自然学類

微分幾何学

数理物質科学研究科

微分幾何学II

理工学研究科

微分幾何学I

Riemann幾何学の基礎

田崎博之

2003年度

自然学類

微分幾何学

Differential Geometry

数理物質科学研究科

微分幾何学 II

Differential Geometry II

理工学研究科

微分幾何学 I

Differential Geometry I

開講授業科目概要

リーマン多様体とその部分多様体に関する講義を行う。多様体の微分幾何学で必要になるテンソル代数と外積代数の準備の後、リーマン多様体とその部分多様体の計量、曲率、第二基本形式等の基本的概念を解説する。

目 次

第1章　線形代数からの準備

1.1　テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間 V に対して、V から実数 $\mathbf{R}$ への線形写像の全体を V^* で表し、V の**双対ベクトル空間**と呼ぶ。V^* は $\mathbf{R}$ の和と積から自然に定まる演算によってベクトル空間の構造を持つ。$v \in V$ に対して

$$v(f) = f(v) \qquad (f \in V^*)$$

によって、$v : V^* \to \mathbf{R}$ を定めると、$v \in (V^*)^*$ とみなすことができ、この対応によって $(V^*)^*$ と V を同一視することができる。δ^i_j を

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

によって定める。V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して、$f^i(u_j) = \delta^i_j$ によって定まる V^* の元 $\{f^i\}$ は V^* の基底になる。特に $\dim V^* = \dim V$ となる。$\{f^i\}$ を $\{u_j\}$ の**双対基底**と呼ぶ。

定義 1.1.2 有限次元実ベクトル空間 V に対して、$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q}$ 上で定義された $p+q$ 変数の実数値多重線形写像を V 上の (p, q) **型テンソル** と呼び、その全体を $T^{(p,q)}(V)$ で表す。$T^{(p,q)}(V)$ を (p, q) **型テンソル空間**と呼ぶ。$T^{(p,q)}(V)$ は自然な加法とスカラー倍によって実ベクトル空間になる。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A と $T^{(r,s)}(V)$ の元 B に対して、

$$\begin{aligned} & (A \otimes B)(g^1, \ldots, g^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) \\ = \ & A(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) B(g^{p+1}, \ldots, g^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) \\ & (g^1, \ldots, g^{p+r} \in V^*,\ v_1, \ldots, v_{q+s} \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$A \otimes B : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p+r} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q+s} \longrightarrow \mathbf{R}$$

を定めると、$A \otimes B$ は V 上の $(p+r, q+s)$ 型テンソルになる。$A \otimes B$ を A と B の**テンソル積**と呼ぶ。$T^{(1,0)}(V) = (V^*)^* = V$ とみなし、$T^{(0,1)}(V) = V^*$ であること

に注意する。V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と V^* の元 $f^1, \ldots, f^q$ に対して、

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q)(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) \\ = \ & g^1(u_1) \cdots g^p(u_p) f^1(v_1) \cdots f^q(v_q) \\ & (g^1, \ldots, g^p \in V^*,\ v_1, \ldots, v_q \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q} \longrightarrow \mathbf{R}$$

は定まり、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q$ は V 上の (p,q) 型テンソルになる。

命題 1.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) & \longrightarrow & T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

は双線形写像になり、写像

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{q} & \longrightarrow & T^{(p,q)}(V) \\ (u_1, \ldots, u_p, f^1, \ldots, f^q) & \longmapsto & u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q \end{array}$$

は多重線形写像になる。

証明　定義 1.1.2 での定め方より、$A \otimes B$ は A と B に関して線形になる。したがって、上の写像は双線形写像になる。また、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q$ は u_i と f^j に関して線形になる。したがって、上の写像は多重線形写像になる。

定義 1.1.4 有限次元実ベクトル空間 V に対して、

$$T(V) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T^{(p,q)}(V)$$

とおく。ただし、$T^{(0,0)}(V) = \mathbf{R}$ としておく。定義 1.1.2 で定めた双線形写像

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) & \longrightarrow & T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

を、$T(V) \times T(V)$ 全体の双線形写像に拡張し、これを二項演算として $T(V)$ は代数になる。$T(V)$ を V 上の**テンソル代数**と呼ぶ。

命題 1.1.5 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とする。すると、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。特に、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になる。

証明 まず $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ $(1\leq i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\leq n)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1\\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}=0 \qquad (a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\in\mathbf{R})$$

とする。$1\leq k_1,\ldots,k_p,l_1,\ldots,l_q\leq n$ となる $k_1,\ldots,k_p,l_1,\ldots,l_q$ をとり、

$$(f^{k_1},\ldots,f^{k_p},u_{l_1},\ldots,u_{l_q})$$

を上の式に代入すると $a^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}=0$ となる。したがって $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ は線形独立である。

次に $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ $(1\leq i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\leq n)$ は $T^{(p,q)}(V)$ を生成することを示す。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A を任意に一つとる。V の元 v に対して

$$v=\sum_{j=1}^{n} f^j(v)u_j$$

となり、V^* の元 g に対して

$$g=\sum_{i=1}^{n} g(u_i)f^i$$

となるので、$g^1,\ldots,g^p\in V^*$ と $v_1,\ldots,v_q\in V$ に対して

$$\begin{aligned}
&A(g^1,\ldots,g^p,v_1,\ldots,v_q)\\
=\ &A\left(\sum_{i_1=1}^{n} g^1(u_{i_1})f^{i_1},\ldots,\sum_{i_p=1}^{n} g^p(u_{i_p})f^{i_p},\sum_{j_1=1}^{n} f^{j_1}(v_1)u_{j_1},\ldots,\sum_{j_q=1}^{n} f^{j_q}(v_q)u_{j_q}\right)\\
=\ &\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1\\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} g^1(u_{i_1})\cdots g^p(u_{i_p})f^{j_1}(v_1)\cdots f^{j_q}(v_q)A(f^{i_1},\ldots,f^{i_p},u_{j_1},\ldots,u_{j_q})\\
=\ &\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1\\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1},\ldots,f^{i_p},u_{j_1},\ldots,u_{j_q})\\
&\times(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q})(g^1,\ldots,g^p,v_1,\ldots,v_q).
\end{aligned}$$

よって、

$$A=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1\\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1},\ldots,f^{i_p},u_{j_1},\ldots,u_{j_q})u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ は $T^{(p,q)}(V)$ を生成する。

以上で

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になることがわかった。このことから、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になることもわかる。

定義 1.1.6 命題 1.1.5 の証明中にある $T^{(p,q)}V$ の元 A の基底による表示

$$A = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

を A の**成分表示**と呼び、$A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q})$ を A の**成分**と呼ぶ。

注意 1.1.7 上の成分表示のように、和 $\sum$ の後で同じ添え字が上下組になって現れ、添え字の動く範囲がわかっているときは、和の記号 $\sum$ を省略する。例えば、上の場合は

$$A = A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

と書き表す。この表し方を **Einstein の規約**という。考えている基底が定まっている場合には

$$A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q})$$

と書くことにする。このとき、A の成分表示は

$$A = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

となる。さらに、$A = (A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q})$ とも表す。

命題 1.1.8 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とする。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A を

$$A = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

と成分表示する。V のもう一つの基底 $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ とその双対基底 $\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^n$ をとり、

$$A = \bar{A}^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \bar{u}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{u}_{k_p} \otimes \bar{f}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{f}^{l_q}$$

と成分表示する。$u_1, \ldots, u_n$ から $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ への基底の変換行列を $g = (g^i_k)$ で表し、その逆行列を $\bar{g} = (\bar{g}^l_j)$ で表す。すなわち、

$$\bar{u}_k = g^i_k u_i, \qquad \bar{g}^i_k g^k_j = \delta^i_j.$$

このとき、

$$\bar{A}^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \bar{g}^{k_1}_{i_1} \cdots \bar{g}^{k_p}_{i_p} g^{j_1}_{l_1} \cdots g^{j_q}_{l_q}$$

が成り立つ。

証明 双対基底の間の変換行列をまず求めておく。

$$\bar{f}^l = h^l_j f^j$$

とおいておく。

$$\delta^l_k = \bar{f}^l(\bar{u}_k) = h^l_j f^j(g^i_k u_i) = h^l_j g^i_k f^j(u_i) = h^l_j g^i_k \delta^j_i = h^l_i g^i_k.$$

したがって、$h = (h^l_j)$ は g の逆行列に一致する。よって、

$$\bar{f}^l = \bar{g}^l_j f^j.$$

$\bar{u}_k = g^i_k u_i$ の両辺に $\bar{g}^k_a$ をかけて k について和をとると、

$$\bar{g}^k_a \bar{u}_k = \bar{g}^k_a g^i_k u_i = \delta^i_a u_i = u_a.$$

$\bar{f}^l = \bar{g}^l_j f^j$ の両辺に g^b_l をかけて l について和をとると、

$$g^b_l \bar{f}^l = g^b_l \bar{g}^l_j f^j = \delta^b_j f^j = f^b.$$

以上より、

$$u_i = \bar{g}^k_i \bar{u}_k, \qquad f^j = g^j_l \bar{f}^l$$

を得る。

V の基底と双対基底の変換行列を使って、A の成分表示を計算する。

$$\begin{aligned} A &= A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \\ &= A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \bar{g}^{k_1}_{i_1} \bar{u}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{g}^{k_p}_{i_p} \bar{u}_{k_p} \otimes g^{j_1}_{l_1} \bar{f}^{l_1} \otimes \cdots \otimes g^{j_q}_{l_q} \bar{f}^{l_q} \\ &= A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \bar{g}^{k_1}_{i_1} \cdots \bar{g}^{k_p}_{i_p} g^{j_1}_{l_1} \cdots g^{j_q}_{l_q} \bar{u}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{u}_{k_p} \otimes \bar{f}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{f}^{l_q}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\bar{A}^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q} = A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \bar{g}^{k_1}_{i_1} \cdots \bar{g}^{k_p}_{i_p} g^{j_1}_{l_1} \cdots g^{j_q}_{l_q}$$

が成り立つ。

命題 1.1.9 V を有限次元実ベクトル空間とし、V の基底 $u_1, \ldots, u_n$ とその双対基底 $f^1, \ldots, f^n$ をとっておく。$T^{(p,q)}(V)$ の元 $A = (A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ と $T^{(r,s)}(V)$ の元 $B = (B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s})$ のテンソル積 $A \otimes B$ の成分は、

$$(A \otimes B)^{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_q l_1\cdots l_s} = A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$$

で与えられる。

証明　まず、

$$\begin{aligned} A &= A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q} \\ B &= B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_r}\otimes f^{l_1}\otimes\cdots\otimes f^{l_s} \end{aligned}$$

となっているので、命題 1.1.3 のテンソル積の双線形性に注意すると、

$$\begin{aligned} & A\otimes B \\ =\ & (A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}) \\ & \otimes(B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_r}\otimes f^{l_1}\otimes\cdots\otimes f^{l_s}) \\ =\ & A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_r} \\ & \otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\otimes f^{l_1}\otimes\cdots\otimes f^{l_s} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$(A\otimes B)^{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_q l_1\cdots l_s} = A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$$

が成り立つ。

定義 1.1.10 V を有限次元実ベクトル空間とし、基底 $u_1,\ldots,u_n$ とその双対基底 $f^1,\ldots,f^n$ をとる。$A\in T^{(p,q)}(V)$ とする。$1\le r\le p,\ 1\le s\le q$ となる r,s をとり、写像

$$C^{(r,s)}A : \overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p-1}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q-1}\to\mathbf{R}$$

を

$$\begin{aligned} & (C^{(r,s)}A)(g^1,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{q-1}) \\ =\ & A(g^1,\ldots,g^{r-1},f^i,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},u_i,v_s,\ldots,v_{q-1}) \end{aligned}$$

によって定める。すると $C^{(r,s)}A\in T^{(p-1,q-1)}(V)$ となる。$C^{(r,s)}A$ を A の**縮約**と呼ぶ。

命題 1.1.11 定義 1.1.10 の縮約の定義は、V の基底のとり方に依存しない。また、V の基底 $u_1,\ldots,u_n$ とその双対基底 $f^1,\ldots,f^n$ に関する成分表示は

$$(C^{(r,s)}A)^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}} = A^{i_1\cdots i_{r-1} i i_r\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{s-1} i j_s\cdots j_{q-1}}$$

となる。

証明　$\bar u_k = g^i_k u_i$ によって基底を変換すると、命題 1.1.8 または、その証明中に示したことより、双対基底は、$\bar f^l = \bar g^l_j f^j$ によって変換される。よって

$$\begin{aligned} & A(g^1,\ldots,g^{r-1},\bar f^k,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},\bar u_k,v_s,\ldots,v_{q-1}) \\ =\ & A(g^1,\ldots,g^{r-1},\bar g^k_j f^j,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},g^i_k u_i,v_s,\ldots,v_{q-1}) \\ =\ & \bar g^k_j g^i_k A(g^1,\ldots,g^{r-1},f^j,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},u_i,v_s,\ldots,v_{q-1}) \\ =\ & \delta^i_j A(g^1,\ldots,g^{r-1},f^j,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},u_i,v_s,\ldots,v_{q-1}) \\ =\ & A(g^1,\ldots,g^{r-1},f^i,g^r,\ldots,g^{p-1},v_1,\ldots,v_{s-1},u_i,v_s,\ldots,v_{q-1}). \end{aligned}$$

これより、縮約の定義が基底のとり方に依存しないことがわかった。
次に $C^{(r,s)}A$ の成分を求める。

$$\begin{aligned}
&(C^{(r,s)}A)^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}}\\
=\;& (C^{(r,s)}A)(f^{i_1},\ldots,f^{i_{p-1}},u_{j_1},\ldots,u_{j_{q-1}})\\
=\;& A(f^{i_1},\ldots,f^{i_{r-1}},f^i,f^{i_r},\ldots,f^{i_{p-1}},u_{j_1},\ldots,u_{j_{s-1}},u_i,u_{j_s},\ldots,u_{j_{q-1}})\\
=\;& A^{i_1\cdots i_{r-1}ii_r\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}ij_s\cdots j_{q-1}}.
\end{aligned}$$

命題 1.1.12 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{q}\to W$$

を多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_q)=\phi(v_1,\ldots,v_p,g_1,\ldots,g_q)\qquad (v_i\in V,\ g_j\in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi:T^{(p,q)}(V)\to W$$

が唯一つ存在する。

証明 命題 1.1.5 より、$u_1,\ldots,u_n$ を V の基底とし、$f^1,\ldots,f^n$ をその双対基底とすると、

$$u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\quad (1\le i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\le n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。そこで、

$$\Phi(u_1\otimes\cdots\otimes u_p\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^q)=\phi(u_1,\ldots,u_p,f^1,\ldots,f^q)$$

によって Φ の基底上の値を定め、線形になるように $T^{(p,q)}(V)$ 全体に拡張する。任意の $v_i\in V,\ g^j\in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes g^1\otimes\cdots\otimes g^q)\\
=\;& \Phi\left(f^{i_1}(v_1)u_{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_p}(v_p)u_{i_p}\otimes g^1(u_{j_1})f^{j_1}\otimes\cdots\otimes g^q(u_{j_q})f^{j_q}\right)\\
=\;& \Phi\left(f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)g^1(u_{j_1})\cdots g^q(u_{j_q})u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\right)\\
=\;& f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)g^1(u_{j_1})\cdots g^q(u_{j_q})\Phi(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q})\\
=\;& f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)g^1(u_{j_1})\cdots g^q(u_{j_q})\phi(u_{i_1},\ldots,u_{i_p},f^{j_1},\ldots,f^{j_q})\\
=\;& \phi\left(f^{i_1}(v_1)u_{i_1},\ldots,f^{i_p}(v_p)u_{i_p},g^1(u_{j_1})f^{j_1},\ldots,g^q(u_{j_q})f^{j_q}\right)\\
=\;& \phi(v_1,\ldots,v_p,g^1,\ldots,g^q)
\end{aligned}$$

となり、Φ は与えられた条件を満たす。
Φ の条件は $T^{(p,q)}(V)$ の基底の像を定めているので、このような Φ は一意的である。特に、Φ の定め方は V の基底のとり方に依存しない。

例 1.1.13 V を有限次元実ベクトル空間とし、V から V への線形写像全体の成す実ベクトル空間を $\mathrm{End}(V)$ で表す。写像

$$\phi : V \times V^* \to \mathrm{End}(V)$$

を

$$\phi(u, f)(v) = f(v)u \qquad (u, v \in V,\ f \in V^*)$$

によって定めると、ϕ は双線形写像になる。命題 1.1.12 より、

$$\Phi(u \otimes f) = \phi(u, f) \qquad (u \in V,\ f \in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi : T^{(1,1)}(V) \to \mathrm{End}(V)$$

が唯一つ存在する。V の基底 $u_1, \ldots, u_n$ とその双対基底 $f^1, \ldots, f^n$ をとる。

$$\Phi(u_i \otimes f^j)(u_k) = \phi(u_i, f^j)(u_k) = f^j(u_k)u_i = \delta^j_k u_i$$

となるので、$\Phi(u_i \otimes f^j)$ は u_j を u_i に写し、他の u_k を 0 に写す線形写像になる。よって

$$\{\Phi(u_i \otimes f^j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

は $\mathrm{End}(V)$ の基底になる。さらに命題 1.1.5 より、Φ は $T^{(1,1)}(V)$ の基底を $\mathrm{End}(V)$ の基底に写し、線形同型写像になる。この線形同型写像によって、$T^{(1,1)}(V)$ と $\mathrm{End}(V)$ を同一視する。

$A \in T^{(1,1)}(V)$ の成分を A^i_j とすると、$A = A^i_j u_i \otimes f^j$ となり、

$$\Phi(A) = A^i_j \Phi(u_i \otimes f^j).$$

よって、

$$\Phi(A)u_k = A^i_j \Phi(u_i \otimes f^j)u_k = A^i_j \delta^j_k u_i = A^i_k u_i$$

となり、(A^i_j) は $\Phi(A)$ の基底 $u_1, \ldots, u_n$ に関する行列表示になる。さらに、

$$C^{(1,1)}A = A^i_i = \mathrm{tr}(\Phi(A))$$

となるので、$C^{(1,1)}A = \mathrm{tr}(\Phi(A))$ が成り立つ。つまり、$T^{(1,1)}(V)$ を $\mathrm{End}(V)$ と同一視すると、$T^{(1,1)}(V)$ での縮約は線形写像のトレースになる。

命題 1.1.14 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像

$$F^{(p,0)} : T^{(p,0)}(V) \longrightarrow T^{(p,0)}(W)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $v_1, \dots, v_p \in V$ に対して

$$F^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。また次の条件を満たす線形写像

$$F^{(0,q)} : T^{(0,q)}(W) \longrightarrow T^{(0,q)}(V)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $f^1, \dots, f^p \in W^*$ に対して

$$F^{(0,q)}(f^1 \otimes \cdots \otimes f^q) = (f^1 \circ F) \otimes \cdots \otimes (f^q \circ F)$$

が成り立つ。

証明 $T^{(p,0)}V$ の元 A に対して

$$F^{(p,0)}(A)(f^1, \dots, f^p) = A(f^1 \circ F, \dots, f^p \circ F) \qquad (f^1, \dots, f^p \in W^*)$$

とおくと、$F^{(p,0)}(A) \in T^{(p,0)}(W)$ となる。上の定義式から $F^{(p,0)}$ が線形写像であることもわかる。$f^1, \dots, f^p \in W^*$ に対して

$$\begin{aligned} F^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1, \dots, f^p) &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1 \circ F, \dots, f^p \circ F) \\ &= (f^1 \circ F)(v_1) \cdots (f^p \circ F)(v_p) \\ &= (F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p))(f^1, \dots, f^p) \end{aligned}$$

となるので、

$$F^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。命題 1.1.5 より条件は $T^{(p,0)}(V)$ の基底の像を定めているので、このような $F^{(p,0)}$ は一意的である。

$T^{(0,q)}W$ の任意の元 B に対して

$$F^{(0,q)}(B)(v_1, \dots, v_q) = B(F(v_1), \dots, F(v_q)) \qquad (v_1, \dots, v_q \in V)$$

とおくと、$F^{(0,q)}(B) \in T^{(0,q)}(V)$ となる。上の定義式から $F^{(0,q)}$ が線形写像であることもわかる。$v_1, \dots, v_q \in V$ に対して

$$\begin{aligned} F^{(0,q)}(f^1 \otimes \cdots \otimes f^q)(v_1, \dots, v_q) &= (f^1 \otimes \cdots \otimes f^q)(F(v_1), \dots, F(v_q)) \\ &= f^1(F(v_1)) \cdots f^q(F(v_q)) \\ &= ((f^1 \circ F) \otimes \cdots \otimes (f^q \circ F))(v_1, \dots, v_q) \end{aligned}$$

となるので、

$$F^{(0,q)}(f^1 \otimes \cdots \otimes f^q) = (f^1 \circ F) \otimes \cdots \otimes (f^q \circ F)$$

が成り立つ。命題 1.1.5 より条件は $T^{(0,q)}(W)$ の基底の像を定めているので、このような $F^{(0,q)}$ は一意的である。

1.2　外積代数

定義 1.2.1 有限次元実ベクトル空間 V に関する $T^{(p,0)}(V)$ の元 A と $1 \leq i < j \leq p$ に対して

$$(t_{i,j}A)(f^1,\ldots,f^p) = A(f^1,\ldots,\underset{i}{\overset{\smile}{f^j}},\ldots,\underset{j}{\overset{\smile}{f^i}},\ldots,f^p) \qquad (f^1,\ldots,f^p \in V^*)$$

とおくと、線形写像 $t_{i,j} : T^{(p,0)}(V) \to T^{(p,0)}(V)$ が定まる。

$$\wedge^p V = \{A \in T^{(p,0)}(V) \mid t_{i,j}A = -A \ (1 \leq i < j \leq p)\}$$

を p **次外積空間** と呼ぶ。$\{1,\ldots,p\}$ の元の置換全体から成る群を S_p で表す。$\wedge^p V$ の元 A と $\wedge^q V$ の元 B に対して、

$$\begin{aligned}(A \wedge B)(g^1,\ldots,g^{p+q}) &= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)(A\otimes B)(g^{\sigma(1)},\ldots,g^{\sigma(p+q)}) \\ &\quad (g^1,\ldots,g^{p+q} \in V^*)\end{aligned}$$

によって $A \wedge B \in T^{p+q,0}(V)$ を定めると、$A \wedge B \in \wedge^{p+q}V$ が成り立つ。$A \wedge B$ を A と B の**外積**と呼ぶ。

命題 1.2.2 有限次元実ベクトル空間 V 上の $(r,0)$ 型テンソル T に対して

$$\tilde{T}(g^1,\ldots,g^r) = \sum_{\sigma\in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)T(g^{\sigma(1)},\ldots,g^{\sigma(r)}) \qquad (g^1,\ldots,g^r \in V^*)$$

によって $\tilde{T} \in T^{r,0}(V)$ を定めると、$\tilde{T} \in \wedge^r V$ が成り立つ。特に、定義 1.2.1 における $A \wedge B$ は $\wedge^{p+q}V$ の元になる。これによって定まる写像

$$\begin{array}{ccc}\wedge^p V \times \wedge^q V & \to & \wedge^{p+q}V \\ (A,B) & \mapsto & A\wedge B\end{array}$$

は双線形写像になる。さらに、$C \in \wedge^r V$ に対して

$$(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\wedge C)$$

が成り立つ。V の元 $u_1,\ldots,u_p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_p = \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。

証明　$\tilde{T} \in \wedge^r V$ を示す。$1 \leq i < j \leq r$ をとり、i と j の互換を $\tau \in S_r$ で表す。

$$\begin{aligned}
(t_{i,j}\tilde{T})(g^1, \ldots, g^r) &= \tilde{T}(g^1, \ldots, \overset{i}{\smile}{g^j}, \ldots, \overset{j}{\smile}{g^i}, \ldots, g^r) \\
&= \tilde{T}(g^{\tau(1)}, \ldots, g^{\tau(r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \ldots, g^{\tau\sigma(r)}) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \ldots, g^{\tau\sigma(r)}) \\
&= -\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) T(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(r)}) \\
&= -\tilde{T}(g^1, \ldots, g^r).
\end{aligned}$$

したがって、$t_{i,j}\tilde{T} = -\tilde{T}$ となり、$\tilde{T} \in \wedge^r V$ が成り立つ。

$A \in T^{(p,0)}(V)$ と $B \in T^{(q,0)}(V)$ に対して $A \otimes B \in T^{(p+q,0)}(V)$ となるので、$A \wedge B \in \wedge^{p+q} V$ が成り立つ。

写像

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^p V \times \wedge^q V & \to & \wedge^{p+q} V \\
(A, B) & \mapsto & A \wedge B
\end{array}$$

が双線形写像になることは、(A, B) に対して $A \otimes B$ を対応させる写像が双線形になることと (命題 1.1.3)、T に対して $\tilde{T}$ を対応させる写像が線形写像になることからわかる。

$A \in \wedge^p V$, $B \in \wedge^q V$, $C \in \wedge^r V$ に対して

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

が成り立つことを示す。以下の計算では、

$$S_{p+q} = \{\tau \in S_{p+q+r} \mid \tau(i) = i \ (p+q+1 \leq i \leq p+q+r)\}$$

とみなすことにする。

$$\begin{aligned}
&((A \wedge B) \wedge C)(g^1, \ldots, g^{p+q+r}) \\
= \; & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma)(A \wedge B)(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q)}) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)})) \\
= \; & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& \left\{ \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\tau) A(g^{\sigma\tau(1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p)}) \cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p+q)}) \right\} \\
& \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!q!r!}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\sum_{\tau\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\cdot \\
&\quad (A(g^{\sigma\tau(1)},\dots,g^{\sigma\tau(p)})\cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)},\dots,g^{\sigma\tau(p+q)}))\cdot C(g^{\sigma\tau(p+q+1)},\dots,g^{\sigma\tau(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \\
&\quad (A(g^{\sigma(1)},\dots,g^{\sigma(p)})\cdot B(g^{\sigma(p+1)},\dots,g^{\sigma(p+q)}))\cdot C(g^{\sigma(p+q+1)},\dots,g^{\sigma(p+q+r)})
\end{aligned}
$$

同様の計算で

$$
\begin{aligned}
&\quad (A\wedge(B\wedge C))(g^1,\dots,g^{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!}\sum_{\sigma\in S_{p+q+r}}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \\
&\quad A(g^{\sigma(1)},\dots,g^{\sigma(p)})\cdot(B(g^{\sigma(p+1)},\dots,g^{\sigma(p+q)})\cdot C(g^{\sigma(p+q+1)},\dots,g^{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}
$$

となることもわかる。したがって

$$(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\wedge C)$$

を得る。

$\sigma\in S_p$ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$ であることに注意すると、V の元 $u_1,\dots,u_p$ に対しては

$$
\begin{aligned}
&\quad (u_1\wedge\cdots\wedge u_p)(g^1,\dots,g^p) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_1(g^{\sigma(1)})\cdots u_p(g^{\sigma(p)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1)\cdots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1)\cdots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\sigma(1)}(g^1)\cdots u_{\sigma(p)}(g^p) \\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)})(g^1,\dots,g^p).
\end{aligned}
$$

したがって、

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_p = \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。

定義 1.2.3 有限次元実ベクトル空間 V に対して、

$$\wedge V = \sum_{p=0}^{\infty} \wedge^p V$$

とおく。ただし、$\wedge^0 V = \mathbf{R}$ としておく。定義 1.2.1 で定めた双線形写像

$$\begin{array}{ccc} \wedge^p V \times \wedge^q V & \longrightarrow & \wedge^{p+q} V \\ (A, B) & \longmapsto & A \wedge B \end{array}$$

を、$\wedge V \times \wedge V$ 全体の双線形写像に拡張し、これを二項演算として $\wedge V$ は代数になる。$\wedge V$ を V 上の**外積代数**と呼ぶ。

命題 1.2.4 有限次元実ベクトル空間 V に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} & \longrightarrow & \wedge^p V \\ (u_1, \ldots, u_p) & \longmapsto & u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \end{array}$$

は多重線形写像になる。$u_1, \ldots, u_p \in V$ と $1 \le i < j \le p$ に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。さらに p 次正方行列 $A = (A^i_j)$ に対して $v_j = A^i_j u_i$ とおくと

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。

証明 命題 1.1.3 より、対応 $(u_1, \ldots, u_p) \mapsto u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ は多重線形になることがわかる。

$u_1, \ldots, u_p \in V$ と $1 \le i < j \le p$ に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つことを示そう。i と j の互換を $\tau \in S_p$ で表す。

$$\begin{aligned} & u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p \\ = \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau\sigma(p)} \\ = \ & \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) u_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau\sigma(p)} \\ = \ & -\sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)} \\ = \ & -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p. \end{aligned}$$

したがって

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。これより特に $u_1, \ldots, u_p$ の中で等しい元があるときは、$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$ となる。

S_p の任意の元は互換の積になることから、$\sigma \in S_p$ に対して

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)} = \operatorname{sgn}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。さらに p 次正方行列 $A = (A^i_j)$ に対して $v_j = A^i_j u_i$ とおくと

$$\begin{aligned}
& v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \\
= \ & \left(A^{i_1}_1 u_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(A^{i_p}_p u_{i_p}\right) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} A^{\sigma(1)}_1 u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge A^{\sigma(p)}_p u_{\sigma(p)} \qquad (\text{同じものがあると } 0 \text{ になる}) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)}_1 \cdots A^{\sigma(p)}_p u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \\
= \ & (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p
\end{aligned}$$

