数理物質科学研究科

理工学研究科

微分幾何学II

等質空間と対称空間
改題：等質空間と形状空間

田崎博之

2004年度

数理物質科学研究科
理工学研究科

微分幾何学 II

Differential Geometry II

開講授業科目概要

微分幾何学の基本的な研究対象である等質空間と対称空間に関する講義を行う。これらを論じるために必要なリー群とリー代数の基礎的事項の準備の後、等質空間と対称空間の微分幾何学的性質を解説する。

目次

第1章　Lie群とLie環

1.1　Lie群とLie環

定義 1.1.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

注意 1.1.2 定義 1.1.1 では、Lie 群は可算開基を持つと仮定しなかったが、連結 Lie 群は可算開基を持つことを後で示す (系 1.2.2)。

例 1.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、V の正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。

証明 $\dim V = n$ とする。$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V | f$ は線形写像$\}$ とおく。V の基底をとり、$\mathrm{End}(V)$ の元にこの基底に関する表現行列を対応させれば、$\mathrm{End}(V)$ と n^2 次元 Euclid 空間の間の微分同型写像になる。表現行列の成分が $\mathrm{End}(V)$ の座標になる。行列式 $\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ は $\mathrm{End}(V)$ の座標の多項式で表わされるので連続であり、

$$GL(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) | \det f \neq 0\}$$

だから、$GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合である。特に、$GL(V)$ は n^2 次元多様体になる。群演算

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V); (x, y) \mapsto xy$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の二次式で表わされるので C^∞ 級写像であり、

$$GL(V) \to GL(V); x \mapsto x^{-1}$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の分数式で表わされるので C^∞ 級写像である (Cramer の公式)。

定義 1.1.4 Lie 群 G の元 g に対して微分同型写像 L_g, R_g を

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ g による**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 X は、G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

注意 1.1.5 Lie 群 G の単位元 e を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとっておけば、各 $g \in G$ に対して $(L_g(U); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は g を含む局所座標近傍になる。右移動を使っても同様にできる。

定義 1.1.6 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

例 1.1.7 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 1.1.8 V をベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表わす。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

証明　定め方より $[\ ,\ ] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ は双線形写像である。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}
& [X, Y] = XY - YX = -[Y, X], \\
& [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
= \ & [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
= \ & XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY \\
& + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{End}(V)$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

定理 1.1.9 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表わす。すると、$\mathfrak{g}$ は G 上のベクトル場全体の成す Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

証明 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{X}(G)$ の部分ベクトル空間になることは定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (dL_g)_x(Y_x) = Y_{gx} \quad (x \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係より

$$(dL_g)_x([X,Y]_x) = [X,Y]_{gx} \quad (x \in G)$$

となり、$[X,Y] \in \mathfrak{g}$。よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環である。

α が線形写像になることは定義からわかる。$X \in \mathfrak{g}, \alpha(X) = 0$ とすると、任意の $g \in G$ に対し

$$X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$$

だから、$X = 0$。よって $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ となり、α は単射。他方 $X \in T_e(G)$ に対して $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ とおき、$\tilde{X}$ が左不変ベクトル場になることを示せば、α が全射になることがわかる。$(U; x_1, \ldots, x_n)$ を G の単位元 e を含む局所座標近傍とする。$G \times G \to G; (x,y) \mapsto xy$ は連続だから、e を含む開近傍 V で $VV = \{xy | x, y \in V\} \subset U$ を満たすものをとることができる。

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_e$$

とおく。注意 1.1.5 より任意の $g \in G$ に対して、$(L_g(V); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は g を含む局所座標近傍になる。そこで $y_i = x_i \circ L_g^{-1}$ とおくと $gx \in L_g(V)$ $(x \in V)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{gx} &= (dL_{gx})_e(X) = d(L_g \circ L_x)_e(X) = (dL_g)_x(dL_x)_e(X) \\
&= (dL_g)_x \left(\sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)(dL_g)_x \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x .
\end{aligned}$$

ここで

$$\left((dL_g)_x \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) ([L_g(U), y_k]) = \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) ([U, y_k \circ L_g]) = \delta_{jk}$$

だから

$$(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx}$$

となり

$$\tilde{X}_{gx} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx}.$$

$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy = L_x(y)$ は C^∞ 級写像だから、各 i, j に対して

$$V \to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞ 級写像になる。よって、各 j について

$$L_g(V) \to \mathbf{R}; gx \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞ 級写像である。したがって $\tilde{X}$ は G 上のベクトル場である。$\tilde{X}$ は定め方より左不変。したがって α は線形同型写像である。

定義 1.1.10 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

定義 1.1.11 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f : G \to H$ が群の準同型写像でもあるとき、f を **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、f を **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と H は**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、f を **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、f を **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

1.2　連結 Lie 群

定理 1.2.1 G を連結 Lie 群とし、U を G の単位元 e の近傍とする。このとき $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ が成り立つ。ただし、$U^n = \{g_1 \dots g_n | g_i \in U\}$。

証明　$U^{-1} = \{g^{-1} | g \in U\}$ も e の近傍になるので、$V = U \cap U^{-1}$ は e の近傍である。$H = \cup\{V^n | n \in \mathbf{N}\}$ とおく。$V \subset U$ だから、$G = H$ を示せばよい。$g, h \in H$ に対してある自然数 m, n があって $g \in V^m, h \in V^n$ となる。よって $gh \in V^{m+n} \subset H$。$g = g_1 \dots g_m,\ g_i \in V$ とすると、$g^{-1} = g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$ で $g_i^{-1} \in V$ だ

から $g^{-1} \in V^m \subset H$。したがって H は G の部分群である。V は e の近傍で $V \subset H$ だから、任意の $h \in H$ に対して $L_h(V)$ は h の近傍になり $L_h(V) \subset H$。したがって H は G の開集合である。G を H の剰余類によって分解すると、

$$G = H \cup (\cup\{L_g(H) | g \in G, g \notin H\})$$

となり各 $L_g(H)$ は G の開集合だから、H は G の閉集合である。G は連結だから $G = H$ が成り立つ。

系 1.2.2 連結 Lie 群は可算開基を持つ。

証明 G を連結 Lie 群とし単位元 e のコンパクト近傍 U をとる。群演算の連続性より各 U^n はコンパクトになり、定理 1.2.1 より $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$。一般に多様体はコンパクト部分集合の可算族の合併になることと可算開基を持つことは同値になる。したがって G は可算開基を持つ。

命題 1.2.3 G を Lie 群とし G の単位元を含む連結成分を G_0 とすると、G_0 は G の正規部分群であり、さらに Lie 部分群である。

証明 $\tau : G \times G \to G; (g, h) \mapsto gh^{-1}$ とすると、τ は連続写像だから $\tau(G_0 \times G_0)$ は連結になる。$e = \tau(e, e) \in \tau(G_0 \times G_0)$ より $\tau(G_0 \times G_0) \subset G_0$ が成り立つ。したがって、G_0 は G の部分群になる。任意の $g \in G$ に対して $L_g \circ R_{g^{-1}}$ は連続写像だから $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ は連結になり、$e = L_g \circ R_{g^{-1}}(e) \in L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ より $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0) \subset G_0$ が成り立つ。したがって、G_0 は G の正規部分群になる。また単位元を含む連結成分 G_0 は G の開集合になるので、特に部分多様体になっている。$\tau : G \times G \longrightarrow G$ は C^∞ 級写像だから G_0 への制限 $\tau_{G_0} : G_0 \times G_0 \longrightarrow G_0$ も C^∞ 級写像になり G_0 は Lie 群である。よって G_0 は G の Lie 部分群である。

補題 1.2.4 Lie 群が可算開基を持つための必要十分条件は、連結成分の個数が高々可算になることである。

証明 Lie 群が可算開基を持てば連結成分の個数は高々可算になる。逆に Lie 群 G の連結成分の個数が高々可算だとする。G の単位元の連結成分 G_0 は命題 1.2.3 より連結 Lie 群になるので、系 1.2.2 より可算開基を持つ。G の連結成分は G_0 の剰余類に一致し G_0 の各剰余類は G_0 に微分同型だから可算開基を持つ。したがって G も可算開基を持つ。

注意 1.2.5 この節の結果は連結 Lie 群が満たす性質を述べているが、どのような Lie 群が連結になるかについては述べていない。行列で表現できる具体的な Lie 群が連結になるかどうか、もし連結でないならば連結成分はどれだけあるかなどは Lie 群の構造に関する基本事項の後で論じることにする。

1.3　一般線形群

命題 1.3.1 V を n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n, \mathbf{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ は同型になる。

証明　$v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とし、$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して f の $v_1, \ldots, v_n$ に関する表現行列を $R(f)$ で表す。つまり、

$$f[v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_n]R(f)$$

となる。このとき、

$$R : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$$

は代数の同型写像になる。R は線形同型写像だから特に微分同型写像である。
　以上のことから、R は Lie 環の同型写像

$$R : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$$

を与え、R の $GL(V)$ への制限は Lie 群の同型写像

$$R|_{GL(V)} : GL(V) \to GL(n, \mathbf{R})$$

を与える。

補題 1.3.2 多様体 M 上のベクトル場 X, Y の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ における局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \quad Y_x = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad (x \in U)$$

としたとき、ベクトル場 $[X, Y]$ の U における局所表示は

$$[X, Y]_x = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \xi^i(x) \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i}(x) - \eta^i(x) \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}(x) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \quad (x \in U)$$

である。

定理 1.3.3 $GL(n, \mathbf{R})$ は例 1.1.3 の証明より $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{} : \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}\ ;\ X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

証明　定理 1.1.9 を $GL(n,\mathbf{R})$ に適用すると $\tilde{} = \alpha^{-1}$ となるので、$\tilde{}$ は線形同型写像である。あとは $\tilde{}$ が Lie 環の準同型写像になることを示せばよい。(i,j)-成分のみが 1 で他の成分は 0 になる n 次正方行列を E_{ij} で表すと、$\{E_{ij}|1 \le i,j \le n\}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の基底になる。その双対基底を $\{x_{ij}|1 \le i,j \le n\}$ で表すと、x_{ij} は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の座標になる。$GL(n,\mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の開集合で $e \in GL(n,\mathbf{R})$ だから、$X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と十分小さい $t \in \mathbf{R}$ に対して $e + tX \in GL(n,\mathbf{R})$ となることに注意しておく。$g \in GL(n,\mathbf{R})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_g &= (dL_g)_e(X) = (dL_g)_e\left(\left.\frac{d}{dt}(e+tX)\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}L_g(e+tX)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(g+tgX)\right|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gX)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)x_{kj}(X)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g .
\end{aligned}
$$

したがって補題 1.3.2 を使うと $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}), g \in GL(n,\mathbf{R})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{X},\tilde{Y}]_g \\
= &\sum_{i,j,p,q=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g)x_{rq}(X)\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)x_{kj}(Y)\right)}{\partial x_{pq}}\right. \\
&\qquad \left. -\sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g)x_{rq}(Y)\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)x_{kj}(X)\right)}{\partial x_{pq}}\right\}\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
= &\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g)x_{rk}(X)x_{kj}(Y) - \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g)x_{rk}(Y)x_{kj}(X)\right\}\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gXY - gYX)\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(g[X,Y])\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
= &\widetilde{[X,Y]}_g .
\end{aligned}
$$

よって、

$$[\tilde{X},\tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}$$

となり、$\tilde{}$ は Lie 環の準同型である。

注意 1.3.4 定理 1.3.3 の Lie 環の同型写像 $\tilde{}: \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ を $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環と

みなすことにする。命題 1.3.1 の同型より、有限次元ベクトル空間 V に対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

1.4　一径数部分群

定義 1.4.1 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。I を実数の開区間とし、M 上の曲線 $c : I \to M$ が

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

を満たすとき、c を X の**積分曲線**と呼ぶ。

補題 1.4.2 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。実数 t_0 と M の各点 $x \in M$ に対して、X の積分曲線 $c : I \to M$ で $t_0 \in I,\ c(t_0) = x$ を満たすものが存在する。また $c_1, c_2 : I \to M$ が $c_1(t_0) = c_2(t_0) = x$ を満たす X の積分曲線ならば $c_1 = c_2$ が成り立つ。

証明　x を含む M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。X の U における局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad (x \in U)$$

とする。U において問題になっている等式

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

の局所表示は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}$$

となる。したがって c は

$$\frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)), \quad x_i \circ c(t_0) = x_i(x) \quad (1 \leq i \leq n)$$

を満たせばよい。これは Euclid 空間の開集合における常微分方程式であり a_i は C^∞ 級関数だから t_0 を含む開区間 I と $c : I \to U$ が存在し上の常微分方程式を満たす。この曲線 c が求めるものである。

次に積分曲線の一意性を示そう。M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $c_1(I), c_2(I) \subset U$ を満たすものが存在する場合は、局所座標 $x_1, \ldots, x_n$ を使うと

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_{c_1(t)}, \quad \frac{dc_2}{dt}(t) = X_{c_2(t)} \quad (t \in I)$$

は Euclid 空間の開集合における常微分方程式になり、常微分方程式の解の一意性から $c_1 = c_2$ となる。$c_1(I), c_2(I)$ が M の 1 つの局所座標近傍に含まれない場合を考えよう。$t_0 < s, s \in I$ に対して $0 < \varepsilon$ と $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s$ を次の条件を満たすようにとる。$I_i = (t_{i-1} - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ $(1 \leq i \leq k)$ とおくと各 i について $c_1(I_i), c_2(I_i)$ は M の 1 つの局所座標近傍に含まれる。先に示したことを使うと $c_1(t_1) = c_2(t_1), \ldots, c_1(t_k) = c_2(t_k)$ を帰納的に示すことができる。特に $c_1(s) = c_2(s)$。$t_0 > s, s \in I$ に対しても同様にして $c_1(s) = c_2(s)$ となり、$c_1 = c_2$ が成り立つ。

定義 1.4.3 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 1.4.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 1.1.9 によって $\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X を c に対応させる。

証明　次の (1),(2) のステップにわけて定理を証明する。

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものが存在し、c は G の一径数部分群である。

(2) 定理で定めた 2 つの対応はお互いの逆対応になる。

(1) 補題 1.4.2 より、$\delta > 0$ と X の積分曲線 $a : (-\delta, \delta) \to G$ で $a(0) = e$ を満たすものが存在する。$|s| < \delta/2$ となる s を 1 つ固定して

$$b_1(t) = a(s+t),\ b_2(t) = a(s)a(t) \quad (|t| < \delta/2)$$

とおく。すると、$t \mapsto b_1(t)$ は X の積分曲線になり、

$$\frac{d}{dt}b_2(t) = (dL_{a(s)})_{a(t)}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right) = (dL_{a(s)})_{a(t)}(X_{a(t)}) = X_{a(s)a(t)}$$

だから $t \mapsto b_2(t)$ も X の積分曲線になる。さらに、

$$b_1(0) = a(s) = a(s)e = a(s)a(0) = b_2(0)$$

だから補題 1.4.2 の一意性より、

$$b_1(t) = b_2(t) \quad (|t| < \delta/2).$$

結局

$$a(s+t) = a(s)a(t) = a(t)a(s) \quad (|s|, |t| < \delta/2)$$

が成り立つ。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となるように自然数 k をとり

$$c(t) = a\left(\frac{t}{k}\right)^k$$

として写像 $c : \mathbf{R} \to G$ を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$|t/k| < \delta/2, |t/l| < \delta/2$ となる自然数 k, l をとったとき、

$$a\left(\frac{t}{k}\right)^k = a\left(\frac{t}{kl}\right)^{kl} = a\left(\frac{t}{l}\right)^l$$

が成り立つので、上の c は k のとり方によらずに定まっている。$c(0) = a(0) = e$ は明らか。以下で、c が G の一径数部分群であることを示そう。$t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となる自然数 k をとる。t を含む開集合 I で $s \in I$ ならば $|s/k| < \delta/2$ となるものをとる。すると $s \in I$ に対して $c(s) = a(s/k)^k$ となるので、c は I において C^∞ 級写像である。よって $c : \mathbf{R} \to G$ は C^∞ 級写像になる。任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $|s/k|, |t/k| < \delta/4$ となる自然数 k をとると、$|s/k|, |t/k|, |(s+t)/k| < \delta/2$ となり、

$$\begin{aligned} c(s)c(t) &= a\left(\frac{s}{k}\right)^k a\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(a\left(\frac{s}{k}\right) a\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \\ &= a\left(\frac{s+t}{k}\right)^k = c(s+t). \end{aligned}$$

したがって $c : \mathbf{R} \to G$ は G の一径数部分群になる。

次に c が X の積分曲線であることを示そう。$s \in \mathbf{R}$ に対して、$t \in (s-\delta, s+\delta)$ とすると、$c(t) = c(s)c(t-s) = L_{c(s)}(c(t-s))$ だから、

$$\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=s} = (dL_{c(s)})_e \left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) = (dL_{c(s)})_e(X_e) = X_{c(s)}.$$

したがって c は X の積分曲線である。

(2) $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群 c は $\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たすので、c に対応する $\mathfrak{g}$ の元は X になる。逆に G の一径数部分群 c に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X は $X_e = \frac{dc}{dt}(0)$ を満たす。(1) の最後で示したことは $\mathfrak{g}$ の元 X と G の一径数部分群 c が $\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たせば c は X の積分曲線になることである。したがって X に対応する G の一径数部分群は c になる。

例 1.4.5 $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n, \mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元と同一視する。$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$ で表すと、定理 1.1.9 の証明中の計算より $\tilde{X}_g = gX$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ となる。したがって、X に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。行列の指数関数 : $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ を使うと $c(t) = e^{tX}$ となる。

例 1.4.6 行列の指数関数の射影分解による計算法について述べる。n 次複素正方行列 A の固有多項式を $\gamma_A(t)$ で表す。$\gamma_A(t)$ を因数分解し $\gamma_A(t) = (t-\lambda_1)^{p_1}\dots(t-\lambda_k)^{p_k}$ とする。次に部分分数展開:

$$\frac{1}{\gamma_A(t)} = \frac{h_1(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}} + \dots + \frac{h_k(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

を行う。ここで各 $h_i(t)$ の次数は $p_i - 1$ 以下である。

$$1 = h_1(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}} + \dots + h_k(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

となり、$\gamma_A(t)$ は $(t-\lambda_i)^{p_i}$ を因子に持っているので $\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ は t の多項式である。実際に部分分数展開に現われる $h_i(t)$ を求めるには、この形にして $h_i(t)$ の係数が未知数の方程式とみなして解けばよい。その際に、右辺を展開して次数をそろえようとすると計算が大変になるので、$h_i(t)$ の係数を求めるために $t = \lambda_i$ を代入し一階微分して $t = \lambda_i$ を代入するという操作を $p_i - 1$ 階微分まで続けた方が計算が簡単になる。$\pi_i(t) = h_i(t)\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ とおくと $\pi_i(t)$ も t の多項式になり

$$1 = \pi_1(t) + \dots + \pi_k(t), \quad (t-\lambda_i)^{p_i}\pi_i(t) = h_i(t)\gamma_A(t)$$

が成り立つ。$P_i = \pi_i(A)$ とおくと

$$I_n = P_1 + \dots + P_k.$$

これを射影分解と呼ぶ。Cayley-Hamilton の定理より

$$(A-\lambda_i I_n)^{p_i}P_i = h_i(A)\gamma_A(A) = 0.$$

以上の結果を使うと

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{i=1}^{k} e^{tA}P_i = \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i I_n + t(A-\lambda_i I_n)}P_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t I_n}e^{t(A-\lambda_i I_n)}P_i = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{p_i-1}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i.
\end{aligned}$$

例 1.4.7 例 1.4.6 の計算方法に従って、3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \theta & a \\ -\theta & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に関する指数関数を計算する。A の固有多項式 $\gamma_A(t)$ は

$$\begin{aligned}\gamma_A(t) &= \begin{vmatrix} t & -\theta & -a \\ \theta & t & -b \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -\theta \\ \theta & t \end{vmatrix} t = (t^2+\theta^2)t \\ &= (t+\sqrt{-1}\theta)(t-\sqrt{-1}\theta)t.\end{aligned}$$

$\theta = 0$ の場合は簡単に計算できるので、$\theta \neq 0$ の場合を考える。

$$\frac{1}{\gamma_A(t)} = \frac{h_1}{t+\sqrt{-1}\theta} + \frac{h_2}{t-\sqrt{-1}\theta} + \frac{h_3}{t}$$

とおく。h_1, h_2, h_3 を未知数とみなしてこれらを求める。分母をはらうと

$$1 = h_1(t-\sqrt{-1}\theta)t + h_2(t+\sqrt{-1}\theta)t + h_3(t^2+\theta^2).$$

$t = -\sqrt{-1}\theta$ を代入すると

$$1 = h_1(-2\sqrt{-1}\theta)(-\sqrt{-1}\theta) = -2\theta^2 h_1, \quad h_1 = -\frac{1}{2\theta^2}.$$

$t = \sqrt{-1}\theta$ を代入すると

$$1 = h_2 2\sqrt{-1}\theta\sqrt{-1}\theta = -2\theta^2 h_2, \quad h_2 = -\frac{1}{2\theta^2}.$$

$t = 0$ を代入すると

$$1 = h_3\theta^2, \quad h_3 = \frac{1}{\theta^2}.$$

よって

$$1 = -\frac{1}{2\theta^2}(t-\sqrt{-1}\theta)t - \frac{1}{2\theta^2}(t+\sqrt{-1}\theta)t + \frac{1}{\theta^2}(t^2+\theta^2)$$

を得る。

$$\begin{aligned}\pi_1(t) &= -\frac{1}{2\theta^2}(t-\sqrt{-1}\theta)t = -\frac{1}{2\theta^2}(t^2-\sqrt{-1}\theta t), \\ \pi_2(t) &= -\frac{1}{2\theta^2}(t+\sqrt{-1}\theta)t = -\frac{1}{2\theta^2}(t^2+\sqrt{-1}\theta t), \\ \pi_3(t) &= \frac{1}{\theta^2}(t^2+\theta^2)\end{aligned}$$

とおくと $P_i = \pi_i(A)$ によって P_i が定まる。

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \theta & a \\ -\theta & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \theta & a \\ -\theta & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 & \theta b \\ 0 & -\theta^2 & -\theta a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より

$$
\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{1}{2\theta^2}\left(\begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 & \theta b \\ 0 & -\theta^2 & -\theta a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}\theta^2 & \sqrt{-1}\theta a \\ -\sqrt{-1}\theta^2 & 0 & \sqrt{-1}\theta b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{2\theta^2}\begin{bmatrix} -\theta^2 & -\sqrt{-1}\theta^2 & \theta(b-\sqrt{-1}a) \\ \sqrt{-1}\theta^2 & -\theta^2 & \theta(-a-\sqrt{-1}b) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{-1}/2 & (-b+\sqrt{-1}a)/2\theta \\ -\sqrt{-1}/2 & 1/2 & (a+\sqrt{-1}b)/2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
P_2 &= -\frac{1}{2\theta^2}\left(\begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 & \theta b \\ 0 & -\theta^2 & -\theta a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}\theta^2 & \sqrt{-1}\theta a \\ -\sqrt{-1}\theta^2 & 0 & \sqrt{-1}\theta b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{2\theta^2}\begin{bmatrix} -\theta^2 & \sqrt{-1}\theta^2 & \theta(b+\sqrt{-1}a) \\ -\sqrt{-1}\theta^2 & -\theta^2 & \theta(-a+\sqrt{-1}b) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{-1}/2 & (-b-\sqrt{-1}a)/2\theta \\ \sqrt{-1}/2 & 1/2 & (a-\sqrt{-1}b)/2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
P_3 &= \frac{1}{\theta^2}\left(\begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 & \theta b \\ 0 & -\theta^2 & -\theta a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b/\theta \\ 0 & 0 & -a/\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{-\sqrt{-1}\theta t}P_1 + e^{\sqrt{-1}\theta t}P_2 + P_3 \\
&= (\cos\theta t - \sqrt{-1}\sin\theta t)\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{-1}/2 & (-b+\sqrt{-1}a)/2\theta \\ -\sqrt{-1}/2 & 1/2 & (a+\sqrt{-1}b)/2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad +(\cos\theta t + \sqrt{-1}\sin\theta t)\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{-1}/2 & (-b-\sqrt{-1}a)/2\theta \\ \sqrt{-1}/2 & 1/2 & (a-\sqrt{-1}b)/2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b/\theta \\ 0 & 0 & -a/\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t & (\sin\theta t \cdot a + (1-\cos\theta t)b)/\theta \\ -\sin\theta t & \cos\theta t & ((1-\cos\theta t)a + \sin\theta t \cdot b)/\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.5　指数写像

