは、$P^1(\mathbf{C})$ は 2 次元球面になり、その中で $P^1(\mathbf{R})$ は大円になる。よって $n = 1$ のとき、$\sharp(M \cap N) = 2$ となり、一般の場合は、数学的帰納法によって $\sharp(M \cap N) = n + 1$ が成り立つことがわかる。

4.2 Kähler 角度

定理 3.3.1、4.1.3、4.1.4 では複素空間形内の複素部分多様体や全実部分多様体に関する Poincaré の公式を示したが、この節と次の節では複素部分多様体や全実部分多様体とは限らない一般の実部分多様体に関する Poincaré の公式について考える。実 2 次元部分多様体には Kähler 角度と呼ばれる不変量があり、Kähler 角度を使って複素空間形内の実 2 次元部分多様体と実余 2 次元部分多様体に関する Poincaré の公式をこの節で示す。そこでまず Kähler 角度の定義とその基本的性質について述べる。一般次元部分多様体に対する Poincaré の公式を定式化するためには、Kähler 角度を一般化した多重 Kähler 角度を導入する必要がある。これについては次の節で解説する。

定義 4.2.1 $\mathbf{C}^n$ を n 次元複素ベクトル空間とし、その標準的な実内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。$\mathbf{C}^n$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間 V に対して、V の正規直交基底 v_1, v_2 をとり、$\theta(V) = \cos^{-1} |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle|$ によって V の Kähler 角度 $\theta(V)$ を定める。

ここでは部分ベクトル空間や部分多様体の向きは考えないので、絶対値 $|\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle|$ をとり Kähler 角度の動く範囲は $[0, \pi/2]$ とする。通常、曲面論では部分ベクトル空間や部分多様体の向きを考え正の向きの正規直交基底 v_1, v_2 をとって $\cos^{-1} \langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle$ を Kähler 角度と呼んでいる。

補題 4.2.2 定義 4.2.1 において $\theta(V) = \cos^{-1} |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle|$ は V の正規直交基底 v_1, v_2 のとり方に依存しない。

証明 任意の $x_1, x_2 \in \mathbf{C}^n$ について

$$\langle \sqrt{-1} x_1, x_2 \rangle = \langle (\sqrt{-1})^2 x_1, \sqrt{-1} x_2 \rangle = -\langle x_1, \sqrt{-1} x_2 \rangle = -\langle \sqrt{-1} x_2, x_1 \rangle$$

となる。つまり、$\langle \sqrt{-1} x_1, x_2 \rangle$ は x_1, x_2 に関する交代二次形式になる。

u_1, u_2 を V のもう一つの正規直交基底とする。基底変換

$$[u_1 \ u_2] = [v_1 \ v_2] T$$

は直交行列 T で定まる。交代二次形式の性質から

$$\langle \sqrt{-1} u_1, u_2 \rangle = \det T \langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle$$

となり $\det T = \pm 1$ だから、

$$|\langle \sqrt{-1} u_1, u_2 \rangle| = |\det T| |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle| = |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle|$$

が成り立ち、$\cos^{-1} |\langle \sqrt{-1} u_1, u_2 \rangle| = \cos^{-1} |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle|$ を得る。

命題 4.2.3 Kähler 角度はユニタリ群の作用に関して不変になる。

証明　交代二次形式 $\langle\sqrt{-1}x_1, x_2\rangle$ はユニタリ群の作用に関して不変になる。$\mathbf{C}^n$ 内の実二次元部分ベクトル空間 V の正規直交基底 v_1, v_2 をとる。ユニタリ群 $U(n)$ の元 g によって V を変換すると、gv_1, gv_2 は gV の正規直交基底になる。したがって、

$$\theta(gV) = \cos^{-1}|\langle\sqrt{-1}gv_1, gv_2\rangle| = \cos^{-1}|\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle| = \theta(V)$$

が成り立ち、Kähler 角度はユニタリ群の作用に関して不変になる。

命題 4.2.4 V を $\mathbf{C}^n$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間とする。V が複素部分ベクトル空間であるための必要十分条件は V の Kähler 角度が 0 になることであり、V が全実部分ベクトル空間であるための必要十分条件は V の Kähler 角度が $\pi/2$ になることである。

証明　V の正規直交基底 v_1, v_2 をとる。V が複素部分ベクトル空間であると仮定すると $\sqrt{-1}v_1 \in V$ が成り立つ。$\sqrt{-1}v_1$ は v_1 に直交するので、$\sqrt{-1}v_1 = \pm v_2$ となり、

$$\theta(V) = \cos^{-1}|\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle| = \cos^{-1}1 = 0.$$

逆に $\theta(V) = 0$ が成り立つと仮定すると、Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立の必要十分条件より $\sqrt{-1}v_1 = \pm v_2$ となり、V は複素部分ベクトル空間になる。したがって、V が複素部分ベクトル空間であるための必要十分条件は V の Kähler 角度が 0 になることである。

次に V が全実部分ベクトル空間であると仮定すると、$\sqrt{-1}v_1 \in V^\perp$ が成り立ち、

$$\theta(V) = \cos^{-1}|\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle| = \cos^{-1}0 = \pi/2.$$

逆に $\theta(V) = \pi/2$ が成り立つと仮定すると、$\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle = 0$ が成り立つ。これより $\langle\sqrt{-1}v_2, v_1\rangle = 0$ となり、$\sqrt{-1}v_1, \sqrt{-1}v_2 \in V^\perp$、すなわち V は全実部分ベクトル空間になる。したがって、V が全実部分ベクトル空間であるための必要十分条件は V の Kähler 角度が $\pi/2$ になることである。

このように Kähler 角度は実 2 次元部分ベクトル空間の基本的な不変量であり、Kähler 角度が値域の両極の値 0 と $\pi/2$ をとるということで部分ベクトル空間が複素部分ベクトル空間であることと全実部分ベクトル空間であることを特徴付けることができる。

複素空間形の部分多様体に関する Poincaré の公式を考える場合、転送原理より複素射影空間の場合を考えれば十分である。複素射影空間 $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$ の線形イソトロピー表現は $U(n) \times U(1)$ の $\mathbf{C}^n$ への表現

$$(A, z)v = Av\bar{z} \qquad ((A, z) \in U(n) \times U(1),\ v \in \mathbf{C}^n)$$

と同値になる。ここで $\mathbf{C}^n$ の元は縦ベクトルとみなしている。$\mathbf{C}^n$ の標準的ユニタリ基底を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ で表す。

補題 4.2.5 (Kang-T.) $0 \le \theta \le \pi/2$ を満たす θ に対して、$\mathbf{C}^n$ 内の Kähler 角度が θ の実 2 次元部分ベクトル空間全体を G_θ^n で表す。$U(n)$ の作用は実 2 次元部分ベクトル空間の Kähler 角度を不変にするので、$U(n)$ は G_θ^n に作用する。さらに

$$V_\theta = \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_1, \cos\theta\sqrt{-1}\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2\}$$

とおくと $G_\theta^n = U(n) \cdot V_\theta$ が成り立つ。すなわち $U(n)$ の G_θ^n への作用は推移的である。

証明 命題 4.2.3 より $U(n)$ の作用は Kähler 角度を不変にするので、$U(n)$ は G_θ^n に作用する。そこでこの $U(n)$ の G_θ^n への作用が推移的であることを以下で示す。G_θ^n の元 V、すなわち、Kähler 角度 θ の実 2 次元部分ベクトル空間 V を任意にとる。V の正規直交基底 v_1, v_2 をとると、$\cos\theta = |\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle|$ が成り立つ。v_1 は $g_1 \in U(n)$ の作用によって $g_1 v_1 = \mathbf{e}_1$ と書ける。$g_1 v_2$ の方は

$$g_1 v_2 = z\mathbf{e}_1 + x \qquad (z \in \mathbf{C},\ x \in (\mathbf{C}\mathbf{e}_1)^\perp)$$