が成り立つ。

命題 1.2.5 $u_1, \ldots, u_n$ を実ベクトル空間 V の基底とする。このとき

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。特に $\dim(\wedge^p V) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ となる。

証明　まず $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} = 0 \qquad (a_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R})$$

とする。$1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$ となる $k_1, \ldots, k_p$ をとり、$(f^{k_1}, \ldots, f^{k_p})$ を上の式に代入すると $a_{k_1 \cdots k_p} = 0$ となる。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は線形独立である。

次に $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ は $\wedge^p V$ を生成することを示す。$\wedge^p V$ の元 A を任意に一つとる。V^* の元 g に対して

$$g = g(u_j) f^j$$

となるので、$g^1, \ldots, g^p \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}
& A(g^1, \ldots, g^p) \\
= \ & A\left(g^1(u_{j_1}) f^{j_1}, \ldots, g^p(u_{j_p}) f^{j_p}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^1(u_{j_1})\cdots g^p(u_{j_p})A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p})\\
&= A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p})(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_p})(g^1,\ldots,g^p)\\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{\sigma\in S_p} A(f^{j_{\sigma(1)}},\ldots,f^{j_{\sigma(p)}})(u_{j_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1,\ldots,g^p)\\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p})(u_{j_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1,\ldots,g^p)\\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_p} A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p})(u_{j_1}\wedge\cdots\wedge u_{j_p})(g^1,\ldots,g^p).
\end{aligned}
$$

よって、

$$A=\sum_{j_1<\cdots<j_p} A(f^{j_1},\ldots,f^{j_p})u_{j_1}\wedge\cdots\wedge u_{j_p}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}$ は $\wedge^p V$ を生成する。

以上で

$$u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}\quad(1\le i_1<\cdots<i_p\le n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になることがわかった。このことから、$\wedge^p V$ の次元は $\binom{n}{p}$ になることもわかる。

命題 1.2.6 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F: V\longrightarrow W$ を線形写像とする。命題 1.1.14 で定めた線形写像

$$F^{(p,0)}: T^{(p,0)}(V)\longrightarrow T^{(p,0)}(W)$$

は $F^{(p,0)}(\wedge^p V)\subset\wedge^p W$ を満たし、線形写像

$$F^{(p,0)}:\wedge^p V\longrightarrow\wedge^p W$$

を誘導する。

証明 定義1.2.1で定めた $t^V_{i,j}: T^{(p,0)}(V)\to T^{(p,0)}(V)$, $t^W_{i,j}: T^{(p,0)}(W)\to T^{(p,0)}(W)$ と $F^{(p,0)}$ に関して、$F^{(p,0)}\circ t^V_{i,j}=t^W_{i,j}\circ F^{(p,0)}$ となることが、これらの定め方よりわかる。したがって $F^{(p,0)}$ は $F^{(p,0)}(\wedge^p V)\subset\wedge^p W$ を満たし、線形写像

$$F^{(p,0)}:\wedge^p V\longrightarrow\wedge^p W$$

を誘導する。

1.3　外積代数と交代形式

定義 1.3.1 V と W を有限次元実ベクトル空間とする。多重線形写像

$$A:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\to W$$

が、$u_1,\ldots,u_p\in V$ と $1\le i<j\le p$ に対して

$$A(u_1,\ldots,\overset{i}{\breve{u}_j},\ldots,\overset{j}{\breve{u}_i},\ldots,u_p)=-A(u_1,\ldots,u_p)$$

を満たすとき、A を p **次交代多重線形写像**と呼ぶ。特に、$W=\mathbf{R}$ のとき、p **次交代形式**と呼ぶ。

命題 1.3.2 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\to W$$

を交代多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)=\phi(v_1,\ldots,v_p)\qquad(v_i\in V)$$

を満たす線形写像

$$\Phi:\wedge^pV\to W$$

が唯一つ存在する。逆に線形写像 $\Phi:\wedge^pV\to W$ に対して

$$\phi(v_1,\ldots,v_p)=\Phi(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)\qquad(v_i\in V)$$

によって写像

$$\phi:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\to W$$

を定めると、ϕ は交代多重線形写像になる。さらにこれらの対応によって

$$\{\phi:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\to W\mid \phi\ \text{は交代多重線形写像}\}$$

は $\wedge^pV$ から W への線形写像の全体 $\mathrm{Hom}(\wedge^pV,W)$ と線形同型になる。

証明　命題 1.2.5 より、$u_1,\ldots,u_n$ を V の基底とすると、

$$u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}\quad(1\le i_1<\cdots<i_p\le n)$$

は $\wedge^pV$ の基底になる。そこで、

$$\Phi(u_1\wedge\cdots\wedge u_p)=\phi(u_1,\ldots,u_p)$$

によって Φ の基底上の値を定め、線形になるように $\wedge^p V$ 全体に拡張する。$u_1, \ldots, u_n$ の双対基底 $f^1, \ldots, f^n$ をとる。任意の $v_i \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) &= \Phi\left(f^{i_1}(v_1)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_p}(v_p)u_{i_p}\right) \\
&= \Phi\left(f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}\right) \\
&= f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)\Phi(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}) \\
&= f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)\phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}) \\
&= \phi\left(f^{i_1}(v_1)u_{i_1}, \ldots, f^{i_p}(v_p)u_{i_p}\right) \\
&= \phi(v_1, \ldots, v_p)
\end{aligned}$$

となり、Φ は与えられた条件を満たす。

Φ の条件は $T^{(p,q)}(V)$ の基底の像を定めているので、このような Φ は一意的である。特に、Φ の定め方は V の基底のとり方に依存しない。

次に線形写像 $\Phi \in \mathrm{Hom}(\wedge^p V, W)$ をとると、

$$\phi(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \qquad (v_i \in V)$$

によって定まる写像

$$\phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \to W$$

は交代線形写像になることがわかる。

以上の定め方から、

$$\{\phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \to W \mid \phi \text{ は交代多重線形写像}\}$$

と $\mathrm{Hom}(\wedge^p V, W)$ は線形同型に対応することがわかる。

注意 1.3.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、$\wedge^p V^*$ は定め方から、自然に V 上の p 次交代形式全体と同一視することができる。命題 1.3.2 より、さらに、$(\wedge^p V)^*$ と同一視することができる。

1.4　外積代数における内積

補題 1.4.1 V を有限次元実ベクトル空間とする。このとき $T^{(0,2)}(V)$ の元 A と V から V^* への線形写像 α は

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

によって一対一に対応する。この対応によって $T^{(0,2)}(V)$ と、V から V^* への線形写像全体の成すベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対応する $T^{(0,2)}(V)$ の元 A が対称になっていて、さらに、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき A は V 上の内積になる。

証明　$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対して

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

で定まる A は二重線形になり、$T^{(0,2)}(V)$ の元になる。逆に、$A \in T^{(0,2)}(V)$ に対して、上の等式で定まる α は $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元になる。定め方より、この対応は一対一になり、$T^{(0,2)}(V)$ と $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。

A が対称であり、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき、$A(x, x) > 0$ となり A は V 上の内積になる。

命題 1.4.2 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に補題 1.4.1 によって対応する $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元を α で表す。$\wedge^p V^*$ は自然に $(\wedge^p V)^*$ と同一視され、命題 1.2.6 によって $\alpha : V \to V^*$ が誘導する線形写像

$$\alpha^{(p,0)} : \wedge^p V \to \wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$$

に対応する $T^{(0,2)}(\wedge^p V)$ の元は、$\wedge^p V$ 上の内積になる。

証明　まず、$\wedge^p V^*$ と $(\wedge^p V)^*$ を同一視する対応を述べておく。$\wedge^p V^*$ の元 ϕ と $(\wedge^p V)^*$ の元 Φ は

$$\phi(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \qquad (v_1, \ldots, v_p \in V)$$

によって対応している。

$\alpha^{(p,0)}$ に対応する $T^{(0,2)}(\wedge^p V)$ の元を A で表すと、V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と $v_1, \ldots, v_p$ に対して、

$$\begin{aligned}
& A(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\alpha^{(p,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \alpha(u_{\sigma(p)}))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}))(v_1) \cdots (\alpha(u_{\sigma(p)}))(v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\langle u_{\sigma(1)}, v_1\rangle \cdots \langle u_{\sigma(p)}, v_p\rangle \\
= \ & \det(\langle u_i, v_j\rangle)_{1 \le i,j \le p}.
\end{aligned}$$

そこで、$u_1, \ldots, u_n$ を V の正規直交基底とすると、

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。さらに、上の計算より、$1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ と $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$ をとると

$$A(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}$$

が成り立つ。したがって、A は $\wedge^p V$ 上の内積になり、上の基底はこの内積に関する正規直交基底になる。

注意 1.4.3 以後、特に断わらない限り、内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間 V の外積代数 $\wedge^p V$ の内積は命題 1.4.2 で示した A を考えることとし、A も $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。また、これらの内積から定まるノルムは $|\quad|$ で表す。すなわち、$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$。

系 1.4.4 命題 1.4.2 の条件のもとで、V の元 $u_1, \dots, u_p$ と $v_1, \dots, v_p$ に対して、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p\rangle = \det[\langle u_i, v_j\rangle]_{1 \le i,j \le p}$$

が成り立つ。さらに、V の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ をとると、

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \qquad (1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)$$

は $\wedge^p V$ の正規直交基底になる。

注意 1.4.5 上の系 1.4.4 より V の元 u_1, u_2 に対して

$$|u_1 \wedge u_2|^2 = \langle u_1 \wedge u_2, u_1 \wedge u_2\rangle = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{vmatrix} = |u_1|^2|u_2|^2 - \langle u_1, u_2\rangle^2$$

となる。他方、u_1 と u_2 のなす角度を θ で表すと $\langle u_1, u_2\rangle = |u_1| \cdot |u_2| \cos\theta$ が成り立つ。これより、u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積の二乗は

$$|u_1|^2|u_2|^2 \sin^2\theta = |u_1|^2|u_2|^2(1 - \cos^2\theta) = |u_1|^2|u_2|^2 - \langle u_1, u_2\rangle^2 = |u_1 \wedge u_2|^2$$

となるので、$|u_1 \wedge u_2|$ は u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積になる。このように $\wedge^2 V$ の内積によって、V 内の平行四辺形の面積を求めることができる。3 個以上の元の外積の長さについても同様である。

注意 1.4.6 $\mathbf{R}^n$ の元を横ベクトルとみなす。横ベクトル u を縦ベクトルにしたものを u^* で表す。$m \le n$ として $\mathbf{R}^n$ の元 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ をとり、$u_i = [u_{ij}]$, $v_i = [v_{ij}]$ とおく。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [v_1^* \ \cdots \ v_m^*] = [u_i v_j^*] = [\langle u_i, v_j\rangle].$$

これらは m 次正方行列になり、両辺の行列式をとると、補題 1.4.4 より

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn}\end{bmatrix}\right) &= \det[\langle u_i, v_j\rangle] \\ &= \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m\rangle.\end{aligned}$$

$\mathbf{R}^n$ の標準的正規直交基底を $e_1, \dots, e_n$ で表すと、

$$u_i = [u_{i1} \ \dots \ u_{in}] = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j.$$

外積の多重線形性と交代性 (命題 1.2.4) より

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_m &= \left(\sum_{j_1=1}^{n} u_{1j_1} e_{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_m=1}^{n} u_{1j_m} e_{j_m}\right) \\ &= \sum_{\#\{j_1,\dots,j_m\}=m} u_{1j_1} \cdots u_{mj_m} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = \sum_{j_1<\cdots<j_m} \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}$$

となり、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m\rangle = \sum_{j_1<\cdots<j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn}\end{bmatrix}\right) \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{mj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1j_m} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

を得る。$m=n$ の場合は、正方行列の積の行列式がそれぞれの正方行列の行列式の積に等しいというよく知られた等式になる。

命題 1.4.7 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。V の元 $u_1,\dots,u_p$ に対して、

$$|u_1\wedge\cdots\wedge u_p|\le\prod_{i=1}^p|u_i|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、$u_1,\dots,u_p$ が互いに直交していることである。

証明 u_i から v_i と w_i を以下のように帰納的に構成する。まず $v_1=0,\ w_1=u_1$ とおく。$v_{i-1},\ w_{i-1}$ まで定まっていると仮定して、v_i と w_i を次のように定める。

$$u_i=v_i+w_i,\qquad v_i\in\mathrm{span}\{u_1,\dots,u_{i-1}\},\ w_i\in\mathrm{span}\{u_1,\dots,u_{i-1}\}^\perp$$

となるように v_i と w_i をとる。すると、$|w_i|^2\le|u_i|^2$ となり、さらに

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_i=w_1\wedge\cdots\wedge w_i\qquad(1\le i\le p)$$

が成り立つ。特に

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_p=w_1\wedge\cdots\wedge w_p$$

となる。さらに $i<j$ のとき $\langle u_i,w_j\rangle=0$ となることに注意しておく。系 1.4.4 を使うと

$$\begin{aligned}
|u_1\wedge\cdots\wedge u_p|^2 &= |w_1\wedge\cdots\wedge w_p|^2\\
&= \langle w_1\wedge\cdots\wedge w_p, w_1\wedge\cdots\wedge w_p\rangle\\
&= \det(\langle w_i,w_j\rangle)\\
&= \det\begin{bmatrix}\langle w_1,w_1\rangle & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_p,w_p\rangle\end{bmatrix}\\
&= \prod_{i=1}^p\langle w_i,w_i\rangle\le\prod_{i=1}^p\langle u_i,u_i\rangle=\prod_{i=1}^p|u_i|^2.
\end{aligned}$$

したがって、

$$|u_1\wedge\cdots\wedge u_p|\le\prod_{i=1}^p|u_i|$$

が成り立つ。

等号が成立するための必要十分条件は、すべての i について $\langle w_i,w_i\rangle=\langle u_i,u_i\rangle$ が成り立つことだから、これは $v_i=0$ と同値になり、$u_1,\dots,u_p$ が互いに直交していることである。

補題 1.4.8 V と W をそれぞれ内積を持つ m 次元と n 次元のベクトル空間とし $(m \geq n)$、$F : V \to W$ を線形写像とする。

$$JF = \sup\{|F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)| \mid u_1, \ldots, u_n \text{は} V \text{の正規直交系}\}$$

とおく。F が全射でないときは、$JF = 0$ となり、F が全射のときは、$(\mathrm{ker}F)^\perp$ の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に対して

$$JF = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

証明　F が全射でないときは $\dim(\mathrm{im}F) < n$ となり、V の任意の正規直交系 $u_1, \ldots, u_n$ に対して $F(u_1), \ldots, F(u_n)$ は線形従属になる。したがって

$$F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n) = 0$$

となり、$JF = 0$ が成り立つ。

次に F が全射の場合を考える。$(\mathrm{ker}F)^\perp$ の任意の基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとる。さらに $(\mathrm{ker}F)^\perp$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ をとる。これらの間の変換行列を (a_{ij}) で表す。すなわち、

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

とおく。すると、命題 1.2.4 より

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &= \det(a_{ij}) u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, \\ F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \det(a_{ij}) F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})||F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|\det(a_{ij})||u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= \frac{|F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

系 1.4.4 より $|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n| = 1$ となることを最後の等式に使った。これより、

$$JF \geq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

V の任意の正規直交系 $w_1 \ldots, w_n$ に対して

$$w_i = w_i^1 + w_i^2, \quad w_i^1 \in (\mathrm{ker}F)^\perp,\ w_i^2 \in \mathrm{ker}F$$

とおくと $|w_i^1| \leq |w_i| = 1$ となり、さらに

$$
\begin{aligned}
F^{(n,0)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= F(w_1) \wedge \cdots \wedge F(w_n) \\
&= F(w_1^1) \wedge \cdots \wedge F(w_n^1) \\
&= F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1).
\end{aligned}
$$

ここで、$w_1^1, \ldots, w_n^1$ が線形従属の場合は命題 1.2.4 より

$$F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1) = 0$$

となり、線形独立の場合は $(\mathrm{ker} F)^\perp$ の基底になる。このときは、上で示したことより、

$$\frac{|F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)|}{|w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1|} = |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|$$

命題 1.4.7 を使うと

$$
\begin{aligned}
|F^{(n,0)}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n)| &= |F^{(n,0)}(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)| \\
&= |w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1| \cdot |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\
&\leq |w_1^1| \cdots |w_n^1| \cdot |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\
&\leq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|.
\end{aligned}
$$

よって

$$JF \leq |F^{(n,0)}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

以上の結果より、

$$JF \leq \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \leq JF.$$

したがって、

$$JF = \frac{|F^{(n,0)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

第2章　テンソル場と微分形式

2.1　ベクトル束

定義 2.1.1 $\pi_E : E \to M$ が次の条件を満たすとき、多様体 M 上の**ベクトル束**と呼ぶ。

(1) E, M は多様体であり、$\pi_E : E \to M$ は多様体の間の C^∞ 級写像である。

(2) ある自然数 k が存在し、M の各点 p に対して p の開近傍 U と微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$$

が存在し、$u \in \pi_E(U)$ に対して $\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi_E(u)$ に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \qquad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、$x \in U$ に対して $\pi_E^{-1}(x)$ はベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \to \mathbf{R}^k$$

は線形同型写像になる。

E をベクトル束の**全空間**、M を**底空間**、π_E を**射影**、$\pi_E^{-1}(x)$ を x の**ファイバー**と呼ぶ。k をベクトル束の**階数**と呼び、$\mathrm{rank}E$ で表す。

定義 2.1.2 $\pi : E \to M$ と $\pi' : E' \to M$ を多様体 M 上のベクトル束とする。微分同型写像 $\phi : E \to E'$ が $\pi = \pi' \circ \phi$ を満たし、各 $x \in M$ に対して

$$\phi|_{E_x} : E_x \to E'_x$$

が線形同型写像になるとき、ϕ を**ベクトル束の同型写像**と呼び、E と E' は**同型**であるという。V をベクトル空間とし、$M \times V$ から M への射影を考えることによって、$M \times V$ は M 上のベクトル束になる。M 上のベクトル束 E が $M \times V$ と同型になるとき、E を**自明ベクトル束**と呼ぶ。M の接ベクトル束 TM が自明であるとき、M は**絶対平行性**を持つという。

例 2.1.3 M を多様体とし、各 $x \in M$ における M の接ベクトル空間を T_xM で表す。

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

とおく。$u \in TM$ に対して $u \in T_xM$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : TM \to M$$

が定まる。M の各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。U の各点 x において

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

は接ベクトル空間 T_xM の基底になるので、$\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^1, \ldots, \xi^n) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとると、各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = \eta^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\pi(v)}$$

と表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ の座標は $(y^1, \ldots, y^n, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ になり、

$$\eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

よって、座標変換は、

$$(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n) \to \left(y^1, \ldots, y^n, \xi^j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}, \ldots, \xi^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j}\right)$$

となり、C^∞ 級微分同型写像になる。これによって、TM は多様体になる。

π の定め方より、

$$\pi(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n) = (x^1, \ldots, x^n)$$

となり、$\pi : TM \to M$ は C^∞ 級写像になる。Φ_U の定め方より、$\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

となるので、各 $x \in U$ に対して $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{R}^n$ は線形同型写像になる。

以上より、$\pi : TM \to M$ がベクトル束になることがわかった。これを多様体 M の**接ベクトル束**と呼ぶ。

定義 2.1.4 $\pi_E : E \to M$ を多様体 M 上のベクトル束とする。C^∞ 級写像 $\sigma : M \to E$ で $\pi_E \circ \sigma = 1_M$ を満たすものを、ベクトル束 E の**断面**と呼ぶ。E の断面の全体を $\Gamma(M, E)$ または単に $\Gamma(E)$ で表す。

定義 2.1.5 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ が存在し、M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

定義 2.1.6 $\iota : M \to \tilde{M}$ を多様体 M から Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への挿入とする。すなわち M の各点 x での ι の微分写像 $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$ が単射であるとする。このとき、$\tilde{M}$ 上の Riemann 計量 $\tilde{g}$ の $d\iota$ による引き戻し $g = \iota^*\tilde{g}$ は M 上の Riemann 計量になる。この (M, g) を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

注意 2.1.7 定義2.1.6では、$\tilde{M}$ の Riemann 計量から M の Riemann 計量を誘導したが、M の Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体 (M, g) から $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への C^∞ 級写像 ι が、M の各点 x に対して $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$ は等長線形写像になるという条件をみたすとき、ι を**等長的挿入**と呼び、(M, g) を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

例 2.1.8 $\iota : M \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の Riemann 部分多様体とする。各 $x \in M$ に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)}\tilde{M} \mid \langle u, d\iota_x(T_xM)\rangle = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x \in M} T_x^\perp M$$

で $T^\perp M$ を定める。$u \in T^\perp M$ に対して $u \in T_x^\perp M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \to M$$

が定まる。このとき、$\pi : T^\perp M \to M$ はベクトル束になる。$\pi : T^\perp M \to M$ を、Riemann 部分多様体 M の**法ベクトル束**と呼ぶ。法ベクトル束 $T^\perp M$ の断面を M 上の**法ベクトル場**と呼ぶ。

定義 2.1.9 E を多様体 M 上のベクトル束とする。$\langle\ ,\ \rangle$ は E の各ファイバーの内積を定めていて、E の任意の断面 s, t に対して

$$\langle s, t\rangle(x) = \langle s(x), t(x)\rangle \qquad (x \in M)$$

によって定まる M 上の関数 $\langle s, t\rangle$ が C^∞ 級になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ をベクトル束 E の**計量**といい、$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ を計量ベクトル束と呼ぶ。

例 2.1.10 定義 2.1.5 で定めた多様体の Riemann 計量は、接ベクトル束の計量に他ならない。また、Riemann 多様体の Riemann 部分多様体の法ベクトル束にも、全体の Riemann 多様体の計量から自然に定まる計量が入る。

2.2 テンソル場

定義 2.2.1 多様体 M の各点 $x \in M$ の接ベクトル空間 T_xM 上の (p, q) 型テンソル空間 $T^{(p,q)}(T_xM)$ を $T_x^{(p,q)}M$ で表す。

$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)}M$$

とおくと、$T^{(p,q)}M$ は M 上のベクトル束になる (命題 2.2.2)。$T^{(p,q)}M$ 上の C^∞ 級断面を (p, q) **型テンソル場**と呼ぶ。テンソル場の和、関数倍、テンソル積は、多様体の各点の接ベクトル空間上のテンソル空間における演算で定める。

命題 2.2.2 $T^{(p,q)}M$ は M 上のベクトル束になる。

証明 $u \in T^{(p,q)}M$ に対して $u \in T_x^{(p,q)}M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^{(p,q)}M \to M$$

が定まる。M の各点 x に対して x を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。$\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = u^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_{\pi(u)} \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_{\pi(u)} \otimes dx^{j_1}_{\pi(u)} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), u^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{n^{p+q}}$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1,\dots,x^n,u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V;y^1,\dots,y^n)$ をとると、各元 $v\in\pi^{-1}(V)$ は

$$v=v^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\right|_{\pi(v)}\otimes\cdots\otimes\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_p}}\right|_{\pi(v)}\otimes dy^{j_1}_{\pi(u)}\otimes\cdots\otimes dy^{j_q}_{\pi(v)}$$

と表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ の座標は $(y^1,\dots,y^n,v^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ になり、

$$v^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}=u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}.$$

よって、座標変換は、

$$(x^1,\dots,x^n,u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})\to\left(y^1,\dots,y^n,u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}\right)$$

となり、C^∞ 級微分同型写像になる。これによって、$T^{(p,q)}M$ は多様体になる。

π の定め方より、

$$\pi(x^1,\dots,x^n,u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})=(x^1,\dots,x^n)$$

となり、$\pi:T^{(p,q)}M\to M$ は C^∞ 級写像になる。Φ_U の定め方より、$\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U\left(u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_q}\right)=(u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$$

となるので、各 $x\in U$ に対して $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)}:\pi^{-1}(x)\to\mathbf{R}^{n^{p+q}}$ は線形同型写像になる。

以上より、$\pi:T^{(p,q)}M\to M$ がベクトル束になることがわかった。

例 2.2.3 Riemann 計量は $(0,2)$ 型テンソル場になる。

2.3 微分形式

定義 2.3.1 M を n 次元多様体とする。M の各点 x に対して $\wedge^pT^*_x(M)$ の元 ω_x を対応させる対応 ω が次の条件を満たすとき、ω を M **上の** p **次微分形式**と呼ぶ。(条件)M の任意の局所座標近傍 $(U;x^1,\dots,x^n)$ に対して、

$$x\longmapsto\omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x\right)$$

がすべての $i_1,\dots,i_p$ について U 上の C^∞ 級関数になる。

注意 2.3.2 多様体 M 上の 0 次微分形式は M 上の C^∞ 級関数にほかならない。

例 2.3.3 f を多様体 M 上の C^∞ 級関数とする。このとき、f の微分 df は M 上の 1 次微分形式になる。

証明 $n = \dim M$ とし M の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとる。f は C^∞ 級関数だから

$$x \to df_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

も U 上の C^∞ 級関数になる。よって df は M 上の 1 次微分形式である。

注意 2.3.4 ω を有限次元実ベクトル空間 V に値を持つ n 次元多様体 M 上の p 次微分形式とする。M の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとると、$x \in U$ に対して $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ $(1 \le i \le n)$ は $T_x(M)$ の基底になり $(dx^i)_x$ $(1 \le i \le n)$ はその双対基底になる。命題 1.2.5 の証明中に示したことから、$x \in U$ に対して $\omega_x \in \wedge^p T_x^*(M)$ は

$$\omega_x = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \omega_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right|_x\right)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$$

と表すことができるので、ω_x を $(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$ を使って表したときの係数がすべて C^∞ 級関数になることと、定義 2.3.1 の (条件) は同値である。上のような微分形式 ω の $(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_p})_x$ を使った表示を微分形式の**局所表示**という。

命題 2.3.5 M 上の p 次微分形式の全体を $\Omega^p(M)$ で表し、$f, g \in C^\infty(M)$, $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ と $x \in M$ に対して

$$(f\omega + g\eta)_x = f(x)\omega_x + g(x)\eta_x \quad (\text{右辺の演算は } \wedge^p(T_x^*(M)) \text{ での演算})$$

として演算を定義すると $\Omega^p(M)$ は代数 $C^\infty(M)$ 上の加群、つまり $C^\infty(M)$ 加群になる。$\phi \in \Omega^p(M), \psi \in \Omega^q(M)$ と $x \in M$ に対して

$$\begin{aligned}&\phi \wedge \psi_x = \phi_x \wedge \psi_x \\ &(\text{右辺の } \wedge \text{ は } \wedge^p(T_x^*(M)) \times \wedge^q(T_x^*(M)) \text{ での外積})\end{aligned}$$

として微分形式の外積を定義すると、$\phi \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M)$ となり

$$\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$$

は $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像である。

証明 $\Omega^p(M)$ が $C^\infty(M)$ 加群であることを示すためには $f, g \in C^\infty(M)$, $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ に対して $f\omega + g\eta \in \Omega^p(M)$ を示せば十分で、他の条件は $\wedge^p(T_x^*(M))$ がベ

クトル空間であることを使えばわかる。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を M の任意の局所座標近傍とする。$x \in U$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x,\\ \eta_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x\end{aligned}$$

とおくと、注意 2.3.4 より、$a_{i_1\cdots i_p}, b_{i_1\cdots i_p}$ は U 上の C^∞ 級関数になり

$$(f\omega + g\eta)_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} (f(x)a_{i_1\cdots i_p}(x) + g(x)b_{i_1\cdots i_p}(x))(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.$$

$fa_{i_1\cdots i_p} + gb_{i_1\cdots i_p}$ は U 上の C^∞ 級関数だから、$f\omega + g\eta$ は微分形式になる。

$\phi \in \Omega^p(M), \psi \in \Omega^q(M)$ に対して $\phi \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M)$ を示す。$\wedge$ が $C^\infty(M)$ 加群の双線形写像であることは、交代形式の外積の双線形性から使えばわかる。$x \in U$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x,\\ \psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

とおくと、注意 2.3.4 より、$c_{i_1\cdots i_p}$ と $d_{j_1\cdots j_q}$ はそれぞれ U 上の C^∞ 級関数になる。$x \in U$ に対して

$$\begin{aligned}&(\phi\wedge\psi)_x\\ =& \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} (c_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x) \wedge\\ &\qquad (d_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x)\\ =& \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} c_{i_1\cdots i_p}(x)d_{j_1\cdots j_q}(x)\cdot\\ &\qquad (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \wedge (dx^{j_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{j_q})_x\end{aligned}$$

だから $(\phi\wedge\psi)_x$ の $(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{k_{p+q}})_x$ による表示の係数は、$c_{i_1\cdots i_p}(x)d_{j_1\cdots j_q}(x)$ の線形結合になり U 上の C^∞ 級関数になる。したがって、$\phi\wedge\psi$ は M 上の $p+q$ 次微分形式になる。

命題 2.3.6 F を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x \in M$ における F の微分写像 $dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ と命題 1.1.14 で定めた $dF_x^{(0,p)}$ を使って、$\omega \in \Omega^p(N)$ に対して

$$(F^*\omega)_x = (dF_x)^{(0,p)}\omega_{F(x)}$$

として $(F^*\omega)_x \in \wedge^p(T_x^*(M))$ を定義すると $F^*\omega \in \Omega^p(M)$ が成り立つ。