定義 1.5.1 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.4.4 で存在を示した X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 1.5.2 例 1.4.5 で示したように $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、$GL(n, \mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 1.5.3 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.4.4 の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

証明　$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.4.4 の対応で対応する G の一径数部分群を $t \mapsto c(t, X)$ と書くことにする。$s \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{d}{dt}c(st, X) = sX_{c(st,X)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

となるので、$t \mapsto c(st, X)$ は $sX \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群になる。よって $c(st, X) = c(t, sX)$ となり $t = 1$ とおくと

$$c(s, X) = c(1, sX) = \exp sX.$$

これより $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ に一致する。

命題 1.5.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

証明　$X_1, \ldots, X_n$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし $u_1, \ldots, u_n$ をその双対基底とすると、$u_1, \ldots, u_n$ は $\mathfrak{g}$ の座標になる。G の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $e \in U,\ x_1(e) = \ldots = x_n(e) = 0$ を満たすものをとっておく。$\sum_{i=1}^n u_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群を $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ と書くことにする。

$$\frac{d}{dt}c(t; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i (X_i)_{c(t;u_1,\ldots,u_n)}$$

だから、各 X_i の U における局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x$$

とすると $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ は

$$\frac{d}{dt} x_j(c(t; u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji}(c(t; u_1, \ldots, u_n))$$

を満たす。常微分方程式の解はパラメーターに関して滑らかだから、写像

$$(t, u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1(c(t; u_1, \ldots, u_n)), \ldots, x_n(c(t; u_1, \ldots, u_n)))$$

は 0 の近傍で C^∞ 級写像になる。

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right) = c(1; u_1, \ldots, u_n)$$

だから、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は 0 のある開近傍 N で C^∞ 級写像である。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対してある自然数 p が存在し $\frac{1}{p}X \in N$ となる。そこで X の開近傍 O を $\frac{1}{p}O \subset N$ となるようにとると

$$\exp(Z) = \exp\left(\frac{1}{p}Z\right)^p \quad (Z \in O)$$

だから $\exp$ は O において C^∞ 級写像である。したがって、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像になる。

定理 1.5.5 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 $\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明　$X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d\exp_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\exp(tX)\right|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d\exp_e = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$。定理 1.1.9 より $d\exp_e$ は線形同型写像になる。逆関数定理より、$\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

定義 1.5.6 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。定理 1.5.5 より $\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍 U の間の微分同型写像になるので、$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ をとると $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$ は U における局所座標系になり $u_1(e) = \ldots = u_n(e) = 0$ を満たす。$(u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ に関する G の**標準座標系**と呼び、$(U; u_1, \ldots, u_n)$ を G の**標準座標近傍**と呼ぶ。

命題 1.5.7 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(Xf)(g) &= \left.\frac{d}{dt} f(g \exp tX)\right|_{t=0} \\ ([X,Y]f)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0}\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明　接ベクトル X_g は曲線 $t \mapsto g \exp tX$ の $t=0$ における速度ベクトルになっているので

$$(Xf)(g) = X_g(f) = \left.\frac{d}{dt} f(g \exp tX)\right|_{t=0}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}(XYf)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY)\right|_{s=t=0} \qquad (\text{先に示したことより}) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1} \exp sX)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=0}\right. \\ &\quad \left.\left. + \left.\frac{\partial}{\partial s} f(g \exp tY \exp sX)\right|_{s=0}\right)\right|_{t=0} \qquad (\text{Leibniz の法則より}) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0} \\ &\quad +(YXf)(g).\end{aligned}$$

したがって

$$([X,Y]f)(g) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0}.$$

系 1.5.8 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y]=0$ となる。

証明　$f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\right|_{s=t=0} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\right|_{s=t=0} = 0.\end{aligned}$$

したがって $[X,Y]=0$ となる。

定義 1.5.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 1.5.8 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

1.6　準同型写像

命題 1.6.1 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 1.6.2 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 1.1.9 の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

証明　$X \in \mathfrak{g}$ に対して、$df_e(X_e) \in T_e(H)$ を H 上の左不変ベクトル場に拡張したものが $df(X)$ になる。任意の $g \in G$ に対して、

$$df_g(X_g) = df_g \circ (dL_g)_e(X_e) = d(f \circ L_g)_e(X_e).$$

ここで $x \in G$ に対して

$$(f \circ L_g)(x) = f(gx) = f(g)f(x) = (L_{f(g)} \circ f)(x)$$

だから、

$$\begin{aligned} df_g(X_g) &= d(f \circ L_g)_e(X_e) = d(L_{f(g)} \circ f)(X_e) \\ &= (dL_{f(g)})_e \circ df_e(X_e) = df(X)_{f(g)}. \end{aligned}$$

よって $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$df_g(X_g) = df(X)_{f(g)}, \quad df_g(Y_g) = df(Y)_{f(g)} \quad (g \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係を使うと

$$df_g([X, Y]_g) = [df(X), df(Y)]_{f(g)} \quad (g \in G)$$

となる。特に

$$df_e([X, Y]_e) = [df(X), df(Y)]_e$$

が成立し、定理 1.1.9 より $[df(X), df(Y)]$ は H 上の左不変ベクトル場だから、

$$df([X, Y]) = [df(X), df(Y)].$$

したがって $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型になる。

定義 1.6.3 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$ に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を f の**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 1.6.2 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 1.6.4 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} d(id_A) &= \alpha_A^{-1} \circ d(id_A)_e \circ \alpha_A = \alpha_A^{-1} \circ id_{T_e(A)} \circ \alpha_A = id \\ d(g \circ f) &= \alpha_C^{-1} \circ d(g \circ f)_e \circ \alpha_A = \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ df_e \circ \alpha_A \\ &= \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ \alpha_B \circ \alpha_B^{-1} \circ df_e \circ \alpha_A = dg \circ df \end{aligned}$$

系 1.6.5 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$ を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

証明

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) = d(id_B) = id$$

同様にして $d(f^{-1}) \circ df = id$ となり $d(f^{-1}) = df^{-1}$。したがって df は Lie 環の同型写像になる。

命題 1.6.6 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は H の指数写像である。

証明　Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になるので (命題 1.6.1)、$t \mapsto f(\exp tX)$ は H の一径数部分群になる。定理 1.4.4 よりある $Y \in \mathfrak{h}$ が存在して、

$$f(\exp tX) = \exp tY \quad (t \in \mathbf{R})$$

となる。$t = 0$ で両辺を微分すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \left.\frac{d}{dt} f(\exp tX)\right|_{t=0} = df_e(X_e) \\ (\text{右辺}) &= \left.\frac{d}{dt} \exp tY\right|_{t=0} = Y_e. \end{aligned}$$

したがって、$df_e(X_e) = Y_e$ となり $df(X) = Y$。これより、$f(\exp tX) = \exp(t df(X))$ が成り立つ。特に $t = 1$ とすると、$f(\exp X) = \exp(df(X))$。

定義 1.6.7 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 1.6.8 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

証明 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} & [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) \\ = \ & \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ = \ & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] \quad (\text{Jacobi 律}) \\ = \ & \mathrm{ad}([X, Y])(Z) \end{aligned}$$

となるので $[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}([X, Y])$ が成り立ち、ad は Lie 環の表現になる。

定義 1.6.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 1.6.10 Lie 群 G の元 g に対して $\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

証明 $L_g \circ R_{g^{-1}}$ は G の自己同型写像だから、系 1.6.5 より $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像になる。特に $\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となる。命題 1.6.6 より

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。命題 1.6.4 を使うと $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(gh) &= d(L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}}) = d(L_g \circ L_h \circ R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}}) \\ &= d(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}}) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) \circ d(L_h \circ R_{h^{-1}}) \\ &= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h) \end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。

次に Ad が C^∞ 級写像になることを示そう。$GL(\mathfrak{g})$ における座標は $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ とその双対基底 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を使って $GL(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R};\ u \mapsto \theta_i(u(X_j))$ と表すことができる。したがって $G \to \mathbf{R};\ g \mapsto \theta_i(\mathrm{ad}(g)(X_j))$ が C^∞ 級関数になることを示せばよい。定理 1.1.9 の証明と同様、

$$\theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j)) = \theta_i(\alpha_G^{-1} \circ dL_g \circ dR_{g^{-1}} \circ \alpha_G(X_j))$$

は g に関する C^∞ 級関数になる。

最後に Ad の微分が $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致することを示そう。命題 1.5.7 より、$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)tY))\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)f(g)\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)\right)\Big|_{s=0} f(g)
\end{aligned}
$$

したがって

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\Big|_{s=0} = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$$

となり

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)\Big|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)$$

が成り立つので、Ad の微分は ad になる。

定義 1.6.11 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(V)$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 1.6.12 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 1.5.2 より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\Big|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

1.7 接束 Lie 群

定理 1.7.1 G を Lie 群とする。G の群演算を

$$\mu : G \times G \to G\ ;\ (g,h) \mapsto gh$$

で表すと、μ は接ベクトル束の間の写像

$$d\mu : T(G \times G) \to TG$$

を誘導する。ここで $T(G \times G)$ は自然に $TG \times TG$ と同型になるので、

$$d\mu : TG \times TG \to TG$$

とみなすことができる。同様に逆元を対応させる写像を

$$\nu : G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

で表すことにすると、ν は接ベクトル束の間の写像

$$d\nu : TG \to TG$$

を誘導する。この $d\mu$ と $d\nu$ により TG は Lie 群になり、G の単位元 e における接ベクトル 0_e が TG の単位元になる。

証明 TG の元 u, v, w に対して G の曲線 a, b, c を

$$u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t), \quad v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} b(t), \quad w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c\,(t)$$

となるようにとる。

$$\begin{aligned}
(u \cdot v) \cdot w &= d\mu(d\mu(u, v), w) \\
&= d\mu\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)b(t),\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c\,(t)\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a(t)b(t))c\,(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)(b(t)c\,(t)) \\
&= d\mu(u, d\mu(v, w)) \\
&= u \cdot (v \cdot w)
\end{aligned}$$

となるので、$d\mu$ の定める演算は結合律を満たす。恒等的に G の単位元 e に値を持つ曲線の速度ベクトル 0_e は、この演算の単位元になる。

次に

$$\begin{aligned}
u \cdot d\nu(u) &= d\mu\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t),\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)^{-1}\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a(t)a(t)^{-1} \\
&= 0_e
\end{aligned}$$

となるので、$d\nu(u)$ は u の逆元になる。以上で TG が Lie 群になることがわかった。

定義 1.7.2 Lie 群 G の接ベクトル束 TG に定理 1.7.1 で定めた Lie 群の構造を入れたものを、G の**接束 Lie 群**と呼ぶことにする。

G の単位元 e における接ベクトル空間を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同一視する。このとき、TG の単位元 0_e における接ベクトル空間は

$$T_{0_e}(TG) \cong T_eG \times T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

となる。以後この同型によって TG の 0_e における接ベクトル空間と $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ とを同一視する。

G と TG の指数写像をそれぞれ $\exp$ と $\exp_T$ で表す。

命題 1.7.3 $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ に対して

$$\exp_T(x, y) = (d\exp)_x y$$

が成り立つ。

証明 まず $s \mapsto (d\exp)_{sx} sy$ が TG の一径数部分群であることを示す。$a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
& ((d\exp)_{ax} ay) \cdot ((d\exp)_{bx} by) \\
= \ & \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay) \right) \cdot \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(bx + tby) \right) \\
= \ & d\mu \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(bx + tby) \right) \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(\exp(ax + tay), \exp(bx + tby)) \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ax + tay) \exp(bx + tby) \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp((a + b)x + t(a + b)y) \\
= \ & (d\exp)_{(a+b)x} (a + b)y.
\end{aligned}$$

次に

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\exp)_{tx} ty = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

となるので、$\exp_T s(x, y) = (d\exp)_{sx} sy$ がわかる。したがって $\exp_T(x, y) = (d\exp)_x y$ となる。

補題 1.7.4 $u_g \in T_gG$ と $v_h \in T_hG$ に対して

$$u_g \cdot v_h = (dR_h)_g u_g + (dL_g)_h v_h$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} u_g \cdot v_h &= d\mu_{(g,h)}(u_g, v_h) \\ &= d\mu_{(g,h)}(u_g, 0_h) + d\mu_{(g,h)}(0_g, v_h) \\ &= (dR_h)_g u_g + (dL_g)_h v_h \end{aligned}$$

Lie 群の接ベクトル束は自明になる。実際

$$\iota_R : G \times \mathfrak{g} \to TG\ ;\ (g,u) \mapsto dR_g u$$

によって写像 ι_R を定めると、ι_R は微分同型写像になる。したがって ι_R から $G \times \mathfrak{g}$ に Lie 群構造が定まる。その Lie 群を $G \times_R \mathfrak{g}$ で表し、元を $(g,u)_R$ で表すことにする。

命題 1.7.5 $(g,u)_R, (h,v)_R \in G \times_R \mathfrak{g}$ に対して

$$(g,u)_R \cdot (h,v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R$$

が成り立つ。

証明 ι_R 通して補題 1.7.4 を使って計算すればよい。

$$\begin{aligned} \iota_R((g,u)_R \cdot (h,v)_R) &= dR_g u \cdot dR_h v \\ &= (dR_h)_g dR_g u + (dL_g)_h dR_h v \\ &= dR_{gh} u + (dR_h)_g dL_g v \\ &= dR_{gh} u + dR_{gh} \mathrm{Ad}(g) v \\ &= dR_{gh}(u + \mathrm{Ad}(g)v) \\ &= \iota_R(gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R \end{aligned}$$

となるので、

$$(g,u)_R \cdot (h,v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R$$

が成り立つ。

ι_R と同様に

$$\iota_L : G \times \mathfrak{g} \to TG\ ;\ (g,u) \mapsto dL_g u$$

によって写像 ι_L を定めると、ι_L は微分同型写像になる。したがって ι_L から $G \times \mathfrak{g}$ に Lie 群構造が定まる。その Lie 群を $G \times_L \mathfrak{g}$ で表し、元を $(g,u)_L$ で表すことにする。次の命題 1.7.6 は後で使うわけではないが、命題 1.7.5 に対応している。

命題 1.7.6 $(g,u)_L, (h,v)_L \in G \times_L \mathfrak{g}$ に対して

$$(g,u)_L \cdot (h,v)_L = (gh, \mathrm{Ad}(h)^{-1}u + v)_L$$

が成り立つ。

証明　ι_L 通して補題 1.7.4 を使って計算すればよい。

$$\begin{aligned}
\iota_L((g,u)_L \cdot (h,v)_L) &= dL_g u \cdot dL_h v \\
&= (dR_h)_g dL_g u + (dL_g)_h dL_h v \\
&= (dL_g)_h dR_h u + dL_{gh} v \\
&= dL_{gh} \mathrm{Ad}(h)^{-1} u + dL_{gh} v \\
&= dL_{gh}(\mathrm{Ad}(h)^{-1}u + v)
\end{aligned}$$

となるので、

$$(g,u)_L \cdot (h,v)_L = (gh, \mathrm{Ad}(h)^{-1}u + v)_L$$

が成り立つ。

$G \times_R \mathfrak{g}$ の指数写像を $\exp_R$ で表す。

$$p : G \times_R \mathfrak{g} \to G \ ; \ (g,u)_R \mapsto g$$

とおく。

補題 1.7.7 p は Lie 群の準同型写像になり、$p \circ \exp_R = \exp \circ dp$ が成り立つ。

証明　命題 1.7.5 より、p は Lie 群の準同型写像になる。よって命題 1.6.6 より $p \circ \exp_R = \exp \circ dp$ が成り立つ。

$G \times_R \mathfrak{g}$ の指数写像 $\exp_R$ をさらに詳しく調べるためにアファイン変換群を導入する。有限次元実ベクトル空間 V に対して、V 上のアファイン変換の全体を $A(V)$ で表す。

$$A(V) = \left\{ \begin{bmatrix} P & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; P \in GL(V),\ v \in V \right\}$$

とみなす。$x \in V$ に対して

$$\begin{bmatrix} P & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Px + v \\ 1 \end{bmatrix}$$

によって V への作用を定めることにより、$A(V)$ を V 上のアファイン変換の全体とみなすことができる。$A(V)$ の指数写像を $\exp_A$ とおき、これを求めてみよう。$A(V)$ の Lie 環 $\mathfrak{a}(V)$ は

$$\mathfrak{a}(V) = \left\{ \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; X \in \mathfrak{gl}(V),\ v \in V \right\}$$

となる。

補題 1.7.8 $A(V)$ の指数写像 $\exp_A$ は次の式で与えられる。

$$\exp_A \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^X & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}(V) \right).$$

証明 各自然数 k に対して

$$\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つことは

$$\begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{k+1} & X^k v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることからわかる。したがって

$$\begin{aligned} \exp_A \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^X & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

補題 1.7.9 $G \times_R \mathfrak{g}$ から $A(\mathfrak{g})$ への写像 ρ_R を

$$\rho_R(g,u)_R = \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(g) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ((g,u)_R \in G \times_R \mathfrak{g})$$

で定めると、ρ_R は Lie 群の準同型写像になる。

証明 命題 1.7.5 より

$$(g,u)_R \cdot (h,v)_R = (gh, u + \mathrm{Ad}(g)v)_R.$$

他方

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(g) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(h) & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Ad}(gh) & u + \mathrm{Ad}(g)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので、ρ_R は準同型写像になる。

定理 1.7.10 $G \times_R \mathfrak{g}$ の指数写像 $\exp_R$ は次で与えられる。

$$\exp_R(x,y) = \left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)_R \qquad ((x,y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).$$

証明　補題 1.7.7 より、$\exp_R(x,y)$ の第一成分は $\exp x$ になる。次に補題 1.7.8 と補題 1.7.9 より

$$\begin{aligned}
\rho_R \exp_R(x,y) &= \exp_A d\rho_R(x,y) \\
&= \exp_A \begin{bmatrix} \mathrm{ad}x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\mathrm{ad}x} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり、$\exp_R(x,y)$ の第二成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y$ になる。したがって

$$\exp_R(x,y) = \left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)_R$$

となる。

定理 1.7.11 $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(d\exp)_x y = dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)$$

が成り立つ。

証明　命題 1.7.3 と定理 1.7.10 より

$$\begin{aligned}
(d\exp)_x y &= \exp_T(x,y) \\
&= \exp_T d\iota_R(x,y) \\
&= \iota_R(\exp_R(x,y)) \\
&= \iota_R\left(\exp x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right) \\
&= dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

補題 1.7.12 次の収束冪級数の等式が成り立つ。

$$e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^{k-1}\qquad (t\in\mathbf{R}).$$

証明 任意の $t\in\mathbf{R}$ に対して

$$e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k-1}=e^{-t}\frac{e^{t}-1}{t}=\frac{1-e^{-t}}{t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^{k-1}$$

が成り立つ。

定理 1.7.13 $x,y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$(d\exp)_x y=dL_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)$$

が成り立つ。

証明 定理 1.7.11 と補題 1.7.12 より

$$\begin{aligned}(d\exp)_x y &= dR_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\mathrm{Ad}(\exp x)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\left(e^{-\mathrm{ad}x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right)\\ &= dL_{\exp x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}x)^{k-1}y\right).\end{aligned}$$

が成り立つ。

1.8 閉 Lie 部分群

定義 1.8.1 Lie 群 H が Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

補題 1.8.2 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の Lie 部分群 H の包含写像を $\iota : H\to G$ とすると $d\iota:\mathfrak{h}\to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

証明 ι の微分 $d\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は定理 1.6.2 より Lie 環の準同型写像になり、H が G の部分多様体であることから単射になる。したがって $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

定義 1.8.3 補題 1.8.2 において、$d\iota(\mathfrak{h})$ を **Lie 部分群** H **に対応する Lie 部分環** と呼ぶ。今後、$d\iota$ によって $\mathfrak{h}$ と $d\iota(\mathfrak{h})$ を同一視する。

命題 1.8.4 G を Lie 群とし、H を G の Lie 部分群とする。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、指数写像を $\exp_G, \exp_H$ とする。このとき $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\exp_G(X) = \exp_H(X)$ が成り立つ。

証明 包含写像を $\iota : H \to G$ とすると ι は Lie 群の準同型写像になる。命題 1.6.6 より $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\iota(\exp_H(X)) = \exp_G(d\iota(X))$ が成り立つ。ι と $d\iota$ による同一視をすると $\exp_G(X) = \exp_H(X)$。

補題 1.8.5 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の直和分解とする。$\varphi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y)$ によって C^∞ 級写像 $\varphi : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to G$ を定めると $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, V と G における e の開近傍 W が存在し φ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与える。

証明 $(X, Y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ に対して

$$\begin{aligned} d\varphi_0(X+Y) &= \frac{d}{dt}\exp(tX)\exp(tY)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\exp(tX))\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}\exp(tY)\bigg|_{t=0} \\ &= X_e + Y_e = \alpha(X+Y) \end{aligned}$$

となるので $d\varphi_0 = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ が成り立ち定理 1.1.9 より $d\varphi_0$ は線形同型写像である。逆関数定理を使うと、$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, V と G における e の開近傍 W が存在し φ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与えることがわかる。

定理 1.8.6 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。H が G の閉集合ならば、H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

証明 $\mathfrak{g}$ 上のノルム $|\ |$ を 1 つとっておく。

$$S = \left\{ X \in \mathfrak{g} \,\middle|\, X_n \in \mathfrak{g} - \{0\},\ \exp X_n \in H,\ \lim_{n\to\infty} X_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{|X_n|} = X \right\}$$

とおく。まず $X \in S$ に対して $\exp tX \in H$ $(t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示そう。$X_n \in \mathfrak{g} - \{0\},\ \exp X_n \in H,\ \lim_{n\to\infty} X_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = X$ としておく。$t \in \mathbf{R}$ に

対して $t = m_n|X_n| + r_n,\ 0 \le r_n < |X_n|$ となる整数 m_n と実数 r_n をとる。すると $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ となって $\lim_{n\to\infty} m_n|X_n| = t$。したがって

$$tX = \lim_{n\to\infty} m_n|X_n| \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \lim_{n\to\infty} m_n X_n.$$

exp は連続だから

$$\exp tX = \lim_{n\to\infty} \exp m_n X_n = \lim_{n\to\infty} (\exp X_n)^{m_n} \in H \quad (H \text{ は閉集合}).$$

次に $\mathfrak{h} = \{tX | t \in \mathbf{R},\ X \in S\}$ とおいて $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間になることを示す。そのためには $\mathfrak{h}$ が加法について閉じていることを示せば十分。$X, Y \in \mathfrak{h} - \{0\}$ とすると $\exp tX, \exp tY \in H\ (t \in \mathbf{R})$。曲線 $t \mapsto \exp tX \exp tY$ は $t = 0$ で e を通り像は H に含まれている。定理 1.5.5 より、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えるので、0 を含むある開区間 I で定義された $\mathfrak{g}$ の曲線 $c : I \to \mathfrak{g}$ が存在し $c(0) = 0,\ \exp(c(t)) = \exp tX \exp tY\ (t \in I)$ となる。この両辺を $t = 0$ で微分すると

$$\alpha\left(\frac{dc}{dt}(0)\right) = X_e + Y_e = \alpha(X + Y)$$

となる。定理 1.1.9 より $\frac{dc}{dt}(0) = X + Y$。したがって $\lim_{t\to 0} \frac{c(t)}{t} = X + Y$。十分大きい n に対しては $\frac{1}{n} \in I$ となるので $Z_n = c(\frac{1}{n})$ とおくと $Z_n \neq 0$ で

$$\begin{aligned}
&\exp Z_n = \exp\left(c\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in H, \\
&\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{1}{n}\right) = c(0) = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{|Z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\left|c\left(\frac{1}{n}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \left|\frac{\frac{1}{n}}{c\left(\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{X + Y}{|X + Y|}
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって $\frac{X+Y}{|X+Y|} \in S$ となり $X + Y \in \mathfrak{h}$。これで $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間であることがわかった。