のように分解する。x は $g_2 \in \{1\} \times U(n-1) \subset U(n)$ の作用によって $g_2 x = |x|\mathbf{e}_2$ と書ける。ここで $|z|^2 + |x|^2 = 1$ だから $|x| = \sqrt{1-|z|^2}$ となり、

$$g_2 g_1 v_2 = z\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-|z|^2}\mathbf{e}_2$$

が成り立つ。そこで V に $g_2 g_1 \in U(n)$ を作用させると、$g_2 g_1 V$ は正規直交基底

$$g_2 g_1 v_1 = \mathbf{e}_1, \quad g_2 g_1 v_2 = z\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-|z|^2}\mathbf{e}_2$$

を持つ。この表示より $g_2 g_1 v_1, g_2 g_1 v_2$ の内積は z の実部になるので、z の実部は 0 になり z は純虚数になる。これを $z = \sqrt{-1}r$ $(r \in \mathbf{R})$ とおくことにすると、

$$g_2 g_1 v_2 = \sqrt{-1}r\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-r^2}\mathbf{e}_2.$$

これより

$$\cos\theta = |\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle| = |\langle\sqrt{-1}g_2 g_1 v_1, g_2 g_1 v_2\rangle| = |r|$$

が成り立つ。これより $\sqrt{1-r^2} = \sin\theta$ となり、$g_2 g_1 V$ は正規直交基底

$$g_2 g_1 v_1 = \mathbf{e}_1, \quad g_2 g_1 v_2 = \pm\sqrt{-1}\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

を持つ。よって $\mathbf{e}_1,\ \sqrt{-1}\cos\theta\mathbf{e}_1 \pm \sin\theta\mathbf{e}_2$ も $g_2 g_1 V$ の正規直交基底になる。$g_3 \in \{1\} \times U(n-1)$ の元によって

$$g_3(\sqrt{-1}\cos\theta\mathbf{e}_1 \pm \sin\theta\mathbf{e}_2) = \sqrt{-1}\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

とすることができ、$g_3 g_2 g_1 V$ は正規直交基底

$$\mathbf{e}_1, \quad \sqrt{-1}\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

を持ち、$g_3 g_2 g_1 V = V_\theta$ が成り立つ。したがって、$U(n)$ は G_θ^n に推移的に作用する。

注意 4.2.6 補題4.2.5はKähler角度が $\mathbf{C}^n$ 内の実2次元部分ベクトル空間の $U(n)$ の作用に関する完全不変量であることを意味している。すなわち、$\mathbf{C}^n$ 内の実2次元部分ベクトル空間 V と W に対して、ある $g \in U(n)$ が存在して $W = g \cdot V$ が成り立つことと $\theta(V) = \theta(W)$ が同値になる。

補題 4.2.7 V, W を内積を持つ実ベクトル空間 E の部分ベクトル空間であって、$\dim E = \dim V + \dim W$ を満たすと仮定すると、次の等式が成り立つ。

$$\sigma(V, W) = \sigma(V^\perp, W^\perp)$$

証明　外積代数における Hodge のスター作用素を $*$ で表す。$p = \dim V,\ q = \dim W$ とおく。V の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_p$ をとり、$V^\perp$ の正規直交基底 $\tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_q$ をとると、

$$*(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \pm \tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_q$$

が成り立つ。同様に W の正規直交基底 $w_1, \ldots, w_q$ をとり、$W^\perp$ の正規直交基底 $\tilde{w}_1, \ldots \tilde{w}_p$ をとると、

$$*(w_1 \wedge \cdots \wedge w_q) = \pm \tilde{w}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{w}_p$$

が成り立つ。したがって、次の等式を得る。

$$\begin{aligned}
\sigma(V^\perp, W^\perp) &= |\tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_q \wedge \tilde{w}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{w}_p| \\
&= |\langle \tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_q, *(\tilde{w}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{w}_p) \rangle| \\
&= |\langle *(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p), w_1 \wedge \cdots \wedge w_q \rangle| \\
&= |v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q| \\
&= \sigma(V, W).
\end{aligned}$$

定理 4.2.8 (Kang-T.) M と N を二次元複素空間形 G/K 内の実曲面とする。各点 $x \in M$ と $y \in N$ における M と N の Kähler 角度をそれぞれ θ_x と τ_y で表すと次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_G \#(M \cap gN) d\mu_G(g) \\
= \ &\frac{\mathrm{vol}(U(3))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2)^2} \int_{M \times N} (2 + 2\cos^2\theta_x \cos^2\tau_y + \sin^2\theta_x \sin^2\tau_y) d\mu_{M \times N}(x, y).
\end{aligned}$$

証明　転送原理より $G/K = \mathbf{C}P^2$ の場合を証明すれば十分である。M と N を $\mathbf{C}P^2$ の実曲面とする。定理3.1.5と補題4.2.7により、

$$\begin{aligned}
\int_{U(3)} \#(M \cap gN) d\mu_{U(3)}(g) &= \int_{M \times N} \sigma_{U(2) \times U(1)}(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu_{M \times N}(x, y) \\
&= \int_{M \times N} \sigma_{U(2) \times U(1)}(T_x M, T_y N) d\mu_{M \times N}(x, y)
\end{aligned}$$

が成り立つ。命題 3.1.4 と 4.2.5 より $\sigma_{U(2)\times U(1)}(T_xM, T_yN)$ は T_xM の kähler 角度 θ_x と T_yN の Kähler 角度 τ_y にのみ依存する。そこで、補題 4.2.5 で定めた V_θ を使って

$$\sigma(\theta,\tau) = \sigma_{U(2)\times U(1)}(V_\theta, V_\tau)$$

を定めることができる。すると

$$\int_{U(3)} \#(M\cap gN)d\mu_{U(3)}(g) = \int_{M\times N} \sigma(\theta_x,\tau_y)d\mu_{M\times N}(x,y)$$

が成り立つ。以上より $\sigma(\theta,\tau) = \sigma_{U(2)\times U(1)}(V_\theta, V_\tau)$ を求めることが問題になる。

$$\begin{aligned}\sigma(\theta,\tau) &= \int_{U(2)\times U(1)} \sigma(V_\theta, k^{-1}\cdot V_\tau)d\mu_{U(2)\times U(1)}(k)\\ &= \mathrm{vol}(U(1))\int_{U(2)} \sigma(V_\theta, k^{-1}\cdot V_\tau)d\mu_{U(2)}(k).\end{aligned}$$

$U(1)$ の一径数部分群 $e^{\sqrt{-1}t}$ に対応する Lie 環の元は $\sqrt{-1}$ になり、不変計量に関するこのベクトルの長さは $1/\sqrt{2}$ である。従って $\mathrm{vol}(U(1)) = 2\pi/\sqrt{2}$ となり、

$$\sigma(\theta,\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{U(2)} \sigma(V_\theta, k^{-1}\cdot V_\tau)d\mu_{U(2)}(k)$$

を得る。そこで、V_θ の正規直交基底 $e_1,\ e(\theta) = \cos\theta\sqrt{-1}e_1 + \sin\theta e_2$ と V_τ の規直交基底 $e_1,\ e(\tau) = \cos\tau\sqrt{-1}e_1 + \sin\tau e_2$ をとり計算を進める。まず

$$\sigma(V_\theta, k^{-1}\cdot V_\tau) = |(e_1\wedge e(\theta))\wedge k^{-1}\cdot(e_1\wedge e(\tau))|$$