証明 $m = \dim M,\ n = \dim N$ としておく。$F^*\omega \in \Omega^p(M)$ を示すためには、$F(U) \subset U'$ を満たす M と N の局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ と $(U'; y^1, \ldots, y^n)$ をとったときに

$$x \longmapsto (F^*\omega)_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right)$$

がすべての $i_1, \ldots, i_p$ について U 上の C^∞ 級関数になることを示せばよい。$x \in U$ に対して

$$dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
& (F^*\omega)_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \\
= \ & \omega_{F(x)} \left(dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x \right), \cdots, dF_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \right) \\
= \ & \sum_{j_1, \cdots, j_p = 1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1} \circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p} \circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \omega_{F(x)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_{F(x)}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_{F(x)} \right)
\end{aligned}$$

となるので、これは U 上の C^∞ 級関数になる。よって $F^*\omega \in \Omega^p(M)$ が成り立つ。

定義 2.3.7 命題 2.3.6 で定めた $F^*\omega$ を、微分形式 ω の F による**引戻し**と呼ぶ。

命題 2.3.8 V を有限次元実ベクトル空間とし $F : M \to M',\ G : M' \to M''$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする。このとき $\omega \in \Omega^p(M'')$ に対して、

$$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$$

が成り立つ。

証明 微分写像は、$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x$ を満たす。よって $v \in T_x(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
((G \circ F)^*\omega)_x(v) &= \omega_{G \circ F(x)}(d(G \circ F)_x(v)) = \omega_{G(F(x))}(dG_{F(x)} \circ dF_x(v)) \\
&= (G^*\omega)_{F(x)}(dF_x(v)) = (F^*(G^*\omega))_x(v)
\end{aligned}$$

となり、$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$ がわかる。

命題 2.3.9 F を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。このとき $\phi \in \Omega^p(N), \psi \in \Omega^q(N)$ に対して

$$F^*(\phi \wedge \psi) = (F^*\phi) \wedge (F^*\psi)$$

が成り立つ。

証明　各 $x \in M$ に対して

$$\begin{aligned} F^*(\phi \wedge \psi)_x &= (dF_x)^*((\phi \wedge \psi)_{F(x)}) \\ &= (dF_x)^*(\phi_{F(x)} \wedge \psi_{F(x)}) \\ &= (dF_x)^*\phi_{F(x)} \wedge (dF_x)^*\psi_{F(x)} \\ &= (F^*\phi)_x \wedge (F^*\psi)_x \\ &= ((F^*\phi) \wedge (F^*\psi))_x \end{aligned}$$

となるので、$F^*(\phi \wedge \psi) = (F^*\phi) \wedge (F^*\psi)$ が成り立つ。

2.4　微分形式の外微分

定理 2.4.1 M を n 次元多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M)$ に対して次の条件を満たす $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ が一意的に存在する。(条件) M の局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ における ω の局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると

$$(d\omega)_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

が成り立つ。

証明　局所表示

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

によって定まる $\wedge^{p+1}(T_x^*(M))$ の元が局所座標近傍のとり方によらないことを示す。$a_{i_1 \cdots i_p}(x)$ は ω_x から

$$a_{i_1 \cdots i_p}(x) = \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

によって定まっている。$i_1, \ldots, i_p$ に括弧内のような大小関係がない場合も上の式によって $a_{i_1 \cdots i_p}(x)$ を定めておく。$(V; y^1, \ldots, y^n)$ を M のもう 1 つの局所座標近傍とし、

$$b_{i_1 \cdots i_p}(x) = \omega_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{i_p}}\right|_x \right)$$

とおくと

$$\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)(dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x$$

となる。$x \in U \cap V$ に対して $T_x(M)$ の 2 つ基底 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ と $\frac{\partial}{\partial y^i}|_x$ の間の変換行列は

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x$$

となっているので、双対基底の間の変換行列は

$$(dy^i)_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

となり、また

$$b_{i_1\cdots i_p}(x) = \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^n \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x) a_{j_1\cdots j_p}(x)$$

が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x) = \delta_{jk}$$

に注意しておく。

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x \wedge (dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x \\
= \; & \frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^n \frac{\partial b_{i_1\cdots i_p}}{\partial y^i}(x)(dy^i)_x \wedge (dy^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dy^{i_p})_x \\
= \; & \frac{1}{p!}\sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^n \sum_{\substack{j,j_1,\ldots,j_p=1 \\ k,k_1,\ldots,k_p=1}}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot \\
& \qquad \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x \wedge \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x \\
= \; & \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^n \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ k,k_1,\ldots,k_p=1}}^n \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)a_{j_1\cdots j_p}(x)\right\}\cdot \\
& \qquad (dx^k)_x \wedge \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x.
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{i_r=1}^n \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x) = \delta_{j_r k_r}$$

だから

$$\begin{aligned}\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\right)\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x) &= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x)\right)\\ &= -\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{i_r}}(x)\frac{\partial^2 y^{i_r}}{\partial x^k\partial x^{k_r}}(x)\end{aligned}$$

となり、これは k と k_r に関して対称である。他方、$(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x$ は k と k_r に関して交代的だから

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1\\k,k_1,\ldots,k_p=1}}^{n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{i_1}}(x)\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial y^{i_p}}(x)\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}(x)\cdot\\ &\qquad (dx^k)_x\wedge\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{k_p}}(x)(dx^{k_p})_x\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{k,k_1,\ldots,k_p=1}^{n}\frac{\partial a_{k_1\cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x\\ &= \sum_{k_1<\cdots<k_p}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{k_1\cdots k_p}}{\partial x^k}(x)(dx^k)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_p})_x.\end{aligned}$$

以上で $d\omega$ の表示が局所座標近傍のとり方によらないことがわかった。$d\omega$ の一意性もこのことからわかる。また $d\omega$ が $p+1$ 次微分形式になることも $d\omega$ の表示からわかる。

定義 2.4.2 M を多様体とする。定理 2.4.1 より定まる写像 $d:\Omega^p(M)\to\Omega^{p+1}(M)$ を微分形式の**外微分**と呼ぶ。

定理 2.4.3 F を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。このとき、F による微分形式の引き戻し $F^*:\Omega^p(N)\to\Omega^p(M)$ は外微分と可換になる。

証明　$m=\dim M$, $n=\dim N$ としておく。$\omega\in\Omega^p(N)$ とする。$F(U)\subset U'$ を満たす M と N の局所座標近傍 $(U;x^1,\ldots,x^m)$ と $(U';y^1,\ldots,y^n)$ をとる。

$$a_{j_1\cdots j_p}(y)=\omega_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right|_y,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{j_p}}\right|_y\right)$$

とおくと ω の U' における局所表示は

$$\omega_y=\sum_{j_1<\cdots<j_p}a_{j_1\cdots j_p}(y)(dy^{j_1})_y\wedge\cdots\wedge(dy^{j_p})_y$$

となる。命題 2.3.6 の証明中の計算より $x \in U$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(F^*\omega)_x \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_x \right) \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x)).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&(d(F^*\omega))_x \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ a_{j_1\cdots j_p}(F(x)) \right\} \cdot \\
&\quad (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.
\end{aligned}
$$

ここで $\dfrac{\partial^2(y^{j_r}\circ F)}{\partial x^i \partial x^{i_r}}(x)$ は i と i_r に関して対称で、$(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$ は i と i_r に関して交代的だから

$$
\begin{aligned}
&(d(F^*\omega))_x \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i} \cdot \\
&\quad (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^{j_1}\circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p}\circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i} \cdot \\
&\quad (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x.
\end{aligned}
$$

他方

$$
\begin{aligned}
(d\omega)_y &= \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y \wedge (dy^{j_1})_y \wedge \cdots \wedge (dy^{j_p})_y \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(y)(dy^j)_y \wedge (dy^{j_1})_y \wedge \cdots \wedge (dy^{j_p})_y
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
(F^*(d\omega))_x &= (dF_x)^*(d\omega)_{F(x)} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} \wedge \\
&\quad (dF_x)^*(dy^{j_1})_{F(x)} \wedge \cdots \wedge (dF_x)^*(dy^{j_p})_{F(x)}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} = (dy^j)_{F(x)} \circ dF_x = d(y^j \circ F)_x = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x$$

でさらに

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))(dF_x)^*(dy^j)_{F(x)} \\ = \ & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_p}}{\partial y^j}(F(x))\frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \\ = \ & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} & (F^*(d\omega))_x \\ = \ & \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^{j_1} \circ F)}{\partial x^{i_1}}(x) \cdots \frac{\partial(y^{j_p} \circ F)}{\partial x^{i_p}}(x)\ \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_p}(F(x))}{\partial x^i}(x) \cdot \\ & (dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\ = \ & (d(F^*\omega))_x. \end{aligned}$$

したがって $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ が成り立つ。

注意 2.4.4 定理 2.4.3 において M が N の部分多様体で $F : M \to N$ が包含写像のとき、N 上の微分形式を外微分してから M に制限しても先に M に制限してから M 上の微分形式として外微分しても結果は等しくなる。特別な場合として M が N の開集合の場合がある。これらの場合は包含写像を省略して記述することもある。

補題 2.4.5 M を多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

は実線形写像になる。

証明　定理 2.4.1 の外微分の定め方より d は実線形写像になる。

定理 2.4.6 M を多様体とすると $\phi \in \Omega^p(M), \psi \in \Omega^q(M)$ に対して

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$$

が成り立つ。

証明　$n=\dim M$ とし $(U;x^1,\dots,x^n)$ を M の局所座標近傍とする。U における ϕ と ψ の局所表示を

$$
\begin{aligned}
\phi_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\\
\psi_x &= \sum_{j_1<\cdots<j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x
\end{aligned}
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
(\phi\wedge\psi)_x &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} a_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)\cdot\\
&\quad (dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x
\end{aligned}
$$

となる。そこで $k_1<\cdots<k_{p+q}$ に対して、$\{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q\}\neq\{k_1,\dots,k_{p+q}\}$ のときは

$$
\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}=0
$$

としておくと

$$
\begin{aligned}
&(\phi\wedge\psi)_x\\
=\ &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot\\
&a_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&d(\phi\wedge\psi)_x\\
=\ &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot\\
&\sum_{i=1}^n\frac{\partial(a_{i_1\cdots i_p}(x),b_{j_1\cdots j_q}(x))}{\partial x^i}(dx^i)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x\\
=\ &\sum_{k_1<\cdots<k_{p+q}}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q\\ k_1 & \cdots & k_p & k_{p+1} & \cdots & k_{p+q}\end{pmatrix}\cdot\\
&\sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)+a_{i_1\cdots i_p}(x)\frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right\}\cdot\\
&(dx^i)_x\wedge(dx^{k_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{k_{p+q}})_x\\
=\ &\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)+a_{i_1\cdots i_p}(x)\frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^i}(x)\right\}\cdot\\
&(dx^i)_x\wedge(dx^{i_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{i_p})_x\wedge(dx^{j_1})_x\wedge\cdots\wedge(dx^{j_q})_x\\
=\ &(d\phi\wedge\psi)_x+(-1)^p(\phi\wedge d\psi)_x.
\end{aligned}
$$

よって、$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$ が成り立つ。

定理 2.4.7 M を多様体とする。外微分

$$d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

は $d \circ d = 0$ を満たす。

証明　$n = \dim M$ としておく。まず $\omega \in \Omega^0(M)$ について $d^2\omega = 0$ が成り立つことを示そう。$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を M の局所座標近傍とする。$x \in U$ に対して

$$(d\omega)_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x^j}(x)(dx^j)_x$$

だから

$$(d^2\omega)_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^j)_x.$$

ここで $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}(x)$ は i と j に関して対称的で $(dx^i)_x \wedge (dx^j)_x$ は i と j に関して交代的である。したがって $(d^2\omega)_x = 0$ となり $d^2\omega = 0$。

次に $p > 0$ のとき $\omega \in \Omega^p(M; V)$ の U における局所表示を

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x$$

とすると

$$\begin{aligned}(d\omega)_x &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i)_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} (da_{i_1 \cdots i_p})_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x\end{aligned}$$

となるので、定理 2.4.1 より

$$\begin{aligned}(d^2\omega)_x &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} (d^2 a_{i_1 \cdots i_p})_x \wedge (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\ &\quad + \sum_{i_1 < \cdots < i_p} (da_{i_1 \cdots i_p})_x \wedge \sum_{j=1}^{p} (-1)^j (dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (d^2 x^{i_j})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p})_x \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって $(d^2\omega)_x = 0$ となり $d^2\omega = 0$。

定義 2.4.8 n 次元多様体 M に対して

$$\begin{aligned} Z^p(M) &= \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d\omega = 0\} \\ B^p(M) &= \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{p-1}(M)\} \end{aligned}$$

とおく。外微分 d は $d^2 = 0$ を満たすので、$B^p(M) \subset Z^p(M)$ となる。そこで、

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

とおき、$H^p(M)$ を M の p **次 de Rham コホモロジー群**と呼ぶ。

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p(M)$$

とおき、$\chi(M)$ を M の **Euler 数**と呼ぶ。

M の C^∞ 級 p 次元特異単体群を $C_p(M)$ で表し、

$$\begin{aligned} Z_p(M) &= \{c \in C_p(M) \mid \partial c = 0\} \\ B_p(M) &= \{\partial c \mid c \in C_{p+1}(M)\} \end{aligned}$$

とおく。境界作用素 ∂ は $\partial^2 = 0$ を満たすので、$B_p(M) \subset Z_p(M)$ となる。そこで、

$$H_p(M) = Z_p(M)/B_p(M)$$

とおき、$H_p(M)$ を M の C^∞ **級** p **次特異ホモロジー群**と呼ぶ。

定理 2.4.9 (de Rham) $\omega \in Z^p(M)$ に対して、ω の代表する $H^p(M)$ 内の元を $[\omega]$ で表すことにする。線形写像

$$Z_p(M) \to \mathbf{R}\,;\ c \mapsto \int_c \omega$$

は $H_p(M)^*$ の元を誘導し、それによって $H^p(M)$ と $H_p(M)^*$ は線形同型になる。

補題 2.4.10 M を多様体とする。$\omega \in Z^p(M)$ に対して ω の代表する $H^p(M)$ の元を $[\omega]$ で表すことにする。$[\omega] \in H^p(M)$ と $[\eta] \in H^q(M)$ に対して $[\omega \wedge \eta]$ は代表元 ω, η のとりかたに依存せず $[\omega]$ と $[\eta]$ に対して定まる。

証明 $\omega' \in \Omega^{p-1}(M)$ と $\eta' \in \Omega^{q-1}(M)$ をとる。

$$(\omega + d\omega') \wedge (\eta + d\eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta' + d\omega' \wedge \eta + d\omega' \wedge d\eta'$$

となり

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta') &= d\omega \wedge \eta' + (-1)^p \omega \wedge d\eta' = (-1)^p \omega \wedge d\eta', \\ d(\omega' \wedge \eta) &= d\omega' \wedge \eta + (-1)^{p-1} \omega' \wedge d\eta = d\omega' \wedge \eta, \\ d(\omega' \wedge d\eta') &= d\omega' \wedge d\eta' + (-1)^{p-1} \omega' \wedge d^2\eta' = d\omega' \wedge d\eta' \end{aligned}$$

はすべて $B^{p+q}(M)$ の元になるので、$[(\omega + d\omega') \wedge (\eta + d\eta')] = [\omega \wedge \eta]$ が成り立つ。したがって、$[\omega \wedge \eta]$ は代表元 ω, η のとりかたに依存せず $[\omega]$ と $[\eta]$ に対して定まる。

定義 2.4.11 n 次元多様体 M に対して

$$H^*(M) = \sum_{p=0}^{n} H^p(M)$$

に補題 2.4.10 によって外積を定めることができ代数の構造を持つので、$H^*(M)$ を M の **de Rham コホモロジー代数**と呼ぶ。

例 2.4.12 多様体 M に対して $Z^0(M)$ は微分して 0 になる関数全体なので、M の連結成分の個数だけ $\mathbf{R}$ を直和したものになる。よって、$H^0(M) = Z^0(M)$ も M の連結成分の個数だけ $\mathbf{R}$ を直和したものになる。

実数直線 $\mathbf{R}$ を 1 次元多様体とみなしたときの de Rham コホモロジー代数を求める。$Z^1(\mathbf{R}) = \Omega^1(\mathbf{R})$ の任意の元は C^∞ 級関数 $f(x)$ によって $f(x)dx$ と表すことができる。$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ とおくと $dF = f(x)dx$ が成り立つ。したがって、$Z^1(\mathbf{R}) = B^1(\mathbf{R})$ となり $H^1(\mathbf{R}) = \{0\}$ を得る。上の結果と合わせると $H^*(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ となる。ただし、左辺の $\mathbf{R}$ は代数としての $\mathbf{R}$ である。

1 次元の円周 S^1 の de Rham コホモロジー代数を求める。

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

の座標として $(\cos\theta, \sin\theta)$ となる θ を使うことにする。$Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1)$ の任意の元は周期 2π の C^∞ 級周期関数 $f(\theta)$ によって $f(\theta)d\theta$ と表すことができる。

$$I : Z^1(S^1) \to \mathbf{R}\ ;\ f(\theta)d\theta \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

によって線形写像 I を定める。I は全射になる。$\Omega^0(S^1)$ の任意の元は周期 2π の C^∞ 級周期関数 $g(\theta)$ で表すことができる。$dg = g'(\theta)d\theta$ となり

$$I(dg) = \int_0^{2\pi} g'(\theta)d\theta = g(2\pi) - g(0) = 0.$$

よって $B^1(S^1) \subset \ker I$ が成り立つ。逆にの包含関係を示すために $f(\theta)d\theta \in \ker I$ をとる。$F(\theta) = \int_0^\theta f(t)dt$ とおくと $F(\theta)$ は θ に関する C^∞ 級関数になり、$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ となることから $F(\theta)$ は周期 2π の C^∞ 級周期関数になる。さらに

$$B^1(S^1) \ni dF = F'(\theta)d\theta = f(\theta)d\theta$$

となるので $\ker I \subset B^1(S^1)$ を得る。以上より $B^1(S^1) = \ker I$ が成り立ち、

$$H^1(S^1) = Z^1(S^1)/B^1(S^1) = Z^1(S^1)/\ker I \cong \mathrm{im} I = \mathbf{R}.$$

定理 2.4.13 M を多様体とする。$\omega \in \Omega^p(M)$ に対して次の公式が成り立つ。$p = 0$ のとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = X\omega.$$

$p = 1$ のとき $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

証明　$p=0$ のとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$d\omega(X) = X\omega$$

となることは C^∞ 級関数の微分 $d\omega$ の定義である。
次に $p=1$ の場合を考える。ω の局所表示を

$$\omega = \sum_i a_i dx^i$$

で表すと、ω の外微分 $d\omega$ の局所表示は

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

になる。ベクトル場 X, Y の局所表示を

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で表す。外積の定義より

$$d\omega(X,Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j}(\xi^j \eta^i - \eta^j \xi^i)$$

が成り立つ。

$$\omega(Y) = \sum_i a_i \eta^i$$

となるので

$$X(\omega(Y)) = \sum_{i,j} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}(a_i \eta^i) = \sum_{i,j} \xi^j \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \eta^i + a_i \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right).$$

X と Y を入れ替えることにより

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i,j} \eta^j \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \xi^i + a_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right)$$

も得られる。ベクトル場のブラケット積の定義から

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \sum_{i,j} \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\omega([X,Y]) = \sum_{i,j} a_i \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right).$$

以上の計算結果より

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

を得る。

注意 2.4.14 定理 2.4.13 の条件下で $p > 0$ のとき $X_1, \ldots X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} & d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) \\ = & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

が成り立つことが知られている。

第3章　Riemann多様体

3.1　曲面の微分幾何学

この節では第 2 章の知識をもとにして曲面論の簡単な復習をしておく。$\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された $\mathbf{R}^3$ への挿入、すなわち微分写像 $dp : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ が D の各点で階数 2 になるとする。このとき、p の像を曲面とみなし $\mathbf{R}^2$ の直交座標の D への制限 u, v をこの曲面の座標とみなす。

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_v = \frac{\partial p}{\partial v}$$

と表すことにする。p_u, p_v の成分を並べた行列が微分写像 dp の行列表示になる。したがって、p が挿入になるという条件は p_u, p_v が線形独立になることと同値になる。曲面の 2 次元多様体としての接ベクトル空間は、$\dfrac{\partial}{\partial u}$ と p_u を同一視し $\dfrac{\partial}{\partial v}$ と p_v を同一視することによって、$\mathbf{R}^3$ 内の p_u, p_v の張る 2 次元部分ベクトル空間、すなわち接平面と同一視することができる。通常 dp の内積

$$I = \langle dp, dp \rangle$$

として定義される曲面の第一基本形式 I は曲面上の $(0, 2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X, Y に対して

$$I(X, Y) = \langle dp(X), dp(Y) \rangle$$

によって値が定まる。dp は線形単射だから I は正定値になり曲面の Riemann 計量になる。

$$dp = p_u du + p_v dv$$

となるので、

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= \langle p_u du(X) + p_v dv(X), p_u du(Y) + p_v dv(Y) \rangle \\
&= \langle p_u, p_u \rangle du(X) du(Y) + \langle p_u, p_v \rangle du(X) dv(Y) \\
&\quad + \langle p_v, p_u \rangle dv(X) du(Y) + \langle p_v, p_v \rangle dv(X) dv(Y) \\
&= \langle p_u, p_u \rangle du(X) du(Y) + \langle p_u, p_v \rangle (du(X) dv(Y) + dv(X) du(Y)) \\
&\quad + \langle p_v, p_v \rangle dv(X) dv(Y) \\
&= \langle p_u, p_u \rangle du \otimes du(X, Y) + \langle p_u, p_v \rangle (du \otimes dv + dv \otimes du)(X, Y) \\
&\quad + \langle p_v, p_v \rangle dv \otimes dv(X, Y).
\end{aligned}$$

そこで $(0,1)$ 型テンソル場 ϕ, ψ と接ベクトル X, Y に対して

$$(\phi \bullet \psi)(X,Y) = \frac{1}{2}(\phi(X)\psi(Y) + \psi(X)\phi(Y))$$

によって $(0,2)$ 型対称テンソル場 $\phi \bullet \psi$ を定める。すると

$$I = \langle p_u, p_u\rangle du \bullet du + 2\langle p_u, p_v\rangle du \bullet dv + \langle p_v, p_v\rangle dv \bullet dv$$

と第一基本形式 I を書き表すことができる。通常、曲面論では

$$E = \langle p_u, p_u\rangle, \quad F = \langle p_u, p_v\rangle, \quad G = \langle p_v, p_v\rangle$$

と書いて第一基本形式、すなわち、Riemann 計量を次のように表す。

$$I = Edu \bullet du + 2Fdu \bullet dv + Gdv \bullet dv.$$

曲面の接ベクトル空間の基底 p_u, p_v のベクトル積 $p_u \times p_v$ は接平面に直交するので、

$$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

とおくと、e は曲面の単位法ベクトルになる。

$$II = -\langle dp, de\rangle$$

として定義される曲面の第二基本形式 II は曲面上の $(0,2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X, Y に対して

$$II(X,Y) = -\langle dp(X), de(Y)\rangle$$

によって値が定まる。

$$de = e_u du + e_v dv$$

となるので、

$$\begin{aligned} II(X,Y) &= -\langle p_u du(X) + p_v dv(X), e_u du(Y) + e_v dv(Y)\rangle \\ &= -\langle p_u, e_u\rangle du(X)du(Y) - \langle p_u, e_v\rangle du(X)dv(Y) \\ &\quad -\langle p_v, e_u\rangle dv(X)du(Y) - \langle p_v, e_v\rangle dv(X)dv(Y). \end{aligned}$$

e は p_u, p_v と直交するので

$$\langle p_u, e\rangle = 0, \quad \langle p_v, e\rangle = 0$$

が成り立つ。これらを u と v で偏微分すると

$$\langle p_{uu}, e\rangle + \langle p_u, e_u\rangle = 0, \quad \langle p_{uv}, e\rangle + \langle p_u, e_v\rangle = 0,$$
$$\langle p_{vu}, e\rangle + \langle p_v, e_u\rangle = 0, \quad \langle p_{vv}, e\rangle + \langle p_v, e_v\rangle = 0.$$

ここで $p_{uv} = p_{vu}$ だから $\langle p_u, e_v\rangle = \langle p_v, e_u\rangle$ となり

$$\begin{aligned} II &= -\langle p_u, e_u\rangle du \bullet du - 2\langle p_u, e_v\rangle du \bullet dv - \langle p_v, e_v\rangle dv \bullet dv \\ &= \langle p_{uu}, e\rangle du \bullet du + 2\langle p_{uv}, e\rangle du \bullet dv + \langle p_{vv}, e\rangle dv \bullet dv \end{aligned}$$

と第一基本形式 II を書き表すことができる。通常、曲面論では

$$L = \langle p_{uu}, e\rangle, \quad M = \langle p_{uv}, e\rangle, \quad N = \langle p_{vv}, e\rangle$$

と書いて第二基本形式を次のように表す。

$$II = Ldu \bullet du + 2Mdu \bullet dv + Ndv \bullet dv.$$

曲面の一点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ を固定し、そこでの単位法ベクトルを e_0 で表す。位置ベクトルと e_0 との内積によって曲面上の関数 f を定める。すなわち、

$$f(u, v) = \langle p(u, v), e_0\rangle.$$

p_0 での曲面の接平面は e_0 と直交するので、

$$df = \langle p_u du + p_v dv, e_0\rangle = \langle p_u, e_0\rangle du + \langle p_v, e_0\rangle dv = 0$$

となり、関数 f は p_0 で臨界値をとる。f の二階偏微分は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}(p_0) = \langle p_{uu}, e_0\rangle = L, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(p_0) = \langle p_{uv}, e_0\rangle = M, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(p_0) = \langle p_{vv}, e_0\rangle = N \end{aligned}$$

となるので、f の p_0 における Hesse 行列は第二基本形式 II の表現行列に一致する。特に II が定値になる点、すなわち行列式が $LN - M^2 > 0$ を満たす点では曲面は凸または凹になり、II が不定値になる点、すなわち $LN - M^2 < 0$ を満たす点では曲面は鞍型になる。このことから第二基本形式 II は曲面の形を表しているとみることができる。

3.2 ベクトル束と線形接続

多様体上のベクトル束の線形接続の定義と基本事項について解説する。

定義 3.2.1 M を多様体とし、E を M 上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(E) \to C^\infty(E); \ (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、∇ を E 上の**線形接続**と呼ぶ。

(1) $\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi, \qquad (X, Y \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E))$

(2) $\nabla_X(\phi+\psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi, \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi, \psi \in C^\infty(E))$

(3) $\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi, \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E),\ f \in C^\infty(M))$

(4) $\nabla_X(f\phi) = f\nabla_X\phi + (Xf)\phi. \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi \in C^\infty(E),\ f \in C^\infty(M))$

任意の $X \in C^\infty(TM)$ に対して $\nabla_X\phi = 0$ を満たす $\phi \in C^\infty(E)$ を**平行**な断面という。

定義 3.2.2 $\langle\ ,\ \rangle$ を多様体 M 上のベクトル束 E の計量とする。すなわち $\langle\ ,\ \rangle$ は E の各ファイバーの内積を定めているとする。E 上の線形接続 ∇ が

$$X\langle\phi, \psi\rangle = \langle\nabla_X\phi, \psi\rangle + \langle\phi, \nabla_X\psi\rangle \qquad (X \in C^\infty(TM),\ \phi, \psi \in C^\infty(E))$$

を満たすとき、線形接続 ∇ は計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を**保つ**という。

命題 3.2.3 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の接続とする。$X, Y \in C^\infty(TM)$ と $\phi \in C^\infty(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = \nabla_X\nabla_Y\phi - \nabla_Y\nabla_X\phi - \nabla_{[X,Y]}\phi$$

によって E の断面 $R^\nabla(X, Y)\phi$ を定めると、R^∇ はベクトル束 $A^2(TM, \mathrm{End}(E))$ の C^∞ 級断面を定める。ここで、$A^2(U, V)$ は $U \times U$ から V への交代多重線形写像の全体を表す。

証明　$X, Y \in C^\infty(TM)$ と $\phi \in C^\infty(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = -R^\nabla(Y, X)\phi$$

となることは、定め方より明らか。

M 上の C^∞ 級関数 f に対して、

$$\begin{aligned}
& R^\nabla(fX, Y)\phi \\
= \ & \nabla_{fX}\nabla_Y\phi - \nabla_Y\nabla_{fX}\phi - \nabla_{[fX,Y]}\phi \\
= \ & f\nabla_X\nabla_Y\phi - \nabla_Y(f\nabla_X\phi) - \nabla_{f[X,Y]}\phi + \nabla_{(Yf)X}\phi \\
= \ & f\nabla_X\nabla_Y\phi - f\nabla_Y\nabla_X\phi - (Yf)\nabla_X\phi - f\nabla_{[X,Y]}\phi + (Yf)\nabla_X\phi \\
= \ & fR^\nabla(X, Y)\phi.
\end{aligned}$$