H の位相は相対位相を考えることにし、H に G の部分多様体になるような多様体構造が存在することを示そう。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{h}'$ を 1 つとり直和分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ をつくると、補題 1.8.5 より、$\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}'$ における 0 の開近傍 $U,\ V$ と G における e の開近傍 W が存在し $\varphi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}' \to G; (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与える。$\mathfrak{h}$ における 0 の近傍 N をとると $\exp(N)$ は H における e の近傍になることを示す。$\exp(N)$ が H における e の近傍にならないと仮定して矛盾を導こう。系 1.2.2 と命題 1.2.3 より、G の単位元の連結成分は可算開基を持つので、特に e は可算基本近傍系を持つ。したがって、e に収束する点列 g_n が存在し $g_n \in H,\ g_n \notin \exp(N)$ を満たす。$U \subset N,\ g_n \in W$ となるように U と g_n をとりなお

すと、$X_n \in U,\ Y_n \in V$ が存在し $g_n = \exp X_n \exp Y_n$ を満たす。$g_n \notin \exp(N)$ だから $Y_n \neq 0$。$\frac{Y_n}{|Y_n|}$ のノルムは 1 だから部分列をとりなおすことにより $\frac{Y_n}{|Y_n|}$ は収束列になる。$X = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{|Y_n|} \in \mathfrak{h}'$ とおく。$\exp Y_n = (\exp X_n)^{-1} g_n \in H,\ \lim_{n\to\infty} Y_n = 0$ が成り立つので $X \in S \subset \mathfrak{h}$ となり矛盾。特に $\exp(U)$ は H における e の開近傍になる。$\mathfrak{h}$ の基底 $X_1, \ldots, X_k$ をとり $x \in \exp(U)$ に対して $\exp^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i(x) X_i$ とおく。H は G の部分群だから各 $h \in H$ に対して $L_h(\exp(U)) \subset H$ となり $\{(L_h(\exp(U)); x_1 \circ L_h^{-1}, \ldots, x_k \circ L_h^{-1})\}_{h\in H}$ は H に多様体の構造を与える。さらにこの多様体構造に関して H は G の部分多様体になっている。

上で定めた多様体構造に関して H が Lie 群であることを示す。$\tau : G \times G \to G; (g, h) \mapsto gh^{-1}$ とすると、τ は連続写像で H の位相は相対位相だから τ の H への制限 $\tau_H : H \times H \to H$ も連続になる。$(h_1, h_2) \in H \times H$ に対して、逆関数定理を使うと、$\tau_H(h_1, h_2) = h_1 h_2^{-1}$ を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は H における $h_1 h_2^{-1}$ の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$ のそこへの制限は H の局所座標系になることがわかる。τ_H は H の位相に関して連続だから (h_1, h_2) の $H \times H$ における開近傍 U が存在し $\tau_H(U) \subset V$ となる。$U \to W; (x, y) \mapsto xy^{-1}$ は C^∞ 級写像になるので $(x, y) \mapsto x_i(xy^{-1})$ は U 上の C^∞ 級関数になる。したがって $\tau_H : U \to V$ は C^∞ 級写像である。これで τ_H が C^∞ 級写像になることがわかり、H は Lie 群である。以上より H は G の Lie 部分群である。

定義 1.8.7 定理 1.8.6 より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

命題 1.8.8 Lie 群 G とその Lie 部分群 H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続}\}$$

が成り立つ。H が閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

証明

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続}\}$$

とおいておく。$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$ は補題 1.8.2 と定義 1.8.3 よりわかる。$X \in \mathfrak{h}',\ s \in \mathbf{R}$ に対して、$\exp sX$ を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は H における $\exp sX$ の開近傍になり、$x_1,\dots,x_k$ のそこへの制限は H の局所座標系になる。$t\mapsto \exp tX$ は H の位相に関して連続だから s を含む開区間 I が存在し $\exp tX\in V\ (t\in I)$ となる。$I\to W; t\mapsto \exp tX$ は C^∞ 級写像になるので $t\mapsto x_i(\exp tX)$ は I 上の C^∞ 級関数になる。したがって $t\mapsto \exp tX$ は H の多様体構造に関して C^∞ 級写像である。これで $X\in\mathfrak{h}$ がわかり、$\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{h}$ である。以上より $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$ である。さらに H が閉 Lie 部分群の場合は H の位相は相対位相だから $X\in\mathfrak{g}$ が $\exp tX\in H(t\in\mathbf{R})$ を満たせば $t\mapsto\exp tX$ は H の位相に関して連続になり $\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}|\exp tX\in H(t\in\mathbf{R})\}$ が成り立つ。

系 1.8.9 Lie 群 G の閉 Lie 部分群 H,K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ とおくと $H\cap K$ は G の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$ である。

定義 1.8.10 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

例 1.8.11 G を一般線形群 $GL(V)$ の閉 Lie 部分群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおく。例 1.5.2 より $GL(V)$ の指数写像は指数関数になるので、$X\in\mathfrak{g}$ に対して $\exp_G(X)=e^X$ が成り立つ。さらに $g\in G,\ X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{Ad}_G(g)X=\frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\bigg|_{t=0}=\frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\bigg|_{t=0}=gXg^{-1}.$$

1.9　線形 Lie 群

補題 1.9.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ と $v\in V$ に対して $\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\rho(X)v=0\}$ とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環になる。

証明　$a,b\in\mathbf{R},\ X,Y\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}\rho(aX+bY)v &= a\rho(X)v+b\rho(Y)v=0,\\ \rho([X,Y])v &= \rho(X)\rho(Y)v-\rho(Y)\rho(X)v=0\end{aligned}$$

だから $aX+bY,[X,Y]\in\mathfrak{h}$ となり $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。

補題 1.9.2 Lie 群 G の表現 $\rho:G\to GL(V)$ と $v\in V$ に対して

$$H=\{g\in G\mid\rho(g)v=v\}$$

とおくと H は G の閉 Lie 部分群になる。$\mathfrak{h}$ を H の Lie 環とすると

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\mid d\rho(X)v=0\}$$

が成り立つ。

証明　$g, h \in H$ に対して $\rho(gh^{-1})v = \rho(g)\rho(h^{-1})v = v$ だから $gh^{-1} \in H$ となり H は G の部分群である。次に $\rho : G \to GL(V)$ は C^∞ 級写像だから $\rho_v : G \to V; g \mapsto \rho(g)v$ とおくと ρ_v も C^∞ 級写像になる。よって $H = \rho_v^{-1}(v)$ は G の閉集合である。したがって H は G の閉 Lie 部分群である (定理 1.8.6 と定義 1.8.7)。

命題 1.8.8 より、$X \in \mathfrak{h}$ をとると、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\exp tX \in H$ となるので $\rho(\exp tX)v = v$。両辺を $t = 0$ で微分し命題 1.6.6 を使うと

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)v\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{td\rho(X)}v\bigg|_{t=0} = d\rho(X)v.$$

逆に $d\rho(X)v = 0$ となる $X \in \mathfrak{g}$ をとると任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho(\exp tX)v = \exp(td\rho(X))v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(td\rho(X))^n v = v$$

だから $\exp tX \in H$ となり命題 1.8.8 より $X \in \mathfrak{h}$。

補題 1.9.3 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、$\det$ の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

証明　行列式の性質より $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になる。$X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $X : V \to V$ の固有値を λ_i $(1 \le i \le k)$ とし、各固有値の重複度を p_i とすると、例 1.4.6 より、

$$\det(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{k}(e^{\lambda_i t})^{p_i} = \prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}.$$

したがって、

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k}p_i\lambda_i = \mathrm{tr}(X)$$

となり、$\det$ の微分は tr になる。

定義 1.9.4 V を有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det g = 1\}$ と表すと、補題 1.9.2 と補題 1.9.3 より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 1.9.2 と補題 1.9.3 より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

命題 1.9.5 V を有限次元ベクトル空間とし $A : V \times V \to \mathbf{R}$ を双線形写像とする。

$$G = \{g \in GL(V) \mid A(gu, gv) = A(u, v)\ (u, v \in V)\}$$

とおくと G は線形 Lie 群になる。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

が成り立つ。

証明　$V \times V$ から $\mathbf{R}$ への双線形写像の全体を $M^2(V, \mathbf{R})$ で表す。$b, c \in \mathbf{R},\ B, C \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して $(bB + cC)(u, v) = bB(u, v) + cC(u, v)\ \ (u, v \in V)$ によって $bB + cC \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めるとこの演算によって $M^2(V, \mathbf{R})$ はベクトル空間になる。$g \in GL(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して

$$(\rho(g)B)(u, v) = B(g^{-1}u, g^{-1}v) \qquad (u, v \in V)$$

として $\rho(g)B \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めると $\rho(g) \in GL(M^2(V, \mathbf{R}))$。$g, h \in GL(V),\ u, v \in V$ について

$$\begin{aligned}(\rho(gh)B)(u, v) &= B((gh)^{-1}u, (gh)^{-1}v) = B(h^{-1}g^{-1}u, h^{-1}g^{-1}v) \\ &= (\rho(h)B)(g^{-1}u, g^{-1}v) = (\rho(g)(\rho(h)B))(u, v)\end{aligned}$$

だから $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり $\rho : GL(V) \to GL(M^2(V, \mathbf{R}))$ は群の準同型写像である。各 $u, v \in V,\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ について $g \mapsto (\rho(g)B)(u, v)$ は C^∞ 級関数だから ρ は C^∞ 級写像になる。したがって ρ は Lie 群の準同型写像である。ρ の定義より $G = \{g \in GL(V) | \rho(g)A = A\}$。補題 1.9.2 を適用すると G は線形 Lie 群になる。

G の Lie 環を求めるために ρ の微分を計算する。$X \in \mathfrak{gl}(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R}),\ u, v \in V$ について

$$\begin{aligned}(d\rho(X)B)(u, v) &= \left.\frac{d}{dt}(\rho(e^{tX})B)(u, v)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}B(e^{-tX}u, e^{-tX}v)\right|_{t=0} \\ &= -B(Xu, v) - B(u, Xv)\end{aligned}$$

だから補題 1.9.2 より

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid d\rho(X)A = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}.\end{aligned}$$

定義 1.9.6 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。V の A に関する直交変換の全体を $O(V) = O(V; A)$ で表すと命題 1.9.5 より $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと命題 1.9.5 より

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。

注意 1.9.7 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 1.9.8 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。

$$SO(V) = SO(V; A) = SL(V) \cap O(V; A)$$

と表すと、系 1.8.9 より $SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V; A)$ で表すと系 1.8.9 より $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。

定義 1.9.9 V を有限次元複素ベクトル空間とし、$I : V \to V; v \mapsto \sqrt{-1}v$ とする。V の実正則線形変換の全体を $GL_{\mathbf{R}}(V)$、その Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ で表す。例 1.6.12 より $g \in GL_{\mathbf{R}}(V)$ に対して $\mathrm{Ad}(g)I = gIg^{-1}$ だから V の複素正則線形変換の全体 $GL_{\mathbf{C}}(V)$ は

$$\{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) \mid \mathrm{Ad}(g)I = I\}$$

に一致し、系 1.8.9 より線形 Lie 群になる。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素一般線形群**と呼ぶ。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表す。定理 1.6.10 より

$$d\mathrm{Ad}(X)T = \mathrm{ad}(X)(T) = XT - TX \qquad (X, T \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V))$$

だから、

$$\begin{aligned} GL_{\mathbf{C}}(V) &= \{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) \mid gI = Ig\}, \\ \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V) \mid XI = IX\} \end{aligned}$$

となっている。$\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は V の複素線形変換の全体である。$GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$, $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$ は $GL(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 1.9.10 Lie 群 G と複素有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**複素表現** と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**複素表現**と呼ぶ。

命題 1.9.11 Lie 群 G の複素表現の微分は、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

証明　$\rho : G \to GL_{\mathbf{C}}(V)$ を G の複素表現とし、I を V の複素構造とする。命題 1.6.6 より、$X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$I \exp(td\rho(X))I^{-1} = I\rho(\exp tX)I^{-1} = \rho(\exp tX) = \exp(td\rho(X))$$

が成り立つ。両辺を $t = 0$ で微分すると

$$Id\rho(X)I^{-1} = d\rho(X)$$

となり、$d\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$。したがって、$d\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

補題 1.9.12 複素有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(V) \to GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{0\}$ は $GL_{\mathbf{C}}(V)$ の複素表現になり、$\det_{\mathbf{C}}$ の微分は $\mathrm{tr}_{\mathbf{C}} : \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ である。

証明　補題 1.9.3 と同様に証明することができる。

定義 1.9.13 V を有限次元複素ベクトル空間とし $\det_{\mathbf{C}}$ で複素行列式を表す。

$$SL_{\mathbf{C}}(V) = \{g \in GL_{\mathbf{C}}(V) \mid \det_{\mathbf{C}} g = 1\}$$

と表すと補題 1.9.2 と補題 1.9.3 より、$SL_{\mathbf{C}}(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素特殊線形群**と呼ぶ。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表すと補題 1.9.2 と補題 1.9.3 より、

$$\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \mid \mathrm{tr}_{\mathbf{C}} X = 0\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$ における複素特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{C}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 1.9.14 V を有限次元複素ベクトル空間とし A を V 上の正定値 Hermite 内積とする。V の A に関するユニタリ変換の全体を $U(V) = U(V; A)$ で表すと命題 1.9.5 より $U(V)$ は線形 Lie 群になる。$U(V)$ を**ユニタリ群**と呼ぶ。$U(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{u}(V) = \mathfrak{u}(V; A)$ で表すと命題 1.9.5 より

$$\mathfrak{u}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0 \ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関するユニタリ群とその Lie 環を $U(n), \mathfrak{u}(n)$ とも書く。

注意 1.9.15 $U(n)$ は n 次ユニタリ行列の全体であり $\mathfrak{u}(n)$ は n 次交代 Hermite 行列の全体である。

定義 1.9.16 V を有限次元複素ベクトル空間とし A を V 上の正定値 Hermite 内積とする。$SU(V) = SU(V; A) = SL_{\mathbf{C}}(V) \cap U(V; A)$ と表すと系 1.8.9 より $SU(V)$ は線形 Lie 群になる。$SU(V)$ を**特殊ユニタリ群**と呼ぶ。$SU(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{su}(V; A)$ で表すと系 1.8.9 より $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) \cap \mathfrak{u}(V)$ となる。$\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関する特殊ユニタリ群とその Lie 環を $SU(n), \mathfrak{su}(n)$ とも書く。

1.10　Lie 部分群と Lie 部分環

定理 1.10.1 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるものが一意に存在する。

証明　$\dim\mathfrak{h} = k$ としておく。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、$\mathfrak{H}_g$ は $T_g(G)$ の k 次元部分ベクトル空間になる。$g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g$ を対応させる対応 $\mathfrak{H}$ が G 上の k 次元分布になることを示す。$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$ を $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{h}$ となるようにとる。各 X_i は G 上の左不変ベクトル場だから $1 \leq i \leq k$ に対して $(X_i)_g \in \mathfrak{H}_g (g \in G)$ が成り立ち、$\mathfrak{H}$ は G 上の k 次元分布である。X, Y を $\mathfrak{H}$ に属するベクトル場とすると、$f_i, g_i \in C^\infty(G)$ が存在し $X = \sum_{i=1}^k f_i X_i,\ Y = \sum_{i=1}^k g_i X_i$ と書ける。$f \in C^\infty(G)$ に対して、

$$\begin{aligned} [X,Y](f) &= \sum_{i,j=1}^k [f_i X_i, g_j X_j](f) = \sum_{i,j=1}^k \{f_i X_i(g_j X_j(f)) - g_j X_j(f_i X_i(f))\} \\ &= \sum_{i,j=1}^k \{f_i(X_i g_j)(X_j f) + f_i g_j X_i X_j f - g_j(X_j f_i)(X_i f) - g_j f_i X_j X_i f\} \\ &= \sum_{i,j=1}^k \{f_i(X_i g_j)X_j - g_j(X_j f_i)X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}(f) \end{aligned}$$

となるので、

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^k \{f_i(X_i g_j)X_j - g_j(X_j f_i)X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}.$$

$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環だから $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ となり、$[X,Y]$ は $\mathfrak{H}$ に属する。よって $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な k 次元分布である。Frobenius の定理より G の単位元 e を含む $\mathfrak{H}$ の極大連結積分多様体 H が存在する。$g \in G$ に対して $L_g(H)$ は G の部分多様体になり各 $x \in H$ について

$$\begin{aligned} T_{gx}(L_g(H)) &= d(L_g)_x T_x(H) = d(L_g)_x \mathfrak{H}_x = d(L_g)_x d(L_x)_e(\alpha(\mathfrak{h})) \\ &= d(L_{gx})_e(\alpha(\mathfrak{h})) = \mathfrak{H}_{gx} \end{aligned}$$

が成り立つので $L_g(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体である。そこで $g \in H$ に対して $L_{g^{-1}}(H)$ を考えると $L_{g^{-1}}(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体になり $L_{g^{-1}}(H) \ni L_{g^{-1}}(g) = e$。$H$ の極大性より $L_{g^{-1}}(H) \subset H$ となり、$g^{-1} \in L_{g^{-1}}(H) \subset H$、すなわち $g^{-1} \in H$。また $L_{g^{-1}}(H) \subset H$ に L_g を作用させると $H \subset L_g(H)$ となり、H の極大性より $H = L_g(H)$ が成り立ち、H は G の部分群になる。

H が G の Lie 部分群であることを証明しよう。H は連結だから G の単位元の連結成分 G_0 に含まれる。命題 1.2.3 より G_0 は連結 Lie 群になるので、系 1.2.2 より可算開基を持つ。H は G_0 の連結部分多様体だから可算開基を持つ。$\tau_H : H \times H \to G; (g,h) \mapsto gh^{-1}$ は C^∞ 級写像で、H は G の部分群だから $\tau_H(H \times H) \subset H$。$H$ は可算開基を持つ $\mathfrak{H}$ の積分多様体なので、$\tau_H : H \times H \to H$ は C^∞ 級写像である。したがって H は Lie 群になり G の Lie 部分群である。H の構成法より H に対応する Lie 部分環は $\mathfrak{h}$ である。

最後に一意性を証明する。H' も G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるとする。命題 1.8.4 より H,H' の指数写像は G の指数写像の制限になる。定理 1.5.5 より H と H' は恒等写像によって微分同型になる単位元の開近傍 U を持つ。したがって $H = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\} = H'$ となり (定理 1.2.1)、H と H' は集合として一致する。恒等写像 $\iota : H \to H'$ は群の同型写像で単位元の開近傍 U において微分同型を与える。各 $h \in H$ に対して $L_{h^{-1}} \circ \iota = \iota \circ L_{h^{-1}}$ となるので ι は $L_h(U)$ において微分同型を与える。したがって $\iota : H \to H'$ は Lie 群の同型写像になる。

系 1.10.2 Lie 群 G とその Lie 部分群 H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、対応 $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な分布になる。さらに H は $\mathfrak{H}$ の積分多様体になっている。

定義 1.10.3 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が任意の $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ を満たすとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルと呼ぶ。

命題 1.10.4 $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を Lie 環の準同型写像とすると、$\ker f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

証明 $X \in \mathfrak{g}, Y \in \ker f$ に対して、$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = 0$。したがって $[X, Y] \in \ker f$ となり、$\ker f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

命題 1.10.5 $f : G \longrightarrow H$ を Lie 群の準同型写像とすると、$\ker f$ は G の正規閉 Lie 部分群 (正規部分群でかつ閉 Lie 部分群) になる。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると $\ker f$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker df$ で $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。さらに G が連結の場合は $f(G)$ は H の Lie 環の Lie 部分環 $df(\mathfrak{g})$ に対応する H の連結 Lie 部分群に一致する。

証明 f は群の準同型写像だから $\ker f$ は G の正規部分群である。$\ker f$ は 1 点の逆像だから、定理 1.8.6 より閉 Lie 部分群になる。$\ker f$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{h}$ とおくと、命題 1.8.8 より $X \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}$ の元になるための必要十分条件は $\exp tX \in \ker f$ $(t \in \mathbf{R})$ である。命題 1.6.6 より $f(\exp tX) = \exp(t df(X))$ だから、$f(\exp tX) = e$ $(t \in \mathbf{R})$ の必要十分条件は $df(X) = 0$ となり $X \in \ker df$。したがって $\mathfrak{h} = \ker df$。定理 1.6.2 より df は Lie 環の準同型になり、命題 1.10.4 より $\ker df$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

G が連結の場合を考えよう。定理 1.5.5 より、$\exp(\mathfrak{g})$ は G における単位元の近傍になる。また定理 1.2.1 より $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから

$$
\begin{aligned}
f(G) &= f(\cup\{(\exp \mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}) \\
&= \cup\{(f(\exp \mathfrak{g}))^n | n \in \mathbf{N}\} \\
&= \cup\{(\exp(df(\mathfrak{g})))^n | n \in \mathbf{N}\} \quad (\text{命題 1.6.2 より})
\end{aligned}
$$

となり $f(G)$ は $df(\mathfrak{g})$ に対応する連結 Lie 部分群に一致する。

例 1.10.6 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det_{\mathbf{R}} : GL_{\mathbf{R}}(V) \longrightarrow GL_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ は Lie 群の準同型写像だから (補題 1.9.3)、$SL_{\mathbf{R}}(V) = \ker(\det_{\mathbf{R}})$ は $GL_{\mathbf{R}}(V)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{R}}(V)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{R}}(V)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ のイデアルになる。また有限次元複素ベクトル空間 W に対しても $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(W) \longrightarrow GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ は Lie 群の準同型写像だから、$SL_{\mathbf{C}}(W) = \ker(\det_{\mathbf{C}})$ は $GL_{\mathbf{C}}(W)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{C}}(W)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(W)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(W)$ のイデアルになる。

命題 1.10.7 Lie 群 G の Lie 部分群 H が可算個の連結成分を持つとする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

証明 命題 1.8.8 より

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R}),\ t \longmapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続 }\}$$

が成り立つので $\exp tX \in H(t \in \mathbf{R})$ となる $X \in \mathfrak{g}$ に対して $t \longmapsto \exp tX$ が H の位相に関して連続になることを示せばよい。$f : \mathbf{R} \longrightarrow G;\ t \longmapsto \exp tX$ は C^∞ 級写像で $f(\mathbf{R}) \subset H$。H は可算個の連結成分を持つので、補題 1.2.4 より H は可算開基を持つ。また系 1.10.2 より H は G 上の完全積分可能な分布の積分多様体になっている。したがって、f を H への写像とみなしても $f : \mathbf{R} \longrightarrow H$ は C^∞ 級写像になる。特に H の位相に関して連続になる。

定理 1.10.8 G を Lie 群とし H をその Lie 部分群とする。H の連結成分の個数は可算であるか、または H は閉 Lie 部分群であると仮定する。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、H が G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

証明 $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ とすると、H は G の正規部分群だから定理 1.6.10 を使うと

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)(tY)) = \exp(sX)\exp(tY)\exp(sX)^{-1} \in H \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

が成り立ち、命題 1.8.8 または 1.10.7 より $\mathrm{Ad}(\exp sX)Y \in \mathfrak{h}$ となる。

$$\left.\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\right|_{s=0} = [X, Y] \quad (\text{定理 } 1.6.10)$$

だから $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

定理 1.10.9 G を連結 Lie 群とし H をその連結 Lie 部分群とする。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、H が G の正規部分群になるための必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルになることである。

証明 定理 1.10.8 より H が G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。逆に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルとする。定理 1.5.5 より G における単位元の開近傍 U と $\mathfrak{g}$ における 0 の開近傍 V が存在し $\exp : V \longrightarrow U$ は微分同型写像になる。さらに $\exp(V \cap \mathfrak{h})$ は H における単位元の開近傍になる。$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$(\exp X)(\exp Y)(\exp X)^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(\exp X)Y)$$