を計算する。$\mathbf{C}^2$ は実 4 次元ベクトル空間であり、その上の二次外積の空間は自己双対部分と反自己双対部分の直和に分解されることが知られている。この分解を利用することで上のノルムの計算とその積分の計算が可能になる。そこでこの分解を具体的に構成する。$e_1, \sqrt{-1}e_1, e_2, \sqrt{-1}e_2$ は $\mathbf{C}^2$ の正規直交基底になる。この基底が正の向きになるように $\mathbf{C}^2$ に向きを入れる。これによって $\mathbf{C}^2$ 上の実外積代数に Hodge スター作用素 $*$ が定まり、

$$\begin{aligned}&*(e_1\wedge\sqrt{-1}e_1) = e_2\wedge\sqrt{-1}e_2, && *(e_1\wedge e_2) = -\sqrt{-1}e_1\wedge\sqrt{-1}e_2,\\ &*(e_1\wedge\sqrt{-1}e_2) = \sqrt{-1}e_1\wedge e_2, && *(\sqrt{-1}e_1\wedge e_2) = e_1\wedge\sqrt{-1}e_2,\\ &*(\sqrt{-1}e_1\wedge\sqrt{-1}e_2) = -e_1\wedge e_2, && *(e_2\wedge\sqrt{-1}e_2) = e_1\wedge\sqrt{-1}e_1\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで

$$\wedge^2_+ = \{\xi\in\wedge^2(\mathbf{C}^2) \mid *\xi = \xi\},\qquad \wedge^2_- = \{\xi\in\wedge^2(\mathbf{C}^2) \mid *\xi = -\xi\}$$

とおくと直交直和分解

$$\wedge^2(\mathbf{C}^2) = \wedge^2_+\oplus\wedge^2_-$$

を得る。$\wedge_+^2$ の正規直交基底 A_i と $\wedge_-^2$ の正規直交基底 B_i を

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2),\\
A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2),\\
A_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2),\\
B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2),\\
B_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2),\\
B_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2)
\end{aligned}
$$

によって定める。すると

$$
\wedge_+^2 = \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{A_1, A_2, A_3\}, \qquad \wedge_-^2 = \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{B_1, B_2, B_3\}
$$

が成り立つ。$U(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(2)$ の $\wedge^2(\mathbf{C}^2)$ への作用を計算する。$\mathfrak{u}(2)$ の元 $\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$ の $\mathbf{C}^2$ への作用は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} e_1 = \sqrt{-1}e_1, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_1 = -e_1,
$$

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} e_2 = \sqrt{-1}e_2, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_2 = -e_2.
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} A_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2)\\
&= 0,\\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} A_2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2)\\
&= 2A_3,\\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} A_3 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - e_1 \wedge e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= -2A_2, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} B_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} B_2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} B_3 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + e_1 \wedge e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{u}(2)$ の元 $\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$ の $\mathbf{C}^2$ への作用は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} e_1 = \sqrt{-1}e_1, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_1 = -e_1,
$$
$$
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} e_2 = -\sqrt{-1}e_2, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_2 = e_2.
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} A_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} A_2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & & +\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
& & = \ & 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} A_3 & & = \ & \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
& & = \ & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - e_1 \wedge e_2) \\
& & & +\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
& & = \ & 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} B_1 & & = \ & \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
& & = \ & 0, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} B_2 & & = \ & \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
& & = \ & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
& & & +\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
& & = \ & -2B_3, \\
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} B_3 & & = \ & \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
& & = \ & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + e_1 \wedge e_2) \\
& & & +\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
& & = \ & 2B_2.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{u}(2)$ の元 $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$ の $\mathbf{C}^2$ への作用は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} e_1 = \sqrt{-1}e_2, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_1 = -e_2,
$$
$$
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} e_2 = \sqrt{-1}e_1, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_2 = -e_1.
$$

これより

$$
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_1) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_2 \wedge e_2 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_1) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1) \\
&= -2B_2, \\
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{-1}e_2 \wedge e_2 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_1) \\
&= 2B_1, \\
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{u}(2)$ の元 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の $\mathbf{C}^2$ への作用は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_1 = e_2, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_1 = \sqrt{-1}e_2,
$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_2 = -e_1, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sqrt{-1}e_2 = -\sqrt{-1}e_1.$$

これより

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_2 \wedge e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_1) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 - e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1 + e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 + e_2 \wedge \sqrt{-1}e_1) \\
&= 2B_3, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + \sqrt{-1}e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2) \\
&= 0, \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_1 \wedge e_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge \sqrt{-1}e_2 - \sqrt{-1}e_2 \wedge e_2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge \sqrt{-1}e_1 + \sqrt{-1}e_1 \wedge e_1) \\
&= -2B_1.
\end{aligned}$$

以上より、次のことがわかる。$U(2)$ は A_1 を固定し平面 $\mathbf{R}A_2+\mathbf{R}A_3$ に回転群として作用する。さらに、$U(2)$ は $\wedge^2_-$ に回転群として作用する。この分解に従って $e_1\wedge e(\tau)$ を表示する。

$$
\begin{aligned}
e_1\wedge e(\tau) &= e_1\wedge(\cos\tau\sqrt{-1}e_1+\sin\tau e_2)\\
&= \cos\tau e_1\wedge\sqrt{-1}e_1+\sin\tau e_1\wedge e_2\\
&= \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}(A_1+B_1)+\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}(A_2+B_2)\\
&= \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}A_1+\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}A_2+\frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}B_1+\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}B_2.
\end{aligned}
$$

したがって、次の等式を得る。

$$
U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))=\left(\frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}A_1+S^1\left(\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}\right)\right)\times S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
$$

ここで、$S^1(\sin\tau/\sqrt{2})$ は $\mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{A_2,A_3\}$ 内の半径 $\sin\tau/\sqrt{2}$ の円であり、$S^2(1/\sqrt{2})$ は $\wedge^2_-$ 内の半径 $1/\sqrt{2}$ の 2 次元球面である。写像 $p:U(2)\to U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))$ を

$$
p(k)=k\cdot(e_1\wedge e(\tau))\qquad(k\in U(2))
$$

によって定める。この写像に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用して、$\sigma(\theta,\tau)$ を表す $U(2)$ 上の積分を $U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))$ 上の積分に帰着させる。余面積公式を適用するために $k\in U(2)$ において Jdp_k を計算する。写像 p は $U(2)$ 同変になるので、$U(2)$ の単位元 e において dp_e を計算すれば十分である。$X\in\mathfrak{u}(2)$ に対して

$$
dp_e(X)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\tau XA_1+\sin\tau XA_2+\cos\tau XB_1+\sin\tau XB_2\right).
$$

これを $\mathfrak{u}(2)$ の基底に対して計算する。

$$
\begin{aligned}
& dp_e\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}\\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}A_1+\sin\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}A_2\right.\\
& \left.+\cos\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}B_1+\sin\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}B_2\right)\\
=\ & \sqrt{2}\sin\tau A_3,\\
& dp_e\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{bmatrix}\\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{bmatrix}A_1+\sin\tau\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{bmatrix}A_2\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad + \cos\tau \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} B_1 + \sin\tau \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} B_2 \Bigg) \\
&= -\sqrt{2}\sin\tau B_3, \\
& \quad dp_e \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg(\cos\tau \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} A_1 + \sin\tau \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} A_2 \\
& \quad + \cos\tau \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} B_1 + \sin\tau \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} B_2 \Bigg) \\
&= -\sqrt{2}\cos\tau B_2 + \sqrt{2}\sin\tau B_1, \\
& \quad dp_e \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg(\cos\tau \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_1 + \sin\tau \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_2 \\
& \quad + \cos\tau \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_1 + \sin\tau \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_2 \Bigg) \\
&= \sqrt{2}\cos\tau B_3.
\end{aligned}
$$