よって、$R^\nabla(fX,Y)\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ を得る。X,Y に関する交代性より、$R^\nabla(X,fY)\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ も成り立つ。

$$\begin{aligned}
& R^\nabla(X,Y)f\phi \\
= \ & \nabla_X\nabla_Y(f\phi) - \nabla_Y\nabla_X(f\phi) - \nabla_{[X,Y]}f\phi \\
= \ & \nabla_X(f\nabla_Y\phi + (Yf)\phi) - \nabla_Y(f\nabla_X\phi + (Xf)\phi) - f\nabla_{[X,Y]}\phi - ([X,Y]f)\phi \\
= \ & f\nabla_X\nabla_Y\phi + (Xf)\nabla_Y\phi + (Yf)\nabla_X\phi + (XYf)\phi \\
& -f\nabla_Y\nabla_X\phi - (Yf)\nabla_X\phi - (Xf)\nabla_Y\phi - (YXf)\phi \\
& -f\nabla_{[X,Y]}\phi - ([X,Y]f)\phi \\
= \ & fR^\nabla(X,Y)\phi.
\end{aligned}$$

よって、$R^\nabla(X,Y)f\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ を得る。以上より、$R^\nabla(X,Y)\phi$ は X,Y,ϕ の一点での値で定まることがわかり、R^∇ は $A^2(TM,\mathrm{End}(E))$ の C^∞ 級断面になる。

定義 3.2.4 命題 3.2.3 で定めた R^∇ を接続 ∇ の**曲率テンソル**と呼ぶ。考えている接続が明らかな場合は、単に R と書くこともある。

補題 3.2.5 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の線形接続とすると、その曲率テンソル R^∇ は

$$R^\nabla(X,Y) + R^\nabla(Y,X) = 0 \qquad (X,Y \in C^\infty(TM))$$

を満たす。さらに、E が計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を持ち、∇ が $\langle\ ,\ \rangle$ を保つとき、

$$\langle R^\nabla(X,Y)\phi,\psi\rangle + \langle\phi, R^\nabla(X,Y)\psi\rangle = 0 \qquad (X,Y \in C^\infty(TM),\ \phi,\psi \in C^\infty(E))$$

が成り立つ。

証明 前半は R^∇ が $A^2(TM,\mathrm{End}(E))$ の断面であることからわかる。後半を示しておく。ベクトル場を関数に作用させると $[X,Y] = XY - YX$ となることに注意して、定義 3.2.2 を使うと

$$\begin{aligned}
0 \ = \ & XY\langle\phi,\psi\rangle - YX\langle\phi,\psi\rangle - [X,Y]\langle\phi,\psi\rangle \\
= \ & X\langle\nabla_Y\phi,\psi\rangle + X\langle\phi,\nabla_Y\psi\rangle - Y\langle\nabla_X\phi,\psi\rangle - Y\langle\phi,\nabla_X\psi\rangle \\
& -\langle\nabla_{[X,Y]}\phi,\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_{[X,Y]}\psi\rangle \\
= \ & \langle\nabla_X\nabla_Y\phi,\psi\rangle + \langle\nabla_Y\phi,\nabla_X\psi\rangle + \langle\nabla_X\phi,\nabla_Y\psi\rangle + \langle\phi,\nabla_X\nabla_Y\psi\rangle \\
& -\langle\nabla_Y\nabla_X\phi,\psi\rangle - \langle\nabla_X\phi,\nabla_Y\psi\rangle - \langle\nabla_Y\phi,\nabla_X\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_Y\nabla_X\psi\rangle \\
& -\langle\nabla_{[X,Y]}\phi,\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_{[X,Y]}\psi\rangle \\
= \ & \langle R^\nabla(X,Y)\phi,\psi\rangle + \langle\phi,R^\nabla(X,Y)\psi\rangle.
\end{aligned}$$

3.3 Riemann 計量

定義 3.3.1 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ が存在し、M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。また、接ベクトル空間の外積代数の内積も 1.4 節で定めたように定める。

定理 3.3.2 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の接ベクトル束には、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad (X, Y \in C^\infty(TM))$$

を満たし、Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ線形接続が、一意的に存在する。

証明　まず、条件を満たす線形接続 ∇ が存在すると仮定する。Riemann 計量を保つという条件から、M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle \\
\langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= Y\langle Z, X\rangle \\
-\langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle &= -Z\langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

これらの両辺を加え、条件 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle \\
= \ &X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&\quad + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)
\end{aligned}$$

を得る。これより、この接続の一意性がわかる。

逆に上の等式で ∇ を定める。

$$\begin{aligned}
\nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \qquad (X, Y, Z \in C^\infty(TM)) \\
\nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \qquad (X, Y, Z \in C^\infty(TM))
\end{aligned}$$

が成り立つことは、定義式よりわかる。M 上の C^∞ 級関数 f に対して、

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(fX\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, fX\rangle - Z\langle fX, Y\rangle \\
&\quad + \langle [fX, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], fX\rangle + \langle [Z, fX], Y\rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(fX\langle Y,Z\rangle + (Yf)\langle Z,X\rangle + fY\langle Z,X\rangle \\
&\quad -(Zf)\langle X,Y\rangle - fZ\langle X,Y\rangle \\
&\quad +f\langle [X,Y],Z\rangle - (Yf)\langle X,Z\rangle - f\langle [Y,Z],X\rangle \\
&\quad +f\langle [Z,X],Y\rangle + (Zf)\langle X,Y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}f(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\
&\quad +\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle) \\
&= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

よって、

$$\langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle = f\langle \nabla_X Y, Z\rangle$$

が成り立ち、$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ を得る。

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X (fY), Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle fY,Z\rangle + fY\langle Z,X\rangle - Z\langle X,fY\rangle \\
&\quad +\langle [X,fY],Z\rangle - \langle [fY,Z],X\rangle + \langle [Z,X],fY\rangle) \\
&= \frac{1}{2}((Xf)\langle Y,Z\rangle + fX\langle Y,Z\rangle + fY\langle Z,X\rangle \\
&\quad -(Zf)\langle X,Y\rangle - fZ\langle X,Y\rangle \\
&\quad +f\langle [X,Y],Z\rangle + (Xf)\langle Y,Z\rangle \\
&\quad -f\langle [Y,Z],X\rangle + (Zf)\langle Y,X\rangle + \langle [Z,X],fY\rangle) \\
&= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle + (Xf)\langle Y,Z\rangle \\
&= \langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

よって、

$$\langle \nabla_X (fY), Z\rangle = \langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle$$

が成り立ち、

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

を得る。以上で、∇ が TM の線形接続になることがわかった。

∇ の定義式より、

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\
&\quad +\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle) \\
&\quad +\frac{1}{2}(X\langle Z,Y\rangle + Z\langle Y,X\rangle - Y\langle X,Z\rangle \\
&\quad +\langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Z,Y],X\rangle + \langle [Y,X],Z\rangle) \\
&= X\langle Y,Z\rangle.
\end{aligned}$$

よって、∇ は Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ。

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad +\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle) \\ &\quad -\frac{1}{2}(Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle \\ &\quad +\langle [Y, X], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle) \\ &= \langle [X, Y], Z\rangle\end{aligned}$$

となるので、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が成り立つ。

定義 3.3.3 定理 3.3.2 で定めた接続 ∇ を Riemann 多様体の **Levi-Civita 接続**と呼ぶ。また、$\nabla_X Y$ を Y の X による**共変微分**という。

系 3.3.4 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は、ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad +\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)\end{aligned}$$

を満たす。

今後、多様体の局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ におけるベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ を簡単に ∂_i で表すことにする。

命題 3.3.5 Riemann 多様体 (M, g) の局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ において、$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ によって U 上の C^∞ 級関数 Γ_{ij}^k を定めると、ベクトル場 $X = X^i\partial_i,\ Y = Y^j\partial_j$ に対して、$\nabla_X Y$ の局所表示は

$$\nabla_X Y = (XY^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j)\partial_k$$

となる。Riemann 計量の局所表示を $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ とし、行列 (g_{ij}) の逆行列の成分を g^{ij} で表すと、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

が成り立つ。もう一つの局所座標近傍 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ において、$\dfrac{\partial}{\partial y^p}$ を $\bar{\partial}_p$ で表し、$\nabla_{\bar{\partial}_p}\bar{\partial}_q = \bar{\Gamma}_{pq}^r \bar{\partial}_r$ とする。このとき、$U \cap V$ において、

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

が成り立つ。

証明　線形接続の性質より、

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^j\partial_j) = (XY^j)\partial_j + Y^j\nabla_X\partial_j \\ &= (XY^j)\partial_j + Y^j\nabla_{X^i\partial_i}\partial_j = (XY^j)\partial_j + X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j \\ &= (XY^k)\partial_k + X^iY^j\Gamma^k_{ij}\partial_k = (XY^k + \Gamma^k_{ij}X^iY^j)\partial_k.\end{aligned}$$

系 3.3.4 より、

$$\begin{aligned}g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) &= \frac{1}{2}(\partial_i g(\partial_j,\partial_l) + \partial_j g(\partial_l,\partial_i) - \partial_l g(\partial_i,\partial_j)) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).\end{aligned}$$

他方

$$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = g(\Gamma^k_{ij}\partial_k, \partial_l) = \Gamma^k_{ij}g(\partial_k,\partial_l) = \Gamma^k_{ij}g_{kl}.$$

よって

$$\Gamma^k_{ij}g_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

これより、

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^k_{ij}g_{kl}g^{lm} = \frac{1}{2}g^{lm}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

となり、

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

を得る。

座標変換に関する ∂_i と $\bar{\partial}_p$ の間の関係

$$\bar{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial y^p} = \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\partial_i$$

に注意しておく。上で求めた共変微分の局所表示より、

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^r_{pq}\bar{\partial}_r &= \nabla_{\bar{\partial}_p}\bar{\partial}_q \\ &= \left(\bar{\partial}_p\frac{\partial x^k}{\partial y^q} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\right)\partial_k \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p\partial y^q} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\bar{\partial}_r\end{aligned}$$

となり、

$$\bar{\Gamma}^r_{pq} = \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p\partial y^q}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

を得る。

定義 3.3.6 命題 3.3.5 で定めた Γ^k_{ij} を **Christoffel の記号**と呼ぶ。

注意 3.3.7 今後、局所座標近傍を明示しなくても、Riemann 計量の成分、Christoffel の記号等は上で定めた記号を使うことにする。

命題 3.3.8 Riemann 多様体 $(M,)$ の曲線 c に沿って定義されたベクトル場 X に対して、

$$\nabla_{c'(t)}X = \left(c'(t)X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j\right) \partial_k$$

によって c に沿ったベクトル場 $\nabla_{c'(t)}X$ を定めると、これは局所座標近傍のとり方に依存しない。

証明　局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ ともう一つの局所座標近傍 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとる。命題 3.3.5 の証明中と同じ記号を使うことにする。さらに

$$X = X^i \partial_i = \bar{X}^p \bar{\partial}_p$$

としておく。

$$c'(t)X^k = \frac{d}{dt}X^k(c(t)) = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{dx^i(c(t))}{dt}$$

に注意し、命題 3.3.5 の Christoffel の記号の変換公式を使うと、

$$\begin{aligned}
& \left(c'(t)X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j\right) \partial_k \\
= \ & \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{dx^i(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j\right) \partial_k \\
= \ & \left(\frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^q}\bar{X}^q\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\bar{X}^q\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\bar{\partial}_r \\
= \ & \left(\frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^s y^q}\bar{X}^q\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt} + \frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^q}\frac{\partial \bar{X}^q}{\partial y^s}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt}\right. \\
& \left. + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\bar{X}^q\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\bar{\partial}_r \\
= \ & \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p y^q}\bar{X}^q\frac{dy^p(c(t))}{dt} + \frac{\partial x^k}{\partial y^q}\frac{\partial \bar{X}^q}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\bar{X}^q\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\bar{\partial}_r \\
= \ & \left(\frac{\partial \bar{X}^r}{\partial y^p}\frac{dy^p(c(t))}{dt} + \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p y^q} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{dy^p(c(t))}{dt}\bar{X}^q\right)\bar{\partial}_r \\
= \ & \left(c'(t)\bar{X}^r + \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{dy^p(c(t))}{dt}\bar{X}^q\right)\bar{\partial}_r
\end{aligned}$$

を得る。したがって、$\nabla_{c'(t)}X$ は局所座標のとり方に依存しない。

定義 3.3.9 命題3.3.8で定まる $\nabla_{c'(t)}X$ を X の**曲線に沿った共変微分**と呼ぶ。$\nabla_{c'(t)}X = 0$ を満たすベクトル場 X を**曲線に沿った平行ベクトル場**と呼ぶ。これを X に関する常微分方程式とみなすと、局所表示は、

$$\frac{dX^k(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j = 0 \qquad (1 \le k \le n)$$

となり、未知関数 X^k に関する連立線形常微分方程式系になる。したがって、曲線 c が定義されている区間では、任意の初期条件に対して平行ベクトル場が一意に存在する。特に、曲線 c の定義区間が $[a,b]$ のとき、$u \in T_{c(a)}M$ に対して $X(a) = u$ を満たす平行ベクトル場 X が一意に存在し、u に $X(b) \in T_{c(b)}M$ を対応させると、$T_{c(a)}M$ から $T_{c(b)}M$ への線形同型写像になる。この線形同型写像を**曲線に沿った平行移動**と呼び、τ_c で表す。

命題 3.3.10 Riemann 多様体の曲線に沿った平行移動は等長線形写像になる。

証明 曲線 c に沿った平行ベクトル場 X, Y に対して、

$$\frac{d}{dt}\langle X,Y\rangle = c'(t)\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_{c'(t)}X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{c'(t)}Y\rangle = 0.$$

したがって、平行ベクトル場の内積は一定になる。特に、平行移動は内積を保つことになり、等長線形写像になる。

命題 3.3.11 Riemann 多様体上のベクトル場 X, Y と点 x に対して、$c(0) = x$ と $c'(0) = X_x$ を満たす曲線 c をとる。曲線 c に沿った $c(t)$ から $c(0)$ までの平行移動を τ_0^t で表すと、

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

証明 T_xM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、c に沿って平行ベクトル場に拡張したものを $e_i(t)$ で表す。$Y(c(t)) = Y^i(t)e_i(t)$ と表すことにすると、

$$(\nabla_X Y)(x) = \nabla_{c'(0)}(Y^i(t)e_i(t)) = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

他方、

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y^i(t) - Y^i(0))e_i = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

したがって、

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

3.4 テンソル場の共変微分

命題 3.4.1 Riemann 多様体上のベクトル場 X に対してテンソル場 T に $\nabla_X T$ を対応させる対応で、次の条件を満たすものが一意的に存在する。

(1) ∇_X はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場 S, T に対して
$$\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T.$$

(2) C^∞ 級関数 f に対して $\nabla_X f = Xf$ となり、ベクトル場 Y に対しては $\nabla_X Y$ は Levi-Civita 接続による共変微分に一致する。

証明　まず、条件を満たす ∇_X が存在すると仮定する。$(0,1)$ 型テンソル場、すなわち 1 次微分形式 ω と $(1,0)$ 型テンソル場、すなわちベクトル場 Y に対して、$\omega \otimes Y$ の縮約は
$$C^{(1,1)}(\omega \otimes Y) = C^{(1,1)}\left(\omega_i Y^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i Y^i = \omega(Y)$$
となることに注意しておく。
$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega)(Y) &= C^{(1,1)}(\nabla_X \omega \otimes Y) \\ &= C^{(1,1)}(\nabla_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes \nabla_X Y) \\ &= \nabla_X C^{(1,1)}(\omega \otimes Y) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).\end{aligned}$$
よって、
$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$
となり、これによって $\nabla_X \omega$ が一意的に定まることがわかる。以上より、$(0,0)$ 型テンソル場、$(1,0)$ 型テンソル場、$(0,1)$ 型テンソル場への ∇_X の作用が一意的に定まる。

(p,q) 型テンソル場 T の場合を考える。1 次微分形式 $\omega^1, \ldots, \omega^p$ とベクトル場 $X_1, \ldots, X_q$ をとる。C で全成分に関する縮約を表すと、
$$C(T \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q) = T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)$$
となることに注意しておく。
$$\begin{aligned}&(\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\ =\ & C(\nabla_X T \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q) \\ =\ & C\Big(\nabla_X(T \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q) \\ & -\sum_{i=1}^{p} T \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X \omega^i \otimes \cdots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \\ & -\sum_{j=1}^{q} T \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X X_j \otimes \cdots \otimes X_q\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & X(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& - \sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_X \omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& - \sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_q).
\end{aligned}
$$

これによって $\nabla_X T$ が一意的に定まることがわかる。

逆に、一意性を示した等式で ∇_X の作用を定めることにより、対応 $T \mapsto \nabla_X T$ を定める。この対応が条件を満たすことを以下で示す。

C^∞ 級関数 f に対して

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X \omega)(fY) &= X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X (fY)) \\
&= X(f\omega(Y)) - \omega((Xf)Y + f\nabla_X Y) \\
&= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - (Xf)\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= f(\nabla_X \omega)(Y)
\end{aligned}
$$

となるので、$\nabla_X \omega$ は $(0,1)$ 型テンソル場になる。

さらに

$$
\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(T^{(0,1)}M) \to C^\infty(T^{(0,1)}M);\ (X, \omega) \mapsto \nabla_X \omega
$$

は $T^{(0,1)}M$ 上の線形接続になることを示しておく。加法の分解は明らかだから、関数倍に関する性質を調べる。

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{fX} \omega)(Y) &= fX(\omega(Y)) - \omega(\nabla_{fX} Y) \\
&= fX(\omega(Y)) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= f(\nabla_X \omega)(Y)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\nabla_{fX} \omega = f\nabla_X \omega.
$$

次に

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X (f\omega))(Y) &= X(f\omega(Y)) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= (Xf)\omega(Y) + f(\nabla_X \omega)(Y) \\
&= ((Xf)\omega + f(\nabla_X \omega))(Y)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\nabla_X (f\omega) = (Xf)\omega + f(\nabla_X \omega).
$$

したがって、∇ は $T^{(0,1)}M$ 上の線形接続になる。

(p,q) 型テンソル場 T に対して、$\nabla_X T$ も (p,q) 型テンソル場になることを示す。上で示したことより、

$$\nabla_X(f\omega^k) = (Xf)\omega^k + f\nabla_X\omega^k$$

が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, f\omega^k, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
= \ & X(fT(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& -f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_X\omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& -(Xf)T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& -f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_q) \\
= \ & f(\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q).
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, fX_l, \ldots, X_q) \\
= \ & X(fT(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& -f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_X\omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& -f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_q) \\
& -(Xf)T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
= \ & f(\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q).
\end{aligned}$$

以上より、$\nabla_X T$ は (p,q) 型テンソル場になる。

(p,q) 型テンソル場 S と (r,s) 型テンソル場 T に対して、

$$\begin{aligned}
& \nabla_X(S\otimes T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, X_1, \ldots, X_{q+s}) \\
= \ & X((S\otimes T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, X_1, \ldots, X_{q+s})) \\
& -\sum_{i=1}^{p+r}(S\otimes T)(\omega^1, \ldots, \nabla_X\omega^i, \ldots, \omega^{p+r}, X_1, \ldots, X_{q+s}) \\
& -\sum_{j=1}^{q+s}(S\otimes T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_{q+s}) \\
= \ & X(S(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)T(\omega^{p+1}, \ldots, \omega^{p+r}, X_{q+1}, \ldots, X_{q+s}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{p} S(\omega^1,\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)T(\omega^{p+1},\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}) \\
& -\sum_{i=p+1}^{p+r} S(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)T(\omega^{p+1},\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}) \\
& -\sum_{j=1}^{q} S(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,\nabla_X X_j,\dots,X_q)T(\omega^{p+1},\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}) \\
& -\sum_{j=q+1}^{q+s} S(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)T(\omega^{p+1},\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,\nabla_X X_j,\dots,X_{q+s}) \\
= \;& (\nabla_X S)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)T(\omega^{p+1},\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}) \\
& +S(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)(\nabla_X T)(\omega^{p+1},\dots,\omega^{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}) \\
= \;& (\nabla_X S\otimes T+S\otimes\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^{p+r},X_1,\dots,X_{q+s}).
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\nabla_X(S\otimes T)=\nabla_X S\otimes T+S\otimes\nabla_X T$$

が成り立つ。

　∇_X と縮約の可換性を調べる。T を (p,q) 型テンソル場とする。

$$(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,X_{q-1})=T(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1})$$

となることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
& (C^{(r,s)}\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,X_{q-1}) \\
= \;& (\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1}) \\
= \;& X(T(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1})) \\
& -\sum_{i=1}^{p-1} T(\omega^1,\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\dots,\nabla_X\overset{r}{\breve{(dx^a)}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1}) \\
& -\sum_{j=1}^{q-1} T(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\nabla_X X_j,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\nabla_X\partial_a}}\dots,X_{q-1}).
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\nabla_X\partial_a=X^b\Gamma^c_{ba}\partial_c$$

であり、

$$\begin{aligned}
\nabla_X(dx^a)(\partial_c) &= X(dx^a(\partial_c)) - dx^a(\nabla_X\partial_c) \\
&= -dx^a(X^b\Gamma^d_{bc}\partial_d) \\
&= -X^b\Gamma^a_{bc}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\nabla_X(dx^a) = -X^b\Gamma^a_{bc}dx^c.$$

これらより、

$$\begin{aligned}
& -T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{\nabla_X(dx^a)}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\nabla_X\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
=\ & X^b\Gamma^a_{bc}T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^c}},\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -X^b\Gamma^c_{ba}T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_c}}\ldots,X_{q-1}) \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
& (C^{(r,s)}\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,X_{q-1}) \\
=\ & X(T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1})) \\
& -\sum_{i=1}^{p-1}T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -\sum_{j=1}^{q-1}T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
=\ & X((C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,X_{q-1})) \\
& -\sum_{i=1}^{p-1}(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -\sum_{j=1}^{q-1}(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_{q-1}) \\
=\ & (\nabla_X C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_{q-1})
\end{aligned}$$

となり、

$$C^{(r,s)}\nabla_X T = \nabla_X C^{(r,s)}T$$

が成り立つ。したがって、∇_X は縮約と可換になる。

系 3.4.2 (p,q) 型テンソル場 T に対して、

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
= \ & X(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& - \sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_X \omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& - \sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_q)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

系 3.4.3 命題 3.4.1 で定めた写像

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(T^{(p,q)}M) \to C^\infty(T^{(p,q)}M);\ (X,T) \mapsto \nabla_X T$$

は $T^{(p,q)}M$ 上の線形接続になる。

証明 $(0,0)$ 型テンソル場、$(1,0)$ 型テンソル場の場合は定め方から、$(0,1)$ 型テンソル場の場合は命題 3.4.1 の証明中から、∇ が線形接続になることはわかる。一般の (p,q) の場合に示す。加法の分解は明らかだから、関数倍に関する性質を調べる。系 3.4.2 より、

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{fX} T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
= \ & fX(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& - \sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_{fX} \omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& - \sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_{fX} X_j, \ldots, X_q) \\
= \ & fX(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)) \\
& - f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, \nabla_X \omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\
& - f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_q) \\
= \ & f(\nabla_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q).
\end{aligned}$$

よって

$$\nabla_{fX} T = f \nabla_X T.$$

次に

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_X(fT))(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
= \ & X(fT(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \\
& -\sum_{i=1}^{p} fT(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q} fT(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_q) \\
= \ & (Xf)T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
& +fX(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \\
& -f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
& -f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_q) \\
= \ & (Xf)T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
& f(\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
= \ & ((Xf)T+f(\nabla_X T))(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q).
\end{aligned}
$$

よって

$$\nabla_X(fT)=(Xf)T+f(\nabla_X T)$$

となり、∇ は $T^{(p,q)}M$ 上の線形接続になる。

系 3.4.4 (p,q) 型テンソル場 T に対して ∇T を

$$
\begin{aligned}
(\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X) &= (\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\
& \quad (\omega^i\in C^\infty(T^{(0,1)}M),\ X_j,X\in C^\infty(T^{(1,0)}M))
\end{aligned}
$$

によって定めると、∇T は $(p,q+1)$ 型テンソル場になる。

注意 3.4.5 C^∞ 級関数 f に対して、∇f は $(0,1)$ 型テンソル場になるが、文献によっては ∇f を、次に定義する勾配ベクトル場を表す記号として使うことがある。任意のベクトル場 X に対して、

$$\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = df(X)$$

を満たすようにベクトル場 $\mathrm{grad} f$ を定め、$\mathrm{grad} f$ を f の**勾配ベクトル場**と呼ぶ。上の $\mathrm{grad} f$ の定義式にある df は ∇f だから、各接ベクトル空間での 1 次形式 ∇f の Riemann 計量に関する双対ベクトルが $\mathrm{grad} f$ ということになる。Riemann 計量に

よって、1 次微分形式とベクトル場を同一視すれば、∇f は $\mathrm{grad} f$ に対応する。∇f の成分は $\partial_i f$ になり、$\mathrm{grad} f$ の成分を、

$$\mathrm{grad} f = (\mathrm{grad} f)^i \partial_i$$

によって定めると、

$$(\mathrm{grad} f)^k g_{kj} = \langle \mathrm{grad} f, \partial_j \rangle = \partial_j f$$

となるので、

$$(\mathrm{grad} f)^i = (\mathrm{grad} f)^k g_{kj} g^{ij} = g^{ij} \partial_j f.$$

一般に 1 次微分形式の成分が ω_i のとき、その双対ベクトル場の成分は $g^{ij}\omega_j$ になり、逆に、ベクトル場の成分が X^i のときは、その双対 1 次微分形式の成分は $g_{ij}X^j$ になる。

定義 3.4.6 $\nabla T = 0$ となるテンソル場を**平行テンソル場**と呼ぶ。

例 3.4.7 Riemann 多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続 ∇ は、

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

を満たすので、$\nabla g = 0$ となり、Riemann 計量は平行テンソル場になる。

命題 3.4.8 (p, q) 型テンソル場 T の局所表示を

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla T &= T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q ; k} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \\ &= \nabla_k T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \end{aligned}$$

の成分は、

$$\nabla_k T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \partial_k T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \sum_{a=1}^{p} \Gamma^{i_a}_{kl} T^{i_1 \cdots l \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} - \sum_{b=1}^{q} \Gamma^m_{k j_b} T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots m \cdots j_q}$$

で与えられる。ここで、l は a 番目であり、m は b 番目である。

証明 系 3.4.2 より、

$$\nabla_{\partial_k} dx^i = -\Gamma^i_{ka} dx^a$$

となることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} &= (\nabla_{\partial_k} T)(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) \\
&= \partial_k (T(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q})) \\
&\quad -\sum_{a=1}^{p} T(dx^{i_1}, \ldots, \nabla_{\partial_k} dx^{i_a}, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) \\
&\quad -\sum_{b=1}^{q} T(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \nabla_{\partial_k} \partial_{j_b}, \ldots, \partial_{j_q 1}) \\
&= \partial_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \\
&\quad -\sum_{a=1}^{p} T(dx^{i_1}, \ldots, -\Gamma^{i_a}_{kl} dx^l, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) \\
&\quad -\sum_{b=1}^{q} T(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \ldots, \Gamma^m_{kj_b} \partial_m, \ldots, \partial_{j_q 1}) \\
&= \partial_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \sum_{a=1}^{p} \Gamma^{i_a}_{kl} T^{i_1\cdots l\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - \sum_{b=1}^{q} \Gamma^m_{kj_b} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots m\cdots j_q}
\end{aligned}$$

3.5　曲率テンソル

注意 3.5.1 実ベクトル空間 V, W に対して、V の q 個の積 $V \times \cdots \times V$ から W への多重線形写像の全体の成す実ベクトル空間を $L^q(V, W)$ で表す。M を多様体とし、

$$L^q(TM, TM) = \bigcup_{x \in M} L^q(T_x M, T_x M)$$

とおくと、命題 2.2.2 の証明と同様に M 上のベクトル束になる。$L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面 T に対して、

$$\tilde{T}(\omega, X_1, \ldots, X_q) = \omega(T(X_1, \ldots, X_q)) \qquad (\omega \in C^\infty(T^*M),\ X_i \in C^\infty(TM))$$

によって $\tilde{T}$ を定めると、$\tilde{T}$ は M 上の $(1, q)$ 型テンソル場になる。逆に M 上の $(1, q)$ 型テンソル場に対して、上の等式によって $L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面を定めることができる。これより、$L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面と M 上の $(1, q)$ 型テンソル場を同一視することができる。

T の局所表示を

$$T(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) = T^i_{j_1\cdots j_q} \partial_i$$

とすると、$(1, q)$ 型テンソル場 $\tilde{T}$ の成分は、

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^i_{j_1\cdots j_q} &= \tilde{T}(dx^i, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) \\
&= dx^i(T(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= dx^i(T^k_{j_1\cdots j_q}\partial_k)\\
&= T^i_{j_1\cdots j_q}
\end{aligned}
$$

となり、T の成分に一致する。

今後、$\tilde{T}$ も単に T と表すことにする。

定義 3.5.2 Riemann 多様体 M の Levi-Civita 接続に関する曲率テンソルを単に R で表し、Riemann 多様体の**曲率テンソル**と呼ぶことにする。曲率テンソルは $L^3(TM,TM)$ の C^∞ 級断面になるので、注意3.5.1 より、M 上の $(1,3)$ 型テンソル場とみなすことができる。

定理 3.5.3 Riemann 多様体の曲率テンソル R は、ベクトル場 X,Y,Z,W に対して、次の (1) から (5) を満たす。

(1) $R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0$,

(2) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$,

(3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle+\langle Z,R(X,Y)W\rangle=0$,

(4) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(Z,W)X,Y\rangle$,

(5) $(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W=0$.