ここで命題 1.6.6 を Ad に適用すると定理 1.6.10 より

$$\mathrm{Ad}(\exp X)Y = e^{\mathrm{ad}X}Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}X)^n Y \in \mathfrak{h}$$

だから $(\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1} \subset H$。したがって定理 1.2.1 より

$$\begin{aligned} (\exp X)H(\exp X)^{-1} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})^n (\exp X)^{-1} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} ((\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1})^n \subset H \end{aligned}$$

であり $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから任意の $g \in G$ に対して $gHg^{-1} \subset H$ が成り立つ。よって H は G の正規部分群である。

定義 1.10.10 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。

$$\ker(\mathrm{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{g} \text{ に対して } [X, Y] = 0\}$$

を $\mathfrak{g}$ の中心と呼ぶ。(命題 1.10.4 より中心はイデアルになる。)

補題 1.10.11 f, g を連結 Lie 群から Lie 群への Lie 群の準同型写像とする。もし $df = dg$ ならば $f = g$ が成り立つ。

証明 f, g を連結 Lie 群 G から Lie 群 H への Lie 群の準同型写像とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して命題 1.6.6 より

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) = \exp(dg(X)) = g(\exp X)$$

となるので f と g は $\exp(\mathfrak{g})$ において一致する。定理 1.5.5 と定理 1.2.1 を使うと $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ となるので f と g は G 全体で一致する。

定理 1.10.12 連結 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の中心は随伴表現 Ad の核に一致する。特に G の中心は正規閉 Lie 部分群になり対応する Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ の中心である。

証明　G の中心を Z で表す。随伴表現の定義 (定理 1.6.10, 定義 1.6.11) より $Z \subset \ker \mathrm{Ad}$ はすぐにわかる。$g \in \ker \mathrm{Ad}$ とすると $d(L_g \circ R_g^{-1})$ は $\mathfrak{g}$ の恒等写像になるので、補題 1.10.11 より $L_g \circ R_g^{-1}$ は G の恒等写像になる。したがって $g \in Z$ となり $Z = \ker \mathrm{Ad}$ がわかった。命題 1.10.5 より Z は G の正規閉 Lie 部分群になり Z に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker d\mathrm{Ad} = \ker \mathrm{ad}$ で (定理 1.6.10)、$\mathfrak{g}$ の中心である。

系 1.10.13 連結 Lie 群が可換になるための必要十分条件はその Lie 環が可換になることである。

証明　G を連結 Lie 群としその Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G が可換ならば $\mathfrak{g}$ も可換になることは系 1.5.8 で示した。そこで $\mathfrak{g}$ が可換であると仮定すると $\mathfrak{g}$ の中心は $\mathfrak{g}$ に一致する。定理 1.10.12 より G の中心は G に一致し G は可換になる。

1.11　線形 Lie 群の連結性

定理 1.11.1 ユニタリ群 $U(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{u}(n) \to U(n)$ は全射である。特に $U(n)$ は連結である。

証明　$U(n)$ の任意の元 u は正規行列だからユニタリ行列によって対角化可能である。つまり、ある $g \in U(n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ が存在して

$$g^{-1}ug = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

となる。$g^{-1}ug \in U(n)$ だから $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$。よって $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して $a_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ $(1 \le i \le n)$ となる。

$$u = g \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix}.$$

ここで注意 1.9.15 より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

となり $U(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{u}(n)$ は連結だから $U(n)$ も連結。

定理 1.11.2 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{su}(n) \longrightarrow SU(n)$ は全射である。特に $SU(n)$ は連結である。

証明 定理 1.11.1 の証明と同様に $SU(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$(*) \quad u = g \exp \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} g^{-1}.$$

ここで $\det u = 1$ だから $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$。$e^{\sqrt{-1}\theta_1} = e^{\sqrt{-1}(\theta_1 - 2\pi k)}$ より θ_1 を $\theta_1 - 2\pi k$ に置き換えても上の $(*)$ は成立し $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 0$ となる。定義 1.9.16 より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n).$$

したがって $SU(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{su}(n)$ は連結だから $SU(n)$ も連結。

定理 1.11.3 回転群 $SO(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow SO(n)$ は全射である。特に $SO(n)$ は連結である。

証明 $SO(n) \subset U(n)$ だから定理 1.11.1 の証明と同様に $SO(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$u = g \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{bmatrix} g^{-1}.$$

u の固有多項式は実係数だから u の固有値に共役な値も u の固有値になる。g の縦ベクトルの順序を適当にかえて

$$(*) \quad u = g \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & & & & & & \\ & e^{-\sqrt{-1}\theta_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{\sqrt{-1}\theta_k} & & & & \\ & & & & e^{-\sqrt{-1}\theta_k} & & & \\ & & & & & \varepsilon_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix} g^{-1}$$

とできる。ただし $\theta_i \notin \pi\mathbf{Z}$ $(1 \le i \le k)$, $\varepsilon_j = \pm 1$ $(2k+1 \le j \le n)$。$g = [g_1 \dots g_n]$ と表すと $ug_{2i-1} = e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。u は実行列だから $u\bar{g}_{2i-1} = e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。そこで g_{2i} を $\bar{g}_{2i-1}$ に置き換えても $g \in U(n)$ となり $(*)$ は成り立つ。また $\varepsilon_j \in \mathbf{R}$ だから $g_j \in \mathbf{R}^n$ とすることができる。さらに $\det u = 1$ だから $\varepsilon_j = -1$ となる ε_j の個数は偶数。よって g の縦ベクトルの順序を適当にかえて $\varepsilon_{2k+1} = \ldots = \varepsilon_{2l} = -1$, $\varepsilon_{2l+1} = \ldots = \varepsilon_n = 1$ とできる。$1 \le i \le k$ に対して

$$h_{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{2i-1} + \bar{g}_{2i-1}), \quad h_{2i} = \frac{1}{\sqrt{-2}}(g_{2i-1} - \bar{g}_{2i-1})$$

とおき $h_j = g_j$ $(2k+1 \le j \le n)$ とすると $h = [h_1 \dots h_n] \in U(n)$ で h は実行列になる。したがって $h \in O(n)$。$1 \le i \le k$ に対して

$$\begin{aligned} uh_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1} + e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \cos\theta_i h_{2i-1} - \sin\theta_i h_{2i} \\ uh_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{-2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1} - e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \sin\theta_i h_{2i-1} + \sin\theta_i h_{2i} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\theta_i = \pi \quad (k+1 \le i \le l) \\ &R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (1 \le i \le l) \end{aligned}$$

とおくと

$$u = h \begin{bmatrix} R_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_l & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} h^{-1}.$$

ところが $X_i = \begin{bmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{bmatrix}$ $(1 \le i \le l)$ とおくと $\exp X_i = R_i$ となるので

$$u = \exp \mathrm{Ad}(h) \begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで注意 1.9.7 と定義 1.9.8 より

$$\mathrm{Ad}(h)\begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$$

だから $SO(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{so}(n)$ は連結だから $SO(n)$ も連結。

系 1.11.4 直交群 $O(n)$ は 2 つの連結成分 $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \det g = -1\}$ を持つ。

証明 $\det(O(n)) = \{\pm 1\}$ だから $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \det g = -1\}$ はどちらも $O(n)$ の開かつ閉集合。定理 1.11.3 より $SO(n)$ は連結で、$\det h = -1$ となる $h \in O(n)$ をとると

$$\{g \in O(n) | \det g = -1\} = L_h(SO(n))$$

となりこれも連結。したがって $SO(n)$ と $L_h(SO(n))$ はどちらも $O(n)$ の連結成分になり $O(n) = SO(n) \cup L_h(SO(n))$ は $O(n)$ の連結成分への分解になっている。

定理 1.11.5 $GL(n, \mathbf{C})$ と $SL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

証明 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の (i, j) 成分を X_{ij} で表すことにする。

$$T(n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) | X_{ii} > 0 (1 \le i \le n),\ X_{ij} = 0 (i > j)\}$$

とおくと、$T(n, \mathbf{C})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{C})$ は連結である。さらに、$X \in T(n, \mathbf{C})$ に対して $\det X = \prod_{i=1}^n X_{ii} > 0$ だから $X \in GL(n, \mathbf{C})$。したがって $T(n, \mathbf{C}) \subset GL(n, \mathbf{C})$。さらに $T(n, \mathbf{C})$ は $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群になる。

$$P : U(n) \times T(n, \mathbf{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbf{C}); (a, X) \longmapsto aX$$

とおくと P は連続になる。さらに P が全射になることを示そう。任意の $g \in GL(n, \mathbf{C})$ に対して $g = [g_1 \dots g_n]$ と縦ベクトル $g_i \in \mathbf{C}^n$ を使って表す。$g_1, \dots, g_n$ は $\mathbf{C}^n$ の基底になる。$\mathbf{C}^n$ の標準的な Hermite 内積に関して $g_1, \dots g_n$ に Gram-Schmidt の直交化を行う。$b_1 = g_1, a_1 = \frac{1}{|b_1|} b_1$ とし、$b_k, a_k (k \ge 2)$ を次のように帰納的に定める。

$$b_k = g_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle g_k, a_i \rangle a_i, \quad a_k = \frac{1}{|b_k|} b_k.$$

すると $a_1, \ldots, a_n$ は $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底になる。各 a_k は $g_1, \ldots, g_k$ の線形結合になっていて、その線形結合の g_k の係数は $1/|b_k| > 0$ である。そこで基底の変換を

$$(*) \quad [a_1 \ldots a_n] = [g_1 \ldots g_n]X$$

で表すと $X \in T(n, \mathbf{C})$ となる。$a = [a_1 \ldots a_n]$ とおくと $a \in U(n)$ で $a = gX$。$g = aX^{-1}$ になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{C})$ だから $g = P(a, X^{-1})$。したがって P は全射である。定理 1.11.1 より $U(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{C})$ も連結だから $GL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

$$S : GL(n, \mathbf{C}) \longrightarrow SL(n, \mathbf{C}); X \longmapsto X \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{det}X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。S は連続になり $S(X) = X \ (X \in SL(n, \mathbf{C}))$ だから $S(GL(n, \mathbf{C})) = SL(n, \mathbf{C})$。よって $SL(n, \mathbf{C})$ も連結になる。

定理 1.11.6 $GL(n, \mathbf{R})$ は 2 つの連結成分

$$GL^+(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \mathrm{det}g > 0\}, \quad \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \mathrm{det}g < 0\}$$

を持つ。$SL(n, \mathbf{R})$ は連結である。

証明 定理 1.11.5 の証明で使った記号を使うことにする。$\mathrm{det} : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は連続だから $GL^+(n, \mathbf{R})$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の開部分群になる。特に、$GL^+(n, \mathbf{R})$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 部分群である。$T(n, \mathbf{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cap T(n, \mathbf{C})$ とおくと、$T(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{R})$ は連結である。さらに $T(n, \mathbf{R})$ は $GL^+(n, \mathbf{R})$ の部分群になる。以下で $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ を示そう。定理 1.11.5 の証明と同様にすると、任意の $g \in GL^+(n, \mathbf{R})$ に対してある $a \in O(n)$ と $X \in T(n, \mathbf{R})$ が存在し $a = gX$ となる。$\mathrm{det}g > 0, \mathrm{det}X > 0$ だから $\mathrm{det}a = 1$ になり $a \in SO(n)$。$g = aX^{-1}$ になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{R})$。したがって $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ である。定理 12.3 より $SO(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{R})$ も連結だから $GL^+(n, \mathbf{R})$ は連結である。

$$\mathrm{det}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t > 0\}) = GL^+(n, \mathbf{R}),$$
$$\mathrm{det}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t < 0\}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \mathrm{det}g < 0\}$$

はどちらも $GL(n, \mathbf{R})$ の開かつ閉の連結部分集合になる。したがってこれら 2 つが $GL(n, \mathbf{R})$ の連結成分である。

次に $ST(n, \mathbf{R}) = T(n, \mathbf{R}) \cap ST(n, \mathbf{C})$ とおくと $S(T(n, \mathbf{R})) = ST(n, \mathbf{R})$ となり $T(n, \mathbf{R})$ は連結だから $ST(n, \mathbf{R})$ も連結になる。任意の $g \in SL(n, \mathbf{R})$ に対して $a = gX, \ a \in SO(n), X \in T(n, \mathbf{R})$ となり $\mathrm{det}g = 1$ より $\mathrm{det}X = 1$。したがって $P(SO(n) \times ST(n, \mathbf{R})) = SL(n, \mathbf{R})$。$SO(n)$ は連結だから $SL(n, \mathbf{R})$ も連結になる。

系 1.11.7 V を n 次元実ベクトル空間とし、

$$B_{\mathbf{R}}(V) = \{(v_1, \ldots, v_n) \in V^n | v_1, \ldots, v_n \text{は} V \text{の基底}\}$$

として V の基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ を定義すると $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^n の開集合で $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。n 次元複素ベクトル空間 W に対して同様に W の基底全体 $B_{\mathbf{C}}(W)$ を定義すると $B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^n の開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

証明　V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を 1 つ固定しておく。

$$T : \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V) \longrightarrow V^n; g \longmapsto (g(e_1), \ldots, g(e_n))$$

とおくと、T は線形同型写像になり $T(GL_{\mathbf{R}}(V)) = B_{\mathbf{R}}(V)$。したがって $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^n の開集合になり $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。定理 1.11.6 より $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。

複素ベクトル空間 W の場合も T と同様の写像を定義することにより、$B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^n の開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になることがわかる。定理 1.11.5 より $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

定義 1.11.8 有限次元実ベクトル空間 V の基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ の 1 つの連結成分を V の向きと呼ぶ。系 1.11.7 より V は 2 つの向きを持っている。

系 1.11.9 n 次元実ベクトル空間 V の 2 つの基底 $u_1, \ldots, u_n$ と $v_1, \ldots, v_n$ が V の同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X \in GL(n, \mathbf{R})$(つまり $(u_1 \ldots u_n) = (v_1 \ldots v_n)X$) が $GL^+(n, \mathbf{R})$ に属することである。

系 1.11.10 内積を持つ n 次元実ベクトル空間 V の 2 つの正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ と $v_1, \ldots, v_n$ が V の同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X \in O(n)$(つまり $(u_1 \ldots u_n) = (v_1 \ldots v_n)X$) が $SO(n)$ に属することである。

1.12　自己同型群

定義 1.12.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の線形変換 p が

$$p([X, Y]) = [p(X), Y] + [X, p(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき p を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**微分**と呼ぶ。$\mathfrak{g}$ の微分の全体を $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ で表す。

補題 1.12.2 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の微分の全体 $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環である。さらに $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。

証明　$p, q \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}),\ a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
(ap+bq)([X,Y]) &= ap([X,Y]) + bq([X,Y]) \\
&= a([p(X),Y]+[X,p(Y)]) + b([q(X),Y]+[X,q(Y)]) \\
&= [(ap+bq)(X),Y] + [X,(ap+bq)(Y)], \\
[p,q]\,([X,Y]) &= pq([X,Y]) - qp([X,Y]) \\
&= p([q(X),Y]+[X,q(Y)]) - q([p(X),Y]+[X,p(Y)]) \\
&= [pq(X),Y] + [q(X),p(Y)] + [p(X),q(Y)] + [X,pq(Y)] \\
&\quad -[qp(X),Y] - [p(X),q(Y)] - [q(X),p(Y)] - [X,qp(Y)] \\
&= [[p,q](X),Y] + [X,[p,q](Y)]
\end{aligned}$$

となるので $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。

$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}(X))([Y,Z]) &= [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\
&= [Y,(\mathrm{ad}(X))(Z)] + [(\mathrm{ad}(X))(Y),Z].
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{ad}(X)$ は $\mathfrak{g}$ の微分になり $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$。$p \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[p,\mathrm{ad}(X)](Y) &= p\mathrm{ad}(X)(Y) - \mathrm{ad}(X)p(Y) = p([X,Y]) - [X,p(Y)] \\
&= [p(X),Y] = \mathrm{ad}(p(X))(Y)
\end{aligned}$$

だから $[p,\mathrm{ad}(X)] = \mathrm{ad}(p(X))$。これより $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。

定理 1.12.3 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型の全体 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 Lie 群になり、その Lie 環は $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ である。

証明　$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線形写像の全体を $M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ で表すと $M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ は命題 1.9.5 の証明中の $M^2(V,\mathbf{R})$ と同様にベクトル空間になる。$g \in GL(\mathfrak{g}),\ B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ に対して $(\rho(g)B)(X,Y) = gB(g^{-1}X, g^{-1}Y)\ (X, Y \in \mathfrak{g})$ として $\rho(g)B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ を定めると $\rho(g) \in GL(M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$。$g, h \in GL(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned}
(\rho(gh)B)(X,Y) &= ghB((gh)^{-1}X,(gh)^{-1}Y) = g(hB(h^{-1}g^{-1}X, h^{-1}g^{-1}Y)) \\
&= g((\rho(h)B)(g^{-1}X, g^{-1}Y)) = (\rho(g)(\rho(h)B))(X,Y)
\end{aligned}$$

だから $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり $\rho : GL(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$ は群の準同型写像である。各 $X, Y \in \mathfrak{g},\ B \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ について $g \longmapsto (\rho(g)B)(X,Y)$ は C^∞ 級関数だから ρ は C^∞ 級写像になる。したがって ρ は Lie 群の準同型写像である。$[\ ,\ ] \in M^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ とみなすと ρ の定義より $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{g \in GL(\mathfrak{g}) | \rho(g)[\ ,\ ] = [\ ,\ ]\}$。補題 1.9.2 を適用すると $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は線形 Lie 群になる。

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の Lie 環を $\mathfrak{a}$ とおいておく。$\mathfrak{a}$ を求めるために ρ の微分を計算する。$p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $B \in M^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned}(d\rho(p)B)(X,Y) &= \frac{d}{dt}(\rho(e^{tp})B)(X,Y)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tp}B(e^{-tp}X, e^{-tp}Y)\Big|_{t=0} \\ &= pB(X,Y) - B(pX,Y) - B(X,pY)\end{aligned}$$

だから補題 1.9.2 より

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \{p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) | d\rho(p)[\ ,\ ] = 0\} \\ &= \{p \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) | p([X,Y]) = [pX,Y] + [X,pY]\ (X,Y \in \mathfrak{g})\} \\ &= \mathfrak{d}(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

定義 1.12.4 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型の全体 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**自己同型群**と呼ぶ。$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群を $\mathfrak{g}$ の**随伴群**と呼び $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で表す。(定理 1.10.1 よりこのような連結 Lie 部分群は一意的に存在する。)

命題 1.12.5 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の随伴群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規 Lie 部分群である。

証明 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は連結だから定理 1.5.5 と 1.2.1 より $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \cup\{(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))^n | n \in \mathbf{N}\}$ となる。補題 1.12.2 より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ だから $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ となる。$\iota : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ を包含写像とする。定理 1.12.3 より $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の位相は $GL(\mathfrak{g})$ の相対位相になるので $\iota : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は連続になる。したがって C^∞ 級写像になり、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分群である。

$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群になることを示すためには任意の $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ に対して $a(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))a^{-1} \subset \exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$ を示せば十分。$X \in \mathfrak{g}$ に対して $ae^{\mathrm{ad}(X)}a^{-1} = e^{a\mathrm{ad}(X)a^{-1}}$。任意の $Y \in \mathfrak{g}$ について

$$a\mathrm{ad}(X)a^{-1}(Y) = a[X, a^{-1}(Y)] = [a(X), Y] = \mathrm{ad}(a(X))(Y)$$

となるので $a\mathrm{ad}(X)a^{-1} = \mathrm{ad}(a(X))$ となり $ae^{\mathrm{ad}(X)}a^{-1} = e^{\mathrm{ad}(a(X))}$。したがって

$$a(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})))a^{-1} \subset \exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$$

となり $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である。

定義 1.12.6 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

とおくと B は $\mathfrak{g}$ 上の対称 2 次形式になる。B を $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式**と呼ぶ。

命題 1.12.7 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B とし、

$$H = \{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid B(g(X), g(Y) = B(X, Y) \ (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

とおくと H は線形 Lie 群になり、その Lie 環 $\mathfrak{h}$ は

$$\mathfrak{h} = \{T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \mid B(T(X), Y) + B(X, T(Y)) = 0 \ (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

で与えられる。さらに $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は H の Lie 部分群になる。

証明　命題の前半の主張は Killing 形式 B に命題 1.9.5 を適用すればよい。命題 1.12.5 の証明中示したように $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(a(X)) = a\mathrm{ad}(X)a^{-1}$ が成り立つので、$Y \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$\begin{aligned} & B(a(X), a(Y)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(a(X))\mathrm{ad}(a(Y))) = \mathrm{tr}(a\mathrm{ad}(X)a^{-1}a\mathrm{ad}(Y)a^{-1}) \\ = \ & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) = B(X, Y) \end{aligned}$$

となり $a \in H$。したがって、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset H$。$H$ は線形 Lie 群だから包含写像 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \longrightarrow H$ は C^∞ 級写像になり、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は H の Lie 部分群である。

定義 1.12.8 Lie 群 G の自己同型の全体を G の**自己同型群**と呼び $\mathrm{Aut}(G)$ で表す。G の内部自己同型の全体を G の**内部自己同型群**と呼び $\mathrm{Int}(G)$ で表す。

命題 1.12.9 G を連結 Lie 群としその Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。

$$d : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}); a \longmapsto da$$

は群の単射準同型写像になり $d(\mathrm{Int}(G)) = \mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つ。特に $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ならば $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Aut}(G)$ となる。

証明　系 1.6.5 より $a \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $da \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。命題 1.6.4 より $a, b \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $d(a \circ b) = da \circ db$ となるので d は群の準同型写像である。補題 1.10.11 より d は単射になる。随伴表現の定義 (定理 1.6.10、定義 1.6.11) より $d(\mathrm{Int}(G)) = \mathrm{Ad}(G)$。$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の準同型写像であり G は連結だから命題 1.10.5 より $\mathrm{Ad}(G)$ は $d\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群に一致する。したがって $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = d(\mathrm{Int}(G)) \subset d(\mathrm{Aut}(G)) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ だからもし $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ならば $d(\mathrm{Int}(G)) = d(\mathrm{Aut}(G))$ となり $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Aut}(G)$ が成り立つ。

補題 1.12.10 3 次回転群 $SO(3)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ と 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ は、Lie 環として同型になる。

証明

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{so}(3)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。

次に

$$f_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}/2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}/2 \\ \sqrt{-1}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと f_1, f_2, f_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の基底になり

$$[f_1, f_2] = f_3, \quad [f_2, f_3] = f_1, \quad [f_3, f_1] = f_2$$

が成り立つ。

そこで $F(e_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ となるように線形写像 $F : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{su}(2)$ を定めると、上の Lie 環の計算から F は Lie 環の間の同型写像になる。

定理 1.12.11 $\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$ が成り立つ。さらに $\mathrm{Int}(SO(3)) = \mathrm{Aut}(SO(3))$, $\mathrm{Int}(SU(2)) = \mathrm{Aut}(SU(2))$ が成り立つ。

証明　補題 1.12.10 の証明中に使った $\mathfrak{so}(3)$ の基底 e_1, e_2, e_3 をそのまま使うことにする。$\mathfrak{so}(3)$ の Killing 形式を B で表し、B の e_1, e_2, e_3 に関する表現行列を求めておこう。$\mathrm{ad}(e_i)(1 \leq i \leq 3)$ の表現行列は

$$\mathrm{ad}(e_1) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_2) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_3) : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になり

$$\begin{aligned} &B(e_1, e_1) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(e_1)\mathrm{ad}(e_1)) = -2,\ B(e_1, e_2) = B(e_2, e_1) = 0, \\ &B(e_1, e_3) = B(e_3, e_1) = 0,\ B(e_2, e_2) = -2,\ B(e_2, e_3) = 0,\ B(e_3, e_3) = -2. \end{aligned}$$

したがって B の表現行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$-B$ は正定値になり、命題 1.12.7 より

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) \subset O(\mathfrak{so}(3); -B) \cong O(3).$$

$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3))$ は連結で $\mathrm{ad}(e_i)$ の表現行列の形から $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(3)) = \mathfrak{o}(\mathfrak{so}(3); -B)$ となっている。定理 1.11.3 より $SO(\mathfrak{so}(3); -B)$ も連結だから