以上の計算より次を得る。

$$
\ker dp_e = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \cos\tau\sqrt{-1} & -\sin\tau \\ \sin\tau & -\cos\tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}.
$$

この表示より

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \sin\tau\sqrt{-1} & \cos\tau \\ -\cos\tau & -\sin\tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}
$$

は $(\ker dp_e)^\perp$ の正規直交基底になる。補題 1.3.8 より

$$
\begin{aligned}
& \quad Jdp_e \\
&= \left| dp_e \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \wedge dp_e \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \wedge dp_e \begin{bmatrix} \sin\tau\sqrt{-1} & \cos\tau \\ -\cos\tau & -\sin\tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \right| \\
&= |\sqrt{2}\sin\tau A_3 \wedge (-\sqrt{2}\cos\tau B_2 + \sqrt{2}\sin\tau B_1) \wedge (-\sqrt{2}\sin^2\tau B_3 - \sqrt{2}\cos^2\tau B_3)| \\
&= 2\sqrt{2}\sin\tau |A_3 \wedge (-\cos\tau B_2 + \sin\tau B_1) \wedge (-B_3)| \\
&= 2\sqrt{2}\sin\tau
\end{aligned}
$$

を得る。そこで、$\tau \neq 0$ の場合に積分の計算を実行する。$\tau = 0$ の場合の積分値は、Lebesgue の有界収束定理より $\tau \neq 0$ の場合の積分値の $\tau \to 0$ のときの極限として求めることができる。

p に余面積公式を適用するためには、さらに各 $\xi \in U(2)\cdot(e_1 \wedge e(\tau))$ に対して $\mathrm{vol}(p^{-1}(\xi))$ を求めておく必要がある。$U(2)$ の元は $U(2)$ の中心 $U(1)$ の元と $SU(2)$ の元の積で表されるので、

$$U(2) = \{tk \mid t \in U(1), k \in SU(2)\}.$$

Lie 環の $\wedge^2(\mathbf{C}^2)$ への作用のし方から、$U(1)$ は $\mathbf{R}A_2 + \mathbf{R}A_3$ に平面の回転として作用し、直交補空間 $\mathbf{R}A_1 + \wedge^2_-$ には自明に作用する。さらに $\mathbf{R}A_2 + \mathbf{R}A_3$ の 0 ではないどのベクトル u に対しても u を固定する $U(1)$ の部分群は

$$\exp\begin{bmatrix} \pi\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \pi\sqrt{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より $\{\pm 1\}$ になる。Lie 環の $\wedge^2(\mathbf{C}^2)$ への作用のし方から、$SU(2)$ は $\wedge^2_-$ に回転群として作用し、直交補空間 $\wedge^2_+$ には自明に作用する。さらに $SU(2)$ の $\wedge^2_-$ への作用は $SU(2)$ の随伴表現と同値になる。したがって、$\wedge^2_-$ の 0 ではないどのベクトル v に対しても v を固定する $SU(2)$ の部分群は v の生成する一径数部分群になる。ここで $SU(2)$ の一径数部分群はすべて $SU(2)$ の内部自己同型で $SO(2)$ に共役になる。以上より $\mathbf{R}A_2 + \mathbf{R}A_3$ の 0 ではないベクトル u と $\wedge^2_-$ の 0 ではないベクトル v に対して、$u+v$ を固定する $U(2)$ の部分群は

$$\{\pm 1\}SO(2) = SO(2)$$

に $U(2)$ の内部自己同型で共役になる。$\tau \neq 0$ だから

$$e_1 \wedge e(\tau) = \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}A_1 + \frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}A_2 + \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}B_1 + \frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}B_2$$

の $\mathbf{R}A_2 + \mathbf{R}A_3$ 成分と $\wedge^2_-$ 成分はどちらも 0 にならない。よって $p^{-1}(e_1 \wedge e(\tau))$ は $U(2)$ の内部自己同型で $SO(2)$ に共役になる。したがって、各 $\xi \in U(2)\cdot(e_1 \wedge e(\tau))$ に対して $\mathrm{vol}(p^{-1}(\xi))$ は $U(2)$ の内部自己同型で $SO(2)$ 共役な部分群の剰余類になり、$\mathrm{vol}(p^{-1}(\xi)) = \mathrm{vol}(SO(2))$ が成り立つ。

以上の準備と余面積公式より

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2}\sin\tau \int_{U(2)} |(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge k^{-1}\cdot(e_1 \wedge e(\tau))| d\mu_{U(2)}(k) \\ = \ & \mathrm{vol}(SO(2)) \int_{U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))} |(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge \xi| d\mu_{U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))}(\xi) \end{aligned}$$

を得る。$\wedge^2_+$ の正規直交基底 A_i に関する正規直交座標 x_i と $\wedge^2_-$ の正規直交基底 B_i に関する正規直交座標 y_i を使って $U(2)\cdot(e_1 \wedge e(\tau))$ の元 ξ を

$$\xi = \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + y_1B_1 + y_2B_2 + y_3B_3$$

と表すと

$$\begin{aligned}
|(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge \xi| &= |\langle e_1 \wedge e(\theta), *\xi\rangle| \\
&= \left|\left\langle \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}A_1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}A_2 + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}B_1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}B_2,\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 - y_1B_1 - y_2B_2 - y_3B_3 \right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\cos\tau + \sin\theta x_2 - \cos\theta y_1 - \sin\theta y_2\right|
\end{aligned}$$

となる。等長的な座標変換

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

によって上の被積分関数は次のように変換される。

$$|(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge \xi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta x_2) - z_1\right|.$$

この被積分関数を $S^1(\sin\tau/\sqrt{2}) \times S^2(1/\sqrt{2})$ 上で積分するために、まず次の積分を計算しておく。

補題 4.2.9 $|\alpha| \leq 1$ となる実数 α に対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_{S^2(r)} |r\alpha - z_1| d\mu_{S^2(r)}(z) = 2\pi r^3(1 + \alpha^2).$$

証明　写像 $\phi : (-r, r) \times S^1(r) \to S^2(r)$ を

$$(t, x) \mapsto (t, \sqrt{1 - (t/r)^2}x) \qquad ((t, x) \in (-r, r) \times S^1(r))$$

によって定めると、ϕ は面積を保存する写像になる。つまり $Jd\phi = 1$ が成り立つ。これを示すために ϕ の微分を計算する。$(-r, r) \times S^1(r)$ の元を $(t, r\cos s, r\sin s)$ と表し、t, r を座標として使う。

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial s}\right| = |(0, -r\sin s, r\cos s)| = r$$

であり、これらのベクトルは直交するので命題 1.3.7 より、

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial s}\right| = r$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t, \sqrt{1-(t/r)^2}x) \\
&= \left(1, \frac{2t/r^2}{2\sqrt{1-(t/r)^2}}x\right) = \left(1, \frac{t}{r^2\sqrt{1-(t/r)^2}}x\right), \\
d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\phi(t, r\cos s, r\sin s) = \frac{\partial}{\partial s}(t, \sqrt{1-(t/r)^2}(r\cos s, r\sin s)) \\
&= (0, \sqrt{1-(t/r)^2}(-r\sin s, r\cos s)).
\end{aligned}$$

特にこれらのベクトルは直交するので命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned}
\left|d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\wedge d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right| &= \left|d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|\cdot\left|d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right| \\
&= \left(1+\frac{t^2r^2}{r^4(1-(t/r)^2)}\right)^{1/2} r\sqrt{1-(t/r)^2} \\
&= \left(r^2(1-(t/r)^2)+t^2\right)^{1/2} \\
&= r
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、命題 1.3.8 より次の等式を得る。

$$Jd\phi = \frac{\left|d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\wedge d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right|}{\left|\frac{\partial}{\partial t}\wedge\frac{\partial}{\partial s}\right|} = \frac{r}{r} = 1.$$