(2) は**第 1Bianchi の恒等式**と呼ばれ、(5) は**第 2Bianchi の恒等式**と呼ばれる。

証明 (1) と (3) は補題3.2.5 よりわかる。

(2) Levi-Civita 接続の性質

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$$

を使うと、

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z\\
=\ &\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ &\nabla_X(\nabla_Z Y+[Y,Z])-\nabla_Y(\nabla_Z X+[X,Z])-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ &\nabla_X\nabla_Z Y+\nabla_{[Y,Z]}X+[X,[Y,Z]]-\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_{[X,Z]}Y-[Y,[X,Z]]-\nabla_{[X,Y]}Z.
\end{aligned}
$$

$R(Y,Z)X$ と $R(Z,X)Y$ については定義式をそのまま使うと、

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y\\
=\ &R(X,Y)Z+\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,X]}Y\\
=\ &[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+\nabla_Z(\nabla_X Y-\nabla_Y X)-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ &[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ &[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
=\ &0.
\end{aligned}
$$

最後の等式はベクトル場のブラケット積に関する Jacobi の恒等式である。
(4) を証明するためには、次の補題を示せば十分である。

補題 3.5.4 V を内積を持つ実ベクトル空間とする。V 上の $(1,3)$ 型テンソル R が

(1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0,$

(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$

(3) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle Z, R(X,Y)W\rangle = 0$

をみたすとき、R は

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$$

を満たす。

証明

$$\begin{aligned}
& \langle R(X,Y)Z, W\rangle \\
= \ & -\langle R(Y,Z)X, W\rangle - \langle R(Z,X)Y, W\rangle \qquad ((2) \text{ より}) \\
= \ & \langle R(Y,Z)W, X\rangle + \langle R(Z,X)W, Y\rangle \qquad ((3) \text{ より}) \\
= \ & -\langle R(Z,W)Y, X\rangle - \langle R(W,Y)Z, X\rangle \\
& -\langle R(X,W)Z, Y\rangle - \langle R(W,Z)X, Y\rangle \qquad ((2) \text{ より}) \\
= \ & 2\langle R(Z,W)X, Y\rangle + \langle R(W,Y)X + R(X,W)Y, Z\rangle \qquad ((1) \text{ と } (3) \text{ より}) \\
= \ & 2\langle R(Z,W)X, Y\rangle - \langle R(Y,X)W, Z\rangle \qquad ((2) \text{ より}) \\
= \ & 2\langle R(Z,W)X, Y\rangle - \langle R(X,Y)Z, W\rangle. \qquad ((1) \text{ と } (3) \text{ より})
\end{aligned}$$

これより、

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$$

を得る。

定理 3.5.3(5) の証明をするまえに、いくつかの準備をしておく。

命題 3.5.5 Riemann 多様体上のベクトル場 X, Y に対してテンソル場 T に

$$R(X,Y)T = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})T$$

を対応させる対応は、次の条件を満たす。

(1) $R(X,Y)$ はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場 S, T に対して

$$R(X,Y)(S\otimes T) = R(X,Y)S\otimes T + S\otimes R(X,Y)T.$$

(2) C^∞ 級関数 f に対して $R(X,Y)f = 0$ となる。

さらに、(p,q) 型テンソル場 T に対して

$$\begin{aligned}
& (R(X,Y)T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
= & -\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,R(X,Y)\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,R(X,Y)X_j,\dots,X_q)
\end{aligned}$$

が成り立つ。特に、$R(X,Y)$ のテンソル場への作用は、テンソル場の各点での値に対して定まる。

証明　命題 3.4.1 より、$R(X,Y)$ はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になることがわかる。さらに、テンソル場 S,T に対して

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y(S\otimes T) &= \nabla_X(\nabla_Y S\otimes T + S\otimes\nabla_Y T) \\
&= \nabla_X\nabla_Y S\otimes T + \nabla_Y S\otimes\nabla_X T + \nabla_X S\otimes\nabla_Y T + S\otimes\nabla_X\nabla_Y T
\end{aligned}$$

となるので、

$$R(X,Y)(S\otimes T) = R(X,Y)S\otimes T + S\otimes R(X,Y)T.$$

が成り立つ。

C^∞ 級関数 f に対して、ベクトル場のブラケット積の定義より、

$$R(X,Y)f = XYf - YXf - [X,Y]f = 0.$$

$R(X,Y)$ の作用は縮約と可換になるので、(p,q) 型テンソル場 T に対して、

$$\begin{aligned}
0 &= R(X,Y)(T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)) \\
&= (R(X,Y)T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,R(X,Y)\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,R(X,Y)X_j,\dots,X_q).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
& (R(X,Y)T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
= & -\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,R(X,Y)\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,R(X,Y)X_j,\dots,X_q)
\end{aligned}$$

を得る。

定理 3.5.6 (Ricci の公式) Riemann 多様体上の (p,q) 型テンソル場 T とベクトル場 X,Y に対して

$$\begin{aligned}&(\nabla^2 T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X;Y)-(\nabla^2 T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;Y;X)\\ =\ &-(R(X,Y)T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 命題 3.4.2 より、

$$\begin{aligned}&(\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X)\\ =\ &X(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q))\\ &-\sum_{i=1}^{p}T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)\\ &-\sum_{j=1}^{q}T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_q)\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}&(\nabla^2 T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X;Y)\\ =\ &Y((\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X))\\ &-\sum_{i=k}^{p}(\nabla T)(\omega^1,\ldots,\nabla_Y\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X)\\ &-\sum_{l=1}^{q}(\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_Y X_l,\ldots,X_q;X)\\ &-(\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;\nabla_Y X)\\ =\ &YX(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) && (5.1)\\ &-\sum_{i=1}^{p}Y(T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) && (5.2)\\ &-\sum_{j=1}^{q}Y(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j\ldots,X_q)) && (5.3)\\ &-\sum_{k=1}^{p}X(T(\omega^1,\ldots,\nabla_Y\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) && (5.4)\\ &+\sum_{k=1}^{p}\sum_{i\neq k}T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\nabla_Y\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) && (5.5)\\ &+\sum_{k=1}^{p}T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\nabla_Y\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) && (5.6)\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\nabla_Y\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_q) \tag{5.7}$$

$$-\sum_{l=1}^{q} X(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_Y X_l,\ldots,X_q)) \tag{5.8}$$

$$+\sum_{l=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_Y X_l,\ldots,X_q) \tag{5.9}$$

$$+\sum_{l=1}^{q}\sum_{j\neq l} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_Y X_j,\ldots,\nabla_X X_l,\ldots,X_q) \tag{5.10}$$

$$+\sum_{l=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X\nabla_Y X_l,\ldots,X_q) \tag{5.11}$$

$$-(\nabla_X Y)(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \tag{5.12}$$

$$+\sum_{k=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,\nabla_{\nabla_Y X}\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \tag{5.13}$$

$$+\sum_{l=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_{\nabla_Y X}X_l,\ldots,X_q). \tag{5.14}$$

上の式から X と Y を入れ替えた式をひくときに、(1) は

$$-[X,Y](T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q))$$

になる。(2) と (4) は互いに打ち消しあう。(3) と (8) も互いに打ち消しあう。(5) は X と Y を入れ替えたものと互いに打ち消しあう。(6) は

$$\sum_{k=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X)\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)$$

になる。(7) は (9) と互いに打ち消しあう。(10) は X と Y を入れ替えたものと互いに打ち消しあう。(11) は

$$\sum_{l=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X)X_l,\ldots,X_q)$$

になる。(12) は

$$\begin{aligned} & (\nabla_X Y-\nabla_Y X)(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \\ = \ & [X,Y](T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \end{aligned}$$

になり、(1) と打ち消しあう。(13) は

$$\sum_{k=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,-\nabla_{\nabla_X Y-\nabla_Y X}\omega^k,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, -\nabla_{[X,Y]}\omega^k, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)$$

になる。(14) は

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, -\nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} X_l, \ldots, X_q) \\ = & \sum_{l=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, -\nabla_{[X,Y]} X_l, \ldots, X_q) \end{aligned}$$

になる。以上の考察と命題 3.5.5 より、

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q; X; Y) - (\nabla^2 T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q; Y; X) \\ = & \sum_{i=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, R(X,Y)\omega^i, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \\ & + \sum_{j=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, R(X,Y)X_j, \ldots, X_q) \\ = & -(R(X,Y)T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \end{aligned}$$

を得る。

例 3.5.7 C^∞ 級関数 f に対して、$(0,2)$ 型テンソル場 $\nabla^2 f$ は

$$(\nabla^2 f)(X;Y) - (\nabla^2 f)(Y;X) = -(R(X,Y)f) = 0$$

を満たすので、$\nabla^2 f$ は対称テンソル場になる。$\nabla^2 f$ は C^∞ 級関数 f の **Hessian** と呼ばれる。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)(X;Y) &= (\nabla_Y \nabla f)(X) \\ &= Y((\nabla f)(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) \\ &= YXf - (\nabla_Y X)f \end{aligned}$$

となる。

定理 3.5.3(5) の証明　1 次微分形式 ω に対して、定理 3.5.6 と命題 3.5.5 より、

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \omega)(W;X;Y) - (\nabla^2 \omega)(W;Y;X) &= -(R(X,Y)\omega)(W) \\ &= \omega(R(X,Y)W) \\ &= (C^{(1,1)}(\omega \otimes R))(X,Y,W). \end{aligned}$$

これをさらに Z で共変微分すると、

$$\begin{aligned} & (\nabla^3\omega)(W;X;Y;Z)-(\nabla^3\omega)(W;Y;X;Z) \\ = & (\nabla_Z C^{(1,1)}(\omega\otimes R))(X,Y,W) \\ = & (C^{(1,1)}(\nabla_Z\omega\otimes R+\omega\otimes\nabla_Z R))(X,Y,W) \\ = & (\nabla_Z\omega)(R(X,Y)W)+\omega((\nabla_Z R)(X,Y)W). \end{aligned}$$

$\nabla\omega$ に定理 3.5.6 を適用し、命題 3.5.5 を使うと、

$$\begin{aligned} & (\nabla^3\omega)(W;X;Y;Z)-(\nabla^3\omega)(W;X;Z;Y) \\ = & -(R(Y,Z)\nabla\omega)(W;X) \\ = & (\nabla\omega)(R(Y,Z)W;X)+(\nabla\omega)(W;R(Y,Z)X). \end{aligned}$$

X,Y,Z に巡回置換を施すことにより、

$$\begin{aligned} & (\nabla^3\omega)(W;Y;Z;X)-(\nabla^3\omega)(W;Y;X;Z) \\ = & (\nabla\omega)(R(Z,X)W;Y)+(\nabla\omega)(W;R(Z,X)Y) \\ & (\nabla^3\omega)(W;Z;X;Y)-(\nabla^3\omega)(W;Z;Y;X) \\ = & (\nabla\omega)(R(X,Y)W;Z)+(\nabla\omega)(W;R(X,Y)Z). \end{aligned}$$

これらを加え、先に示した等式を使うと

$$\begin{aligned} & (\nabla\omega)(R(X,Y)W;Z)+(\nabla\omega)(R(Y,Z)W;X)+(\nabla\omega)(R(Z,X)W;Y) \\ & +(\nabla\omega)(W;R(X,Y)Z)+(\nabla\omega)(W;R(Y,Z)X)+(\nabla\omega)(W;R(Z,X)Y) \\ = & (\nabla^3\omega)(W;X;Y;Z)-(\nabla^3\omega)(W;Y;X;Z) \\ & +(\nabla^3\omega)(W;Y;Z;X)-(\nabla^3\omega)(W;Z;Y;X) \\ & +(\nabla^3\omega)(W;Z;X;Y)-(\nabla^3\omega)(W;X;Z;Y) \\ = & (\nabla_X\omega)(R(Y,Z)W)+(\nabla_Y\omega)(R(Z,X)W)+(\nabla_Z\omega)(R(X,Y)W) \\ & +\omega((\nabla_X R)(Y,Z)W)+\omega((\nabla_Y R)(Z,X)W)+\omega((\nabla_Z R)(X,Y)W) \end{aligned}$$

したがって、定理 3.5.3(2) より

$$\begin{aligned} & \omega((\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_X R)(Y,Z)W) \\ = & (\nabla\omega)(W;R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y) \\ = & 0. \end{aligned}$$

これが任意の 1 次微分形式 ω に対して成り立つので、

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_X R)(Y,Z)W=0$$

を得る。

注意 3.5.8 この節で得た結果の局所表示を与えておく。Riemann 多様体の曲率テンソルの局所表示を

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$$

で表す。

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k \\ &= \nabla_{\partial_i}(\Gamma^m_{jk}\partial_m) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma^m_{ik}\partial_m) \\ &= (\partial_i\Gamma^m_{jk})\partial_m + \Gamma^m_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_m - (\partial_j\Gamma^m_{ik})\partial_m - \Gamma^m_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_m \\ &= (\partial_i\Gamma^l_{jk})\partial_l + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\partial_l - (\partial_j\Gamma^l_{ik})\partial_l - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\partial_l \end{aligned}$$

となるので、

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

を得る。さらに、$(0, 4)$ 型テンソル場 $\langle R(X, Y)Z, W\rangle$ の成分を

$$\langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = R_{ijkl}$$

で定めると、

$$R_{ijkl} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = \langle R^m_{ijk}\partial_m, \partial_l\rangle = g_{lm}R^m_{ijk}.$$

定理 3.5.3 を成分で表すと、

$$\begin{aligned} &R^l_{ijk} + R^l_{jik} = 0, \\ &R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0, \\ &R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0 \\ &R_{ijkl} = R_{klij} \\ &\nabla_i R^m_{jkl} + \nabla_j R^m_{kil} + \nabla_k R^m_{ijl} = 0. \end{aligned}$$

命題 3.5.5 より、

$$(R(\partial_i, \partial_j)dx^k)(\partial_l) - dx^k(R(\partial_i, \partial_j)\partial_l) = -dx^k(R^m_{ijl}\partial_m) = -R^k_{ijl}$$

となるので、

$$R(\partial_i, \partial_j)dx^k = -R^k_{ijl}dx^l.$$

(p, q) 型テンソル場 T に曲率テンソルを作用させたテンソル場の成分を $(R(\partial_i, \partial_j)T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ で表すと、

$$\begin{aligned} &(R(\partial_i, \partial_j)T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \\ = \ &(R(\partial_i, \partial_j)T)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{a=1}^{p} T(dx^{i_1}, \dots, R(\partial_i, \partial_j)dx^{i_a}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}) \\
&\quad -\sum_{b=1}^{q} T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, R(\partial_i, \partial_j)\partial_b, \dots, \partial_{j_q}) \\
&= \sum_{a=1}^{p} R^{i_a}_{ijk} T^{i_1 \cdots k \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} - \sum_{b=1}^{q} R^{l}_{ijj_a} T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots l \cdots j_q}.
\end{aligned}
$$

ここで、k は a 番目であり、l は b 番目である。これを使って Ricci の公式 (定理 3.5.6) を成分で表すと、

$$
\begin{aligned}
T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q; i; j} - T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q; j; i} &= \nabla_j \nabla_i T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} - \nabla_i \nabla_j T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \\
&= -\sum_{a=1}^{p} R^{i_a}_{ijk} T^{i_1 \cdots k \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \sum_{b=1}^{q} R^{l}_{ijj_b} T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots l \cdots j_q}.
\end{aligned}
$$

C^∞ 級関数 f に対して、

$$\nabla_i f = f_{;i} = \partial_i f$$

となるので、f の Hessian $\nabla^2 f$ の成分は、

$$f_{;i;j} = \nabla_j \nabla_i f = \partial_j \partial_i f - \Gamma^k_{ji} \partial_k f.$$

これより、$df_x = 0$ となる点 x では、$f_{;i;j} = \partial_j \partial_i f$ となり、$\nabla^2 f$ は通常の関数の Hessian に一致することがわかる。

3.6　種々の曲率

補題 3.6.1 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$\frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2} \qquad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

は基底のとり方に依存しない。

証明　Z, W を σ のもう一つの基底とすると、

$$Z = aX + bY, \quad W = cX + dY \quad (ad - bc \neq 0)$$

と表すことができる。定理 3.5.3 の (1) と (3) から、

$$
\begin{aligned}
&\langle R(Z,W)W, Z\rangle \\
= \ &\langle R(aX + bY, cX + dY)(cX + dY), aX + bY\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle R(aX, dY)(cX+dY), aX+bY\rangle + \langle R(bY, cX)(cX+dY), aX+bY\rangle \\
&= ad\langle R(X,Y)cX, bY\rangle + ad\langle R(X,Y)dY, aX\rangle \\
&\quad +bc\langle R(Y,X)cX, bY\rangle + bc\langle R(Y,X)dY, aX\rangle \\
&= (ad-bc)^2\langle R(X,Y)Y, X\rangle.
\end{aligned}
$$

命題 1.2.4 より、

$$Z \wedge W = (ad-bc)X \wedge Y$$

となるので、

$$|Z\wedge W|^2 = (ad-bc)^2|X\wedge Y|^2.$$

以上より、

$$\frac{\langle R(Z,W)W, Z\rangle}{|Z\wedge W|^2} = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X\wedge Y|^2}.$$

定義 3.6.2 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$K_\sigma = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X\wedge Y|^2} \qquad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

とおき、K_σ を σ の**断面曲率**と呼ぶ。M のすべての点 p における接ベクトル空間 T_pM 内のすべての 2 次元部分空間 σ に対して K_σ が一定になるとき、M を**定曲率空間**と呼ぶ。

注意 3.6.3 任意の 1 次元 Riemann 多様体の曲率テンソルは、定理 3.5.3 の (1) より 0 になるので、曲率を考える意味がない。2 次元以上の場合、接ベクトル空間の 2 次元部分空間 σ に対して σ の正規直交基底 e_1, e_2 をとれば、$|e_1\wedge e_2| = 1$ となるので $K_\sigma = \langle R(e_1,e_2)e_2, e_1\rangle$ が成り立つ。

補題 3.6.4 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M が定曲率空間になるための必要十分条件は、ある実数 K が存在し、任意の点 $p\in M$ の任意の接ベクトル $X, Y, Z \in T_pM$ に対して

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

が成り立つことである。このとき、K は断面曲率の一定値に一致する。

証明　曲率テンソル R が

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

を満たすとき、

$$
\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Y, X\rangle &= K\langle\langle Y,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle Y, X\rangle \\
&= K(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2).
\end{aligned}
$$

他方、系 1.4.4 より、

$$|X \wedge Y|^2 = \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2$$

だから、断面曲率は一定値 K をとり、M は定曲率空間になる。
　逆に M が定曲率空間であると仮定する。M の断面曲率の一定値を K とおく。

$$R_K(X, Y)Z = K(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$$

によって、M 上の $(1,3)$ 型テンソル場 R_K を定める。R_K の定め方より、R_K は補題 3.5.4 の (1) を満たす。すなわち、

$$R_K(X, Y)Z + R_K(Y, X)Z = 0$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} & R_K(X, Y)Z + R_K(Y, Z)X + R_K(Z, X)Y \\ = \ & K(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X + \langle Y, X\rangle Z - \langle Z, X\rangle Y + \langle Z, Y\rangle X - \langle X, Y\rangle Z) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

より、R_K は補題 3.5.4 の (2) を満たす。

$$\begin{aligned} & \langle R_K(X, Y)Z, W\rangle + \langle Z, R_K(X, Y)W\rangle \\ = \ & K(\langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle) + K(\langle Z, X\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Z, Y\rangle\langle X, W\rangle) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

より、R_K は補題 3.5.4 の (3) を満たす。したがって、補題 3.5.4 より、R_K は

$$\langle R_K(X, Y)Z, W\rangle = \langle R_K(Z, W)X, Y\rangle$$

と結論することができるが、次のように直接示すこともできる。

$$\begin{aligned} \langle R_K(X, Y)Z, W\rangle &= K(\langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle) \\ &= K\langle\langle W, X\rangle Z - \langle Z, X\rangle W, Y\rangle \\ &= \langle R_K(Z, W)X, Y\rangle. \end{aligned}$$

以上より、R_K は定理 3.5.3 の (1) から (4) までの等式を満たす。定理 3.5.3 より R も (1) から (4) までの等式を満たすので、$S = R - R_K$ とおくと、S も (1) から (4) までの等式を満たす $(1,3)$ 型テンソル場になる。以下で S が 0 になることを示す。
　まず、任意の接ベクトル X, Y について

$$\langle S(X, Y)Y, X\rangle = 0$$

が成り立つことを示す。X, Y が線形従属のときは、X, Y に関する交代性より

$$\langle S(X,Y)Y, X\rangle = 0$$

が成り立つ。X, Y が線形独立のときは、

$$\begin{aligned}\langle S(X,Y)Y, X\rangle &= \langle R(X,Y)Y, X\rangle - \langle R_K(X,Y)Y, X\rangle \\ &= K|X \wedge Y|^2 - K(\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

以上より、任意の接ベクトル X, Y について

$$\langle S(X,Y)Y, X\rangle = 0$$

が成り立つ。この等式の Y の代りに $Y + Z$ を代入すると

$$\begin{aligned}0 &= \langle S(X, Y+Z)(Y+Z), X\rangle \\ &= \langle S(X,Y)Y, X\rangle + \langle S(X,Y)Z, X\rangle + \langle S(X,Z)Y, X\rangle + \langle S(X,Z)Z, X\rangle \\ &= \langle S(X,Y)Z, X\rangle + \langle S(X,Z)Y, X\rangle.\end{aligned}$$

ここで、

$$\langle S(X,Y)Z, X\rangle = -\langle S(X,Y)X, Z\rangle$$

であり、

$$\langle S(X,Z)Y, X\rangle = \langle S(Y,X)X, Z\rangle = -\langle S(X,Y)X, Z\rangle$$

だから、

$$-2\langle S(X,Y)X, Z\rangle = 0$$

となり、

$$S(X,Y)X = 0$$

を得る。この等式の X の代りに $X + Z$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= S(X+Z, Y)(X+Z) \\ &= S(X,Y)X + S(X,Y)Z + S(Z,Y)X + S(Z,Y)Z \\ &= S(X,Y)Z + S(Z,Y)X \\ &= S(X,Y)Z - S(Y,X)Z - S(X,Z)Y \\ &= 2S(X,Y)Z - S(X,Z)Y.\end{aligned}$$

これより、

$$2S(X,Y)Z = S(X,Z)Y.$$

この等式の Y と Z を入れ替えると

$$2S(X,Z)Y = S(X,Y)Z.$$

したがって、

$$S(X,Y)Z = 2S(X,Z)Y = 4S(X,Y)Z$$

となり、

$$S(X,Y)Z = 0$$

を得る。したがって、$R = R_K$ となり、

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

が成り立つ。

定義 3.6.5 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の接ベクトル X, Y に対して、

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

によって M 上の $(0,2)$ 型テンソル場 Ric を定める。Ric を **Ricci テンソル**と呼ぶ。単位接ベクトル X に対して $\mathrm{Ric}(X,X)$ を X の **Ricci 曲率**と呼ぶ。Ricci 曲率が一定値をとるとき、M を **Einstein 多様体**と呼ぶ。

補題 3.6.6 Riemann 多様体の Ricci テンソルは対称になり、接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとると、

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,X)Y, e_i\rangle$$

と表すことができる。

証明　等式

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,X)Y, e_i\rangle$$

は Ricci テンソルの定め方からわかる。この等式と定理 3.5.3 を使うと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,X)Y, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle R(Y,e_i)e_i, X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,Y)X, e_i\rangle \\
&= \mathrm{Ric}(Y,X).
\end{aligned}$$

よって、Ricci テンソル Ric は対称になる。

注意 3.6.7 Riemann 多様体 M の単位接ベクトル X に対して、$X, e_2, \ldots, e_n$ が正規直交基底になるようにすると、

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(e_i, X)X, e_i \rangle$$

となり、Ricci 曲率は断面曲率の和になる。特に、定曲率空間は Einstein 多様体になる。

補題 3.6.8 Riemann 多様体 (M, g) が Einstein 多様体になるための必要十分条件は、ある実数 c が存在し、$\mathrm{Ric} = cg$ が成り立つことである。このとき、c は Ricci 曲率の一定値に一致する。

証明　Ricci テンソル Ric が $\mathrm{Ric} = cg$ を満たすとき、単位接ベクトル X の Ricci 曲率は、$\mathrm{Ric}(X, X) = c$ となり、M は Einstein 多様体になる。

逆に M が Einstein 多様体であると仮定する。M の Ricci 曲率の一定値を c とおく。0 ではない任意の接ベクトル X に対して

$$\mathrm{Ric}(X, X) = |X|^2 \mathrm{Ric}\left(\frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|}\right) = c|X|^2$$

となるので、

$$\mathrm{Ric}(X, X) = c|X|^2$$

が成り立つ。この等式は X が 0 のときも成り立つので、任意の接ベクトル X に対して成り立つ。

補題 3.6.6 より、Ricci テンソルは対称だから、任意の接ベクトル X, Y に対して

$$\begin{aligned} c|X+Y|^2 &= \mathrm{Ric}(X+Y, X+Y) \\ &= \mathrm{Ric}(X, X) + 2\mathrm{Ric}(X, Y) + \mathrm{Ric}(Y, Y) \\ &= c|X|^2 + 2\mathrm{Ric}(X, Y) + |Y|^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Ric}(X, Y) &= c(|X+Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2) \\ &= c2g(X, Y). \end{aligned}$$

したがって、$\mathrm{Ric} = cg$ が成り立つ。

命題 3.6.9 (Schur の補題) M を次元が 3 以上の連結 Riemann 多様体とする。

(1) M の各点 p における断面曲率 K_σ が、T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に依存せず一定値 K_p をとるとき、M は定曲率空間になる。

(2) M の各点 p における Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(X,X)$ が、単位接ベクトル X に依存せず一定値 c_p をとるとき、M は Einstein 多様体になる。

証明　(2) Ricci テンソルの局所表示を

$$R_{ij} = \mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j)$$

と表すことにすると、

$$R(\partial_k, \partial_i)\partial_j = R^l_{kij}\partial_l$$

だから、

$$R_{ij} = R^k_{kij}.$$

定理 3.5.3 の (1) と (5) 第 2Bianchi の恒等式の局所表示 (注意 3.5.8) を使うと、

$$\begin{aligned}
\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} &= \nabla_l R^k_{kij} - \nabla_i R^k_{klj} \\
&= -\nabla_l R^k_{ikj} - \nabla_i R^k_{klj} \\
&= \nabla_k R^k_{lij}.
\end{aligned}$$

補題 3.6.8 の証明と同様にして、$\mathrm{Ric} = cg$ となることがわかる。ただし、c は M 上の C^∞ 級関数である。これより、

$$\nabla_l R_{ij} = \nabla_l(cg_{ij}) = (\partial_l c)g_{ij}.$$

よって、

$$\nabla_k R^k_{lij} = (\partial_l c)g_{ij} - (\partial_i c)g_{lj}.$$

$\dim M = n$ としておく。両辺に g^{ij} をかけて和をとると、

$$g^{ij}\nabla_k R^k_{lij} = g^{ij}(\partial_l c)g_{ij} - g^{ij}(\partial_i c)g_{lj}. = (n-1)\partial_l c.$$

他方、

$$\begin{aligned}
g^{ij}\nabla_k R^k_{lij} &= \nabla_k(g^{ij}R^k_{lij}) = \nabla_k(g^{ij}R_{lijm}g^{mk}) = \nabla_k(g^{ij}R_{jmli}g^{mk}) \\
&= \nabla_k(R^j_{jml}g^{mk}) = \nabla_k(R_{ml}g^{mk}) = \nabla_k(cg_{ml}g^{mk}) \\
&= \nabla_l c = \partial_l c.
\end{aligned}$$

以上より、$(n-2)\partial_l c = 0$ となり、仮定から $n \geq 3$ だから、$\partial_l c = 0$。よって関数 c は局所定数になり、M は連結だから c は定数になる。したがって、M は Einstein 多様体になる。

(1) 注意 3.6.7 より、単位接ベクトル X の Ricci 曲率は、$\mathrm{Ric}(X,X) = (n-1)K$ となる。よって、(2) より、M は Einstein 多様体になり、K は定数になる。

定義 3.6.10 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M 上の関数

$$\tau = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric})$$

を M の**スカラー曲率**と呼ぶ。M の接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとれば、

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i)$$

となる。

以下で、Riemann 多様体の曲率と位相に関するいくつかの基本的な定理を述べる。証明にはこの講義では触れていない測地線やその変分公式が必要になるので、定理の主張を述べるにとどめる。

定理 3.6.11 (Cartan) M を連結、単連結な n 次元 Riemann 多様体とし、その断面曲率が 0 以下になると仮定する。このとき、M は $\mathbf{R}^n$ と微分同型になる。

定理 3.6.12 (Synge) M をコンパクト連結向き付け可能偶数次元 Riemann 多様体とし、その断面曲率が正になると仮定する。このとき、M は単連結になる。