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)) = SO(\mathfrak{so}(3); -B).$$

系 1.11.4 より $O(\mathfrak{so}(3); -B)$ は連結成分を 2 つ持ち、

$$SO(\mathfrak{so}(3); -B) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) \subset O(\mathfrak{so}(3); -B)$$

だから、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$ は $SO(\mathfrak{so}(3); -B)$ または $O(\mathfrak{so}(3); -B)$ に一致する。

$$g(e_1) = e_1, \quad g(e_2) = e_2, \quad g(e_3) = -e_3$$

となる $g \in GL(\mathfrak{so}(3))$ をとると、$g \in O(\mathfrak{so}(3); -B), \det g = -1$。

$$[g(e_1), g(e_2)] = [e_1, e_2] = e_3 \neq g(e_3)$$

だから $g \notin \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3))$。したがって、

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) = SO(\mathfrak{so}(3); -B) = \mathrm{Int}(\mathfrak{so}(3)).$$

定理 1.11.3 より $SO(3)$ は連結だから命題 1.12.9 より $\mathrm{Aut}(SO(3)) = \mathrm{Int}(SO(3))$。定理 1.11.2 より $SU(2)$ は連結で補題 1.12.10 より $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ だから、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) = \mathrm{Int}(\mathfrak{su}(2))$ となり、命題 1.12.9 より $\mathrm{Aut}(SU(2)) = \mathrm{Int}(SU(2))$。

第2章　等質空間

2.1　等質空間の多様体構造

定義 2.1.1 M を多様体とし G を Lie 群とする。C^∞ 級写像 $G \times M \to M; (g,x) \mapsto g \cdot x$ が存在し、任意の $g_1, g_2 \in G, x \in M$ と G の単位元 e に対して

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \qquad e \cdot x = x$$

が成り立つとき、G を M の **Lie 変換群**と呼ぶ。さらに任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$ となるとき G は M に**推移的**に作用しているという。

注意 2.1.2 Lie 群 G が多様体 M の Lie 変換群のとき、各 $g \in G$ に対して

$$g : M \to M; x \mapsto g \cdot x$$

は M の微分同型写像になる。逆写像は g^{-1} が誘導する写像である。

定理 2.1.3 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。射影 $\pi : G \to G/H; g \mapsto gH$ によって G の H による剰余類の全体 G/H に商位相をいれる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を G/H の開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって G が G/H の Lie 変換群になるような G/H の多様体構造が存在する。

証明　まず位相空間 G/H が Hausdorff 空間になることを示す。$g_1, g_2 \in G,\ g_1 H \neq g_2 H$ とする。$g_2^{-1} g_1 \notin H$ となり H は G の閉集合だから $G - H$ は $g_2^{-1} g_1$ の開近傍になる。群演算の連続性より、g_i の開近傍 U_i が存在し $U_2^{-1} U_1 \subset G - H$ を満たす。任意の $x_i \in U_i$ に対して $x_2^{-1} x_1 \notin H$ となるので $x_1 H \neq x_2 H$。したがって $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$。$\pi : G \to G/H$ は開写像だから $\pi(U_i)$ は $g_i H = \pi(g_i)$ の開近傍になる。よって G/H は Hausdorff 空間である。

次に写像

$$\tau : G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

が連続になることを示す。$\nu : G \times G \to G; (g, x) \mapsto gx$ とおくと、ν は連続になり $\tau \circ (1 \times \pi) = \pi \circ \nu$ も連続。G/H の開集合 O に対して $(\tau \circ (1 \times \pi))^{-1}(O) = (\pi \circ \nu)^{-1}(O)$ は $G \times G$ の開集合。$1 \times \pi : G \times G \to G \times (G/H)$ は全射だから

$$\tau^{-1}(O) = (1 \times \pi)((\tau \circ (1 \times \pi))^{-1}(O))$$

となり $1 \times \pi$ は開写像だから $\tau^{-1}(O)$ は $G \times (G/H)$ の開集合になる。したがって τ は連続写像である。特に各 $g \in G$ について $\tau_g : G/H \to G/H; xH \mapsto gxH$ とおくと τ_g は位相同型写像である。

以上の準備のもとに G/H の多様体構造について考えよう。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし H に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{h}$ とする。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{m}$ を1つとり固定しておく。$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ は直和分解だから補題 1.8.5 より $\mathfrak{m}, \mathfrak{h}$ における 0 の開近傍 U_m, U_h と G における e の開近傍 V が存在し、

$$U_m \times U_h \to V; (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y$$

は微分同型写像になる。$\exp U_h$ は H における e の開近傍であり H の位相は G の相対位相だから G における e のある開近傍 W が存在して $\exp U_h = W \cap H$ となる。$\mathfrak{m}$ における 0 の開近傍 U で $\overline{U}$ がコンパクトになり $\overline{U} \subset U_m, \exp(-\overline{U}) \exp \overline{U} \subset W$ を満たすものをとる。$\exp : \overline{U} \to \exp \overline{U}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射になるので位相同型写像になる。次に $\pi : \exp \overline{U} \to \pi(\exp \overline{U})$ が単射になることを示す。$X_1, X_2 \in \overline{U}$ が $\pi(\exp X_1) = \pi(\exp X_2)$ を満たすとすると $(\exp X_1)H = (\exp X_2)H$ だから $\exp(-X_2) \exp X_1 \in H$。他方 $X_1, X_2 \in \overline{U}$ だから、$\exp(-X_2) \exp X_1 \in W$ となり $W \cap H = \exp U_h$ なので、ある $Y \in U_h$ が存在して $\exp(-X_2) \exp X_1 = \exp Y$。よって $\exp X_1 = \exp X_2 \exp Y$。$U_m, U_h$ のとり方より $X_1 = X_2, Y = 0$。したがって、$\pi : \exp \overline{U} \to \pi(\exp \overline{U})$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射になるので位相同型写像になる。$U \times U_h$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ における 0 の近傍で $U \times U_h \subset U_m \times U_h$ だから $\exp U \exp U_h$ は G における e の開近傍になる。よって $\pi(\exp U \exp U_h) = \pi(\exp U)$ は G/H における $\pi(e)$ の開近傍になる。さらに $\psi : U \to \pi(\exp U); X \mapsto \pi(\exp X)$ とおくと上で示したことより ψ は位相同型写像になる。

各 $g \in G$ に対して $\tau_g : G/H \to G/H$ は位相同型写像だから $O_g = \tau_g(\pi(\exp U))$ は G/H の開集合になり $\{O_g\}_{g \in G}$ は G/H の開被覆になる。

$$\phi_g = \psi^{-1} \circ \tau_g^{-1} : O_g \to U \subset \mathfrak{m}$$

とおいて $\{(O_g, \phi_g)\}_{g \in G}$ が G/H に多様体構造を定めることを示そう。

写像

$$l : U \times H \to (\exp U)H; (X, h) \mapsto (\exp X)h$$

は $U \times \exp U_h$ において微分同型写像になる。各 $h \in H$ について $l = R_h \circ l \circ (1 \times R_{h^{-1}})$ だから l は $U \times R_h(\exp U_h)$ においても微分同型写像になる。さらに l が全単射に

なれば、l が $U \times H$ 全体で微分同型写像になることがわかる。l が全射になることは定義よりわかる。$(X_i, h_i) \in U \times H$ について $l(X_1, h_1) = l(X_2, h_2)$ とすると $(\exp X_1)h_1 = (\exp X_2)h_2$ だから、$\exp(-X_2)\exp X_1 = h_2 h_1^{-1} \in W \cap H$。したがって、ある $Y \in U_h$ が存在して $\exp(-X_2)\exp X_1 = \exp Y$。よって $\exp X_1 = \exp X_2 \exp Y$ となり $X_1 = X_2,\ Y = 0$。$h_2 h_1^{-1} = \exp Y = e$ だから $h_1 = h_2$。以上で l が単射になることがわかり

$$l : U \times H \to (\exp U)H = \pi^{-1}(O_e) \subset G$$

は微分同型写像になる。特に $l^{-1} = ((l^{-1})_1, (l^{-1})_2)$ と表わすと $(l^{-1})_1 : \pi^{-1}(O_e) \to U$ は C^∞ 級写像である。さらに、$g \in \pi^{-1}(O_e)$ に対して

$$g = l((l^{-1})_1(g), (l^{-1})_2(g)) = \exp((l^{-1})_1(g))(l^{-1})_2(g)$$

だから $\pi(g) = \pi(\exp((l^{-1})_1(g))) = \psi((l^{-1})_1(g))$ となり

$$(l^{-1})_1(g) = \psi^{-1} \circ \pi(g) \quad (g \in \pi^{-1}(O_e)).$$

以上を使って $O_{g_1} \cap O_{g_2} \neq \emptyset$ となる $g_i \in G$ に対して

$$\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1} : \phi_{g_1}(O_{g_1} \cap O_{g_2}) \to \phi_{g_2}(O_{g_1} \cap O_{g_2})$$

が微分同型写像になることを示そう。$X \in \phi_{g_1}(O_{g_1} \cap O_{g_2})$ に対して

$$\begin{aligned} & \phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}(X) = \psi^{-1} \circ \tau_{g_2}^{-1} \circ \tau_{g_1} \circ \psi(X) \\ = \ & \psi^{-1}(\pi(g_2^{-1} g_1 \exp X)) = (l^{-1})_1(g_2^{-1} g_1 \exp X) \end{aligned}$$

より $\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}$ は C^∞ 級写像である。逆写像は $\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}^{-1}$ になり、これも C^∞ 級写像である。したがって $\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1}$ は微分同型写像になる。以上で $\{(O_g, \phi_g)\}_{g \in G}$ が G/H に多様体構造を定めることがわかった。

最後に $\tau : G \times (G/H) \to G/H$ によって G が G/H の Lie 変換群になることを示そう。任意の $g_1, g_2 \in G, x \in G/H$ に対して $\tau(g_1 g_2, x) = \tau(g_1, \tau(g_2, x))$ となるのは τ の定義よりわかるので、τ が C^∞ 級写像になることを示せばよい。τ が連続であることはすでに示した。$(g, xH) \in G \times (G/H)$ と $X \in U, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} & \phi_{gx} \circ \tau \circ ((L_g \circ \exp) \times \phi_x^{-1})(Z, X) = \phi_{gx} \circ \tau(g \exp Z, \pi(x \exp X)) \\ = \ & \phi_{gx} \circ \pi(g(\exp Z)x \exp X) = \psi^{-1} \circ \tau_{gx}^{-1} \circ \pi(g(\exp Z)x \exp X) \\ = \ & \psi^{-1} \circ \pi(\exp(\mathrm{Ad}(x^{-1})Z)\exp X) = (l^{-1})_1(\exp(\mathrm{Ad}(x^{-1})Z)\exp X) \end{aligned}$$

となるので、τ は (g, xH) の近傍で C^∞ 級写像である。これが $G \times (G/H)$ の任意の点で成り立つので τ は C^∞ 級写像である。

定義 2.1.4 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。定理 2.1.3 で存在を示した多様体構造を持つ G/H を G の**等質空間**と呼ぶ。G は G/H に推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定理 2.1.5 G は多様体 M に推移的に作用している Lie 変換群で G の連結成分の個数は可算であるとする。$p \in M$ をとり

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$$

とおくと、G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに写像

$$\alpha : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

は等質空間 G/G_p と M との間の微分同型写像になる。

証明 $G \times M \to M; (g, x) \mapsto g \cdot x$ は C^∞ 級写像だから $\bar{\alpha} : G \to M; g \mapsto g \cdot p$ とおくと $\bar{\alpha}$ も C^∞ 級写像である。よって $G_p = \bar{\alpha}^{-1}(p)$ は G の閉集合になる。G_p は G の部分群にもなるので、定理 7.6 より G_p は G の閉 Lie 部分群である。そこで $H = G_p$ として定理 2.1.3 の証明で使った記号を使うことにする。

まず α が位相同型写像になることを示す。G は M に推移的に作用しているので、α は全単射である。M の開集合 O に対して $\bar{\alpha}^{-1}(O)$ は G の開集合になり、$\pi : G \to G/H$ は開写像だから $\pi(\bar{\alpha}^{-1}(O))$ は G/H の開集合。$\alpha \circ \pi = \bar{\alpha}$ だから $\alpha^{-1}(O) = \pi(\bar{\alpha}^{-1}(O))$ となり α は連続である。α が開写像になることを示すために $\bar{\alpha}$ が開写像になることを示そう。O を G の開集合とする。任意の $x \in O$ に対して単位元 e のコンパクト近傍 C が存在し $C = C^{-1}, xC^2 \subset O$ を満たす。G の連結成分の個数は可算だから補題 1.2.4 より G は可算開基 $\{O_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ を持つ。

$$\{O_i \mid \text{ある } g \in G \text{ が存在し } O_i \subset gC \text{ を満たす}\}$$

も G の可算開基になり、この中の各 O_i に対して $O_i \subset g_i C$ となる $g_i \in G$ をとると、$G = \cup_i g_i C$ が成り立つ。$\bar{\alpha}$ は全射だから $M = \bigcup_i \bar{\alpha}(g_i C)$。各 $g_i C$ はコンパクトなので $\bar{\alpha}(g_i C)$ もコンパクト。特に $\bar{\alpha}(g_i C)$ は M の閉集合。M は局所コンパクト Hausdorff 空間だから Baire の定理よりある i が存在して $\bar{\alpha}(g_i C) = g_i \cdot \bar{\alpha}(C)$ は内点を持つ。よって注意 2.1.2 より、$\bar{\alpha}(C)$ も内点 $\bar{\alpha}(c) = c \cdot p$ を持つ。

$$p \in c^{-1} \cdot \bar{\alpha}(C) = c^{-1} C \cdot p \subset C^2 \cdot p$$

だから $C^2 \cdot p$ は p の近傍になる。$xC^2 \cdot p$ は $x \cdot p$ の近傍になり

$$\bar{\alpha}(x) = x \cdot p \in xC^2 \cdot p = \bar{\alpha}(xC^2) \subset \bar{\alpha}(O).$$

よって $\bar{\alpha}(O)$ は M の開集合になり、$\bar{\alpha}$ は開写像である。そこで今度は O を G/H の開集合とすると $\pi^{-1}(O)$ は G の開集合になり、$\bar{\alpha}$ は開写像だから、$\bar{\alpha}(\pi^{-1}(O))$ は M の開集合。$\alpha(O) = \bar{\alpha}(\pi^{-1}(O))$ より α は開写像になる。よって α は位相同型写像である。

$g \in G, X \in U$ に対して $\alpha \circ \phi_g^{-1}(X) = (g \exp X) \cdot p$ だから、α は $\pi(g) \in G/H$ の近傍で C^∞ 級写像になる。したがって $\alpha : G/H \to M$ は C^∞ 級写像である。$\alpha \circ \pi = \bar{\alpha}$

だから $d\alpha_{\pi(e)} \circ \pi_e = \bar{\alpha}_e$。定理 1.1.9 により $\mathfrak{g}$ と $T_e(G)$ を同一視すると、$\ker(d\pi_e) = \mathfrak{h}$ となるので $\ker(d\bar{\alpha}_e) \supset \mathfrak{h}$。$X \in \ker(d\bar{\alpha}_e)$ とすると、任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$0 = (d\bar{\alpha}_e(X))(f) = \left.\frac{d}{dt} f(\bar{\alpha}(\exp tX))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p)\right|_{t=0}.$$

$s \in \mathbf{R}$ に対して $f_s(q) = f(\exp sX \cdot q)$ $(q \in M)$ とおくと $f_s \in C^\infty(M)$ となる。上の結果を f_s に適用すると

$$0 = \left.\frac{d}{dt} f_s(\exp tX \cdot p)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\exp(s+t)X \cdot p)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p)\right|_{t=s}.$$

したがって $t \mapsto f(\exp tX \cdot p)$ は一定になる。これが任意の $f \in C^\infty(M)$ について成り立つので $\exp tX \cdot p = p$ $(t \in \mathbf{R})$ となり $\exp tX \in G_p$ $(t \in \mathbf{R})$。G_p は G の閉 Lie 部分群だから、命題 1.8.8 より $X \in \mathfrak{h}$。したがって $\ker(d\bar{\alpha}_e) = \mathfrak{h}$ が成り立つ。これより

$$\operatorname{rank}(d\bar{\alpha}_e) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{m} = \dim(G/H).$$

$d\pi_e$ は全射だから

$$\operatorname{rank}(d\alpha_{\pi(e)}) = \operatorname{rank}(d\bar{\alpha}_e) = \dim(G/H).$$

$\alpha : G/H \to M$ は位相同型写像だから、次元の位相不変性 (2 つの Euclid 空間の開集合が位相同型ならばそれらの Euclid 空間の次元は等しい) より $\dim(G/H) = \dim M$ となり、$\operatorname{rank}(d\alpha_{\pi(e)}) = \dim M$。よって $d\alpha_{\pi(e)}$ は線形同型写像になり、逆関数定理より α は $\pi(e)$ のある開近傍 V で微分同型写像になる。各 $g \in G$ について $\alpha = g \circ \alpha \circ \tau_g^{-1}$ だから α は $\tau_g(V)$ においても微分同型写像になり、結局 $\alpha : G/H \to M$ は微分同型写像である。

命題 2.1.6 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。$\pi : G \to G/H$ を自然な射影としたとき、等質空間 G/H から多様体 M への写像 f が C^∞ 級写像になるための必要十分条件は $f \circ \pi$ が C^∞ 級写像になることである。

証明 定理 2.1.3 より π は C^∞ 級写像である。したがって f が C^∞ 級写像ならば、合成 $f \circ \pi$ は C^∞ 級写像になる。

逆に $f \circ \pi$ が C^∞ 級写像であると仮定しよう。定理 2.1.3 の証明で使った記号を使うことにする。任意に $g \in G$ をとる。各 $X \in U$ に対して

$$f \circ \phi_g^{-1}(X) = f \circ \tau_g \circ \psi(X) = f \circ \tau_g \circ \pi \circ \exp(X) = (f \circ \pi) \circ L_g \circ \exp(X)$$

となるので、仮定より f は $\pi(g)$ の開近傍 O_g において C^∞ 級写像である。よって $f : G/H \to M$ は C^∞ 級写像になる。

命題 2.1.7 G を多様体 M の Lie 変換群とする。$p \in M$ をとり

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$$

とおくと、G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに $G(p) = \{g \cdot p \mid g \in G\}$ は等質空間 G/G_p と微分同型になる M の部分多様体である。

証明　定理 2.1.5 の証明と同様にして、G_p は G の閉 Lie 部分群になり

$$\iota : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

とおくと $\iota(G/G_p) = G(p)$ で $\iota : G/G_p \to G(p)$ は全単射になる。ι によって $G(p)$ に多様体構造を入れ、定理 2.1.5 の証明と同様にすると $G(p)$ は M の部分多様体になることがわかる。

2.2　線形 Lie 群の等質空間

命題 2.2.1 線形 Lie 群 $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ はコンパクトである。

証明　$O(n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の有界閉集合だから Heine-Borel の定理よりコンパクトである。$SO(n), U(n), SU(n)$ についても同様。

定理 2.2.2 $1 \leq k \leq n$ とする。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関して正規直交系になる $\mathbf{R}^n$ の k 個の元の全体を

$$V_{\mathbf{R}}(n,k) = \{(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbf{R}^n)^k | \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\ (1 \leq i, j \leq k)\}$$

で定める。

$$1_k \times O(n-k) = \left\{ g \in O(n) \,\middle|\, g = \begin{bmatrix} 1_k & \\ & g' \end{bmatrix}, g' \in O(n-k) \right\}$$

とおき $1_k \times SO(n-k)$ も同様に定めると、$1_k \times O(n-k)$ と $1_k \times SO(n-k)$ はそれぞれ $O(n)$ と $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $O(n)/(1_k \times O(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{R}^n)^k$ の部分多様体になる。$k < n$ のとき $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $SO(n)/(1_k \times SO(n-k))$ とも微分同型になる。

証明

$$O(n) \times (\mathbf{R}^n)^k \to (\mathbf{R}^n)^k; (g, (v_1, \ldots, v_k)) \mapsto (g(v_1), \ldots, g(v_k))$$

によって $O(n)$ は $(\mathbf{R}^n)^k$ の Lie 変換群になる。$e_i \in \mathbf{R}^n$ を i 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 であるような元とする。$p = (e_1, \ldots, e_k)$ とおくと $p \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ であり

任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に対してある $g \in O(n)$ が存在し $(v_1, \ldots, v_k) = g \cdot p$ となる。したがって $V_{\mathbf{R}}(n,k) = O(n)(p)$。さらに $O(n)_p = 1_k \times O(n-k)$ となるので、命題 2.1.7 より $1_k \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $O(n)/(1_k \times O(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{R}^n)^k$ の部分多様体になる。

$O(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ の Lie 変換群になるので $SO(n)$ も $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ の Lie 変換群になる。$k < n$ のときを考えよう。任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に対して $(v_1, \ldots, v_k) = g \cdot p$ となる $g \in O(n)$ をとったとき、g の第 n 列を $\det g$ 倍したものを g' とおくと $g' \in SO(n)$ で $(v_1, \ldots, v_k) = g' \cdot p$ が成り立つ。したがって $SO(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。さらに $SO(n)_p = 1_k \times SO(n-k)$ となるので、命題 2.1.7 より $1_k \times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ は $SO(n)/(1_k \times SO(n-k))$ と微分同型になる。

定義 2.2.3 $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**実 Stiefel 多様体**と呼ぶ。

定理 2.2.4 $1 \leq k \leq n$ とし、$\mathbf{R}^n$ の k 次元ベクトル部分空間の全体を $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ で表わす。

$$O(k) \times O(n-k) = \left\{ g \in O(n) \,\middle|\, g = \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix}, g_1 \in O(k), g_2 \in O(n-k) \right\}$$

とおくと $O(k) \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉 Lie 部分群になり、$Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ と 1 対 1 に対応する。この対応を使って $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}} : V_{\mathbf{R}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k); (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_k)$$
$$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_k) \text{ は } v_1, \ldots, v_k \text{が張る } \mathbf{R}^n \text{内の } k \text{ 次元ベクトル部分空間}$$

とおくと $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ は C^∞ 級写像になる。

証明 $O(k) \times O(n-k)$ は命題 2.2.1 よりコンパクトだから $O(n)$ の相対位相に関してもコンパクト。したがって $O(k) \times O(n-k)$ は $O(n)$ の閉部分群になる。写像

$$O(n) \times Gr_{\mathbf{R}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k); (g, V) \mapsto g(V)$$

によって群 $O(n)$ を集合 $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ の変換群とみなす。任意の $g \in O(n)$ に対して $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}} \circ g = g \circ \mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ が成り立つ。$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ は全射になり、定理 2.2.2 の証明より $O(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用しているので、$O(n)$ は $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。$\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}(e_1, \ldots, e_k) = W$ とおくと $O(n)_W = O(k) \times O(n-k)$ となる。したがって対応

$$O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \to Gr_{\mathbf{R}}(n,k);\ g(O(k) \times O(n-k)) \mapsto gW$$

によって $O(n)/(O(k)\times O(n-k))$ と $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として1対1に対応する。$\pi_1 : O(n)\to O(n)/(1_k\times O(n-k))$ と $\pi_2 : O(n)\to O(n)/(O(k)\times O(n-k))$ をそれぞれ自然な射影とすると、定理2.1.3の証明での等質空間の多様体構造の定め方より π_1,π_2 は C^∞ 級写像になる。$\phi(g(1_k\times O(n-k)))=g(O(k)\times O(n-k))$ として $O(n)/(1_k\times O(n-k))$ から $O(n)/(O(k)\times O(n-k))$ への写像 ϕ を定めると

$$\begin{array}{ccc}
O(n) & \xrightarrow{id} & O(n) \\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
O(n)/(1_k\times O(n-k)) & \xrightarrow{\phi} & O(n)/(O(k)\times O(n-k)) \\
{\scriptstyle \cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
V_{\mathbf{R}}(n,k) & \xrightarrow{\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}} & Gr_{\mathbf{R}}(n,k)
\end{array}$$