そこで ϕ に余面積公式を適用すると (積分の変数変換)、

$$\int_{S^2(r)} |r\alpha - z_1| d\mu_{S^2(r)}(z) = \mathrm{vol}(S^1(r)) \int_{-r}^{r} |r\alpha - t| dt$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} |r\alpha - t| dt \\
=\ & \int_{-r}^{r\alpha}(r\alpha - t)dt - \int_{r\alpha}^{r}(r\alpha - t)dt \\
=\ & [r\alpha t - t^2/2]_{-r}^{r\alpha} - [r\alpha t - t^2/2]_{r\alpha}^{r} \\
=\ & (r^2\alpha^2 - r^2\alpha^2/2) - (-r^2\alpha - r^2/2) - (r^2\alpha - r^2/2) + (r^2\alpha^2 - r^2\alpha^2/2) \\
=\ & r^2(1+\alpha^2)
\end{aligned}$$

だから次の等式が成り立つ。

$$\int_{S^2(r)} |r\alpha - z_1| d\mu_{S^2(r)}(z) = 2\pi r^3(1+\alpha^2).$$

問題の被積分関数

$$|(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge \xi| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta x_2) - z_1 \right|$$

において

$$|\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta x_2| \leq \cos\theta\cos\tau + \sin\theta\sin\tau = \cos(\theta - \tau) \leq 1$$

となるので、この被積分関数に補題 4.2.9 に適用することができる。

$$\begin{aligned}
& \int_{S^1\left(\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}\right) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta x_2) - z_1 \right| d\mu_{S^1\left(\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}\right) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})}(x, z) \\
= & \frac{\pi}{2} \int_{S^1\left(\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}\right)} (1 + (\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta x_2)^2) d\mu_{S^1\left(\frac{\sin\tau}{\sqrt{2}}\right)}(x) \\
= & \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \left(\cos\theta\cos\tau + \sqrt{2}\sin\theta \frac{\sin\tau}{\sqrt{2}} \cos s\right)^2\right) \frac{\sin\tau}{\sqrt{2}} ds \\
= & \frac{\pi\sin\tau}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(1 + (\cos\theta\cos\tau + \sin\theta\sin\tau\cos s)^2\right) ds \\
= & \frac{\pi\sin\tau}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2\theta\cos^2\tau + 2\cos\theta\cos\tau\sin\theta\sin\tau\cos s + \sin^2\theta\sin^2\tau\cos^2 s) ds \\
= & \frac{\pi^2\sin\tau}{2\sqrt{2}} (2 + 2\cos^2\theta\cos^2\tau + \sin^2\theta\sin^2\tau).
\end{aligned}$$

最後の等式は

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 s ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2s + 1) ds = \pi$$

を利用した。以上より

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta, \tau) &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{U(2)} \sigma(V_\theta, k^{-1} \cdot V_\tau) d\mu_{U(2)}(k) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{U(2)} |(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge k \cdot (e_1 \wedge e(\tau))| d\mu_{U(2)}(k) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathrm{vol}(SO(2))}{2\sqrt{2}\sin\tau} \int_{U(2)\cdot(e_1 \wedge e(\tau))} |(e_1 \wedge e(\theta)) \wedge \xi| d\mu_{U(2)\cdot(e_1\wedge e(\tau))}(\xi) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathrm{vol}(SO(2))}{2\sqrt{2}\sin\tau} \cdot \frac{\pi^2\sin\tau}{2\sqrt{2}} (2 + 2\cos^2\theta\cos^2\tau + \sin^2\theta\sin^2\tau) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^4 (2 + 2\cos^2\theta\cos^2\tau + \sin^2\theta\sin^2\tau)
\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(U(3)) &= (1/\sqrt{2}) \mathrm{vol}(U(2)) \mathrm{vol}(S^5) \\
&= (1/2) \mathrm{vol}(U(1)) \mathrm{vol}(S^3) \mathrm{vol}(S^5) \\
&= (1/2) \cdot \sqrt{2}\pi \cdot 2\pi^2 \cdot \pi^3 = \sqrt{2}\pi^6
\end{aligned}$$

である。さらに、$\mathbf{C}P^2$ 内の $\mathbf{R}P^2$ は定曲率 1 を持ち定曲率 1 の二次元球面からの二重被覆を持つので、$\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2) = 2\pi$ が成り立つ。よって

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^4 = \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{4\pi^2} = \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{(\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2))^2}$$

となり

$$\sigma(\theta, \tau) = \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{(\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2))^2}(2 + 2\cos^2\theta\cos^2\tau + \sin^2\theta\sin^2\tau).$$

これは τ に関して連続になるので、$\tau = 0$ のときも成り立つ。したがって、定理の証明が完成する。

定理 4.2.8 はさらに一般の次元の複素射影空間の Poincaré の公式に拡張することができる。次の定理 4.2.10 は定理 4.2.8 の拡張の一つである。定理 4.2.8 の証明にはコンパクト対称対を使った積分の計算が必要になり、ここではその証明は省略する。

定理 4.2.10 (T.) $P^n(\mathbf{C})$ 内の任意の実 2 次元部分多様体 M と任意の実 $(2n-2)$ 次元部分多様体 N に対して、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{U(n+1)} \#(M \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g) \\
= \quad & \frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \\
&\times \int_{M\times N} \left(\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta_x)(1+\cos^2\tau_y) + \frac{n}{4(n-1)}\sin^2\theta_x\sin^2\tau_y\right) \\
&\cdot d\mu_{M\times N}(x,y).
\end{aligned}$$

ここで θ_x は T_xM の Kähler 角度であり τ_y は $T_y^{\perp}N$ の Kähler 角度である。

定理 4.2.10 が定理 4.2.8 の拡張の一つであるを示しておこう。$\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2) = 2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)$ になることに注意しておく。定理 4.2.10 において $n = 2$ とすると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)^2}\left(\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta)(1+\cos^2\tau) + \frac{2}{4}\sin^2\theta\sin^2\tau\right) \\
= \quad & \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1)^2}((1+\cos^2\theta)(1+\cos^2\tau) + 2\sin^2\theta\sin^2\tau) \\
= \quad & \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1)^2}(2 + 2\cos^2\theta\cos^2\tau + \sin^2\theta\sin^2\tau).
\end{aligned}$$

これより定理 4.2.8 が定理 4.2.10 の特別な場合であることがわかる。

4.3 多重 Kähler 角度

複素空間形内の一般次元の実部分多様体に関する Poincaré の公式を定式化するために、Kähler 角度の概念を一般化し**多重 Kähler 角度**を導入する。多重 Kähler 角度は $\mathbf{C}^n$ 内の実部分ベクトル空間の $U(n)$ の作用に関する完全不変量になる。多重 Kähler 角度を使うと複素空間形内の一般次元の実部分多様体に関する Poincaré の公式を定式化することができる。

$\mathbf{C}^n$ の標準的 Kähler 形式を ω で表す。すなわち、

$$\omega(u,v) = \langle \sqrt{-1}u, v\rangle \qquad (u, v \in \mathbf{C}^n)$$

によって ω を定める。$\mathbf{C}^n$ 内の Kähler 角度 θ の実 2 次元部分ベクトル空間 V に対して、$\cos\theta = |\langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle|$ となる V の正規直交基底 v_1, v_2 をとることができる。必要なら v_1, v_2 をとりかえて $\cos\theta = \langle\sqrt{-1}v_1, v_2\rangle$ とできる。そこで、v_1, v_2 の双対基底 α^1, α^2 をとると

$$\omega|_V = \cos\theta\alpha^1 \wedge \alpha^2$$

を満たすことがわかる。このように、標準的 Kähler 形式 ω の V への制限を V 上の交代二次形式とみて標準形に書き表したときの係数に Kähler 角度が現れる。このことから一般の次元の部分ベクトル空間に対して、Kähler 角度を次のように一般化する。