定理 3.6.13 (Myers) M を完備連結 Riemann 多様体とし、ある正数 c が存在し、任意の単位接ベクトル X の Ricci 曲率が、$\mathrm{Ric}(X, X) \geq c$ を満たすと仮定する。このとき、M はコンパクトになり、基本群 $\pi_1(M, p)$ は有限群になる。

第4章　Riemann部分多様体

4.1　第二基本形式と法接続

この節では、$\iota : M \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の Riemann 部分多様体として議論する。

例 2.1.8 で述べたことを証明しておく。

証明　M と $\tilde{M}$ の次元をそれぞれ n と $\tilde{n}$ としておく。M の各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を、$\iota|_U : U \to \tilde{M}$ が埋め込みになるようにとる。このとき、U の点 x を ι によって $\iota(x) \in \tilde{M}$ と同一視することができる。つまり、U を $\tilde{M}$ の部分集合とみなす。これにより、各 $x \in U$ に対して、T_xM も $T_x\tilde{M}$ の部分ベクトル空間とみなす。さらに、p を含む $\tilde{M}$ の座標近傍系 $(\tilde{U}; x^1, \ldots, x^{\tilde{n}})$ を、

$$U = \{y \in \tilde{U} \mid x^{n+1}(y) = \cdots = x^{\tilde{n}}(y) = 0\}$$

を満たすようにとることができる。各 $x \in U$ に対して、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

は T_xM の基底になっている。そこで、

$$(*) \qquad \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x$$

に Gram-Schmidt の直交化法を施し、得られたものを $(e_1)_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$ とすると、

$$[(e_1)_x \cdots (e_{\tilde{n}})_x] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x\right] \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \cdots & \cdots & a_{\tilde{n}}^1(x) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}(x) \end{bmatrix}$$

となる。$a_j^i(x)$ は U 上定義された C^∞ 級関数である。$(*)$ は $T\tilde{U}|_U$ の C^∞ 級断面だから、$(e_1)_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$ も C^∞ 級断面になる。さらに、$(e_i)_x$ は

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

の線形結合になっているので、$(e_1)_x, \ldots, (e_n)_x$ は T_xM の正規直交基底になる。よって、$T_x^\perp M$ の定め方より、$(e_{n+1})_x, \ldots, (e_{\tilde{n}})_x$ は $T_x^\perp M$ の正規直交基底になる。これより、$\pi^{-1}(U) \subset T^\perp M$ の各元 u は

$$u = \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \xi^i (e_i)_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}}) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{\tilde{n}-n}$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n, \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}})$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとり、上と同様に Gram-Schmidt の直交化法によって、$y \in V$ に対して正規直交系 $(f_1)_y, \ldots, (f_{\tilde{n}})_y$ を定めると、

$$[(f_1)_y \cdots (f_{\tilde{n}})_y] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_y \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right|_y \right] \begin{bmatrix} b_1^1(y) & \cdots & \cdots & b_{\tilde{n}}^1(y) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}(y) \end{bmatrix}$$

となる。各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \eta^i (f_i)_{\pi(v)}$$

と表すことができる。$\pi^{-1}(V)$ の座標は $(y^1, \ldots, y^n, \eta^{n+1}, \ldots, \eta^{\tilde{n}})$ になる。以下で、$U \cap V \neq \emptyset$ のときの $\pi^{-1}(U)$ と $\pi^{-1}(V)$ の座標の間の変換公式を求める。まず、$x \in U \cap V$ に対して、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x$$

となるので、

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right|_x \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_x \cdots \left.\frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right|_x \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{\tilde{n}}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^{\tilde{n}}}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial y^{\tilde{n}}}{\partial x^{\tilde{n}}}(x) \end{bmatrix}.$$

そこで、

$$J(x) = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x) \right]$$

とおく。さらに、

$$A(x) = [a^i_j(x)], \quad B(x) = [b^i_j(x)]$$

とおいておく。これらの行列を使って上で得た基底の変換を表すと、

$$\begin{aligned} [e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] A \\ [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] B \\ \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] J. \end{aligned}$$

よって、

$$[e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}}\right] A = \left[\frac{\partial}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{n}}}\right] JA = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}]\, B^{-1}JA$$

となり、

$$[e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}]\, B^{-1}JA$$

を得る。$u \in \pi^{-1}(U \cap V)$ に対して

$$u = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta^{n+1} \\ \vdots \\ \eta^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = [e_1 \cdots e_{\tilde{n}}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = [f_1 \cdots f_{\tilde{n}}] B^{-1}JA \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix}.$$

よって、

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta^{n+1} \\ \vdots \\ \eta^{\tilde{n}} \end{bmatrix} = B^{-1}JA \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \xi^{\tilde{n}} \end{bmatrix}$$

となり、座標変換

$$(x^1, \ldots, x^n, \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}}) \to (y^1, \ldots, y^n, \eta^{n+1}, \ldots, \eta^{\tilde{n}})$$

は C^∞ 級微分同型写像になる。これによって、$T^\perp M$ は多様体になる。

π の定め方より、

$$\pi(x^1, \ldots, x^n, \xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}}) = (x^1, \ldots, x^n)$$

となり、$\pi : T^\perp M \to M$ は C^∞ 級写像になる。Φ_U の定め方より、$\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U\left(\sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \xi^i e_i\right) = (\xi^{n+1}, \ldots, \xi^{\tilde{n}})$$

となるので、各 $x \in U$ に対して $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{R}^{\tilde{n}-n}$ は線形同型写像になる。
以上より、$\pi : T^\perp M \to M$ がベクトル束になることがわかった。

命題 4.1.1 $\tilde{M}$ の Levi-Civita 接続を $\tilde{\nabla}$ で表す。M 上のベクトル場 $X, Y \in C^\infty(TM)$ に対して、$\tilde{\nabla}_X Y$ はベクトル束 $T\tilde{M}|_M$ の C^∞ 級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \qquad (\nabla_X Y \in TM,\ h(X, Y) \in T^\perp M)$$

と分解すると、∇ は Riemann 部分多様体の Levi-Civita 接続に一致し、h は $L^2(TM, T^\perp M)$ の C^∞ 級断面になる。さらに、h は対称になる。

証明　$x \in M$ に対して、$c(0) = x$ と $c'(0) = X_x$ を満たす M の曲線 c をとる。命題 3.3.11 より、曲線 c に沿った $c(t)$ から $c(0)$ までの $\tilde{\nabla}$ に関する平行移動を τ_0^t で表すと、

$$(\tilde{\nabla}_X Y)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。よって、$\tilde{\nabla}_X Y$ はベクトル束 $T\tilde{M}|_M$ の C^∞ 級断面として定まる。
a, b を M 上の C^∞ 級関数とする。

$$\tilde{\nabla}_{aX}(bY) = a((Xb)Y + b\tilde{\nabla}_X Y) = (a(Xb)Y + ab\nabla_X Y) + abh(X, Y)$$

となるので、TM 成分と $T^\perp M$ 成分をみることにより、

$$\nabla_{aX}(bY) = a(Xb)Y + ab\nabla_X Y, \qquad h(aX, bY) = abh(X, Y)$$

を得る。これより、∇ は TM 上の線形接続になり、h は $L^2(TM, T^\perp M)$ の C^∞ 級断面になることがわかる。
$\tilde{M}$ の Levi-Civita 接続の性質より、

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + h(X, Y) - \nabla_Y X - h(Y, X) - [X, Y] \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + (h(X, Y) - h(Y, X)). \end{aligned}$$

上の等式の TM 成分と $T^\perp M$ 成分をみることにより、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \qquad h(X, Y) - h(Y, X) = 0$$

を得る。第二式より、h は対称になる。第一式は、∇ が M の Levi-Civita 接続になるための条件である。

$\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}$ の Riemann 計量 $\tilde{g}$ を保つので、M 上のベクトル場 $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ に対して、

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= X\tilde{g}(Y,Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla_X Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

よって、∇ は M の Riemann 計量 g を保つ。定理 3.3.2 より、M の Levi-Civita は一意的に定まるので、∇ は M の Levi-Civita に一致する。

定義 4.1.2 命題 4.1.1 で定めた h を M の**第二基本形式**と呼ぶ。ベクトル場 $X, Y \in C^\infty(TM)$ に対する $\tilde{\nabla}_X Y$ の分解

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \qquad (\nabla_X Y \in TM,\ h(X,Y) \in T^\perp M)$$

を **Gauss の公式**と呼ぶ。

命題 4.1.3 $\tilde{M}$ の Levi-Civita 接続を $\tilde{\nabla}$ で表す。M 上のベクトル場 $X \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場 $\xi \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、$\tilde{\nabla}_X \xi$ はベクトル束 $T\tilde{M}|_M$ の C^∞ 級断面として定まり、

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \qquad (A_\xi X \in TM,\ \nabla^\perp_X \xi \in T^\perp M)$$

と分解すると、$\nabla^\perp$ は $T\tilde{M}$ の Riemann 計量から自然に誘導される $T^\perp M$ の計量を保つ $T^\perp M$ の接続になり、A は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。ここで、$\mathrm{Sym}(TM)$ は TM の各ファイバーの対称線形変換全体の成すベクトル束である。

証明 $\tilde{\nabla}_X \xi$ がベクトル束 $T\tilde{M}|_M$ の C^∞ 級断面として定まることは、命題 4.1.1 の証明と同様に、命題 3.3.11 からわかる。

a, b を M 上の C^∞ 級関数とする。

$$\tilde{\nabla}_{aX}(b\xi) = a((Xb)\xi + b\tilde{\nabla}_X \xi) = -abA_\xi X + (a(Xb)\xi + ab\nabla^\perp_X \xi)$$

となるので、法成分と接成分をみることにより、

$$\nabla^\perp_{aX}(b\xi) = a(Xb)\xi + ab\nabla^\perp_X \xi, \qquad A_{b\xi}(aX) = abA_\xi X$$

を得る。$\nabla^\perp$ は $T^\perp M$ 上の線形接続になり、A は $L(T^\perp M, \mathrm{End}(TM))$ の C^∞ 級断面になることがわかる。

$\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}$ の Riemann 計量 $\tilde{g}$ を保つので、M 上の法ベクトル場 $\xi, \eta \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、

$$X\tilde{g}(\xi,\eta) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X \eta) = \tilde{g}(\nabla^\perp_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \nabla^\perp_X \eta).$$

よって、$\nabla^\perp$ は $T^\perp M$ の $\tilde{g}$ を保つ。

$A_\xi \in \mathrm{Sym}(TM)$ となることは、次の補題から従う。

補題 4.1.4 M 上のベクトル場 $X,Y \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場 $\xi \in C^\infty(T^\perp M)$ に対して、

$$\tilde{g}(h(X,Y),\xi) = \tilde{g}(A_\xi X, Y)$$

が成り立つ。

証明 $\tilde{g}(Y,\xi)=0$ となるので、

$$0 = X\tilde{g}(Y,\xi) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi) + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X\xi) = \tilde{g}(h(X,Y),\xi) + \tilde{g}(Y,-A_\xi X).$$

したがって、

$$\tilde{g}(h(X,Y),\xi) = \tilde{g}(A_\xi X, Y)$$

が成り立つ。

命題 4.1.3 の証明の続き 補題 4.1.4 と命題 4.1.1 より、

$$\tilde{g}(A_\xi X,Y) = \tilde{g}(h(X,Y),\xi) = \tilde{g}(h(Y,X),\xi) = \tilde{g}(A_\xi Y, X).$$

したがって、A_ξ は対称線形変換になる。

定義 4.1.5 命題 4.1.3 で定めた $\nabla^\perp$ を M の**法接続**と呼び、A を M の**シェイプ作用素**と呼ぶ。ベクトル場 $X \in C^\infty(TM)$ と法ベクトル場 $\xi \in C^\infty(T^\perp M)$ に対する $\tilde{\nabla}_X\xi$ の分解

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi \qquad (A_\xi X \in TM,\ \nabla^\perp_X\xi \in T^\perp M)$$

を **Weingarten の公式**と呼ぶ。法接続 $\nabla^\perp$ の曲率テンソル $R^{\nabla^\perp}$ を $R^\perp$ で表し、**法曲率テンソル**と呼ぶ。法ベクトル場 $\xi \in C^\infty(T^\perp M)$ が $\nabla^\perp\xi = 0$ を満たすとき、すなわち、任意の $X \in C^\infty(TM)$ に対して $\nabla^\perp_X\xi = 0$ を満たすとき、ξ を**平行法ベクトル場**と呼ぶ。

定義 4.1.6 $h=0$ となる Riemann 部分多様体 M を、**全測地的部分多様体**と呼ぶ。

$$H = \mathrm{tr}(h) = \sum_{i=1}^n h(e_i,e_i) \qquad (\{e_i\} \text{ は } TM \text{ の正規直交基底})$$

によって H を定めると、H は $T^\perp M$ の C^∞ 級断面になる。H を M の**平均曲率ベクトル**と呼ぶ。$H=0$ となる Riemann 部分多様体 M を、**極小部分多様体**と呼ぶ。

4.2 基本的な方程式

この節では、Riemann 部分多様体の三つの基本的な方程式、Gauss の方程式、Codazzi の方程式、Ricci の方程式を導く。前節と同様に、この節でも、今後 $\iota : M \to \tilde{M}$ を Riemann 多様体 $\tilde{M}$ の Riemann 部分多様体として議論する。ただし、M と $\tilde{M}$ の Riemann 計量は、どちらも $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。また、前節で導入した記号はそのまま使うことにする。

命題 4.2.1 (Gauss の方程式) $\tilde{M}$ と M の曲率テンソルをそれぞれ $\tilde{R}$ と R で表すと、M のベクトル場 X, Y, Z, W に対して、

$$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

が成り立つ。

証明 曲率テンソルの定義と Gauss の公式、Weingarten の公式より、

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}(X,Y)Z \\
= \ & \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
= \ & \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + h(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]}Z + h([X,Y],Z)) \\
= \ & \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) \\
& -\nabla_Y\nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z) + A_{h(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_Y(h(X,Z)) \\
& -\nabla_{[X,Y]}Z - h([X,Y],Z) \\
= \ & R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y \\
& +h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) \\
& +\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - \nabla^{\perp}_Y(h(X,Z)).
\end{aligned}$$

よって、補題 4.1.4 より、

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle \\
= \ & \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle A_{h(Y,Z)}X, W\rangle + \langle A_{h(X,Z)}Y, W\rangle \\
= \ & \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle + \langle h(Y,W), h(X,Z)\rangle.
\end{aligned}$$

Codazzi の方程式を定式化するために、ベクトル束 $L^2(TM, T^{\perp}M)$ に接続を導入する。

補題 4.2.2 $a \in C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M))$ と $X, Y, Z \in C^{\infty}(TM)$ に対して

$$(\bar{\nabla}_X a)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(a(Y,Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)$$

によって

$$\bar{\nabla} : C^{\infty}(TM) \times C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M)) \to C^{\infty}(L^2(TM, T^{\perp}M))$$

が定まり、$\bar{\nabla}$ は $L^2(TM, T^{\perp}M)$ 上の接続になる。

証明　$f, g \in C^\infty(M)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
& (\bar{\nabla}_X a)(fY, gZ) \\
= \ & \nabla^\perp_X (a(fY, gZ)) - a(\nabla_X(fY), gZ) - a(fY, \nabla_X(gZ)) \\
= \ & X(fg)a(Y,Z) + fg\nabla^\perp_X(a(Y,Z)) \\
& -(Xf)ga(Y,Z) - fga(\nabla_X Y, Z) \\
& -f(Xg)a(Y,Z) - fga(Y, \nabla_X Z) \\
= \ & fg(\nabla^\perp_X(a(Y,Z)) - a(\nabla_X Y, Z) - a(Y, \nabla_X Z)) \\
= \ & fg(\bar{\nabla}_X a)(Y,Z)
\end{aligned}
$$

となるので、$\bar{\nabla}_X a$ は $C^\infty(L^2(TM, T^\perp M))$ の元になる。

∇ は TM の接続であることと、$\nabla^\perp$ は $T^\perp M$ の接続であることから、

$$
\bar{\nabla}_{fX} a = f\bar{\nabla}_X a
$$

が従う。

さらに、

$$
\begin{aligned}
& (\bar{\nabla}_X(fa))(Y,Z) \\
= \ & \nabla^\perp_X(fa(Y,Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\
= \ & (Xf)a(Y,Z) + f\nabla^\perp_X(a(Y,Z)) - fa(\nabla_X Y, Z) - fa(Y, \nabla_X Z) \\
= \ & (Xf)a(Y,Z) + (\bar{\nabla}_X a)(Y,Z)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\bar{\nabla}_X(fa) = (Xf)a + f\bar{\nabla}_X a
$$

となり、$\bar{\nabla}$ は $L^2(TM, T^\perp M)$ 上の接続になる。

命題 4.2.3 (Codazzi の方程式) M のベクトル場 $X, Y, Z \in C^\infty(TM)$ に対して、$\tilde{R}(X,Y)Z$ の法成分は

$$
(\tilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z)
$$

を満たす。

証明　命題 4.2.1 の証明中に得た等式

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z \ = \ & R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y \\
& + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X,Y], Z) \\
& + \nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - \nabla^\perp_Y(h(X,Z)).
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) \\
&\quad +\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - \nabla^{\perp}_Y(h(X,Z)) \\
&= h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h(\nabla_X Y,Z) + h(\nabla_Y X,Z) \\
&\quad +\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - \nabla^{\perp}_Y(h(X,Z)) \\
&= (\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z).
\end{aligned}
$$

命題 4.2.4 (Ricci の方程式) M のベクトル場 $X, Y \in C^{\infty}(TM)$ と法ベクトル場 $\xi, \eta \in C^{\infty}(T^{\perp}M)$ に対して、

$$\langle \tilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

が成り立つ。

証明 Weingarten の公式より、

$$
\begin{aligned}
&\langle \tilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle \\
= \;& \langle \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\xi - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\xi - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
= \;& \langle \tilde{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla^{\perp}_Y\xi) - \tilde{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi) - (-A_\xi[X,Y] + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi),\eta\rangle \\
= \;& \langle h(X,-A_\xi Y) + \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - h(Y,-A_\xi X) - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta\rangle \\
= \;& \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle h(X,A_\xi Y),\eta\rangle + \langle h(Y,A_\xi X),\eta\rangle \\
= \;& \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y\rangle + \langle A_\eta Y, A_\xi X\rangle \\
= \;& \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle A_\xi A_\eta X, Y\rangle + \langle Y, A_\eta A_\xi X\rangle \\
= \;& \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.
\end{aligned}
$$

命題 4.2.5 $\tilde{M}$ を曲率 K の定曲率空間とすると、Riemann 部分多様体 M の Gauss, Codazzi, Ricci の方程式は、次のようになる。M のベクトル場 $X, Y, Z, W \in C^{\infty}(TM)$ と法ベクトル場 $\xi, \eta \in C^{\infty}(T^{\perp}M)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&K(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\
&= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle, \\
&(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z), \\
&\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.
\end{aligned}
$$

証明 補題 3.6.4 より、$\tilde{M}$ の曲率テンソル $\tilde{R}$ は、$\tilde{M}$ の接ベクトル S, T, U に対して、

$$\tilde{R}(S,T)U = K(\langle T,U\rangle S - \langle S,U\rangle T)$$

を満たしている。命題 4.2.1(Gauss の方程式) より、

$$\begin{aligned} &K(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\ &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle \end{aligned}$$

を得る。命題 4.2.3(Codazzi の方程式) より、

$$\begin{aligned} &(\bar\nabla_X h)(Y,Z) - (\bar\nabla_Y h)(X,Z) = (\tilde R(X,Y)Z)^\perp \\ = \quad & K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)^\perp = 0. \end{aligned}$$

よって、

$$(\bar\nabla_X h)(Y,Z) = (\bar\nabla_Y h)(X,Z)$$

を得る。命題 4.2.4(Ricci の方程式) より、

$$\begin{aligned} &\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle = \langle \tilde R(X,Y)\xi,\eta\rangle \\ = \quad & K(\langle Y,\xi\rangle\langle X,\eta\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Y,\eta\rangle) = 0. \end{aligned}$$

よって、

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle$$

を得る。

Simons の不等式 (4.4 節) の証明で必要になる、Gauss の方程式と Ricci の方程式の言い換えを与えておく。

補題 4.2.6 (Gauss の方程式) M の点 p と $x,y\in T_pM$ に対して

$$\langle Q^T(x,y)z,w\rangle = \langle h(x,w),h(y,z)\rangle - \langle h(x,z),h(y,w)\rangle \qquad (z,w\in T_pM)$$

によって定まる $Q^T(x,y)$ は x,y に関して交代的になる。内積を持つベクトル空間 V 上の交代線形変換全体を $\mathrm{Alt}(V)$ で表すことにすると、Q^T は $L^2(TM,\mathrm{Alt}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。さらに、

$$(\tilde R(x,y)z)^T = R(x,y)z - Q^T(x,y)z \qquad (x,y,z\in TM)$$

を満たす。

証明　$Q^T(x,y)$ が x,y に関して交代的になることは、定義よりわかる。等式

$$(\tilde R(x,y)z)^T = R(x,y)z - Q^T(x,y)z \qquad (x,y,z\in TM)$$

は、Gauss の方程式 (命題 4.2.1) よりわかる。

$$\begin{aligned} \langle Q^T(x,y)z,w\rangle &= \langle h(x,w),h(y,z)\rangle - \langle h(x,z),h(y,w)\rangle \\ &= -\langle h(x,z),h(y,w)\rangle + \langle h(x,w),h(y,z)\rangle \\ &= -\langle Q^T(x,y)w,z\rangle. \end{aligned}$$

よって、$Q^T(x,y)$ は交代線形変換になる。

補題 4.2.7 (Ricciの方程式) M の点 p と $x,y \in T_pM$ に対して

$$\langle Q^\perp(x,y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]x, y\rangle \qquad (\xi, \eta \in T_p^\perp M)$$

によって定まる $Q^\perp(x,y)$ は x,y に関して交代的になる。$Q^\perp$ は $L^2(TM, \mathrm{Alt}(T^\perp M))$ の C^∞ 級断面になる。さらに、

$$(\tilde{R}(x,y)\xi)^\perp = R^\perp(x,y)\xi - Q^\perp(x,y)\xi \qquad (x,y \in TM,\ \xi \in T^\perp M)$$

を満たす。

証明　$Q^\perp(x,y)$ が x,y に関して交代的になることは、$[A_\xi, A_\eta]$ が交代線形変換になることからわかる。等式

$$(\tilde{R}(x,y)\xi)^\perp = R^\perp(x,y)\xi - Q^\perp(x,y)\xi \qquad (x,y \in TM,\ \xi \in T^\perp M)$$

は、Ricci の方程式 (命題 4.2.4) よりわかる。$Q^\perp(x,y)$ が交代線形変換になることは、定義よりわかる。

Gauss の方程式の一つの応用を述べるために、次の補題を準備しておく。

補題 4.2.8 (大槻) $h : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^r$ を対称双線形写像とする。すべての $X, Y \in \mathbf{R}^k$ に対して

$$\langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle \leq \langle h(X,Y), h(X,Y)\rangle$$

が成り立ち、$X \neq 0$ のとき $h(X,X) \neq 0$ と仮定する。このとき、$r \geq k$ が成り立つ。

証明　h を複素双線形写像

$$h : \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^r$$

に拡張する。$h = (h^1, \ldots, h^r)$ と表す。方程式 $h(Z,Z) = 0$ は、連立方程式

$$h^1(Z,Z) = \cdots = h^r(Z,Z) = 0$$

と同値になる。$r < k$ と仮定して矛盾を導く。$r < k$ より、上の連立方程式には 0 でない解 $Z \in \mathbf{C}^k$ が存在する。補題の仮定より、$Z \notin \mathbf{R}^k$ である。そこで、

$$Z = X + \sqrt{-1}Y \qquad (X, Y \in \mathbf{R}^k)$$

と分解すると、$Y \neq 0$ となる。

$$0 = h(Z,Z) = h(X,X) - h(Y,Y) + 2\sqrt{-1}h(X,Y)$$

となるので、$h(X,X) = h(Y,Y) \neq 0$ と $h(X,Y) = 0$ が成り立つ。ところが、

$$0 \neq \langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle \leq \langle h(X,Y), h(X,Y)\rangle = 0$$

となり、矛盾。したがって、$r \geq k$ が成り立つ。

定理 4.2.9 M を $\mathbf{R}^{n+r}$ 内のコンパクト n 次元 Riemann 部分多様体とする。M の各点 p の接ベクトル空間 T_pM の k 次元部分ベクトル空間 T'_p が存在し、T'_p 内の任意の 2 次元部分空間 σ の断面曲率 K_σ が、$K_\sigma \leq 0$ を満たすと仮定する。このとき、$r \geq k$ が成り立つ。

証明　M の $\mathbf{R}^{n+r}$ への挿入を $x : M \to \mathbf{R}^{n+r}$ で表す。M 上の C^∞ 級関数 f を

$$f(p) = \langle x(p), x(p) \rangle \qquad (p \in M)$$

で定める。M はコンパクトだから、f は M のある点 p_0 で最大値をとる。$\mathbf{R}^{n+r}$ の Levi-Civita 接続を $\tilde{\nabla}$ で表すことにすると、任意の接ベクトル $X \in T_{p_0}M$ に対して、

$$0 = Xf = 2\langle \tilde{\nabla}_X x, x(p_0) \rangle = 2\langle X, x(p_0) \rangle$$

が成り立つ。これより、$x(p_0)$ は M の法ベクトルになる。M の第二基本形式を h で表すことにすると、

$$X^2 f = 2\langle \tilde{\nabla}_X X, x(p_0) \rangle + 2\langle X, X \rangle = \langle h(X, X), x(p_0) \rangle + 2\langle X, X \rangle.$$

f は p_0 で最大値をとるので、$X^2 f \leq 0$ が成り立つ。よって、$X \neq 0$ に対して

$$0 \geq -\langle X, X \rangle \geq \langle h(X, X), x(p_0) \rangle$$

となり、特に、$h(X, X) \neq 0$ となる。

M の断面曲率に関する仮定と Gauss の方程式を使うと、$X, Y \in T'_{p_0}$ に対して、

$$0 \leq -\langle R(X, Y)Y, X \rangle = \langle h(X, Y), h(Y, X) \rangle - \langle h(X, X), h(Y, Y) \rangle$$

となり、

$$\langle h(X, X), h(Y, Y) \rangle \leq \langle h(X, Y), h(Y, X) \rangle$$

を得る。以上より、$h : T'_{p_0} \times T'_{p_0} \to T^\perp_{p_0}M$ は補題 4.2.8 の仮定を満たすので、$r \geq k$ が成り立つ。

系 4.2.10 非正断面曲率を持つコンパクト n 次元 Riemann 多様体は、$\mathbf{R}^{2n-1}$ の Riemann 部分多様体にはなり得ない。

4.3　高橋の定理

定義 4.3.1 Riemann 多様体上の C^∞ 級関数 f に対して、$\Delta f = -\mathrm{tr}(\nabla^2 f)$ によって Δ を定める。Δ を **Laplacian** と呼ぶ。$\Delta f = 0$ となる関数 f を**調和関数**と呼ぶ。

補題 4.3.2 M を $\mathbf{R}^N$ 内の Riemann 部分多様体とし、その挿入を $x : M \to \mathbf{R}^N$ で表わす。M の第二基本形式と平均曲率ベクトルをそれぞれ h と H で表わす。M の Levi-Civita 接続と Laplacian をそれぞれ ∇ と Δ とすると、

$$h = \nabla^2 x, \quad \Delta x = -H$$

が成り立つ。特に、M が極小部分多様体になるための必要十分条件は、x が調和関数になることである。

証明 $\mathbf{R}^N$ の Levi-Civita 接続を $\tilde{\nabla}$ で表す。例 3.5.7 より、M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$(\nabla^2 x)(Y,X) = YXx - (\nabla_Y X)x = YX - \nabla_Y X = \tilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y X = h(Y,X)$$

となるので、x の Hessian $\nabla^2 x$ は M の第二基本形式に一致する。

$$\Delta x = -\mathrm{tr}(\nabla^2 x) = -\mathrm{tr}(h) = -H$$

となるので、x の Laplacian Δx は $-H$ に一致する。M が極小部分多様体になるということは $H = 0$ ということであり、x が調和関数になるということは $\Delta x = 0$ ということだから、M が極小部分多様体になることと x が調和関数になることは同値になる。

定理 4.3.3 (高橋) M を $\mathbf{R}^N$ 内の n 次元 Riemann 部分多様体とし、その挿入を $x : M \to \mathbf{R}^N$ で表わす。ある 0 でない定数 λ が存在し、x が $\Delta x = \lambda x$ を満たすと仮定すると、λ は正の定数になり、M は $\mathbf{R}^N$ 内の原点中心で半径 $\sqrt{n/\lambda}$ の球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ の極小部分多様体になる。逆に、M が $\mathbf{R}^N$ 内の原点中心で半径 a の球面 $S^{N-1}(a)$ の極小部分多様体ならば、$\lambda = n/a^2$ とおくと、x は $\Delta x = \lambda x$ を満たす。

証明 まず、ある 0 でない定数 λ が存在し、x が $\Delta x = \lambda x$ を満たすと仮定する。補題 4.3.2 より、

$$-H = \Delta x = \lambda x$$

となる。$\lambda \neq 0$ だから、M の各点でベクトル x は M の法ベクトルになる。よって、M の任意のベクトル場 X に対して、$\langle X, x\rangle = 0$ となり、

$$X\langle x,x\rangle = 2\langle \tilde{\nabla}_X x, x\rangle = 2\langle X, x\rangle = 0.$$