は可換図式になるので命題2.1.6より ϕ は C^∞ 級写像になる。したがって $\mathrm{Span}_{\mathbf{R}}$ も C^∞ 級写像になる。

定義 2.2.5 $Gr_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。特に、$Gr_{\mathbf{R}}(n+1,1)$ を**実射影空間**と呼び $P^n(\mathbf{R})$ で表す。

定理 2.2.6 $1\le k\le n$ とし、$\mathbf{R}^n$ の向きを持つ k 次元ベクトル部分空間の全体を $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ で表わす。$SO(n)$ の部分群 $SO(k)\times SO(n-k)$ を定理2.2.4の $O(n)$ の部分群 $O(k)\times O(n-k)$ と同様に定義すると、$SO(k)\times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉 Lie 部分群になる。$k=n$ のとき $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,n)$ は2点になり、$k<n$ のとき $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ と1対1に対応する。この対応を使って $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}} : V_{\mathbf{R}}(n,k)\to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k); (v_1,\dots,v_k)\mapsto \mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(v_1,\dots,v_k)$$

$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(v_1,\dots,v_k)$ は $v_1,\dots,v_k$が張る $\mathbf{R}^n$内の k 次元ベクトル部分空間で $(v_1,\dots,v_k)$ を含む向きを持つ

とおくと $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$ は C^∞ 級写像になる。

証明　$SO(k)\times SO(n-k)$ は命題2.2.1よりコンパクトだから $SO(n)$ の相対位相に関してもコンパクト。したがって $SO(k)\times SO(n-k)$ は $SO(n)$ の閉部分群になる。写像

$$SO(n)\times Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)\to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k); (g,V)\mapsto g(V)$$

$g(V)$ の向きは V の向きを g で送ったもの

によって群 $SO(n)$ を集合 $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ の変換群とみなす。任意の $g\in SO(n)$ に対して $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}\circ g=g\circ\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$ が成り立つ。また $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$ は全射になる。$k=n$ のときは、

$Gr^o_{\mathbf{R}}(n,n)$ は2点になる。$k<n$ のとき定理 2.2.2 より $SO(n)$ は $V_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用しているので、$SO(n)$ は $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ に推移的に作用する。$\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}(e_1,\ldots,e_k)=W$ とおくと $SO(n)_W=SO(k)\times SO(n-k)$ となる。したがって対応

$$SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))\to Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k);\ g(SO(k)\times SO(n-k))\mapsto gW$$

によって $SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ と $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ は集合として1対1に対応する。$\pi_1: SO(n)\to SO(n)/(1_k\times SO(n-k))$ と $\pi_2: O(n)\to SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ をそれぞれ自然な射影とすると、定理 2.1.3 の証明での等質空間の多様体構造の定め方より π_1,π_2 は C^∞ 級写像になる。$\phi(g(1_k\times SO(n-k)))=g(SO(k)\times SO(n-k))$ として $SO(n)/(1_k\times SO(n-k))$ から $SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))$ への写像 ϕ を定めると

$$\begin{array}{ccc}
SO(n) & \xrightarrow{id} & SO(n)\\
{\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2}\\
SO(n)/(1_k\times SO(n-k)) & \xrightarrow{\phi} & SO(n)/(SO(k)\times SO(n-k))\\
{\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong}\\
V_{\mathbf{R}}(n,k) & \xrightarrow{\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}} & Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)
\end{array}$$

は可換図式になるので命題 2.1.6 より ϕ は C^∞ 級写像になる。したがって $\mathrm{Span}^o_{\mathbf{R}}$ も C^∞ 級写像になる。

定義 2.2.7 $Gr^o_{\mathbf{R}}(n,k)$ を**有向実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。

定理 2.2.8 $1\le k\le n$ とする。$\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して正規直交系になる $\mathbf{C}^n$ の k 個の元の全体を

$$V_{\mathbf{C}}(n,k)=\{(v_1,\ldots,v_k)\in(\mathbf{C}^n)^k|\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}\ (1\le i,j\le k)\}$$

で定める。

$$1_k\times U(n-k)=\left\{g\in U(n)\,\middle|\,g=\begin{bmatrix}1_k & \\ & g'\end{bmatrix},g'\in U(n-k)\right\}$$

とおき $1_k\times SU(n-k)$ も同様に定める。このとき、$1_k\times U(n-k)$ と $1_k\times SU(n-k)$ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の閉 Lie 部分群になる。さらに $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ は $U(n)/(1_k\times U(n-k))$ と微分同型であるような $(\mathbf{C}^n)^k$ の部分多様体になる。$k<n$ のとき $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ は $SU(n)/(1_k\times SU(n-k))$ とも微分同型になる。

定理 2.2.2 の証明と同様の方針で証明することができるので、証明は省略する。

定義 2.2.9 $V_{\mathbf{C}}(n,k)$ を**複素 Stiefel 多様体**と呼ぶ。

定理 2.2.10 $1 \leq k \leq n$ とし、$\mathbf{C}^n$ の k 次元複素ベクトル部分空間の全体を $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ で表わす。

$$U(k) \times U(n-k) = \left\{ g \in U(n) \middle| g = \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix}, g_1 \in U(k), g_2 \in U(n-k) \right\}$$

とおく。このとき $U(k) \times U(n-k)$ は $U(n)$ の閉 Lie 部分群になり $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ は集合として、等質空間 $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ と 1 対 1 に対応する。この対応を使って $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ に多様体構造を入れ

$$\begin{aligned} &\mathrm{Span}_{\mathbf{C}} : V_{\mathbf{C}}(n,k) \to Gr_{\mathbf{C}}(n,k); (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k) \\ &\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k) \text{ は } v_1, \ldots, v_k \text{が張る } \mathbf{C}^n \text{内の } k \text{ 次元ベクトル部分空間} \end{aligned}$$

とおくと $\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}$ は C^∞ 級写像になる。

定理 2.2.4 の証明と同様の方針で証明することができるので、証明は省略する。

定義 2.2.11 $Gr_{\mathbf{C}}(n,k)$ を**複素 Grassmann 多様体**と呼ぶ。$Gr_{\mathbf{C}}(n+1,1)$ を**複素射影空間**と呼び $P^n(\mathbf{C})$ で表す。

2.3 等質空間の Riemann 計量

この節では、等質空間に Riemann 計量を定める方法について述べる。

定理 2.3.1 G をコンパクト Hausdorff 位相群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の Radon 測度 μ_G が一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(3) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(4) G 上の μ_G 可積分関数 f に対して

$$\int_G f(x^{-1}) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

定義 2.3.2 定理 2.3.1 で定まるコンパクト Hausdorff 位相群 G 上の測度を、G の **Haar 測度**と呼ぶ。

定義 2.3.3 Riemann 計量を持つ Lie 群の任意の左移動が等長的になっているとき、その Riemann 計量を**左不変**という。任意の右移動も等長的になる左不変 Riemann 計量を、両側不変 Riemann 計量という。

命題 2.3.4 Lie 群 G の左不変 Riemann 計量の全体と、その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積の全体は一対一に対応する。さらに、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

証明　G 上の左不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ があるとする。$\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して、$\langle X, Y\rangle$ は G 上の左不変関数になるので、定数である。明らかにこれは $\mathfrak{g}$ の内積を定める。

逆に、$\mathfrak{g}$ に内積が定まっているとする。G の任意の点 $g \in G$ の接ベクトル空間 T_gG の内積 $\langle\ ,\ \rangle_g$ を

$$\langle X, Y\rangle_g = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle \qquad (X, Y \in T_gG)$$

で定める。ただし、$\tilde{X}, \tilde{Y}$ はそれぞれ X, Y を左不変ベクトル場に拡張したものであり、定理 1.1.9 より、このような拡張は可能である。さらに定理 1.1.9 の証明と同様に、$\langle\ ,\ \rangle_g$ が g に対して滑らかに依存していることがわかる。したがって、$\{\langle\ ,\ \rangle_g\}_{g\in G}$ は、G 上の Riemann 計量を定める。さらに、この Riemann 計量は、定め方より、左不変であることがわかる。

随伴表現 Ad の定め方 (定理 1.6.10) より、G の元 g に対して

$$\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$$

だから、G の Riemann 計量が両側不変ならば、対応する $\mathfrak{g}$ の内積は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変になる。逆も上の等式からわかる。

系 2.3.5 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G 上の両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0 \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

を満たす。すなわち、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ となる。さらに G が連結のとき、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たす $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の全体は一対一に対応する。

証明　$\langle\ ,\ \rangle$ が G の両側不変 Riemann 計量のとき、$Y, Z \in \mathfrak{g}$ と $g \in G$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}(g)Y, \mathrm{Ad}(g)Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$$

が成り立つ。$X \in \mathfrak{g}$ をとり、$g = \exp(tX)$ とおくと、

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle = \langle Y, Z\rangle.$$

両辺を $t = 0$ で t に関して微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \right\rangle \\ &= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle \qquad (\text{定理 } 1.6.10). \end{aligned}$$

したがって、各 $\mathrm{ad}(X)$ は交代線形写像になり、$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ が成り立つ。

G が連結の場合を考える。G の両側不変 Riemann 計量が $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{o}(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を満たすことはすでに示したので、命題 2.3.4 より、この条件を満たす $\mathfrak{g}$ の内積が、$\mathrm{Ad}(G)$ 不変になることを示せば十分である。$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle \\ &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \right\rangle \\ &= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle \qquad (\text{定理 } 1.6.10) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$$

となり、内積は $\mathrm{Ad}(\exp \mathfrak{g})$ 不変になる。ところが、G は連結だから定理 1.5.5 と 1.2.1 より、内積は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変になることがわかる。

命題 2.3.6 G をコンパクト Hausdorff 位相群とし、μ_G を G の Haar 測度とする。G の表現 (ρ, V) に対して ρ を G から $\mathrm{Hom}(V, V)$ への写像とみなして $P = \int \rho d\mu_G \in \mathrm{Hom}(V, V)$ とおくと、$P^2 = P$ が成り立つ。また

$$V_G = \{v \in V | \rho(g)(v) = v\ (g \in G)\}$$

とおくと、$\mathrm{Im}P = V_G$ となる。

証明　$v \in V$ に対して積分の線形性より

$$P(v) = \int \rho(x) d\mu_G x(v) = \int \rho(x)(v) d\mu_G x$$

となる。これより $v \in V_G$ ならば $P(v) = v$ となり $v \in \mathrm{Im}P$。よって $V_G \subset \mathrm{Im}P$。また任意の $v \in V$ と $g \in G$ について

$$\begin{aligned}
\rho(g)P(v) &= \rho(g)\int \rho(x)(v)d\mu_G x \\
&= \int \rho(g)\rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\rho(g)\text{ の作用の線形性}) \\
&= \int \rho(gx)(v)d\mu_G x \\
&= \int \rho(x)(v)d\mu_G x \qquad (\text{Haar 積分の左不変性}) \\
&= P(v) \qquad (\mu_G(G) = 1\text{ だから})
\end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{Im}P \subset V_G$ となり、$\mathrm{Im}P = V_G$ がわかる。さらに

$$\begin{aligned}
P^2(v) &= \int \rho(x)P(v)d\mu_G x \\
&= \int P(v)d\mu_G x \qquad (P(v) \in V_G) \\
&= P(v) \qquad (\mu_G(G) = 1\text{ だから})
\end{aligned}$$

となるので、$P^2 = P$ が成り立つ。

命題 2.3.7 (ρ, V) をコンパクト Hausdorff 位相群 G の表現とすると、ρ が直交（ユニタリ）表現になるような V の内積が存在する。

証明　G の Haar 測度を μ_G としておく。

V が実ベクトル空間の場合 V 上の対称二次形式の全体がつくる実ベクトル空間を $S(V)$ で表す。

$$(\rho_S(g)A)(v,w) = A(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(w)) \qquad (g \in G,\ A \in S(V),\ v,w \in V)$$

によって ρ_S を定めると $(\rho_S, S(V))$ は G の表現になる。正定値の元 $A_0 \in S(V)$ を 1 つとる。$P = \int \rho_S d\mu_G$ とおくと、命題 2.3.6 より、$P(A_0) \in S(V)_G$ となる。また任意の $v (\neq 0) \in V$ について

$$P(A_0)(v,v) = \int A_0(\rho(g)^{-1}(v), \rho(g)^{-1}(v))d\mu_G g > 0$$

となるので、$P(A_0)$ も正定値になる。この内積 $P(A_0)$ によって (ρ, V) は直交表現になる。

V が複素ベクトル空間の場合も、V 上の Hermite 二次形式の全体がつくる複素ベクトル空間を考えることにより、同様に証明できる。

系 2.3.8 コンパクト Lie 群には、両側不変 Riemann 計量が存在する。

証明　G をコンパクト Lie 群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す。G の随伴表現に命題 2.3.7 を適用すると、$\mathfrak{g}$ 上に $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積が存在する。したがって、命題 2.3.4 より、この内積に対応する G 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 2.3.9 コンパクト線形 Lie 群の場合は、Haar 測度を使わなくても、以下のように具体的に両側不変 Riemann 計量を構成することができる。コンパクト線形 Lie 群 $G \subset GL(n, \mathbf{R})$ に対して、命題 2.3.7 より

$$G \subset O(\mathbf{R}^n; B)$$

となる $\mathbf{R}^n$ の内積 B が存在する。$\mathbf{R}^n$ の B に関する正規直交基底をとり、それについて行列表示することにより、$G \subset O(n)$ とみなす。このとき、$O(n)$ に両側不変 Riemann 計量を構成すれば、G に誘導される Riemann 計量も両側不変になる。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^tXY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ 上の 2 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \mathrm{tr}({}^tXY) = -\mathrm{tr}(XY) \\ &= -\mathrm{tr}(YX) = \mathrm{tr}({}^tYX) \\ &= \langle Y, X \rangle \end{aligned}$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X = (X_{ij}) \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\langle X, X \rangle = \mathrm{tr}({}^tXX) = \sum_{i,j} X_{ij}^2$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。さらに $g \in O(n)$ に対して例 1.8.11 より

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \qquad (X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle &= -\mathrm{tr}(gXg^{-1}gYg^{-1}) \\ &= -\mathrm{tr}(gXYg^{-1}) \\ &= -\mathrm{tr}(XY) \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(O(n))$ 不変になり、命題 2.3.4 より、対応する $O(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

定義 2.3.10 Riemann 計量を持つ等質空間 G/H とする。定理 2.1.3 で定まる G の G/H への作用が等長的になっているとき、その Riemann 計量を G **不変**という。

命題 2.3.11 G を Lie 群とし、H を G の閉 Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。

証明 任意の $h \in H$ に対して、$L_h \circ R_{h^{-1}}$ は H を不変にするので、その微分 $\mathrm{Ad}_G(h)$ は $\mathfrak{h}$ を不変にする。したがって、線形写像

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

は、商ベクトル空間の線形写像

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

を誘導する。上にあるように、誘導された線形写像も同じ記号で表すことにする。

G/H の H 自身による剰余類を G/H の原点と呼び、o で表すことにする。定理 1.1.9 で定めた線形同型写像 $\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ と自然な射影 $\pi : G \to G/H$ の微分写像 $d\pi_e$ を使って、線形写像の合成

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha} T_e(G) \xrightarrow{d\pi_e} T_o(G/H)$$

を β とおく。β の核は $\mathfrak{h}$ になる。よって、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ と $T_o(G/H)$ は、β の誘導する線形写像によって線形同型になる。β の誘導する線形写像も β で表すことにする。H の元 h は G/H の原点 o を動かさないので、

$$dh_o : T_o(G/H) \to T_o(G/H)$$

を誘導する。dh_o に対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の線形写像を求めてみよう。$X \in \mathfrak{g}$ をとる。

$$\begin{aligned} dh_o d\pi_e \alpha(X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\pi(\exp tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tX)H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \exp tXh^{-1})H = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp t\mathrm{Ad}(h)X)H \\ &= d\pi_e\alpha(\mathrm{Ad}(h)X). \end{aligned}$$

したがって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(h)} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ \beta\Big\downarrow\cong & & \beta\Big\downarrow\cong \\ T_o(G/H) & \xrightarrow{dh_o} & T_o(G/H) \end{array}$$

以上の準備のもとに命題を証明する。G/H に G 不変 Riemann 計量があるとすると、$T_o(G/H)$ における計量は、各 $h \in H$ に対して dh_o で不変になる。線形同型写像 β で対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の内積は、上の可換図式より、$\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積になる。

逆に $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積があるとすると、β で対応する $T_o(G/H)$ 上の内積は、各 $h \in H$ に対して dh_o で不変になる。その内積を $\langle\ ,\ \rangle_o$ で表す。任意の元 $x \in G/H$ における内積を

$$\langle X, Y\rangle_x = \langle dgX, dgY\rangle_o \qquad (X, Y \in T_x(G/H),\ gx = o)$$

で定義する。内積の定義が、$gx = o$ となる $g \in G$ のとり方によらないことは、次のようにしてわかる。$g_1x = g_2x = o$ とすると、$x = g_1^{-1}o$ となり、

$$o = g_2x = g_2g_1^{-1}o.$$

よって $g_2g_1^{-1} \in H$ となる。そこで、$h = g_2g_1^{-1} \in H$ とおくと、

$$\begin{aligned}\langle dg_1X, dg_1Y\rangle_o &= \langle dhdg_1X, dhdg_1Y\rangle_o \qquad (\langle\ ,\ \rangle_o\text{の不変性})\\ &= \langle dg_2dg_1^{-1}dg_1X, dg_2dg_1^{-1}dg_1Y\rangle_o\\ &= \langle dg_2X, dg_2Y\rangle_o.\end{aligned}$$

これにより G/H に G 不変な Riemann 計量が定まる。

系 2.3.12 G を Lie 群とし、H を G のコンパクト Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

を満たす。等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

証明　命題 2.3.7 より、$\mathfrak{g}$ には $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変内積が存在する。その内積に関する $\mathfrak{h}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ で表す。任意の $h \in H$ について、

$$\mathrm{Ad}_G(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

は内積を保ち、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ を満たすので、$\mathrm{Ad}_G(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ も成り立つ。さらに、

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_G(h)} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}\\ \Big\downarrow\cong & & \Big\downarrow\cong\\ \mathfrak{m} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_G(h)} & \mathfrak{m}\end{array}$$

は可換になるので、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体と、一対一に対応する。よって、命題 2.3.11 より、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体とも一対一に対応する。

G がコンパクトだから、K もコンパクトになり、命題 2.3.7 より、$\mathfrak{m}$ に $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積が存在する。したがって、G/H に G 不変 Riemann 計量が存在する。

第3章　形状空間

Euclid 空間の有限点集合を相似変換で写り合うものを同一視したものを形状と呼び、その全体を形状空間と呼ぶ。この章では

D. G. Kendall, D. Barden, T. K. Carne and H. Le,

Shape and shape theory, Wiley, 1999

を参考にして、形状空間に関する基本的事項について解説する。

3.1　形状空間と前形状空間

自然科学や工学に現れる図形から特徴的な点をとりだし、その点集合を記述することで元の形を記述することができる。その際に合同変換で写り合うものは同じものとみなされる。さらに、図形の形にのみ注目し大きさには注目しない場合は相似変換で写り合うものも同じものとみなす。このように同一視したものを対象とするためには、数学的には同値類を考えることになる。さらにここで考えている同一視は、群の作用で写り合うものを同一視することになる。

定義 3.1.1 $\mathbf{R}^n$ の元を実 n 次縦ベクトルで表わすことにする。$\mathbf{R}^n$ の向きを保つ相似変換全体の成す Lie 変換群 $S(\mathbf{R}^n)$ は

$$S(\mathbf{R}^n) = \left\{ \begin{bmatrix} rT & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; r \in \mathbf{R},\, r > 0,\, T \in SO(n),\, v \in \mathbf{R}^n \right\}$$

と表わすとができ、$\mathbf{R}^n$ への作用は

$$\begin{bmatrix} rT & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rTx + v \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

によって定めることができる。$\mathbf{R}^n$ の k 個 $(k \geq 2)$ の点の組を $(\mathbf{R}^n)^k$ で表わす。

$$(\mathbf{R}^n)^k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in \mathbf{R}^n\}$$

と書くと n 次縦ベクトルが k 個横に並ぶことになるので、$(\mathbf{R}^n)^k$ は自然に $n \times k$ 実行列全体 $M(n, k)$ と同一視できる。$\mathbf{R}^n$ の k 個の点がすべて一致している場合を除

外して、$S(\mathbf{R}^n)$ の作用で写り合う k 個の点の組を同値とすることで、同値関係 $\sim$ を定義する。すなわち

$$D^k(\mathbf{R}^n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (\mathbf{R}^n)^k \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_k\}$$

によって除外する点の組を定め、$(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in (\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$x_i = \tilde{T} y_i \qquad (1 \leq i \leq k)$$

を満す $\tilde{T} \in S(\mathbf{R}^n)$ が存在するときに、$(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)$ は同値であるといい $(x_1, \ldots, x_k) \sim (y_1, \ldots, y_k)$ と書くことにする。群の作用によって定めているので、これは同値関係になる。この同値関係 $\sim$ による同値類を**形状**と呼ぶ。さらに $\sim$ による商集合 $(\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)/\sim$ に $(\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ の自然な位相から定まる商位相を導入した商空間を**形状空間**と呼び、Σ_n^k で表わす。$(\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ の元にその同値類を対応させる Σ_n^k への自然な射影を π で表わす。π は連続な開写像になる。

補題 3.1.2 $(\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ の部分集合 $\mathcal{S}_n^k$ を

$$\mathcal{S}_n^k = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (\mathbf{R}^n)^k \,\middle|\, \sum_{i=1}^k x_i = 0,\ \sum_{i=1}^k |x_i|^2 = 1 \right\}$$

によって定めると、$\mathcal{S}_n^k$ はコンパクトになり $\pi(\mathcal{S}_n^k) = \Sigma_n^k$ が成り立つ。特に、Σ_n^k もコンパクトになる。

証明　条件 $x_1 + \cdots + x_k = 0$ より $\mathcal{S}_n^k \subset (\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ となることがわかる。定義より $\mathcal{S}_n^k$ は $(\mathbf{R}^n)^k$ の有界閉集合になるので、コンパクトになる。

$(\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)$ の元 $(x_1, \ldots, x_k)$ を任意にとる。$\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_k)/k$ とおいて、

$$T(y) = y - \bar{x} \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

によって $T \in S(\mathbf{R}^n)$ を定める。

$$T(x_1) + \cdots + T(x_k) = (x_1 + \cdots + x_k) - (x_1 + \cdots + x_k) = 0$$

となる。また、$x_1 = \cdots = x_k$ とはならないので、$T(x_1) = \cdots = T(x_k) = 0$ とはならない。そこで

$$r = \left(\sum_{i=1}^k |T(x_i)|^2 \right)^{1/2} > 0$$

とおいて、

$$R(y) = r^{-1} y \qquad (y \in \mathbf{R}^n)$$

によって $R \in S(\mathbf{R}^n)$ を定める。すると

$$RT(x_1) + \cdots + RT(x_k) = r^{-1}(T(x_1) + \cdots + T(x_k)) = 0$$

となり、

$$\sum_{i=1}^{k} |RT(x_i)|^2 = r^{-2} \sum_{i=1}^{k} |T(x_i)|^2 = 1$$

が成り立つので、$(x_1, \ldots, x_k) \sim (RT(x_1), \ldots, RT(x_k)) \in \mathcal{S}_n^k$ を得る。これらより

$$\Sigma_n^k = \pi((\mathbf{R}^n)^k - D^k(\mathbf{R}^n)) = \pi(\mathcal{S}_n^k).$$

$\mathcal{S}_n^k$ はコンパクトだから、その連続像 Σ_n^k もコンパクトになる。

定義 3.1.3 $\mathcal{S}_n^k$ を**前形状空間**と呼ぶ。

補題 3.1.4 前形状空間 $\mathcal{S}_n^k$ の元 $X = (x_i), Y = (y_i)$ に対して、$X \sim Y$ となるための必要十分条件はある $T \in SO(n)$ が存在して $X = TY$ となることである。ただし、積 TY は $n \times n$ 行列と $n \times k$ 行列の通常の積である。