定義 4.3.1 (T.) $1 < k \leq n$ とする。$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して、ω の V への制限 $\omega|_V$ を交代 2 次形式として標準形を考える。すなわち、V の双対空間 V^* の正規直交基底 $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ で次の等式を満たすものをとることができる。

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}, \qquad 0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{[k/2]} \leq \pi/2.$$

$\theta(V) = (\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})$ とおいてこれを V の**多重 Kähler 角度**と呼ぶ。$n < k \leq 2n-1$ のときは、$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して、$\theta(V) = \theta(V^\perp)$ によって V の多重 Kähler 角度を定める。

多重 Kähler 角度の定義から直接従う性質をいくつか次に述べておく。

命題 4.3.2 $k \leq n$ とする。$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して以下のことが成り立つ。

(1) ユニタリ群 $U(n)$ の作用は多重 Kähler 角度を保存する。

(2) $k = 2$ のとき、多重 Kähler 角度は Kähler 角度に他ならない。

(3) $\theta(V) = (0, \ldots, 0)$ となるための必要十分条件は、V 内に複素 $[k/2]$ 次元部分ベクトル空間が存在することである。k が偶数である場合、$\theta(V) = (0, \ldots, 0)$ となるための必要十分条件は、V が複素部分ベクトル空間になることである。

(4) $\theta(V) = (\pi/2, \ldots, \pi/2)$ となるための必要十分条件は、V と $\sqrt{-1}V$ が直交することである。

証明　(1) ユニタリ群 $U(n)$ の作用は標準的 Kähler 形式 ω を不変にするので、ω を部分ベクトル空間に制限した交代二次形式の標準形も不変にする。したがって、多重 Kähler 角度も不変にする。

(2) 多重 Kähler 角度の定義の前に述べたことから、$n = 2$ の場合は多重 Kähler 角度は Kähler 角度に一致する。

(3) と (4) の証明の準備として一般の交代二次形式の標準形について復習しておく。実 k 次元ベクトル空間 V において V 上の交代二次形式 ϕ の標準形とは、V の双対空間 V^* の正規直交基底 $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ によって

$$\phi = \sum_{i=1}^{[k/2]} a_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$$

という形に交代二次形式 ϕ を書き表すことである。$\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ の双対基底になる V の正規直交基底を $v_1, \ldots, v_n$ で表す。このとき

$$\begin{aligned}
\phi(v_{2j-1}, v_{2j}) &= \sum_{i=1}^{[k/2]} a_i (\alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i})(v_{2j-1}, v_{2j}) \\
&= \sum_{i=1}^{[k/2]} a_i (\alpha^{2i-1}(v_{2j-1})\alpha^{2i}(v_{2j}) - \alpha^{2i-1}(v_{2j})\alpha^{2i}(v_{2j-1})) \\
&= a_j.
\end{aligned}$$

したがって、ϕ の標準形は

$$\phi = \sum_{i=1}^{[k/2]} \phi(v_{2i-1}, v_{2i}) \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$$

という形になる。

(3) $\theta(V) = (0, \ldots, 0)$ を仮定する。$\omega|_V$ の標準形は

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$$

という形になる。$\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ の双対基底になる V の正規直交基底を $v_1, \ldots, v_n$ で表すと $\omega|_V(v_{2i-1}, v_{2i}) = 1$ が成り立つ。Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立の必要十分条件より $\sqrt{-1}v_{2i-1} = v_{2i}$ が成り立つ。したがって、

$$W = \sum_{i=1}^{2[k/2]} \mathbf{R} v_i = \sum_{i=1}^{[k/2]} \mathbf{C} v_{2i-1}$$

は複素 $[k/2]$ 次元部分ベクトル空間になり、$W \subset V$ が成り立つ。

逆に $W \subset V$ を満す複素 $[k/2]$ 次元部分ベクトル空間 W が存在すると仮定する。W のユニタリ基底 $u_1, \dots, u_{[k/2]}$ をとる。このとき、$u_1, \sqrt{-1}u_1, \dots, u_{[k/2]}, \sqrt{-1}u_{[k/2]}$ は W の実正規直交基底になる。k が偶数のときはこれが V の正規直交基底になる。k が奇数のときは $W^\perp \cap V$ は一次元になり $W^\perp \cap V$ から単位ベクトル v をとると $u_1, \sqrt{-1}u_1, \dots, u_{[k/2]}, \sqrt{-1}u_{[k/2]}, v$ は V の正規直交基底になる。これらの正規直交基底の双対基底を $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ で表すことにすると、どちらの場合も $\omega|_V$ の標準形は

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$$

となり V の多重 Kähler 角度は $\theta(V) = (0, \dots, 0)$ となる。

(4) 次に $\theta(V) = (\pi/2, \dots, \pi/2)$ を仮定する。すると多重 Kähler 角度の定義より $\omega|_V = 0$ となる。よって、任意の $x, y \in V$ に対して

$$0 = \omega(x, y) = \langle \sqrt{-1}x, y \rangle$$

となるので、V と $\sqrt{-1}V$ は直交する。

逆に V と $\sqrt{-1}V$ が直交すると仮定する。任意の $x, y \in V$ に対して

$$0 = \langle \sqrt{-1}x, y \rangle = \omega(x, y)$$

となるので、$\omega|_V = 0$ が成り立つ。したがって、V の多重 Kähler 角度は $(\pi/2, \dots, \pi/2)$ になる。

命題 4.3.3 $k \leq n$ とする。$0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{[k/2]} \leq \pi/2$ となる $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{[k/2]})$ に対して

$$G_\theta = \{V \in G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) \mid W \text{ の特性角度は } \theta\}$$

とおくと、$U(n)$ は G_θ に推移的に作用する。さらに、

$$V_\theta = \sum_{i=1}^{[k/2]} \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_{2i-1}, \cos\theta_i\sqrt{-1}\mathbf{e}_{2i-1} + \sin\theta_{2i}\mathbf{e}_{2i}\} \quad (+\mathbf{R}\mathbf{e}_k)$$

とおくと (最後の $\mathbf{e}_k$ のある項は k が奇数のときのみ加える)、$G_\theta = U(n) \cdot V_\theta$ が成り立つ。

証明　$V \in G_\theta$ をとる。V^* の正規直交基底 $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ を

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$$

を満たすようにとる。$e_1, \dots, e_k$ を $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ の双対基底とすると、これは V の正規直交基底になる。

$$V_i^{\mathbf{C}} = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{e_{2i-1}, e_{2i}\}, \quad (1 \leq i \leq [k/2]) \qquad V_o^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}e_k$$

とおくと、$\omega|_V$ の形から

$$\sum_{i=1}^{[k/2]} V_i^{\mathbf{C}} \quad (+V_o^{\mathbf{C}})$$

は直交直和になる。これよりある $g \in U(n)$ が存在し

$$gV_i^{\mathbf{C}} \subset \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}\}, \quad gV_o^{\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}\mathbf{e}_k$$

が成り立つ。$g\mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{e_{2i-1}, e_{2i}\}$ は $\mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}\}$ 内で Kähler 角度 θ_i の実 2 次元部分ベクトル空間になるので、補題 4.2.5 の証明中に示したことから $U(2)$ の作用によって

$$\mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_{2i-1}, \cos\theta_i\sqrt{-1}\mathbf{e}_{2i-1} + \sin\theta_{2i}\mathbf{e}_{2i}\}$$

に写る。さらに ge_k は $U(1)$ の作用によって $\mathbf{e}_k$ に写る。以上より、ある $h \in U(n)$ によって $hV = V_\theta$ となる。