よって、関数 $\langle x,x\rangle$ は局所的に定数になる。そこで、局所的に $\langle x,x\rangle = r^2$ とする。

$$\begin{aligned} -\lambda x &= H = \left\langle H, \frac{x}{r}\right\rangle \frac{x}{r} = \frac{1}{r^2}\sum_i \langle h(e_i,e_i), x\rangle x = \frac{1}{r^2}\sum_i \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, x\rangle x \\ &= -\frac{1}{r^2}\sum_i \langle e_i, \tilde{\nabla}_{e_i} x\rangle x = -\frac{1}{r^2}\sum_i \langle e_i, e_i\rangle x = -\frac{n}{r^2}x. \end{aligned}$$

これより、$\lambda = n/r^2$ となり、λ は正の定数であって、$r = \sqrt{n/\lambda}$ が成り立つ。特に、$\langle x, x\rangle$ は M 全体で一定値 n/λ をとる。したがって、挿入 x の像は球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ に含まれる。

M の球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ 内の第二基本形式を h' とし、平均曲率ベクトルを H' で表わす。さらに、球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ の $\mathbf{R}^N$ 内の第二基本形式を $\tilde{h}$ で表わすことにすると、M の接ベクトル空間上で $h = h' + \tilde{h}$ が成り立つ。よって、

$$H = \sum_i h(e_i, e_i) = \sum_i h'(e_i, e_i) + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i) = H' + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i).$$

H は x に比例しているので、特に $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ に接する成分は 0 になる。よって $H' = 0$ が成り立つ。つまり、M は球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ 内の極小部分多様体になる。

逆に、M は $\mathbf{R}^N$ 内の原点中心で半径 a の球面 $S^{N-1}(a)$ の極小部分多様体であると仮定する。

$$H = \sum_i h(e_i, e_i) = \sum_i h'(e_i, e_i) + \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i) = \sum_i \tilde{h}(e_i, e_i)$$

より、H は x に比例する。よって、

$$\begin{aligned}
-\Delta x &= H = \left\langle H, \frac{x}{a}\right\rangle \frac{x}{a} = \frac{1}{a^2}\sum_i \langle h(e_i, e_i), x\rangle x = \frac{1}{a^2}\sum_i \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, x\rangle x \\
&= -\frac{1}{a^2}\sum_i \langle e_i, \tilde{\nabla}_{e_i} x\rangle x = -\frac{1}{a^2}\sum_i \langle e_i, e_i\rangle x = -\frac{n}{a^2}x.
\end{aligned}$$

そこで、$\lambda = n/a^2$ とおくと、$\Delta x = \lambda x$ が成り立つ。

定理 4.3.4 (高橋) コンパクト等質 Riemann 多様体 M の線形イソトロピー表現が既約のとき、M は球面の極小部分多様体になり得る。

証明　M はコンパクト Riemann 多様体なので、Δ の 0 でない固有値はすべて正で可算個存在し、各固有値の固有空間は有限次元になることが、楕円型偏微分作用素の理論から知られている。そこで、Δ の 0 でない固有値 λ を一つとり、V_λ をその固有空間とする。すなわち、

$$V_\lambda = \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = \lambda f\}.$$

M の等長変換群の単位連結成分を G で表すと、G はコンパクト連結 Lie 群になり、M に等長推移的に作用する。さらに、G は $C^\infty(M)$ に L^2 内積に関して等長的に作用し、G の作用は Δ の作用と可換になるので、固有空間 V_λ を不変にする。V_λ の正規直交基底 $f_1, \ldots, f_N$ をとり、

$$\tilde{x}(p) = (f_1(p), \ldots, f_N(p)) \qquad (p \in M)$$

によって、C^∞ 級写像 $\tilde{x} : M \to \mathbf{R}^N$ を定める。$\mathbf{R}^N$ の内積の $\tilde{x}$ による引戻しは、M 上の G 不変対称 $(0,2)$ 型テンソル $\tilde{g}$ を定める。M の線形イソトロピー表現が既約であるという仮定より、コンパクト Lie 群の表現に関する Schur の補題を使うと、ある 0 でない定数 c が存在し、$\tilde{g} = c^2 g$ が成り立つ。ここで、g は M の Riemann 計量である。そこで、$x = \tilde{x}/c$ とおくと、$x : M \to \mathbf{R}^N$ は等長的挿入になる。さらに、$\Delta x = \lambda x$ が成り立つので、定理 4.3.3 より、$n = \dim M$ とすると、M は $\mathbf{R}^N$ 内の原点中心で半径 $\sqrt{n/\lambda}$ の球面 $S^{N-1}(\sqrt{n/\lambda})$ の極小部分多様体になる。

4.4 Simons の不等式

この節でも $\iota : M \to \tilde{M}$ を Riemann 多様体 $\tilde{M}$ の Riemann 部分多様体として議論する。

補題 4.4.1 $\mathrm{End}(TM)$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle s_1, s_2\rangle = \mathrm{tr}(s_1^* s_2) \qquad (s_1, s_2 \in \mathrm{End}(TM))$$

によって定めると、$\langle\ ,\ \rangle$ はベクトル束 $\mathrm{End}(TM)$ の計量になる。M のシェイプ作用素 A は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面だから、A^* は $L(\mathrm{Sym}(TM), T^\perp M)$ の C^∞ 級断面になり、$A^* \circ A$ は $\mathrm{Sym}(T^\perp M)$ の C^∞ 級断面になる。さらに、$A^* \circ A$ は半正定値になる。

証明 TM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとると、$s_1, s_2 \in \mathrm{End}(TM)$ に対して、

$$\langle s_1, s_2\rangle = \mathrm{tr}(s_1^* s_2) = \sum_i \langle s_1^* s_2(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle s_2(e_i), s_1(e_i)\rangle.$$

特に、

$$\langle s, s\rangle = \sum_i \langle s(e_i), s(e_i)\rangle$$

となり、$\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathrm{End}(TM)$ の計量になることがわかる。

$\xi, \eta \in T^\perp M$ に対して

$$\langle A^* \circ A(\xi), \eta\rangle = \langle A(\xi), A(\eta)\rangle = \langle A_\xi, A_\eta\rangle$$

となるので、$A^* \circ A$ は対称になり、さらに、半正定値になる。

命題 4.4.2 $s \in \mathrm{End}(TM)$ に対して、

$$\mathrm{ad}(s)(t) = [s, t] = s \circ t - t \circ s \qquad (t \in \mathrm{End}(TM))$$

によって、ad を定めると、$s_1, s_2, s_3 \in \mathrm{Sym}(TM)$ に対して $\mathrm{ad}(s_1) \circ \mathrm{ad}(s_2)(s_3) \in \mathrm{Sym}(TM)$ が成り立つ。これより、

$$B(A)(\xi, \eta) = \mathrm{ad}(A_\xi) \circ \mathrm{ad}(A_\eta) \in \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(TM)) \qquad (\xi, \eta \in T^\perp M)$$

によって双線形写像

$$B(A) : T^{\perp}M \times T^{\perp}M \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(TM))$$

が定まる。$T^{\perp}M$ の正規直交基底 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ をとり、

$$\mathrm{tr}(B(A)) = \sum_a B(A)(\xi_a, \xi_a) = \sum_a \mathrm{ad}(A_{\xi_a}) \circ \mathrm{ad}(A_{\xi_a})$$

によって $\mathrm{tr}(B(A))$ を定めると、$\mathrm{tr}(B(A))$ は $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になり、半正定値になる。

証明　ad の定め方より、$x, y \in TM$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle [s_1, [s_2, s_3]] x, y \rangle &= \langle (s_1(s_2 s_3 - s_3 s_2) - (s_2 s_3 - s_3 s_2) s_1) x, y \rangle \\
&= \langle x, (s_3 s_2 s_1 - s_2 s_3 s_1 - s_1 s_3 s_2 + s_1 s_2 s_3) y \rangle \\
&= \langle x, (-(s_2 s_3 - s_3 s_2) s_1 + s_1(s_2 s_3 - s_3 s_2)) y \rangle \\
&= \langle x, [s_1, [s_2, s_3]] y \rangle.
\end{aligned}$$

したがって、$\mathrm{ad}(s_1) \circ \mathrm{ad}(s_2)(s_3) = [s_1, [s_2, s_3]] \in \mathrm{Sym}(TM)$ が成り立つ。
$B(A)$ の定義式

$$B(A)(\xi, \eta) = \mathrm{ad}(A_\xi) \circ \mathrm{ad}(A_\eta) \in \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(TM)) \qquad (\xi, \eta \in T^{\perp}M)$$

より、写像

$$B(A) : T^{\perp}M \times T^{\perp}M \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(TM))$$

は双線形写像になる。$\mathrm{tr}(B(A)) \in \mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(TM))$ を示すために、まず、$s \in \mathrm{Sym}(TM)$ と $t_1, t_2 \in \mathrm{End}(TM)$ に対して

$$\langle [s, t_1], t_2 \rangle = \langle t_1, [s, t_2] \rangle$$

が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}
\langle [s, t_1], t_2 \rangle &= \langle s t_1 - t_1 s, t_2 \rangle = \mathrm{tr}((s t_1 - t_1 s)^* t_2) = \mathrm{tr}((t_1^* s - s t_1^*) t_2) \\
&= \mathrm{tr}(t_1^* s t_2 - s t_1^* t_2) = \mathrm{tr}(t_1^* s t_2 - t_1^* t_2 s) = \mathrm{tr}(t_1^* [s, t_2]) \\
&= \langle t_1, [s, t_2] \rangle
\end{aligned}$$

以上より、$s \in \mathrm{Sym}(TM)$ に対して $\mathrm{ad}(s)$ は $\mathrm{End}(TM)$ の対称線形変換になる。これより、$s, t \in \mathrm{Sym}(TM)$ に対して

$$\langle \mathrm{tr}(B(A)) s, t \rangle = \sum_a \langle \mathrm{ad}(A_{\xi_a}) \mathrm{ad}(A_{\xi_a}) s, t \rangle = \sum_a \langle \mathrm{ad}(A_{\xi_a}) s, \mathrm{ad}(A_{\xi_a}) t \rangle.$$

したがって、$\mathrm{tr}(B(A))$ は $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になり、半正定値になる。

補題 4.4.3 TM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、$x, y \in TM$ と $\xi \in T^\perp M$ に対して、

$$\langle \tilde{R}'_\xi(x), y \rangle = \sum_i (\langle (\tilde{\nabla}_x \tilde{R})(e_i, y)e_i, \xi \rangle + \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(e_i, x)y, \xi \rangle)$$

によって $\tilde{R}'$ を定めると、$\tilde{R}'$ は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。

証明 $\tilde{R}'$ の定め方は正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ のとり方によらず、$L(T^\perp M, \mathrm{End}(TM))$ の C^∞ 級断面になることはすぐにわかる。

$\tilde{R}'$ の定義式の第一項に第 2 Bianchi の恒等式 (定理 3.5.3(5)) を使い、第二項に第 1 Bianchi の恒等式 (定理 3.5.3(2)) を使うと、

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}'_\xi(x), y \rangle &= \sum_i (\langle (\tilde{\nabla}_x \tilde{R})(e_i, y)e_i, \xi \rangle + \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(e_i, x)y, \xi \rangle) \\
&= -\sum_i (\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(y, x)e_i, \xi \rangle + \langle (\tilde{\nabla}_y \tilde{R})(x, e_i)e_i, \xi \rangle) \\
&\quad -\sum_i (\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(x, y)e_i, \xi \rangle + \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(y, e_i)x, \xi \rangle) \\
&= \sum_i (\langle (\tilde{\nabla}_y \tilde{R})(e_i, x)e_i, \xi \rangle + \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(e_i, y)x, \xi \rangle) \\
&= \langle \tilde{R}'_\xi(y), x \rangle
\end{aligned}$$

を得る。したがって、$\tilde{R}'_\xi$ は TM の対称線形変換になり、$\tilde{R}'$ は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。

補題 4.4.4 TM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、$x, y \in TM$ と $\xi \in T^\perp M$ に対して、

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(A)_\xi(x), y \rangle &= \sum_i (2\langle \tilde{R}(e_i, y)h(x, e_i), \xi \rangle + 2\langle \tilde{R}(e_i, x)h(y, e_i), \xi \rangle \\
&\quad -\langle A_\xi(x), \tilde{R}(e_i, y)e_i \rangle - \langle A_\xi(y), \tilde{R}(e_i, x)e_i \rangle \\
&\quad +\langle \tilde{R}(e_i, h(x, y))e_i, \xi \rangle - 2\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i, x)y \rangle)
\end{aligned}$$

によって $\tilde{R}(A)$ を定めると、$\tilde{R}(A)$ は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。

証明 $\tilde{R}(A)$ の定め方は正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ のとり方によらず、$L(T^\perp M, \mathrm{End}(TM))$ の C^∞ 級断面になることはすぐにわかる。

以下で、$\tilde{R}(A)$ の定義式における x と y に関する対称性を示す。定義式の第一項と第二項は、x と y をとりかえると入れ代わる。定義式の第三項と第四項も、x と y をとりかえると入れ代わる。第五項は第二基本形式の対称性から、x と y に関して対称になっている。第六項も x と y に関して対称になっていることを示す。第 1 Bianchi の恒等式 (定理 3.5.3(2)) より、

$$\begin{aligned}
\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i, x)y \rangle &= -\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(x, y)e_i \rangle - \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(y, e_i)x \rangle \\
&= -\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(x, y)e_i \rangle + \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i, y)x \rangle.
\end{aligned}$$

ここで、A_ξ は対称線形変換であり、$\tilde{R}(x,y)$ は交代線形変換だから、

$$\begin{aligned}\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(x,y)e_i\rangle &= \frac{1}{2}(\langle e_i, A_\xi\tilde{R}(x,y)e_i\rangle - \langle\tilde{R}(x,y)A_\xi(e_i), e_i\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\langle e_i, [A_\xi, \tilde{R}(x,y)]e_i\rangle.\end{aligned}$$

さらに、

$$\sum_i \langle e_i, [A_\xi, \tilde{R}(x,y)]e_i\rangle = \mathrm{tr}([A_\xi, \tilde{R}(x,y)]) = 0$$

となり、

$$\begin{aligned}\sum_i \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i,x)y\rangle &= \sum_i(-\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(x,y)e_i\rangle + \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i,y)x\rangle) \\ &= \sum_i \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i,y)x\rangle.\end{aligned}$$

よって、第六項も x と y に関して対称になっている。したがって、$\tilde{R}(A)_\xi$ は TM の対称線形変換になり、$\tilde{R}(A)$ は $L(T^\perp M, \mathrm{Sym}(TM))$ の C^∞ 級断面になる。

定理 4.4.5 (Simons) M を $\tilde{M}$ の極小部分多様体と仮定する。今までと同様にして $\bar{\nabla}A, \bar{\nabla}^2A$ を定め、TM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、

$$\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2A) = \sum_i \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}A$$

とおくと、

$$\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2A) = -A\circ A^*\circ A - \mathrm{tr}(B(A))\circ A + \tilde{R}(A) + \tilde{R}'$$

が成り立つ。

　定理の証明をする前にいくつかの準備をしておく。

補題 4.4.6 M の点 p と $T_p^\perp M$ の正規直交基底 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ をとると、$u, v, z \in T_pM$ に対して

$$Q^T(u,v)z = \sum_a(\langle A_{\xi_a}(v), z\rangle A_{\xi_a}(u) - \langle A_{\xi_a}(u), z\rangle A_{\xi_a}(v))$$

が成り立つ。

証明 Q^T の定義 (補題 4.2.6) と補題 4.1.4 より、任意の $w \in T_pM$ に対して、

$$\begin{aligned}
& \langle Q^T(u,v)z, w\rangle \\
= \ & \langle h(u,w), h(v,z)\rangle - \langle h(u,z), h(v,w)\rangle \\
= \ & \sum_a (\langle h(u,w), \xi_a\rangle\langle h(v,z), \xi_a\rangle - \langle h(u,z), \xi_a\rangle\langle h(v,w), \xi_a\rangle) \\
= \ & \sum_a (\langle A_{\xi_a}(u), w\rangle\langle A_{\xi_a}(v), z\rangle - \langle A_{\xi_a}(u), z\rangle\langle A_{\xi_a}(v), w\rangle) \\
= \ & \left\langle \sum_a (\langle A_{\xi_a}(v), z\rangle A_{\xi_a}(u) - \langle A_{\xi_a}(u), z\rangle A_{\xi_a}(v)), w \right\rangle .
\end{aligned}$$

これが任意の w について成り立つので、

$$Q^T(u,v)z = \sum_a (\langle A_{\xi_a}(v), z\rangle A_{\xi_a}(u) - \langle A_{\xi_a}(u), z\rangle A_{\xi_a}(v))$$

を得る。

補題 4.4.7 M のベクトル場 S, T, U, V に対して

$$(\bar{R}(U,V)h)(S,T) = R^{\perp}(U,V)(h(S,T)) - h(R(U,V)S,T) - h(S, R(U,V)T)$$

とおくと、

$$(\bar{\nabla}_U\bar{\nabla}_V h)(S,T) - (\bar{\nabla}_V\bar{\nabla}_U h)(S,T) = (\bar{R}(U,V)h)(S,T)$$

が成り立つ。

証明 左辺の第一項は、

$$\begin{aligned}
& (\bar{\nabla}_U\bar{\nabla}_V h)(S,T) \\
= \ & \nabla^{\perp}_U((\bar{\nabla}_V h)(S,T)) - (\bar{\nabla}_{\nabla_U V})(S,T) - (\bar{\nabla}_V)(\nabla_U S, T) - (\bar{\nabla}_V)(S, \nabla_U T) \\
= \ & \nabla^{\perp}_U(\nabla^{\perp}_V(h(S,T)) - h(\nabla_V S, T) - h(S, \nabla_V T)) \\
& -\nabla^{\perp}_{\nabla_U V}(h(S,T)) + h(\nabla_{\nabla_U V}S, T) + h(S, \nabla_{\nabla_U V}T) \\
& -\nabla^{\perp}_V(h(\nabla_U S, T)) + h(\nabla_V\nabla_U S, T) + h(\nabla_U S, \nabla_V T) \\
& -\nabla^{\perp}_V(h(S, \nabla_U T)) + h(\nabla_V S, \nabla_U T) + h(S, \nabla_V\nabla_U T).
\end{aligned}$$

これの U と V を入れ変えた項を引き、$\nabla_U V - \nabla_V U = [U,V]$ を使うと、Ricci の公式 (定理 3.5.6) の証明と同様にして、

$$(\bar{\nabla}_U\bar{\nabla}_V h)(S,T) - (\bar{\nabla}_V\bar{\nabla}_U h)(S,T) = (\bar{R}(U,V)h)(S,T)$$

を得る。

補題 4.4.8 M を $\tilde{M}$ の極小部分多様体と仮定する。TM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとると、M の接ベクトル z に対して

$$\sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} h)(e_i, z) = \sum_i (\tilde{R}(e_i, z)e_i)^\perp$$

が成り立つ。

証明　Codazzi の方程式 (命題 4.2.3) より、

$$\sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} h)(e_i, z) = \sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} h)(z, e_i) = \sum_i ((\bar{\nabla}_z h)(e_i, e_i) + (\tilde{R}(e_i, z)e_i)^\perp).$$

ここで、M が極小部分多様体であるという仮定より、

$$\sum_i (\bar{\nabla}_z h)(e_i, e_i) = \bar{\nabla}_z \left(\sum_i h(e_i, e_i) \right) = 0$$

となるので補題を得る。

定理 4.4.5 の証明　M の任意の点 p をとり、p で等式の成り立つことを示す。T_pM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ と任意の元 $x, y \in T_pM$ をとり、p の近傍上のベクトル場 $E_1, \ldots, E_n, X, Y$ に拡張する。その際、任意の $z \in T_pM$ に対して、

$$\nabla_z E_1 = \cdots = \nabla_z E_n = \nabla_z X = \nabla_z Y = 0$$

となるように拡張することができる。

補題 4.4.9

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(\bar{\nabla}^2 h)(x, y) \\ = \ & \sum_i ((\bar{R}(e_i, x)h)(e_i, y) + (\tilde{\nabla}_x (\tilde{R}(E_i, Y)E_i)^\perp)^\perp + (\tilde{\nabla}_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp)^\perp). \end{aligned}$$

証明　以下の計算はすべて点 p で値をとる。

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(\bar{\nabla}^2 h)(x, y) \\ = \ & \sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} h)(x, y) = \sum_i \nabla^\perp_{e_i} ((\bar{\nabla}_{E_i} h)(X, Y)) \\ = \ & \sum_i \nabla^\perp_{e_i} ((\bar{\nabla}_X h)(E_i, Y) + (\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp) \quad (\text{Codazzi の方程式}) \\ = \ & \sum_i ((\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_X h)(E_i, Y) + \nabla^\perp_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp) \\ = \ & \sum_i ((\bar{R}(e_i, x)h)(e_i, y) + (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{E_i} h)(E_i, Y) + \nabla^\perp_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp) \quad (\text{補題 4.4.7}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i ((\bar{R}(e_i,x)h)(e_i,y) + \nabla^{\perp}_X((\bar{\nabla}_{E_i}h)(E_i,Y)) + \nabla^{\perp}_{e_i}(\tilde{R}(E_i,X)Y)^{\perp}) \\
&= \sum_i ((\bar{R}(e_i,x)h)(e_i,y) + \nabla^{\perp}_X(\tilde{R}(E_i,Y)E_i)^{\perp} + \nabla^{\perp}_{e_i}(\tilde{R}(E_i,X)Y)^{\perp}) \quad (\text{補題 } 4.4.8) \\
&= \sum_i ((\bar{R}(e_i,x)h)(e_i,y) + (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i,Y)E_i)^{\perp})^{\perp} + (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(E_i,X)Y)^{\perp})^{\perp}).
\end{aligned}
$$

補題 4.4.9 の右辺の各項を調べる。

補題 4.4.10

$$
\begin{aligned}
\sum_i (\bar{R}(e_i,x)h)(e_i,y) \quad = \quad & \sum_i \Big\{ (\tilde{R}(e_i,x)(h(e_i,y)))^{\perp} + Q^{\perp}(e_i,x)(h(e_i,y)) \\
& -h((\tilde{R}(e_i,x)e_i)^T,y) - h(Q^T(e_i,x)e_i,y) \\
& -h(e_i,(\tilde{R}(e_i,x)y)^T) - h(e_i,Q^T(e_i,x)y) \Big\}.
\end{aligned}
$$

証明 補題 4.4.7 で定めた $\bar{R}$ の第二基本形式への作用の定義と、Gauss の方程式の言い換え (補題 4.2.6)、Ricci の方程式の言い換え (補題 4.2.7) より、

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\bar{R}(e_i,x)h)(e_i,y) \\
= \; & \sum_i \left\{ R^{\perp}(e_i,x)(h(e_i,y)) - h(R(e_i,x)e_i,y) - h(e_i,R(e_i,x)y) \right\} \\
= \; & \sum_i \Big\{ (\tilde{R}(e_i,x)(h(e_i,y)))^{\perp} + Q^{\perp}(e_i,x)(h(e_i,y)) \\
& -h((\tilde{R}(e_i,x)e_i)^T,y) - h(Q^T(e_i,x)e_i,y) \\
& -h(e_i,(\tilde{R}(e_i,x)y)^T) - h(e_i,Q^T(e_i,x)y) \Big\}.
\end{aligned}
$$

補題 4.4.11

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i,Y)E_i)^{\perp})^{\perp} \\
= \; & \sum_i \Big\{ ((\tilde{\nabla}_x\tilde{R})(e_i,y)e_i)^{\perp} + (\tilde{R}(h(x,e_i),y)e_i)^{\perp} + (\tilde{R}(e_i,h(x,y))e_i)^{\perp} \\
& +(\tilde{R}(e_i,y)(h(x,e_i)))^{\perp} - h(x,(\tilde{R}(e_i,y)e_i)^T) \Big\}.
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i,Y)E_i)^{\perp})^{\perp} \\
= \; & \sum_i \Big\{ (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i,Y)E_i))^{\perp} - (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i,Y)E_i)^T)^{\perp} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_i \Big\{((\tilde{\nabla}_x \tilde{R})(E_i, Y)E_i))^{\perp} + (\tilde{R}(\tilde{\nabla}_x E_i, Y)E_i)^{\perp} + (\tilde{R}(E_i, \tilde{\nabla}_x Y)E_i)^{\perp} \\
& +(\tilde{R}(E_i, Y)\tilde{\nabla}_x E_i)^{\perp} - h(x, (\tilde{R}(e_i, y)e_i)^T)\Big\}. \quad (\text{Gauss の公式})
\end{aligned}
$$

ここで、Gauss の公式より、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_x E_i &= \nabla_x E_i + h(x, E_i) = h(x, e_i) \\
\tilde{\nabla}_x Y &= \nabla_x Y + h(x, Y) = h(x, y)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\tilde{\nabla}_x (\tilde{R}(E_i, Y)E_i)^{\perp})^{\perp} \\
= & \sum_i \Big\{((\tilde{\nabla}_x \tilde{R})(e_i, y)e_i)^{\perp} + (\tilde{R}(h(x, e_i), y)e_i)^{\perp} + (\tilde{R}(e_i, h(x, y))e_i)^{\perp} \\
& +(\tilde{R}(e_i, y)(h(x, e_i)))^{\perp} - h(x, (\tilde{R}(e_i, y)e_i)^T)\Big\}.
\end{aligned}
$$

を得る。

補題 4.4.12

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\tilde{\nabla}_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^{\perp})^{\perp} \\
= & \sum_i \Big\{((\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(e_i, x)y)^{\perp} + (\tilde{R}(e_i, h(e_i, x))y)^{\perp} + (\tilde{R}(e_i, x)(h(e_i, y)))^{\perp} \\
& -h(e_i, (\tilde{R}(e_i, x)y)^T)\Big\}.
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
& \sum_i (\tilde{\nabla}_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^{\perp})^{\perp} \\
= & \sum_i \Big\{(\tilde{\nabla}_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y))^{\perp} - (\tilde{\nabla}_{e_i} (\tilde{R}(E_i, X)Y)^T)^{\perp}\Big\} \\
= & \sum_i \Big\{((\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{R})(E_i, X)Y))^{\perp} + (\tilde{R}(\tilde{\nabla}_{e_i} E_i, X)Y)^{\perp} + (\tilde{R}(E_i, \tilde{\nabla}_{e_i} X)Y)^{\perp} \\
& +(\tilde{R}(E_i, X)\tilde{\nabla}_{e_i} Y)^{\perp} - h(e_i, (\tilde{R}(e_i, x)y)^T)\Big\}. \quad (\text{Gauss の公式})
\end{aligned}
$$

ここで、Gauss の公式と M が極小部分多様体であるという仮定より、

$$
\begin{aligned}
\sum_i \tilde{\nabla}_{e_i} E_i &= \sum_i (\nabla_{e_i} E_i + h(e_i, E_i)) = \sum_i h(e_i, e_i) = 0 \\
\tilde{\nabla}_{e_i} X &= \nabla_{e_i} X + h(e_i, X) = h(e_i, x) \\
\tilde{\nabla}_{e_i} Y &= \nabla_{e_i} Y + h(e_i, Y) = h(e_i, y)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\sum_i (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp)^\perp \\
= &\sum_i \Big\{ ((\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{R})(e_i, x)y)^\perp + (\tilde{R}(e_i, h(e_i, x))y)^\perp + (\tilde{R}(e_i, x)(h(e_i, y)))^\perp \\
&-h(e_i, (\tilde{R}(e_i, x)y)^T) \Big\}.
\end{aligned}
$$

を得る。

補題 4.4.13 $\xi \in T_p^\perp M$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 h)(x, y), \xi \rangle \\
= &\langle \tilde{R}(A)_\xi(x), y \rangle + \langle \tilde{R}'_\xi(x), y \rangle \\
&+ \sum_i (\langle Q^\perp(e_i, x)(h(e_i, y)), \xi \rangle - \langle h(Q^T(e_i, x)e_i, y), \xi \rangle - \langle h(e_i, Q^T(e_i, x)y), \xi \rangle).
\end{aligned}
$$

証明 補題 4.4.9 に補題 4.4.11、補題 4.4.12、補題 4.4.10 の結果を代入し、補題 4.1.4、第 1 Bianchi の恒等式 (定理 3.5.3(2))、$\tilde{R}'$ の定義 (補題 4.4.3) と $\tilde{R}(A)$ の定義 (補題 4.4.4) を使うと、