証明　ある $T \in SO(n)$ が存在して $X = TY$ となれば、$1 \leq i \leq k$ について $x_i = Ty_i$ となり $X \sim Y$ が成り立つ。逆に $X \sim Y$ が成り立つと仮定すると、

$$r \in \mathbf{R}^n,\ r > 0, \quad T \in SO(n), \quad v \in \mathbf{R}^n$$

が存在し

$$x_i = rTy_i + v \qquad (1 \leq i \leq k)$$

が成り立つ。$X, Y \in \mathcal{S}_n^k$ より

$$0 = \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} rTy_i + kv = rT\left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) + kv = kv$$

となるので、$v = 0$ が成り立つ。さらに

$$1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |rTy_i|^2 = r^2 \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 = r^2$$

となるので、$r = 1$ が成り立つ。したがって、

$$x_i = Ty_i \qquad (1 \leq i \leq k)$$

となり、$X = TY$ が成り立つ。

系 3.1.5 形状空間 Σ_n^k は前形状空間の商空間 $\mathcal{S}_n^k / \sim$ と位相同型になり、$\mathcal{S}_n^k$ における同値関係は $SO(n)$ の左からの積作用で写り合うことに一致する。

命題 3.1.6 形状空間は以下の性質を持つ。

(1) 行列式 -1 の直交行列の $\mathbf{R}^n$ への作用が自然に誘導する $\mathcal{S}_n^k$ への作用は、Σ_n^k への直交行列の選び方に依存しない同一の作用 r_k を誘導する。

(2) $n \geq k$ のとき $r_k = 1$ となり、$n < k$ のとき $r_k \neq 1$ かつ $r_k^2 = 1$ が成り立つ。

(3) $m < n$ のときの $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への自然な包含写像を $\iota : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ で表わす。ι は包含写像 $\iota : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{S}_n^k$ を誘導し、さらに、連続写像 $\iota : \Sigma_m^k \to \Sigma_n^k$ を誘導する。

(4) $n < k$ のとき
$$\{[X] \in \Sigma_n^k \mid r_k[X] = [X]\} = \iota(\Sigma_{n-1}^k)$$
が成り立つ。

(5) $n \geq k$ のとき、Σ_n^k は Σ_{k-1}^k / r_k に位相同型になる。ただし、Σ_{k-1}^k / r_k は Σ_{k-1}^k の元であって r_k の作用で写り合うものを同一視した商空間である。これは $\mathcal{S}_{k-1}^k$ への $O(k-1)$ の左からの積作用で写り合うものを同一視した商空間に一致する。

証明　(1) $R \in O(n)$ の行列式が -1 とする。$X, Y \in \mathcal{S}_n^k$ が $X \sim Y$ を満たすと仮定する。つまり、ある $T \in SO(n)$ が存在し、$X = TY$ が成り立つ。すると

$$RX = RTY = (RTR^{-1})RY.$$

ここで、
$$\phi_R : O(n) \to O(n)\ ;\ g \mapsto RgR^{-1}$$
は連続になる。定理 1.11.3 より $SO(n)$ は連結であり、$e = \phi_R(e) \in \phi_R(SO(n))$ となる。よって、$\phi_R(SO(n))$ は連結であり e を含むので $\phi_R(SO(n)) \subset SO(n)$ が成り立つ。特に $RTR^{-1} \in SO(n)$ となり $RX \sim RY$ が成り立つ。これより、R の左からの積は Σ_n^k から Σ_n^k 自身への位相同型写像を誘導することがわかる。

行列式が -1 になる $R_1 \in O(n)$ をもう一つとる。系 1.11.4 より $O(n)$ は 2 つの連結成分 $SO(n)$ と $\{g \in O(n) \mid \det g = -1\}$ を持つので、ある $T_1 \in SO(n)$ が存在し $R_1 = T_1 R$ が成り立つ。任意の $X \in \mathcal{S}_n^k$ に対して $R_1 X = T_1 RX$ となり $R_1 X \sim RX$ が成り立つ。したがって、R_1 が誘導する Σ_n^k の位相同型写像は、R が誘導する Σ_n^k の位相同型写像と一致する。

(2) $n \geq k$ のとき、任意の $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{S}_n^k$ に対して $x_1, \ldots, x_k$ をすべて含む $k-1$ 次元アファイン部分空間 A が $\mathbf{R}^n$ 内に存在する。

$$0 = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k) \in A$$

となるので、A は $\mathbf{R}^n$ の $k-1$ 次元部分ベクトル空間になる。$k-1<n$ だから、A を含む $n-1$ 次元部分ベクトル空間 H をとることができる。H に関する鏡映変換を R とすると、$Rx_i = x_i\,(1 \leq i \leq k)$ となることから、$(x_1, \ldots, x_k)$ の定める同値類 $[x_1, \ldots, x_k]$ は $r_k[x_1, \ldots, x_k] = [x_1, \ldots, x_k]$ を満たす。よって、$r_k = 1$ が成り立つ。

$n < k$ の場合を考える。

$$X = \frac{1}{\sqrt{2n}}(e_1, \ldots, e_n, -e_1 - \cdots - e_n, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{S}_n^k$$

とおく。$e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbf{R}^n$ の標準的な正規直交基底であり、$n<k$ という仮定からこのような X を $\mathcal{S}_n^k$ の元としてとることができる。X の定める同値類 $[X]$ が $r_k[X] = [X]$ を満たすと仮定して矛盾を導く。$r_k[X] = [X]$ より $R \in O(n)$ かつ $\det R = -1$ を満たすものと $T \in SO(n)$ が存在し $RX = TX$ が成り立つ。ところがこの行列の最初の n 列目までの n 次正方行列は、左辺は行列式が負になり右辺は正になり矛盾する。よって、$r_k[X] \neq [X]$ となり $r_k \neq 1$ が成り立つ。

$R \in O(n)$ かつ $\det R = -1$ を満たす R に対して $\det(R^2) = (-1)^2 = 1$ だから $R^2 \in SO(n)$ となり、

$$\mathcal{S}_n^k \to \mathcal{S}_n^k\ ;\ X \mapsto R^2 X$$

から定まる Σ_n^k の位相同型写像は r_k^2 に一致する。$R^2 \in SO(n)$ より、この R^2 の積は同値類を変化させないので、$r_k^2 = 1$ が成り立つ。

(3) $m < n$ のとき、$\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への自然な包含写像 ι は自然な包含写像 $\iota : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{S}_n^k$ を誘導する。

$$\iota(X) = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_n^k \qquad (X \in \mathcal{S}_m^k)$$

となることがわかる。$X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ が同値ならば、ある $T \in SO(m)$ が存在し $X = TY$ となる。

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(n)$$

とおくと

$$\iota(X) = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TY \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{T}\iota(Y).$$

よって $\iota(X), \iota(Y) \in \mathcal{S}_n^k$ も同値になる。以上より写像 $\iota : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{S}_n^k$ は連続写像 $\iota : \Sigma_m^k \to \Sigma_n^k$ を誘導する。

(4) $\mathbf{R}^n$ 内の $\iota(\mathbf{R}^{n-1})$ に関する鏡映を R で表わすと、$R \in O(n)$ かつ $\det R = -1$ が成り立つ。$Y \in \mathcal{S}_{n-1}^k$ に対して $R\iota(Y) = \iota(Y)$ となるので、

$$r_k(\iota[Y]) = r_k[\iota(Y)] = [R\iota(Y)] = [\iota(Y)] = \iota[Y].$$

よって

$$\{[X] \in \Sigma_n^k \mid r_k[X] = [X]\} \supset \iota(\Sigma_{n-1}^k).$$

逆に $X \in \mathcal{S}_n^k$ が $r_k[X] = [X]$ を満たすと仮定する。すると $R \in O(n)$ かつ $\det R = -1$ を満たす R と $T \in SO(n)$ が存在し、$RX = TX$ が成り立つ。このとき $\mathrm{rank} X < n$ が成り立つことを示す。$n < k$ という仮定より X から n 個の列を取り出すことができ、X から任意の n 個の列を取り出して n 次正方行列 X' を作っても、$RX' = TX'$ が成り立ち、

$$-\det X' = \det R \det X' = \det(RX') = \det(TX') = \det T \det X' = \det X'.$$

これより、$\det X' = 0$ が成り立つ。行列の階数の性質より、$\mathrm{rank} X < n$ が成り立つ。X の列ベクトルは $\mathbf{R}^n$ 内のある $n-1$ 次元部分ベクトル空間に含まれることになり、$[X] \in \iota(\Sigma_{n-1}^k)$ を得る。よって

$$\{[X] \in \Sigma_n^k \mid r_k[X] = [X]\} \subset \iota(\Sigma_{n-1}^k).$$

以上より目的の等式を得る。

(5) 条件 $n \geq k$ より連続写像 $\iota : \Sigma_{k-1}^k \to \Sigma_n^k$ を考えることができる。任意の $X = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{S}_n^k$ に対して

$$x_1 + \cdots + x_k = 0$$

だから、$x_1, \ldots, x_k$ は線形従属になり、特に $\mathbf{R}^n$ 内の $k-1$ 次元部分ベクトル空間に含まれる。したがって、$[X] \in \iota(\Sigma_{k-1}^k)$ となり、$\iota : \Sigma_{k-1}^k \to \Sigma_n^k$ は全射になる。

次に $X, Y \in \mathcal{S}_{k-1}^k$ が $\iota[X] = \iota[Y]$ を満たすための必要十分条件を求める。ある $T \in SO(n)$ が存在し $T\iota(X) = \iota(Y)$ が成り立つことが同値になる。$n \geq k > k-1$ だから、ある $R \in O(k-1)$ が存在し $RX = Y$ が成り立つことが同値になり、さらに $r_k[X] = [Y]$ が同値になる。よって、連続全射 $\iota : \Sigma_{k-1}^k \to \Sigma_n^k$ は連続全単射 $\iota : \Sigma_{k-1}^k / r_k \to \Sigma_n^k$ を誘導する。形状空間は補題 3.1.2 よりコンパクトなので、Σ_{k-1}^k / r_k もコンパクトになる。形状空間は距離空間になることを後で示すので、特に Hausdorff 位相空間になる。したがって、$\iota : \Sigma_{k-1}^k / r_k \to \Sigma_n^k$ は位相同型写像になる。

命題 3.1.7

$$q_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \end{bmatrix},\ q_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ q_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{j+j^2}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{j+j^2}} \\ \frac{j}{\sqrt{j+j^2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots \in \mathbf{R}^k$$

を横に並べてできる k 次正方行列 $Q_k = (q_0, q_1, \ldots, q_{k-1})$ は $SO(k)$ の元になる。$x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(y_1, \ldots, y_k) = (x_1, \ldots, x_k)Q_k$$

が成り立つとき、

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}(x_1 + \cdots + x_k), \qquad \sum_{j=1}^{k} |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{k} |y_j|^2$$

が成り立つ。

$$M_0(n,k) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in M(n,k) \mid x_1 + \cdots + x_k = 0\}$$

とおく。このとき、

$$M(n,k-1) \to M_0(n,k)\ ;\ X \mapsto [0X]Q_k^{-1}$$

は等長的線形同型写像になる。特にこの写像の

$$\tilde{\mathcal{S}}_n^k = \{(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in M(n,k-1) \mid |x_1|^2 + \cdots + |x_{k-1}|^2 = 1\}$$

への制限は $\mathcal{S}_n^k$ への等長写像になる。すなわち $\mathcal{S}_n^k$ は $n(k-1)-1$ 次元単位球面 $\tilde{\mathcal{S}}_n^k = S^{n(k-1)-1}(1)$ と等長的になる。さらに、Σ_n^k は $\tilde{\mathcal{S}}_n^k$ への $SO(n)$ の左からの積作用で写り合うものを同一視した商空間 $\tilde{\mathcal{S}}_n^k/\sim$ に位相同型になる。

証明 各 q_j が単位ベクトルになることを示す。

$$|q_0|^2 = \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k} = 1$$

となり、q_0 は単位ベクトルになる。$1 \le j \le k-1$ のとき、

$$|q_j|^2 = \frac{1}{j+j^2} + \cdots + \frac{1}{j+j^2} + \frac{j^2}{j+j^2} = \frac{j+j^2}{j+j^2} = 1$$

となり、q_j も単位ベクトルになる。$q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ が互いに直交することを示す。$1 \le j \le k-1$ に対して

$$\langle q_0, q_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(-\frac{1}{\sqrt{j+j^2}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{j+j^2}} + \frac{j}{\sqrt{j+j^2}} \right) = 0.$$

$1 \le j < m \le k-1$ に対して

$$\langle q_j, q_m \rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{j+j^2}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{j+j^2}} + \frac{j}{\sqrt{j+j^2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{m+m^2}} \right) = 0.$$

よって $q_0, \ldots, q_{k-1}$ が互いに直交する。以上より Q_k は直交行列になる。さらに Q_k が回転行列になることを示すために、行列式を求める。二行目から k 行目をすべて 1 行目に加えると、1 行目は $(\sqrt{k}\,0\ldots 0)$ となる。よって Q_k の行列式は Q_k から最初の行と列を取り除いた $k-1$ 次正方行列の行列式と $\sqrt{k}$ との積になる。この $k-1$ 次正方行列は上三角行列になり、

$$\det Q_k = \sqrt{k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{j}{\sqrt{j+j^2}} = \sqrt{k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{j}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{\sqrt{k}(k-1)!}{\sqrt{((k-1)!)^2 k}} = 1.$$

Q_k の行列式は 1 になり回転行列になる。

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}(x_1 + \cdots + x_k)$$

が成り立つことは Q_k の定め方からわかる。x_j, y_j の第 i 成分を $x_j^{(i)}$, $y_j^{(i)}$ で表わすことにする。

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}|y_j|^2 &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}|y_j^{(i)}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|y_j^{(i)}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}|(y_1^{(i)}, \ldots, y_k^{(i)})|^2 = \sum_{i=1}^{n}|(x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})Q_k|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}|(x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|x_j^{(i)}|^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}|x_j^{(i)}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k}|x_j|^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\sum_{j=1}^{k}|x_j|^2 = \sum_{j=1}^{k}|y_j|^2$$

が成り立つ。

$Y \in M_0(n,k)$ に対して

$$YQ_k = [0X], \qquad X \in M(n, k-1)$$

となる。Y に X を対応させる写像は $M_0(N,k)$ から $M(n,k-1)$ への線形写像で等長的になる。

$$\dim M_0(N,k) = \dim M(n,k-1) = n(k-1)$$

となるので、この写像は等長的線形同型写像になる。したがって、その逆写像

$$M(n,k-1) \to M_0(n,k)\ ;\ X \mapsto [0X]Q_k^{-1}$$

も等長的線形同型写像になる。

残りの主張は行列の左からの積と右からの積が可換な作用になっていることからわかる。

定義 3.1.8 命題 3.1.7 で定めた Q_k の逆行列を **Helmaert 行列**と呼び、$H_k = Q_k^{-1}$ で表わす。

3.2 Riemann 対称空間と行列の標準形

コンパクト Lie 群の極大トーラスの理論やそれをさらに一般化した Riemann 対称空間の極大トーラスの理論は線形代数に現われる種々の標準形の理論を含んでいる。特に行列の種々の標準形の理論はほとんど Riemann 対称空間の極大トーラスの理論に含まれている。今回の講義では対称空間の章を形状空間の章に変更したので、ここでは簡単に Riemann 対称空間に触れ、その極大トーラスの理論を証明なしで解説する。それを利用して行列の標準形を導く。行列の標準形は形状空間の位相構造や距離構造を詳しく調べるときに必要になる。この節の内容の証明の詳細については、次の文献に詳しい解説がある。

S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

定義 3.2.1 Riemann 多様体の曲率テンソルが Levi-Civita 接続に関して平行なとき、**Riemann 局所対称空間**と呼ぶ。

定義 3.2.2 連結 Riemann 多様体 M の各点 x に対して、M の等長変換 s_x が存在し、$s_x^2 = 1$ を満たし、x が s_x の孤立不動点になるとき、M を **Riemann 対称空間**と呼ぶ。

命題 3.2.3 Riemann 対称空間は Riemann 局所対称空間になる。

定義 3.2.4 G を連結 Lie 群とし、K を G の閉 Lie 部分群とする。対 (G, K) が次の条件を満たすとき、(G, K) を **Riemann 対称対**と呼ぶ。$\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトになり、G の位数 2 の自己同型写像 θ が存在して

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおいて、G_θ の単位連結成分を G_θ^0 で表したとき、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ が成り立つ。

定理 3.2.5 M を Riemann 対称空間とし、o を M の一点とする。このとき、M の等長変換全体の成す群 $I(M)$ は M の Lie 変換群になる。さらに、$I(M)$ の単位連結成分を G で表し、

$$K = \{g \in G \mid go = o\}$$

とおくと、K はコンパクトになり、

$$G/K \to M\ ;\ gK \mapsto go$$

は微分同型写像になる。写像

$$\theta : G \to G\ ;\ g \mapsto s_o g s_o$$

は G の位数 2 の自己同型写像になり、この θ に関して (G, K) は Riemann 対称対になる。

定義 3.2.6 Riemann 対称空間の等長変換全体の成す Lie 群が半単純になるとき、その Riemann 対称空間を**半単純**という。

定理 3.2.7 Riemann 対称対 (G, K) に対して、等質空間 G/K に G 不変 Riemann 計量を入れると ($\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトであることからこのような計量は存在する)、G/K は Riemann 対称空間になる。G の位数 2 の自己同型写像を θ とし、θ が誘導する G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型写像も θ で表わす。$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

と直和分解すると、自然な射影 $G \to G/K$ の微分写像によって、$\mathfrak{p}$ は G/K の原点 o の接ベクトル空間 $T_o(G/K)$ と同一視することができる。(以後、$T_o(G/K)$ と $\mathfrak{p}$ を同一視する。) このとき、Riemann 対称空間 G/K の原点 o における曲率テンソル R_o は、

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{p})$$

で定まる。特に Riemann 対称空間 G/K の曲率テンソルは、G 不変 Riemann 計量のとり方に依存しない。

定義 3.2.8 局所 Riemann 対称空間内の全測地的平坦部分多様体の最大次元をその局所 Riemann 対称空間の**階数**と呼ぶ。

定義 3.2.9 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と位数 2 の自己同型写像 θ の組 $(\mathfrak{g}, \theta)$ が、次の条件をみたすとき、$(\mathfrak{g}, \theta)$ を**直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

とおくと、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 環 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ に対応する $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 内の連結 Lie 部分群はコンパクトになる。さらに、$\mathfrak{g}$ の中心と $\mathfrak{k}$ の共通部分が $\{0\}$ になるとき、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ は**効果的**と言われる。Lie 群の組 (G, K) が次の条件を満たすとき、(G, K) は直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \theta)$ に対応していると言われる。G は Lie 環 $\mathfrak{g}$ を持つ連結 Lie 群で、K は Lie 環 $\mathfrak{k}$ を持つ Lie 部分群である。

定義 3.2.10 $(\mathfrak{g},\theta)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p},\quad \mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=X\},\quad \mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=-X\}$$

と直和分解する。$(\mathfrak{g},\theta)$ が次の条件を満たすとき、$(\mathfrak{g},\theta)$ を**既約直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。$\mathfrak{g}$ は半単純であって、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の非自明イデアルを含まず、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{p}$ に既約に作用する。直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\theta)$ に対応する Lie 群の組 G,K は、$(\mathfrak{g},\theta)$ が既約のとき、**既約**と言う。Riemann 対称空間 M に対して、M の等長変換全体の成す Lie 群の単位連結成分を G とし、M の一点を固定する G の部分群を K とすると、定理 3.2.5 より、(G,K) は Riemann 対称対になる。(G,K) が既約のとき、M を**既約 Riemann 対称空間**と呼ぶ。

例 3.2.11 (G,K) を Riemann 対称対とする。定義 3.2.4 より、G の位数 2 の自己同型写像 θ が存在して

$$G_\theta=\{g\in G\mid\theta(g)=g\}$$

とおくと、$G_\theta^0\subset K\subset G_\theta$ が成り立つ。そこで、θ の誘導する $\mathfrak{g}$ の自己同型写像も θ で表わすと、これも位数 2 になり、$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p},\quad \mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=X\},\quad \mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=-X\}$$

と直和分解される。さらに、$(\mathfrak{g},\theta)$ は直交対称Lie代数になることがわかる。Riemann 対称対 (G,K) は、定義 3.2.9 の意味で、直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\theta)$ に対応している。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を Riemann 対称対 (G,K) に対応する Lie 環の直和分解とする。$T_o(G/K)$ と $\mathfrak{p}$ を同一視すると、イソトロピー部分群 K の $T_o(G/K)$ への表現は、Ad による $\mathfrak{p}$ への表現と同一視される。$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。

定理 3.2.12 次の等式が成り立つ。

$$\mathfrak{p}=\bigcup_{k\in K}\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}.$$

この定理より、K の $\mathfrak{p}$ への作用を考える際は、$\mathfrak{a}$ を不変にする K の元の作用を調べることが重要になる。その作用を記述するのが、次に定義する Weyl 群である。

定義 3.2.13 K の閉 Lie 部分群 $N_K(\mathfrak{a})$ と $Z_K(\mathfrak{a})$ を

$$\begin{aligned} N_K(\mathfrak{a}) &= \{k\in K\mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\}\\ Z_K(\mathfrak{a}) &= \{k\in K\mid \mathrm{Ad}(k)A=A\ (A\in\mathfrak{a})\}\end{aligned}$$

によって定めると、剰余群 $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ は有限群になる。これを Riemann 対称空間 G/K の **Weyl 群**と呼び、$W(G/K)$ で表わす。定め方より、$W(G/K)$ は自然に $\mathfrak{a}$ に線形に作用する。

Weyl 群 G/K の $\mathfrak{a}$ への作用を詳しく調べるために、以下で Riemann 対称空間のルート系を定義する。ここでは簡単のために Riemann 対称空間がコンパクトの場合のみ扱うことにする。この場合は $\mathfrak{g}$ に $\mathrm{Ad}_G(G)$ 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する。各 $A \in \mathfrak{a}$ について、$\mathrm{ad}A$ は交代線形変換になり対角化可能になる。$A, B \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B] = \mathrm{ad}([A, B]) = 0$$

となり、$\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B$ は可換になる。よって、$\{\mathrm{ad}A \mid A \in \mathfrak{a}\}$ は同時対角化可能になる。そこで、$\mathfrak{k}$ 内の $\mathfrak{a}$ の中心化部分環を $\mathfrak{k}_0$ とし、$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}} \mid [A, X] = \sqrt{-1}\lambda(A)X\ (A \in \mathfrak{a})\}$$

とおいたとき、

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}_0^{\mathbf{C}} + \mathfrak{a}^{\mathbf{C}} + \sum_{\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$$

が成り立つ。$\mathfrak{g}$ は有限次元だから、有限個の $\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\}$ を除いて $\mathfrak{g}_\lambda = \{0\}$ となる。よって、$\mathfrak{a}^* - \{0\}$ の有限部分集合

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}\}$$

が定まり、

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}_0^{\mathbf{C}} + \mathfrak{a}^{\mathbf{C}} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

が成り立つ。Λ を Riemann 対称空間 G/K の $\mathfrak{a}$ に関する**制限ルート系**と呼び、Λ の元を**制限ルート**と呼ぶ。また、$\mathfrak{g}_\lambda$ を**制限ルート空間**と呼び、上の $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の直和分解を**制限ルート空間分解**と呼ぶ。

$$\{A \in \mathfrak{a} \mid \lambda(A) \neq 0\ (\lambda \in \Lambda)\}$$

の各連結成分を **Weyl 領域**と呼ぶ。

定理 3.2.14 Weyl 群 $W(G/K)$ は Weyl 領域全体の集合の置換を引き起こし、単純推移的に作用する。

Weyl 領域 C_0 を一つとり、固定しておく。

$$\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(C_0) > 0\}$$

とおくと、$\Lambda = \Lambda_+ \cup (-\Lambda_+)$ となる。

系 3.2.15 次の等式が成り立つ。

$$\mathfrak{a} = \bigcup_{w \in W(G/K)} w\bar{C}_0, \qquad \mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\bar{C}_0.$$