$n < k \leq 2n-1$ のときは

$$V_\theta^k = (V_\theta^{2n-k})^\perp$$

とおく。命題 4.3.3 より $U(n)$ は

$$G_{k;\theta}^n = \{V \in G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) \mid \theta(V) = (\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})\}$$

に推移的に作用する。さらに $G_{k;\theta}^n = U(n) \cdot V_\theta^k$ が成り立つ。

多重 Kähler 角度の定義は $\mathbf{C}^n$ のユニタリ構造にのみ依存しているので、概 Hermite 多様体の実部分多様体の多重 Kähler 角度を考えることができる。より正確には、実部分多様体の接ベクトル空間の多重 Kähler 角度を考えることができる。

多重 Kähler 角度を使って複素射影空間内の一般の実部分多様体に関する Poincaré の公式を定式化することができる。Howard による Poincaré の公式の定式化と多重 Kähler 角度に関する今までに得た事項を合せると次の定理を得る。

定理 4.3.4 (T.) $p \leq 2n \leq p+q$ と $q \leq 2n \leq p+q$ を満たす自然数 p と q に対して

$$\begin{aligned}\sigma_{p,q}^n(\theta^{(p)}, \theta^{(q)}) &= \int_{U(1)\times U(n)} \sigma(V_{\theta^{(p)}}^{2n-p}, k^{-1}\cdot V_{\theta^{(q)}}^{2n-q}) d\mu_{U(1)\times U(n)}(k) \\ &\quad (\theta^{(p)} \in \mathbf{R}^{[\min\{p,2n-p\}/2]},\ \theta^{(q)} \in \mathbf{R}^{[\min\{q,2n-q\}/2]})\end{aligned}$$

によって $\sigma_{p,q}^n$ を定める。p または q が 1 または $2n-1$ に等しいときは, 任意の実 1 次元または実 $2n-1$ 次元部分ベクトル空間を使っても $\sigma_{p,q}^n$ は同じ定数に定まる。このとき、$\mathbf{C}P^n$ 内の任意の実 p 次元部分多様体 M と任意の実 q 次元部分多様体 N に対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_{U(n+1)} \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g) = \int_{M\times N} \sigma_{p,q}^n(\theta(T_xM), \theta(T_yN)) d\mu_{M\times N}(x,y).$$

定理 4.3.4 において二つの部分多様体 M と N が $\dim M + \dim N = 2n$ を満たすとき、Poincaré の公式は次に述べるようにより詳しく記述できる。定理 4.3.5 の証明も定理 4.2.10 で利用したコンパクト対称対を使った積分の計算が必要になり、ここではその証明は省略する。

定理 4.3.5 (T.) $1 \leq p \leq n$ を満たす自然数 p に対して、多項式

$$P_p^n(x_1, \ldots, x_{[p/2]}, y_1, \ldots, y_{[p/2]})$$

が存在し、次の条件を満たす。

(1) 多項式 $P_p^n(x_i, y_j)$ の次数は各 x_i と y_j に関して高々1 である。

(2) $\{1, \ldots, [p/2]\}$ の任意の置換 α について、次の等式が成り立つ。

$$P_p^n(x_i, y_j) = P_p^n(x_{\alpha(i)}, y_j) = P_p^n(x_i, y_{\alpha(j)}) = P_p^n(y_j, x_i).$$

(3) $\mathbf{C}P^n$ 内の任意の実 p 次元部分多様体 M と任意の実 $(2n-p)$ 次元部分多様体 N に対して、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\int_{U(n+1)} \#(M \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g) \\ = &\int_{M \times N} P_p^n(\cos^2 \theta_i(T_x M), \cos^2 \theta_j(T_y N)) d\mu_{M \times N}(x, y). \end{aligned}$$

Howard は

$$P_1^n = \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(n))\mathrm{vol}(S^{2n})}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^{2n-1})}$$

が成り立つことを示している。特に P_1^n は定数である。また、定理 4.2.10 より次の結果を得る。

$$\begin{aligned} &P_2^n(x, y) \\ = &\frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \frac{1}{4(n-1)} \cdot [(2n-1) - (x+y) + (2n-1)xy]. \end{aligned}$$

多項式 P_1^3 と P_2^3 はすでに正確な形が得られている。さらに P_3^3 の正確な形を与えることができる。

定理 4.3.6 (T.) 次の等式が成り立つ。

$$P_3^3(x, y) = \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \left(4 - \frac{4}{3}(x+y) + \frac{20}{9}xy \right).$$

証明　定理 4.3.5 より $P_3^3(x,y)$ は次の形をしている。

$$P_3^3(x,y) = a_0 + a_1(x+y) + a_2 xy.$$

この表示の係数 $a_0,\ a_1$ と a_2 を決定するために、$P_3^3(0,0),\ P_3^3(1,0)$ と $P_3^3(1,1)$ の値を計算する。

定理 4.1.3 の証明中に示したことより、複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ においてほとんどすべての $g \in U(n+1)$ に対して $\mathbf{C}P^3$ 内で $\mathbf{R}P^3$ の多重 Kähler 角度は $\pi/2$ になり $\cos(\pi/2) = 0$ となるので、

$$\int_{U(4)} \#(\mathbf{R}P^3 \cap g\mathbf{R}P^3) d\mu(g) = \int_{\mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}P^3} P_3^3(0,0) d\mu(x,y)$$

を得る。これより $4\mathrm{vol}(U(4)) = P_3^3(0,0)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2$ となり

$$P_3^3(0,0) = \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \cdot 4.$$

次に M を $\mathbf{C}P^2$ 内の実超曲面とし $\mathbf{C}P^2$ を自然な見方で $\mathbf{C}P^3$ の部分多様体とみなす。こうすることで M は $\mathbf{C}P^3$ の部分多様体とみることができる。このとき M の多重 Kähler 角度は一定値 0 になる。$U(4)$ 上の測度の不変性より次の等式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{U(4)} \#(M \cap g\mathbf{R}P^3) d\mu(g) \\ = \ & \frac{1}{\mathrm{vol}(U(3))} \int_{U(4)} \left(\int_{U(3)} \#(M \cap hg\mathbf{R}P^3) d\mu(h) \right) d\mu(g). \end{aligned}$$

ほとんどすべての $g \in U(4)$ に対して、$g\mathbf{R}P^3 \cap \mathbf{C}P^2$ は全測地的部分多様体になりしかも一次元なので、$\mathbf{R}P^1$ に等長的になる。M は $\mathbf{C}P^2$ 内の実超曲面だから、上で述べた P_1^n に関する結果から次の等式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{U(3)} \#(M \cap hg\mathbf{R}P^3) d\mu(h) \\ = \ & \int_{U(3)} \#(M \cap hg\mathbf{R}P^3 \cap \mathbf{C}P^2) d\mu(h) \\ = \ & \int_{U(3)} \#(M \cap h(g\mathbf{R}P^3 \cap \mathbf{C}P^2)) d\mu(h) \\ = \ & \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1). \end{aligned}$$

これは最後の形からわかるように g には依存しない。したがって、

$$\begin{aligned} & P_3^3(1,0)\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3) \\ = \ & \int_{M \times \mathbf{R}P^3} P_3^3 \left(\cos^2 0, \cos^2 \frac{\pi}{2} \right) d\mu(x,y) \\ = \ & \int_{U(4)} \#(M \cap g\mathbf{R}P^3) d\mu(g) \\ = \ & \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(U(3))} \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1) \end{aligned}$$

となり

$$
\begin{aligned}
P_3^3(1,0) &= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)}\frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^3)}\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1) \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\frac{\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^1)} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\frac{\mathrm{vol}(S^4)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)\mathrm{vol}(S^1)} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\frac{2\pi\mathrm{vol}(S^4)\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^1)}{\mathrm{vol}(S^5)\mathrm{vol}(S^1)} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\frac{\pi\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^5)} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\cdot\frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