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 h)(x, y), \xi \rangle \\
= &\sum_i \langle (\bar{R}(e_i, x)h)(e_i, y), \xi \rangle + \sum_i \langle (\tilde{\nabla}_x(\tilde{R}(E_i, Y)E_i)^\perp)^\perp, \xi \rangle \\
&+ \sum_i \langle (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(E_i, X)Y)^\perp)^\perp, \xi \rangle \\
= &\sum_i \Big\langle \tilde{R}(e_i, x)(h(e_i, y)) + Q^\perp(e_i, x)(h(e_i, y)) \\
&-h((\tilde{R}(e_i, x)e_i)^T, y) - h(Q^T(e_i, x)e_i, y) \\
&-h(e_i, (\tilde{R}(e_i, x)y)^T) - h(e_i, Q^T(e_i, x)y), \xi \Big\rangle \\
&+ \sum_i \Big\langle (\tilde{\nabla}_x \tilde{R})(e_i, y)e_i + \tilde{R}(h(x, e_i), y)e_i + \tilde{R}(e_i, h(x, y))e_i \\
&+\tilde{R}(e_i, y)(h(x, e_i)) - h(x, (\tilde{R}(e_i, y)e_i)^T), \xi \Big\rangle \\
&+ \sum_i \Big\langle (\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{R})(e_i, x)y + \tilde{R}(e_i, h(e_i, x))y + \tilde{R}(e_i, x)(h(e_i, y)) \\
&-h(e_i, (\tilde{R}(e_i, x)y)^T), \xi \Big\rangle \\
= &\langle \tilde{R}'_\xi(x), y \rangle \\
&+ \sum_i \Big\{ \langle \tilde{R}(e_i, x)(h(e_i, y)), \xi \rangle - \langle A_\xi(y), \tilde{R}(e_i, x)e_i \rangle - \langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i, x)y \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle \tilde{R}(h(x,e_i),y)e_i,\xi\rangle + \langle \tilde{R}(e_i,h(x,y))e_i,\xi\rangle + \langle \tilde{R}(e_i,y)(h(x,e_i)),\xi\rangle \\
&-\langle A_\xi(x),\tilde{R}(e_i,y)e_i\rangle + \langle \tilde{R}(e_i,h(e_i,x))y,\xi\rangle + \langle \tilde{R}(e_i,x)(h(e_i,y)),\xi\rangle \\
&-\langle A_\xi(e_i),\tilde{R}(e_i,x)y\rangle \Big\} \\
&+\sum_i \left\{\langle Q^\perp(e_i,x)(h(e_i,y)),\xi\rangle - \langle h(Q^T(e_i,x)e_i,y),\xi\rangle - \langle h(e_i,Q^T(e_i,x)y),\xi\rangle\right\} \\
= \ &\langle \tilde{R}'_\xi(x),y\rangle + \langle \tilde{R}(A)_\xi(x),y\rangle \\
&+\sum_i \left\{\langle Q^\perp(e_i,x)(h(e_i,y)),\xi\rangle - \langle h(Q^T(e_i,x)e_i,y),\xi\rangle - \langle h(e_i,Q^T(e_i,x)y),\xi\rangle\right\}.
\end{aligned}
$$

Q^T または $Q^\perp$ を含む項を以下で調べる。

補題 4.4.14 $\xi_1,\ldots,\xi_r$ を $T_p^\perp M$ の正規直交基底とすると、次の等式が成り立つ。

$$\sum_i \langle Q^\perp(e_i,x)(h(e_i,y)),\xi\rangle = \sum_a \langle A_{\xi_a}\circ[A_\xi,A_{\xi_a}](x),y\rangle.$$

証明　$Q^\perp$ の定義 (補題 4.2.7)、$Q^\perp(e_i,x)\in \mathrm{Alt}(T^\perp M)$ と補題 4.1.4 より、

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \langle Q^\perp(e_i,x)(h(e_i,y)),\xi\rangle = -\sum_i \langle Q^\perp(e_i,x)\xi, h(e_i,y)\rangle \\
= \ &-\sum_i\sum_a \langle Q^\perp(e_i,x)\xi,\xi_a\rangle\langle h(e_i,y),\xi_a\rangle \\
= \ &-\sum_i\sum_a \langle [A_\xi,A_{\xi_a}](e_i),x\rangle\langle A_{\xi_a}(y),e_i\rangle \\
= \ &\sum_i\sum_a \langle [A_\xi,A_{\xi_a}](x),e_i\rangle\langle A_{\xi_a}(y),e_i\rangle \\
= \ &\sum_a \langle [A_\xi,A_{\xi_a}](x),A_{\xi_a}(y)\rangle = \sum_a \langle A_{\xi_a}\circ[A_\xi,A_{\xi_a}](x),y\rangle.
\end{aligned}
$$

補題 4.4.15

$$-\sum_i \langle h(Q^T(e_i,x)e_i,y),\xi\rangle = -\sum_a \langle A_\xi A_{\xi_a} A_{\xi_a}(x),y\rangle$$

証明　補題 4.1.4 と補題 4.4.6 より、

$$
\begin{aligned}
&-\sum_i \langle h(Q^T(e_i,x)e_i,y),\xi\rangle = -\sum_i \langle A_\xi(y),Q^T(e_i,x)e_i\rangle \\
= \ &\sum_i\sum_a \langle A_\xi(y),\langle A_{\xi_a}(e_i),e_i\rangle A_{\xi_a}(x) - \langle A_{\xi_a}(x),e_i\rangle A_{\xi_a}(e_i)\rangle.
\end{aligned}
$$

ここで、M は極小部分多様体だから、

$$\sum_i \langle A_{\xi_a}(e_i),e_i\rangle = \sum_i \langle h(e_i,e_i),\xi_a\rangle = 0$$

となり、

$$
\begin{aligned}
& -\sum_i \langle h(Q^T(e_i,x)e_i,y),\xi\rangle = -\sum_i\sum_a \langle A_\xi(y),A_{\xi_a}(e_i)\rangle\langle A_{\xi_a}(x),e_i\rangle \\
= & -\sum_i\sum_a \langle A_{\xi_a}A_\xi(y),e_i\rangle\langle A_{\xi_a}(x),e_i\rangle = -\sum_a \langle A_{\xi_a}A_\xi(y),A_{\xi_a}(x)\rangle \\
= & -\sum_a \langle y, A_\xi A_{\xi_a}A_{\xi_a}(x)\rangle.
\end{aligned}
$$

補題 4.4.16

$$
-\langle h(e_i,Q^T(e_i,x)y),\xi\rangle = \sum_a \langle A_{\xi_a}A_\xi A_{\xi_a}(x),y\rangle - \langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle.
$$

証明 補題 4.1.4 と補題 4.4.6 より、

$$
\begin{aligned}
& -\langle h(e_i,Q^T(e_i,x)y),\xi\rangle \\
= & -\sum_i \langle A_\xi(e_i),Q^T(e_i,x)y\rangle \\
= & \sum_i\sum_a \langle A_\xi(e_i),\langle A_{\xi_a}(e_i),y\rangle A_{\xi_a}(x) - \langle A_{\xi_a}(x),y\rangle A_{\xi_a}(e_i)\rangle \\
= & \sum_i\sum_a (\langle A_\xi(e_i),A_{\xi_a}(x)\rangle\langle A_{\xi_a}(e_i),y\rangle - \langle A_\xi(e_i),A_{\xi_a}(e_i)\rangle\langle A_{\xi_a}(x),y\rangle).
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
& \sum_i \langle A_\xi(e_i),A_{\xi_a}(x)\rangle\langle A_{\xi_a}(e_i),y\rangle = \sum_i \langle e_i,A_\xi A_{\xi_a}(x)\rangle\langle e_i,A_{\xi_a}(y)\rangle \\
= & \langle A_\xi A_{\xi_a}(x),A_{\xi_a}(y)\rangle = \langle A_{\xi_a}A_\xi A_{\xi_a}(x),y\rangle.
\end{aligned}
$$

また、

$$
\sum_i \langle A_\xi(e_i),A_{\xi_a}(e_i)\rangle = \langle A_\xi,A_{\xi_a}\rangle = \langle A(\xi),A(\xi_a)\rangle = \langle A^*\circ A(\xi),\xi_a\rangle
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
-\sum_i\sum_a \langle A_\xi(e_i),A_{\xi_a}(e_i)\rangle\langle A_{\xi_a}(x),y\rangle &= -\sum_a \langle A^*\circ A(\xi),\xi_a\rangle\langle A_{\xi_a}(x),y\rangle \\
&= -\left\langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\right\rangle.
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
-\langle h(e_i,Q^T(e_i,x)y),\xi\rangle = \sum_a \langle A_{\xi_a}A_\xi A_{\xi_a}(x),y\rangle - \langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle.
$$

を得る。

定理 4.4.5 の証明の続き　補題 4.4.14、補題 4.4.15、補題 4.4.16 で得た結果を補題 4.4.13 の結果に代入すると、

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{tr}(\bar\nabla^2 h)(x,y),\xi\rangle &= \langle \tilde R(A)_\xi(x),y\rangle + \langle \tilde R'_\xi(x),y\rangle \\
&\quad +\sum_a \langle A_{\xi_a}\circ[A_\xi,A_{\xi_a}](x),y\rangle - \sum_a\langle A_\xi A_{\xi_a}A_{\xi_a}(x),y\rangle \\
&\quad +\sum_a \langle A_{\xi_a}A_\xi A_{\xi_a}(x),y\rangle - \langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle \\
&= \langle \tilde R(A)_\xi(x),y\rangle + \langle \tilde R'_\xi(x),y\rangle \\
&\quad +\sum_a (\langle A_{\xi_a}\circ[A_\xi,A_{\xi_a}](x),y\rangle - \langle [A_\xi,A_{\xi_a}]\circ A_{\xi_a}(x),y\rangle) \\
&\quad -\langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle \\
&= \langle \tilde R(A)_\xi(x),y\rangle + \langle \tilde R'_\xi(x),y\rangle \\
&\quad +\sum_a \langle [A_{\xi_a},[A_\xi,A_{\xi_a}]](x),y\rangle - \langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_a [A_{\xi_a},[A_\xi,A_{\xi_a}]] &= -\sum_a \mathrm{ad}(A_{\xi_a})\mathrm{ad}(A_{\xi_a})(A_\xi) \\
&= -\mathrm{tr}(B(A))(A_\xi)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr}(\bar\nabla^2 h)(x,y),\xi\rangle \\
=\ &\langle \tilde R(A)_\xi(x),y\rangle + \langle \tilde R'_\xi(x),y\rangle - \mathrm{tr}(B(A))(A_\xi)(x),y\rangle - \langle A_{A^*\circ A(\xi)}(x),y\rangle.
\end{aligned}$$

補題 4.1.4 より、

$$\langle h(x,y),\xi\rangle = \langle A_\xi(x),y\rangle$$

だから、

$$\langle (\bar\nabla^2 h)(x,y),\xi\rangle = \langle (\bar\nabla^2 A)_\xi(x),y\rangle$$

となり、

$$\langle \mathrm{tr}(\bar\nabla^2 h)(x,y),\xi\rangle = \langle \mathrm{tr}(\bar\nabla^2 A)_\xi(x),y\rangle.$$

したがって、

$$\mathrm{tr}(\bar\nabla^2 A) = -A\circ A^*\circ A - \mathrm{tr}(B(A))\circ A + \tilde R(A) + \tilde R'$$

を得る。

系 4.4.17 M を曲率 K の定曲率空間 $\tilde M$ の n 次元極小部分多様体と仮定する。このとき、

$$\mathrm{tr}(\bar\nabla^2 A) = nKA - A\circ A^*\circ A - \mathrm{tr}(B(A))\circ A$$

が成り立つ。さらに、M の余次元が 1 のときは、

$$\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A) = nKA - |A|^2 A$$

が成り立つ。

証明　$\tilde{M}$ は曲率 K の定曲率空間だから、補題 3.6.4 より、

$$\tilde{R}(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

が成り立つ。よって、$\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$ となる。これより、定理 4.4.5 の $\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A)$ の表示の中で、$\tilde{R}' = 0$ となる。次に、$\tilde{R}(A)$ を計算する。補題 4.4.4 と $\tilde{R}$ の表示より、

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{R}(A)_\xi(x), y\rangle \\
= \ & \sum_i (2\langle \tilde{R}(e_i,y)h(x,e_i),\xi\rangle + 2\langle \tilde{R}(e_i,x)h(y,e_i),\xi\rangle \\
& -\langle A_\xi(x), \tilde{R}(e_i,y)e_i\rangle - \langle A_\xi(y), \tilde{R}(e_i,x)e_i\rangle \\
& +\langle \tilde{R}(e_i,h(x,y))e_i,\xi\rangle - 2\langle A_\xi(e_i), \tilde{R}(e_i,x)y\rangle) \\
= \ & K\sum_i (2\langle \langle y,h(x,e_i)\rangle e_i - \langle e_i,h(x,e_i)\rangle y,\xi\rangle \\
& +2\langle \langle x,h(y,e_i)\rangle e_i - \langle e_i,h(y,e_i)\rangle x,\xi\rangle \\
& -\langle A_\xi(x), \langle y,e_i\rangle e_i - \langle e_i,e_i\rangle y\rangle - \langle A_\xi(y), \langle x,e_i\rangle e_i - \langle e_i,e_i\rangle x\rangle \\
& +\langle \langle h(x,y),e_i\rangle e_i - \langle e_i,e_i\rangle h(x,y),\xi\rangle - 2\langle A_\xi(e_i), \langle x,y\rangle e_i - \langle e_i,y\rangle x\rangle) \\
= \ & K(-\langle A_\xi(x),y\rangle + n\langle A_\xi(x),y\rangle - \langle A_\xi(y),x\rangle + n\langle A_\xi(y),x\rangle \\
& -n\langle h(x,y),\xi\rangle - \sum_i \langle A_\xi(e_i),e_i\rangle\langle x,y\rangle + 2\sum_i \langle A_\xi(e_i),x\rangle\langle e_i,y\rangle) \\
= \ & Kn\langle A_\xi(x),y\rangle. \qquad (M \text{ は極小部分多様体だから } \sum_i \langle A_\xi(e_i),e_i\rangle = 0)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A) = nKA - A\circ A^*\circ A - \mathrm{tr}(B(A))\circ A$$

が成り立つ。

次に、M の余次元が 1 の場合を考える。M の各点で任意の $\xi \in T^\perp M$ は ξ_1 と線形従属になるので、A_ξ は A_{ξ_1} と線形従属になり、

$$\mathrm{tr}(B(A))\circ A(\xi) = [A_{\xi_1}, [A_{\xi_1}, A_\xi]] = 0.$$

したがって、$\mathrm{tr}(B(A))\circ A = 0$ となる。次に

$$\langle A^*\circ A(\xi_1), \xi_1\rangle = \langle A(\xi_1), A(\xi_1)\rangle = |A|^2$$

となるので、$A^*\circ A(\xi_1) = |A|^2\xi_1$。よって、

$$A\circ A^*\circ A(\xi_1) = |A|^2 A(\xi_1).$$

すなわち、$A \circ A^* \circ A = |A|^2 A$ が成り立つ。以上より、

$$\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A) = nKA - |A|^2 A$$

が成り立つ。

補題 4.4.18 M を $n+r$ 次元 Riemann 多様体内の n 次元 Rieamnn 部分多様体とすると、M のシェイプ作用素 A は、

$$\langle A \circ A^* \circ A + \mathrm{tr}(B(A)) \circ A, A\rangle \leq \left(2 - \frac{1}{r}\right) |A|^4$$

を満たす。

証明　補題 4.4.1 より、

$$A^* \circ A : T^{\perp}M \to T^{\perp}M$$

は半正定値対称線形変換だから、非負固有値を持ち、対角化可能である。よって、$T_p^{\perp}M$ の正規直交基底 $\xi_1 \dots, \xi_r$ が存在し、

$$A^* \circ A(\xi_a) = \lambda_a^2 \xi_a \qquad (1 \leq a \leq r)$$

となる。

$$\begin{aligned}
\langle A \circ A^* \circ A, A\rangle &= \sum_a \langle A \circ A^* \circ A(\xi_a), A(\xi_a)\rangle = \sum_a \lambda_a^2 \langle A(\xi_a), A(\xi_a)\rangle \\
&= \sum_a \lambda_a^2 \langle A^* \circ A(\xi_a), \xi_a\rangle = \sum_a \lambda_a^4.
\end{aligned}$$

命題 4.4.2 の証明中示したように、$s \in \mathrm{Sym}(TM)$ に対して $\mathrm{ad}(s)$ は $\mathrm{End}(TM)$ の対称線形変換になることに注意して、$B(A)$ の定義 (命題 4.4.2) を使うと、

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr}(B(A)) \circ A, A\rangle = \sum_b \langle \mathrm{tr}(B(A)) \circ A(\xi_b), A(\xi_b)\rangle \\
&= \sum_{a,b} \langle \mathrm{ad}(A_{\xi_a})\mathrm{ad}(A_{\xi_a})A_{\xi_b}, A_{\xi_b}\rangle = \sum_{a,b} \langle \mathrm{ad}(A_{\xi_a})A_{\xi_b}, \mathrm{ad}(A_{\xi_a})A_{\xi_b}\rangle \\
&= \sum_{a,b} |[A_{\xi_a}, A_{\xi_b}]|^2 = \sum_{a \neq b} |[A_{\xi_a}, A_{\xi_b}]|^2.
\end{aligned}$$

最後の $|[A_{\xi_a}, A_{\xi_b}]|^2$ を評価するために、次の補題を準備する。

補題 4.4.19 $S \in \mathrm{Sym}(\mathbf{R}^n)$ と $T \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$|[S, T]|^2 \leq 2|S|^2|T|^2$$

が成り立つ。

証明 S は対称だから、S を対角化する正規直交基底をとることにより、S は対角行列であると仮定してよい。そこで、S の対角成分を s_i とし、$T = [t_{ij}]$ としておく。このとき、$[S, T]$ の (i, j) 成分は $(s_i - s_j)t_{ij}$ になるので、

$$|[S,T]|^2 = \sum_{i,j}(s_i - s_j)^2 t_{ij}^2 \leq \max(s_i - s_j)^2 \sum_{i,j} t_{ij}^2 = \max(s_i - s_j)^2 |T|^2.$$

ここで、(i, i) 成分のみ 1 で他の成分は 0 になる行列を E_i で表し、$(s_{i_0} - s_{j_0})^2 = \max(s_i - s_j)^2$ とすると、

$$\max(s_i - s_j)^2 = (s_{i_0} - s_{j_0})^2 = \langle E_{i_0} - E_{j_0}, S\rangle^2 \leq 2|S|^2.$$

したがって、

$$|[S,T]|^2 \leq 2|S|^2|T|^2$$

が成り立つ。

補題 4.4.18 の証明の続き 補題 4.4.19 より、

$$\langle \mathrm{tr}(B(A)) \circ A, A\rangle = \sum_{a \neq b} |[A_{\xi_a}, A_{\xi_b}]|^2 \leq 2 \sum_{a \neq b} |A_{\xi_a}|^2 |A_{\xi_b}|^2 = 2 \sum_{a \neq b} \lambda_a^2 \lambda_b^2.$$

すでに得ている結果と合わせると、

$$\begin{aligned} \langle A \circ A^* \circ A + \mathrm{tr}(B(A)) \circ A, A\rangle &\leq \sum_a \lambda_a^4 + 2 \sum_{a \neq b} \lambda_a^2 \lambda_b^2 \\ &= 2\left(\sum_a \lambda_a^2\right)^2 - \sum_a \lambda_a^4. \end{aligned}$$

ここで、Cauchy-Schwarz の不等式より、

$$\left(\sum_a \lambda_a^2\right)^2 = \left(\sum_a 1 \cdot \lambda_a^2\right)^2 \leq \sum_b 1 \sum_a \lambda_a^4 = r \sum_a \lambda_a^4$$

となるので、

$$\frac{1}{r}\left(\sum_a \lambda_a^2\right)^2 \leq \sum_a \lambda_a^4.$$

以上より、

$$\langle A \circ A^* \circ A + \mathrm{tr}(B(A)) \circ A, A\rangle \leq \left(2 - \frac{1}{r}\right)|A|^4$$

が成り立つ。

定義 4.4.20 θ を n 次元 Riemann 多様体 M 上の 1 次微分形式とする。$\nabla\theta$ は M 上の $(0,2)$ 型テンソル場になり、

$$\mathrm{div}\theta = \mathrm{tr}(\nabla\theta) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\theta)(e_i)$$

によって M 上の C^∞ 級関数 $\mathrm{div}\theta$ を定める。ただし、$e_1,\ldots,e_n$ は M の局所的な正規直交ベクトル場である。$\mathrm{div}\theta$ を θ の**発散**と呼ぶ。

補題 4.4.21 θ をコンパクト Riemann 多様体 M 上の 1 次微分形式とすると、

$$\int_M \mathrm{div}\theta = 0$$

が成り立つ。

証明　M が向き付け可能の場合は、M に向きを定め体積要素を vol とすると、M 上の関数 f に対して

$$\int_M f = \int_M f\mathrm{vol}.$$

特に、

$$\int_M \mathrm{div}\theta = \int_M \mathrm{div}\theta\mathrm{vol}.$$

M が向き付け可能でない場合は、二重被覆写像 $\pi : \tilde{M} \to M$ で、$\tilde{M}$ が向き付け可能なものが存在する。π による M の Riemann 計量の M への引き戻しは $\tilde{M}$ の Riemann 計量になり、π は局所的等長写像になる。$\tilde{M}$ の体積要素を vol で表すと、M 上の関数 f に対して

$$\int_M f = \frac{1}{2}\int_{\tilde{M}} f\circ\pi\mathrm{vol}.$$

π は局所的等長写像になっているので、$(\mathrm{div}\theta)\circ\pi = \mathrm{div}(\pi^*\theta)$ が成り立つので、

$$\int_M \mathrm{div}\theta = \frac{1}{2}\int_{\tilde{M}} \mathrm{div}\theta\circ\pi\mathrm{vol} = \frac{1}{2}\int_{\tilde{M}} \mathrm{div}(\pi^*\theta)\mathrm{vol}.$$

が成り立つ。よって、補題を示すためには、M が向きの付いたコンパクト Riemann 多様体の場合に示せば十分である。

M の任意の点 x をとり、その近傍で定義された正の向きの正規直交ベクトル場 $e_1,\ldots,e_n$ を $\nabla_{(e_i)_x}e_j = 0$ を満たすようにとる。このとき、

$$[e_i,e_j]_x = \nabla_{(e_i)_x}e_j - \nabla_{(e_j)_x}e_i = 0$$

となることに注意しておく。$\theta_i = \theta(e_i)$ とおくと、点 x において

$$\mathrm{div}\theta = \sum_i(\nabla_{e_i}\theta)(e_i) = \sum_i(\nabla_{e_i}(\theta(e_i)) - \theta(\nabla_{e_i}e_i)) = \sum_i e_i\theta_i$$

となる。$e^1, \ldots, e^n$ を $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底とし、

$$*\theta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \theta_i e^1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}^i \wedge \cdots \wedge e^n$$

によって $(n-1)$ 次微分形式 $*\theta$ を定める。$*\theta$ は正の向きの正規直交ベクトル場のとり方によらず、M 上の $(n-1)$ 次微分形式を定めることがわかる。(M に向きがないと $*\theta$ は定まらない。) さらに、点 x では

$$\begin{aligned} d(*\theta)(e_1, \ldots, e_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} e_i((*\theta)(e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n)) \\ &\quad + \sum_{j<k} (-1)^{j+k} (*\theta)([e_j, e_k], e_1, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} e_i (-1)^{i+1} \theta_i = \mathrm{div}\theta. \end{aligned}$$

よって

$$d(*\theta) = \mathrm{div}\theta \mathrm{vol}$$

となり、Stokes の定理より

$$\int_M \mathrm{div}\theta \mathrm{vol} = \int_M d(*\theta) = 0.$$

定理 4.4.22 (Simons の不等式) M を定曲率 1 の $(n+r)$ 次元球面 $S^{n+r}(1)$ 内のコンパクト極小部分多様体とする。このとき、M のシェイプ作用素 A は

$$\int_M \left(|A|^2 - \frac{n}{2 - 1/r} \right) |A|^2 \geq 0$$

を満たす。

証明

$$\theta(X) = \langle \bar{\nabla}_X A, A \rangle \qquad (X \in TM)$$

によって M 上の 1 次微分形式 θ を定める。定義より、

$$\begin{aligned} -\langle \mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A), A \rangle &= -\sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} A, A \rangle \\ &= -\sum_i e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} A, A \rangle + \sum_i \langle \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} A, A \rangle + \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} A, \bar{\nabla}_{e_i} A \rangle \\ &= -\mathrm{div}\theta + \mathrm{tr}\langle \bar{\nabla} A, \bar{\nabla} A \rangle. \end{aligned}$$

よって、補題 4.4.21 と補題 4.4.18 より、

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_M \mathrm{tr}\langle\bar{\nabla}A, \bar{\nabla}A\rangle = \int_M \mathrm{div}\theta - \int_M \langle\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A), A\rangle \\
&= -\int_M \langle\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 A), A\rangle \\
&= \int_M (-n|A|^2 + \langle A\circ A^*\circ A, A\rangle + \langle\mathrm{tr}(B(A))\circ A, A\rangle) \\
&\leq \int_M \left\{-n|A|^2 + \left(2-\frac{1}{r}\right)|A|^4\right\} \\
&= \left(2-\frac{1}{r}\right)\int_M \left(|A|^2 - \frac{n}{2-1/r}\right)|A|^2.
\end{aligned}$$

したがって、不等式

$$\int_M \left(|A|^2 - \frac{n}{2-1/r}\right)|A|^2 \geq 0$$

を得る。

系 4.4.23 定理 4.4.22 と同じ仮定のもとで、さらに M は連結であると仮定する。このとき、$|A|^2$ の値に関して次のいずれか一つが成り立つ。

(1) ある点 $p \in M$ が存在し、$|A|_p^2 > \dfrac{n}{2-1/r}$。

(2) 恒等的に $|A|^2 = 0$ が成り立つ、すなわち、M は全測地的球面 $S^n(1)$ になる。

(3) 恒等的に $|A|^2 = \dfrac{n}{2-1/r}$ が成り立つ。

証明　(1) を否定する。すなわち、すべての点で

$$|A|^2 \leq \frac{n}{2-1/r}$$

が成り立つと仮定する。

$$|A|^2 - \frac{n}{2-1/r} \leq 0$$

となり、定理 4.4.22 より

$$0 \geq \int_M \left(|A|^2 - \frac{n}{2-1/r}\right)|A|^2 \geq 0,$$

すなわち、

$$\int_M \left(|A|^2 - \frac{n}{2-1/r}\right)|A|^2 = 0.$$

定理 4.4.22 の証明中に示したことより、

$$\int_M \mathrm{tr}\langle\bar{\nabla}A, \bar{\nabla}A\rangle = 0$$

となり、$\bar{\nabla}A = 0$ が成り立つ。よって、M 上の任意のベクトル場 X に対して

$$X|A|^2 = X\langle A, A\rangle = 2\langle\bar{\nabla}_X A, A\rangle = 0$$

となり、M の連結性より、$|A|^2$ は M 上定数になる。積分が 0 になることから

$$\left(|A|^2 - \frac{n}{2-1/r}\right)|A|^2 = 0$$

となり、恒等的に

$$|A|^2 = 0 \quad \text{または} \quad |A|^2 = \frac{n}{2-1/r}.$$

$|A|^2 = 0$ のときは、M は全測地的になり、$M = S^n$ となる。

命題 4.4.24 M を曲率 K の定曲率空間内の n 次元極小部分多様体とし、M のシェイプ作用素を A で表し、スカラー曲率を τ で表すと、

$$\tau = Kn(n-1) - |A|^2$$

が成り立つ。

証明 命題 4.2.5 より、

$$\begin{aligned}
&K(\langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle) \\
&= \langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle h(X, Z), h(Y, W)\rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z)\rangle
\end{aligned}$$

となるので、M が極小部分多様体であることから、

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_{i,j}\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j}(K(\langle e_j, e_j\rangle\langle e_i, e_i\rangle - \langle e_i, e_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle) \\
&\quad -\langle h(e_i, e_j), h(e_j, e_i)\rangle + \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)\rangle) \\
&= Kn(n-1) - \sum_{i,j}\langle h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)\rangle.
\end{aligned}$$

ここで、補題 4.1.4 より、

$$\langle A_{\xi_a}(e_i), e_j\rangle = \langle h(e_i, e_j), \xi_a\rangle = h_{ij}^a$$

とおくことができ、

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\langle h(e_i,e_j),h(e_j,e_i)\rangle &= \sum_{i,j,a}(h^a_{ij})^2=\sum_{i,j,a}\langle A_{\xi_a}(e_i),e_j\rangle^2\\ &= \sum_{i,a}\langle A_{\xi_a}(e_i),A_{\xi_a}(e_i)\rangle=|A|^2.\end{aligned}$$

したがって、

$$\tau=Kn(n-1)-|A|^2$$

が成り立つ。

定理 4.4.25 定理 4.4.22 と同じ仮定のもとで、

$$\int_M\left(n(n-1)-\frac{n}{2-1/r}-\tau\right)(n(n-1)-\tau)\geq 0$$

が成り立つ。

証明　命題 4.4.24 の結果を定理 4.4.22 に適用すればよい。

系 4.4.26 定理 4.4.22 と同じ仮定のもとで、さらに M は連結であると仮定する。このとき、M のスカラー曲率 τ の値に関して次のいずれか一つが成り立つ。

(1) ある点 $p\in M$ が存在し、$\tau_p<n(n-1)-\dfrac{n}{2-1/r}$。

(2) 恒等的に $\tau=n(n-1)$ が成り立ち、M は全測地的球面 S^n になる。

(3) 恒等的に $\tau=n(n-1)-\dfrac{n}{2-1/r}$ が成り立つ。

証明　命題 4.4.24 の結果を系 4.4.23 に適用すればよい。