先の場合と同様にして

$$
\begin{aligned}
&\int_{U(4)}\#(M\cap gM)d\mu(g) \\
= \;& \frac{1}{\mathrm{vol}(U(3))}\int_{U(4)}\left(\int_{U(3)}\#(M\cap hgM)d\mu(h)\right)d\mu(g)
\end{aligned}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
&\int_{U(3)}\#(M\cap hgM)d\mu(h) \\
= \;& \int_{U(3)}\#(M\cap hgM\cap\mathbf{C}P^2)d\mu(h) \\
= \;& \int_{U(3)}\#(M\cap h(gM\cap\mathbf{C}P^2))d\mu(h) \\
= \;& \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^3)}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(gM\cap\mathbf{C}P^2).
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&\int_{U(4)}\mathrm{vol}(gM\cap\mathbf{C}P^2)d\mu(g) \\
= \;& \frac{1}{\mathrm{vol}(U(3))}\int_{U(4)}\left(\int_{U(3)}\mathrm{vol}(M\cap hg\mathbf{C}P^2)d\mu(h)\right)d\mu(g)
\end{aligned}
$$

だから、次の積分を計算する必要がある。

$$
\int_{U(3)}\mathrm{vol}(M\cap hg\mathbf{C}P^2)d\mu(h)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{U(3)} \mathrm{vol}(M \cap hg\mathbf{C}P^2 \cap \mathbf{C}P^2) d\mu(h) \\
&= \int_{U(3)} \mathrm{vol}(M \cap h(g\mathbf{C}P^2 \cap \mathbf{C}P^2)) d\mu(h) \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1).
\end{aligned}
$$

最後の等式は、ほとんどすべての $g \in U(4)$ に対して $g\mathbf{C}P^2 \cap \mathbf{C}P^2$ は $\mathbf{C}P^1$ に等長的になることからわかる。以上の計算結果を使うと

$$
\begin{aligned}
& P_3^3(1,1)\mathrm{vol}(M)^2 \\
= \ & \int_{M \times M} P_3^3(\cos^2 0, \cos^2 0) d\mu(x,y) \\
= \ & \int_{U(4)} \#(M \cap gM) d\mu(g) \\
= \ & \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^3)} \\
& \times \frac{\mathrm{vol}(U(4))\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(M)^2 \mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1) \\
= \ & \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^3)} \\
& \times \frac{\mathrm{vol}(U(4))\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(M)^2 \mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)
\end{aligned}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
& P_3^3(1,1) \\
= \ & \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^3)} \\
& \times \frac{\mathrm{vol}(U(4))\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(2))\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(U(3))\mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1) \\
= \ & \mathrm{vol}(U(4)) \frac{2\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)\mathrm{vol}(S^3)} \frac{\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)\mathrm{vol}(S^2)\mathrm{vol}(S^3)} \mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1) \\
= \ & \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \frac{\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)} \frac{\mathrm{vol}(S^4)}{2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)\mathrm{vol}(S^2)} \mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1) \\
= \ & \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \left(\frac{\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)} \right)^2 \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)}{2\mathrm{vol}(S^2)} \\
= \ & \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \left(\frac{2\pi\mathrm{vol}(S^4)}{\mathrm{vol}(S^5)} \right)^2 \frac{\mathrm{vol}(S^3)}{4\pi\mathrm{vol}(S^2)} \\
= \ & \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2} \left(\frac{16}{3} \right)^2 \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\cdot\frac{32}{9}.$$

先に表示した等式

$$P_3^3(x,y) = a_0 + a_1(x+y) + a_2xy$$

に $(x,y) = (0,0),(1,0),(1,1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\cdot 4 \\ a_0 + a_1 &= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\cdot\frac{8}{3} \\ a_0 + 2a_2 + a_3 &= \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\cdot\frac{32}{9} \end{aligned}$$

となり、次の結果を得る。

$$P_3^3(x,y) = \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\left(4 - \frac{4}{3}(x+y) + \frac{20}{9}xy\right).$$

以上で定理の証明は完成する。

Kang は P_4^4 の部分的な表現を与えている。

定理 4.3.7 (Kang) 次の等式が成り立つ.

$$P_4^4(x_1,x_2,1,1) = \frac{\mathrm{vol}(U(5))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)^2}\cdot\frac{1}{8}\cdot(3 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2).$$

4.4　他の空間

この節では実空間形、複素空間形以外の等質空間における Poincaré の公式を扱う。これに関して得られている結果は少なく、まだ始まったばかりの研究といえる。

四元数 $\mathbf{H}$ の標準的実内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す。この内積に関して $1,i,j,k$ は $\mathbf{H}$ の正規直交基底になる。$\mathbf{H}$ 上の実交代 2 次形式 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ を次の等式で定める。

$$\omega_1(u,v) = \langle ui, v\rangle,\quad \omega_2(u,v) = \langle uj, v\rangle,\quad \omega_3(u,v) = \langle uk, v\rangle \qquad (u,v\in\mathbf{H}).$$

これらの $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ は $Sp(1)$ の左からの積に関して不変な交代 2 形式になる。

定義 4.4.1 $\mathbf{H}$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間 V と W に対して、$A(V,W)$ を次の等式で定める。

$$A(V,W) = (\omega_1(V)\omega_1(W) + \omega_2(V)\omega_2(W) + \omega_3(V)\omega_3(W))^2.$$

ここで $\omega_i(V)$ は V の正規直交基底 e_1,e_2 をとり $\omega_i(V) = \omega_i(e_1,e_2)$ によって定める。これは ±1 の不定性があるが、それらを二乗すると不定性はなくなる。このとき $A(V,W)$ は $Sp(1)$ の左からの積に関して不変になる。

$Sp(1)$ の $\mathbf{H}$ への左からの積による作用と平行移動としての $\mathbf{H}$ の作用の半直積を $M(\mathbf{H})$ で表す。$Sp(1)$ に定曲率 1 の両側不変 Riemann 計量を定める。$M(\mathbf{H})$ は $Sp(1)$ と $\mathbf{H}$ の半直積だから、$Sp(1)$ と $M(\mathbf{H})$ の Riemann 計量から $M(\mathbf{H})$ の左不変 Riemann 計量が定まる。この左不変 Riemann 計量から $M(\mathbf{H})$ の両側不変測度が定まる。

定理 4.4.2 (T.) $\mathbf{H}$ 内の実曲面 M と N に対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_{M(\mathbf{H})} \#(M \cap gN) d\mu_{M(\mathbf{H})}(g) = \frac{\pi}{4} \int_{M \times N} (1 + A(T_x M, T_y N)) d\mu(x, y).$$

複素空間形の複素部分多様体に関する Poincaré の公式については定理 3.3.1 が決定的であるが、複素空間形以外でも類似の Poincaré の公式が成り立つ場合があることが最近わかった。

定理 4.4.3 (Kang-Sakai-Takahashi-T.) G/K を複素 n 次元等質概 Hermitian 多様体とする。G はユニモジュラー Lie 群であり、K は p 次外積代数 $\wedge_p T_o^{(1,0)}(G/K)$ に既約に作用していると仮定する。このとき G/K 内の任意の複素 p 次元概複素部分多様体 M と任意の概複素部分多様体 N であって $\dim M + \dim N = \dim(G/K)$ を満たすものに対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \#(M \cap gN) d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\binom{n}{p}} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

K の $\wedge_p T_o^{(1,0)}(G/K)$ への作用が既約ではない場合も、既約な場合に比べると記述は若干複雑になるが Poincaré の公式を定式化することができる。