例 3.2.16 $m \leq n$ を自然数とする。

$$G = SO(m+n), \qquad K = SO(m) \times SO(n)$$

とおく。G, K はどちらもコンパクト連結 Lie 群になる。

$$\theta(g) = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \qquad (g \in SO(m+n))$$

とおくと、θ は $SO(m+n)$ の位数 2 の自己同型写像になる。

$$\begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

となるので、定義 3.2.4 で定めた G_θ は

$$G_\theta = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \in SO(m+n) \;\middle|\; A \in O(m),\ D \in O(n) \right\}$$

で与えられる。これより G_θ の単位連結成分 G_θ^0 は $SO(m) \times SO(n) = K$ に一致する。したがって、(G, K) は Riemann 対称対になる。G/K は定理 3.2.7 より Riemann 対称空間になる。これは定義 2.2.7 で定めた有向 Grassmann 多様体である。θ の誘導する Lie 環の自己同型写像も

$$\theta(X) = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \qquad (X \in \mathfrak{o}(m+n))$$

となる。θ の $+1$ 固有空間 $\mathfrak{k}$ と -1 固有空間 $\mathfrak{p}$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(m+n) \;\middle|\; U \in \mathfrak{o}(m),\ V \in \mathfrak{o}(n) \right\} \\ \mathfrak{p} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(m+n) \;\middle|\; X \in M(m,n) \right\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここまでの議論では不等式 $m \leq n$ の仮定は必要なかったが、次の $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間を定めるために必要になる。

$$A(m,n) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_m & \end{bmatrix} \in M(m,n) \;\middle|\; t_j \in \mathbf{R} \right\}$$

とおくと

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(m+n) \;\middle|\; X \in A(m,n) \right\}$$

は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間になる。K の $\mathfrak{p}$ への作用は

$$\mathrm{Ad}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & SXT^{-1} \\ -(SXT^{-1})^* & 0 \end{bmatrix}$$

となるので、この場合の定理 3.2.12 の等式

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

は次の等式を意味する。

$$M(m,n) = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(n)}} SA(m,n)T^{-1} = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(n)}} SA(m,n)T.$$

すなわち、任意の $X \in M(m,n)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(n)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S\begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} T$$

が成り立つ。$1 \leq i \leq m$ に対して

$$e_i\begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} = t_i$$

によって $e_i \in \mathfrak{a}^*$ を定める。$m = n$ のとき、G/K の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系は

$$\Lambda = \{\pm(e_i - e_j),\ \pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i < j \leq m\}$$

である。

$$C_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \middle| \ t_1 > \cdots > t_{m-1} > |t_m| \right\}$$

は Weyl 領域になる。これより

$$\bar{C}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \middle| \ t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m| \right\}$$

となるので、この場合の系 3.2.15 の等式

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\bar{C}_0$$

は次の等式を意味する。

$$M(m,m) = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(m)}} S\bar{C}_0 T^{-1} = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(m)}} S\bar{C}_0 T.$$

すなわち、任意の $X \in M(m,m)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(m)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m|$$

が成り立つ。$m < n$ のとき、制限ルート系は

$$\Lambda = \{\pm(e_i - e_j),\ \pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq m\}$$

である。

$$C_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_m & \end{bmatrix} \middle| \ t_1 > \cdots > t_m > 0 \right\}$$

は Weyl 領域になる。これより

$$\bar{C}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_m & \end{bmatrix} \middle| \ t_1 \geq \cdots \geq t_m \geq 0 \right\}$$

となるので、この場合の系 3.2.15 の等式

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\bar{C}_0$$

は次の等式を意味する。

$$M(m,n) = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(n)}} S\bar{C}_0 T^{-1} = \bigcup_{\substack{S \in SO(m) \\ T \in SO(n)}} S\bar{C}_0 T.$$

すなわち、任意の $X \in M(m,n)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(n)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_m & \end{bmatrix} T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_m \geq 0$$

が成り立つ。

上の例の最後の行列の標準形に関する主張を以下に系としてまとめておく。

系 3.2.17 任意の $X \in M(m,m)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(m)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m|$$

が成り立つ。$m < n$ のとき、任意の $X \in M(m,n)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(n)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_m & \end{bmatrix} T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_m \geq 0$$

が成り立つ。

3.3　凸集合

この節では Euclid 空間の凸集合の基本的性質を証明なしで解説する。凸集合のいくつかの基本的性質は形状空間の位相構造や距離構造を詳しく調べるときに必要になる。この節の内容の証明の詳細については、次の文献に詳しい解説がある。

H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge University, 1958.

定義 3.3.1 $\mathbf{R}^n$ の二点 x, y を結ぶ線分を $\overline{xy}$ で表わす。すなわち、

$$\overline{xy} = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1\}.$$

$\mathbf{R}^n$ の空でない部分集合 C が次の条件を満たすとき、C を**凸集合**と呼ぶ。任意の $x, y \in C$ に対して $\overline{xy} \subset C$ が成り立つ。

例 3.3.2 $\mathbf{R}^n$ 内のアファイン部分空間は凸集合になる。

命題 3.3.3 k を 2 以上の整数とする。$\mathbf{R}^n$ の空でない部分集合 C が凸集合になるための必要十分条件は、任意の $x_1, \ldots, x_k \in C$ と $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす実数 λ_i に対して $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ が C に含まれることである。

定義 3.3.4 C を $\mathbf{R}^n$ 内の凸集合とする。

$$\max\{r \mid x_1, \ldots, x_{r+1} \in C,\ x_2 - x_1, \ldots, x_{r+1} - x_1 \text{は線形独立}\}$$

を凸集合 C の**次元**と呼び、$\dim C$ で表わす。

定理 3.3.5 $\mathbf{R}^n$ 内の r 次元凸集合 C に対して、C を含む r 次元アファイン部分空間 $A(C)$ が一意的に存在する。さらに、$A(C)$ 内で C は内部を持つ。

定理 3.3.6 C を $\mathbf{R}^n$ 内の凸集合とする。このとき、C の $A(C)$ における内部は $A(C)$ と位相同型になる。さらに C がコンパクトのときは、C は $A(C)$ 内の閉円板に位相同型になる。

補題 3.3.7 X を $\mathbf{R}^n$ 内の空でない部分集合とすると、X を含む凸集合の内で包含関係に関して最小になる凸集合が存在する。

定義 3.3.8 $\mathbf{R}^n$ 内の空でない部分集合 X に対して、X を含む凸集合の内で包含関係に関して最小になる凸集合 (存在は補題 3.3.7) を X の**凸包**と呼ぶ。

定理 3.3.9 $\mathbf{R}^n$ 内の有界集合 X の凸包は有界集合になる。さらに、X がコンパクトならば、X の凸包はコンパクトになる。

定理 3.3.10 $\mathbf{R}^n$ 内のコンパクト集合 X の凸包は、X を含む半閉空間全体の共通部分に一致する。

3.4　形状空間 Σ_m^{m+1} の位相構造

定理 3.4.1 形状空間 Σ_m^{m+1} は $\dfrac{1}{2}(m-1)(m+2)$ 次元球面に位相同型である。

この定理の証明の準備をする。

例 3.4.2 m を自然数とする。

$$G = U(m), \qquad K = O(m)$$

とおく。G はコンパクト連結 Lie 群になり、K は連結成分を二つ持つコンパクト Lie 群になる。

$$\theta(g) = \bar{g} \qquad (g \in O(m))$$

とおくと、θ は $U(m)$ の位数 2 の自己同型写像になる。定義 3.2.4 で定めた G_θ は $G_\theta = O(m)$ で与えられる。したがって、(G, K) は Riemann 対称対になる。G/K は定理 3.2.7 より Riemann 対称空間になる。これは $\mathbf{C}^m$ 内の Lagrange 部分ベクトル空間全体の成す多様体

$$\mathrm{Lag}(m) = \{V \subset \mathbf{C}^m \mid \dim V = m,\ \sqrt{-1}V \perp V\}$$

になる。θ の誘導する Lie 環の自己同型写像も

$$\theta(X) = \bar{X} \qquad (X \in \mathfrak{u}(m))$$

となる。m 次対称行列全体を $S(m)$ で表わす。

$$S(m) = \{X \in M(m) \mid X^* = X\}.$$

θ の $+1$ 固有空間 $\mathfrak{k}$ と -1 固有空間 $\mathfrak{p}$ は

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(m), \qquad \mathfrak{p} = \sqrt{-1}S(m)$$

で与えられる。実はこの固有空間分解より

$$\mathfrak{u}(m)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{p}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{gl}(m, \mathbf{C})$$

となることがわかる。$\mathfrak{k}$ はそのままにして $\mathfrak{p}$ を $\sqrt{-1}$ 倍すると

$$\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$$

となり、(G, K) に双対な Riemann 対称対 $(GL(m, \mathbf{R}), O(m))$ が定まる。この Riemann 対称対の線形イソトロピー表現、つまり、$O(m)$ の $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ への随伴表現による作用は、元の Riemann 対称対 (G, K) の線形イソトロピー表現と同値になる。このことから、Riemann 対称空間 $U(m)/O(m)$ と $GL(m, \mathbf{R})/O(m)$ の間に密接な関係があることが想像できる。これを一般化することによって、Riemann 対称対の双対を定義でき、Riemann 対称対の分類や実半単純 Lie 環の Cartan 分解や分類に進むことができるが、それは今回の講義の目的ではないのでこれ以上は言及しない。上記の線形イソトロピー表現について一つだけ付け加えておくと、$(GL(m, \mathbf{R}), O(m))$ の線形イソトロピー表現は、直交群 $O(m)$ の m 次対称行列全体 $S(m)$ への通常の作用と同じである。

$$D(m) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \in M(m) \;\middle|\; t_j \in \mathbf{R} \right\}$$

とおくと

$$\mathfrak{a} = \{\sqrt{-1}X \mid X \in D(m)\}$$

は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間になる。K の $\mathfrak{p}$ への作用は

$$\mathrm{Ad}(S)\sqrt{-1}X = S\sqrt{-1}XS^{-1} = \sqrt{-1}SXS^{-1}$$

となるので、この場合の定理 3.2.12 の等式

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

は次の等式を意味する。

$$\sqrt{-1}S(m) = \bigcup_{S \in O(m)} \sqrt{-1}SD(m)S^{-1},$$

両辺に $\sqrt{-1}$ をかけると

$$S(m) = \bigcup_{S \in O(m)} SD(m)S^{-1}.$$

Riemann 対称対 $(GL(m, \mathbf{R}), O(m))$ に対する同様の考察からこの等式を得ることもできる。この等式より、任意の $X \in S(m)$ に対して $S \in O(m)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} S^{-1}$$

が成り立つ。これは対称行列の直交行列による対角化に他ならない。$1 \leq i \leq m$ に対して

$$e_i \sqrt{-1} \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} = t_i$$

によって $e_i \in \mathfrak{a}^*$ を定める。G/K の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系は

$$\Lambda = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq m\}$$

である。

$$C_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \middle| \; t_1 > \cdots > t_m \right\}$$

は Weyl 領域になる。これより

$$\bar{C}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \middle| \; t_1 \geq \cdots \geq t_m \right\}$$

となるので、この場合の系 3.2.15 の等式

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\bar{C}_0$$

は次の等式を意味する。

$$S(m) = \bigcup_{S \in O(m)} S\bar{C}_0 S^{-1}.$$

すなわち、任意の $X \in S(m)$ に対して $S \in SO(m)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$X = S \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_m$$

が成り立つ。

上の例の結果はよく知られた線形代数の結果ではあるが、対称空間の一般論の典型的な応用例になることと次の命題で対称行列の対角化が必要になるので付け加えた。次の命題では対角化の対角成分の大小関係までは必要ないのだが、例3.2.16と同じ構成になるようにした。

命題 3.4.3 (Carne) $n \geq m$ とする。

$$\tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1} = \{X \in M(m,n) \mid \mathrm{tr}(X^*X) = 1\}$$

とおく。$O(m)$ は自然に $\tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}$ に作用する。

$$P_m(n) = \{S \in M(n,n) \mid S^* = S \geq 0,\ \mathrm{tr}S = 1,\ \mathrm{rank}S \leq m\}$$

とおくと、$\tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m)$ は $P_m(n)$ と位相同型になる。

証明　まず

$$\varphi : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1} \to P_m(n)\,;\ X \mapsto X^*X$$

によって写像 φ を定める。$X \in \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}$ とすると X は $m \times n$ 行列だから X^* は $n \times m$ 行列になり $\varphi(X) = X^*X$ は $n \times n$ 行列になる。$\mathrm{tr}(X^*X) = 1$ だから $\mathrm{tr}\varphi(X) = 1$ となる。

$$\varphi(X)^* = (X^*X)^* = X^*X = \varphi(X)$$

となり、$x \in \mathbf{R}^n$ を縦ベクトルとみると

$$\langle x, \varphi(X)x\rangle = x^*(X^*X)x = (Xx)^*Xx = \langle Xx, Xx\rangle \geq 0.$$

したがって、$\varphi(X)$ は半正定値対称行列になる。X は $m \times n$ 行列であり $n \geq m$ だから

$$\mathrm{rank}\varphi(X) = \mathrm{rank}(X^*X) \leq m$$

が成り立ち、$\varphi(X) \in P_m(n)$ であることがわかる。さらに定義式より φ は連続写像になる。

$T \in O(m)$ に対して

$$\varphi(TX) = (TX)^*TX = X^*T^*TX = X^*X = \varphi(X)$$

となるので、$\varphi : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1} \to P_m(n)$ は $\hat{\varphi} : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m) \to P_m(n)$ を誘導し、$\hat{\varphi}$ は $\tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m)$ の商位相に関して連続になる。

$\hat{\varphi} : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m) \to P_m(n)$ が全射になることを示す。任意の $S \in P_m(n)$ をとる。S は半正定値対称行列だから例3.4.2の結果よりある $O \in O(n)$ が存在し

$$O^*SO = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda_j \in \mathbf{R}$$

と対角化できる。$r = \mathrm{rank}S \le m \le n$ とおく。必要なら O をとりかえることによって、$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ とできる。S が半正定値だから対角化した行列も半正定値になり、$\lambda_j > 0\,(1 \le j \le r)$ が成り立つ。さらに $\mathrm{tr}S = 1$ あることから、

$$O^*SO = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1, \quad \mathrm{rank}S = r \le m$$

となる。そこで

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \in M(m,n)$$

とおくと

$$\Lambda^*\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = O^*SO.$$

これより

$$\mathrm{tr}(\Lambda^*\Lambda) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$$

となり $\Lambda \in \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}$ が成り立つ。$\Lambda^*\Lambda = O^*SO$ の左から O をかけ右から O^* をかけると

$$S = O\Lambda^*\Lambda O^* = (\Lambda O^*)^*\Lambda O^*$$

となる。$X = \Lambda O^* \in M(m,n)$ とおくと $X^*X = S$ となるので $\mathrm{tr}(X^*X) = 1$ となり $X \in \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}$ が成り立つ。よって $\varphi(X) = S$ となり φ は全射になる。したがって $\hat{\varphi}$ も全射になる。

$\hat{\varphi} : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m) \to P_m(n)$ が単射になることを示す。$X, Y \in \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}$ が $\varphi(X) = \varphi(Y) = S \in P_m(n)$ を満たすと仮定する。全射の証明のときと同様、ある $O \in O(n)$

が存在し

$$O^*SO = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1, \quad \mathrm{rank} S = r \leq m$$

と対角化できる。この対角行列は

$$O^*X^*XO = (XO)^*XO = (YO)^*YO$$

に一致する。

$$A = XO,\ B = YO \in M(m, n)$$

とおく。A を縦ベクトル $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^m\,(1 \leq i \leq n)$ によって $A = [\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_n]$ で表わし、B を縦ベクトル $\mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^m\,(1 \leq i \leq n)$ によって $B = [\mathbf{b}_1\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$ で表わす。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = A^*A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_i^*\mathbf{a}_j] = [\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle]$$

となるので、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ は直交系になる。$r+1 \leq j \leq n$ に対する $\mathbf{a}_j$ はこれらに直交することになり、もし $\mathbf{a}_j \neq 0$ ならば上の行列の階数は $r+1$ 以上になり、$\mathrm{rank} S = r$ に矛盾する。よって $\mathbf{a}_j = 0$ となり

$$A = [\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_r, 0, \ldots, 0].$$

さらに

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{a}_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\mathbf{a}_r$$

は正規直交系になる。そこでこれを $\mathbf{R}^m$ の正規直交基底に延長して

$$A' = \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{a}_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\mathbf{a}_r, \mathbf{a}'_{r+1}, \ldots, \mathbf{a}'_m\right] \in O(m)$$

とおくことができる。同様にして

$$\begin{aligned} B &= [\mathbf{b}_1\ \ldots\ \mathbf{b}_r, 0, \ldots, 0], \\ B' &= \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{b}_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\mathbf{b}_r, \mathbf{b}'_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}'_m\right] \in O(m) \end{aligned}$$

とおくことができる。$T = B'(A')^* \in O(m)$ とおくと $TA' = B'$ となり、$1 \le i \le r$ に対して

$$T\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathbf{a}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathbf{b}_i.$$

よって、$T\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ となり $TA = B$ を得る。以上より $TXO = TA = B = YO$ となり $TX = Y$ を得る。これより $\hat{\varphi}$ は単射になる。

$\hat{\varphi} : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m) \to P_m(n)$ は連続全単射になり、$\tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m)$ はコンパクトで $P_m(n)$ は Hausdorff だから、$\hat{\varphi} : \tilde{\mathcal{S}}_m^{n+1}/O(m) \to P_m(n)$ は位相同型写像になる。

定理 3.4.1 の証明　形状空間 $\Sigma_m^k = \mathcal{S}_m^k/SO(m)$ と $\tilde{\mathcal{S}}_m^k/O(m)$ との関係を明らかにしておく。命題 3.1.6 の (1) で定めた写像 $r_k : \Sigma_m^k \to \Sigma_m^k$ を使うと $\Sigma_m^k/r_k \cong \mathcal{S}_m^k/O(m)$ と表わすことができる。命題 3.1.7 より $\mathcal{S}_m^k/SO(m)$ と $\tilde{\mathcal{S}}_m^k/SO(m)$ は位相同型であり、この位相同型写像は $\mathcal{S}_m^k/O(m)$ と $\tilde{\mathcal{S}}_m^k/O(m)$ の位相同型も誘導する。よって、Σ_m^k/r_k と $\tilde{\mathcal{S}}_m^k/O(m)$ は位相同型になる。

命題 3.4.3 より

$$\Sigma_m^{m+1}/r_{m+1} \cong P_m(m) = \{S \in M(m) \mid S^* = S \ge 0,\ \mathrm{tr}S = 1\}$$

となる。$P_m(m)$ が $(m-1)(m+2)/2$ 次元閉円板に位相同型になることを示す。

$$V_m = \{S \in M(m) \mid S^* = S,\ \mathrm{tr}S = 1\}$$

とおくと、V_m はアフィン部分空間になり

$$\dim V_m = \frac{1}{2}m(m+1) - 1 = \frac{1}{2}(m-1)(m+2).$$

$S_1, S_2 \in P_m(m)$ と $t_1, t_2 \ge 0\ (t_1+t_2 = 1)$ に対して $t_1S_1+t_2S_2 \in V_m$ となり、$x \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$\langle(t_1S_1 + t_2S_2)x, x\rangle = t_1\langle S_1x, x\rangle + t_2\langle S_2x, x\rangle \ge 0$$

より $t_1S_1+t_2S_2 \ge 0$ となる。よって $P_m(m)$ は凸集合になる。さらに $P_m(m)$ の元は半正定値であることから固有値は 0 以上になる。固有値の和は 1 になる。例 3.4.2 で示した対称行列の標準形より

$$P_m(m) = \bigcup_{T \in O(m)} T \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \,\middle|\, t_j \ge 0,\ t_1 + \cdots + t_m = 1 \right\} T^{-1}$$

が成り立つ。特に $P_m(m)$ はコンパクトになる。$\frac{1}{m}I$ の V_m における近傍は $P_m(m)$ に含まれるので、$P_m(m)$ は内点を持つ。したがって、$P_m(m)$ は V_m 内の内部を持つコンパクト凸集合になり、定理 3.3.6 より $(m-1)(m+2)/2$ 次元閉円板に位相同

型になる。$P_m(m)$ の V_m における境界は

$$\begin{aligned}\partial P_m(m) &= \bigcup_{T\in O(m)} T\left\{\left[\begin{array}{ccc} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{array}\right] \,\middle|\, \begin{array}{c} t_j \geq 0,\, t_1+\cdots+t_m=1, \\ t_1\cdots t_m = 0 \end{array}\right\} T^{-1} \\ &= \{S\in P_m(m) \mid \det S = 0\}.\end{aligned}$$

以上の準備の元で Σ_m^{m+1} から球面への位相同型写像を具体的に構成する。

$$\psi : \mathcal{S}_m^{m+1} \to V_m \times \mathbf{R}\,;\, X \mapsto (X^*X, \det X)$$

によって実解析的写像 ψ を定める。$T\in SO(m)$ に対して $\psi(TX)=\psi(X)$ となるので、

$$\hat{\psi} : \Sigma_m^{m+1} \to V_m \times \mathbf{R}\,;\, \pi(X) \mapsto \psi(X) = (X^*X, \det X)$$

は well-defined になり連続写像になる。

$\hat{\psi}$ が単射になることを示そう。$X, Y \in \mathcal{S}_m^{m+1}$ に対して $\psi(X)=\psi(Y)$ が成り立つと仮定する。$X^*X = Y^*Y$ よりある $T\in O(m)$ が存在し $TX = Y$ になることが命題 3.4.3 からわかる。さらに $\det X = \det Y$ が成り立つので、$\det X = \det Y = \det T \det X$ となる。よって $\det X \neq 0$ のときは $\det T = 1$ となり $T\in SO(m)$ が成り立つ。$\det X = 0$ のときは、TX を行列として $\mathbf{R}^m$ に作用させると $TX(\mathbf{R}^m)$ は $\mathbf{R}^m$ 内の $m-1$ 次元以下の部分ベクトル空間になる。そこで $TX(\mathbf{R}^m)$ を含む超平面に関する鏡映 R をとると $RTX = TX = Y$ が成り立つ。$\det T = -1$ の場合は $\det(RT) = 1$ となり $RT\in SO(m)$ となる。結局どの場合も $\pi(X)=\pi(Y)$ となり $\hat{\psi}$ は単射になる。

$\hat{\psi} : \Sigma_m^{m+1} \to V_m\times\mathbf{R}$ は連続単射になり、Σ_m^{m+1} はコンパクト、$V_m\times\mathbf{R}$ は Hausdorff だから、$\hat{\psi}$ は Σ_m^{m+1} から像への位相同型写像になる。$\hat{\psi}$ の像が $V_m\times\mathbf{R}$ の中でどのような部分集合になっているか調べてみよう。$X\in\mathcal{S}_m^{m+1}$ に対して X^*X は対称行列になり $\mathrm{tr}(X^*X)=1$ となるので $X^*X\in V_m$ であり、$X^*X\geq 0$ と $\det(X^*X) = (\det X)^2$ が成り立つ。そこで

$$\mathcal{T}_m = \{(S,t)\in V_m\times\mathbf{R} \mid S\geq 0,\, \det S = t^2\}$$

とおく。命題 3.4.3 より $\mathcal{S}_m^{m+1}$ の写像 $X\mapsto X^*X$ による像は

$$P_m(m) = \{S\in V_m \mid S\geq 0\}$$

に一致する。これより任意の $(S,t)\in\mathcal{T}_m$ に対して $X^*X = S$ を満たす $X\in\mathcal{S}_m^{m+1}$ をとることができる。$(\det X)^2 = \det(X^*X) = \det S = t^2$ となり、$\det X = \pm t$ を得る。$\det S = 0$ の場合は $\det X = t = 0$ となるので $\psi(X) = (S,t)$ となる。$\det S\neq 0$ の場合は、$\det X = t$ ならば $\psi(X)=(S,t)$ となる。$\det X = -t$ ならば $\mathbf{R}^m$ の鏡映 R をとると $\psi(RX) = ((RX)^*RX, \det(RX)) = (X^*X, -\det X) = (S,t)$ となる。以上より $\hat{\psi}(\Sigma_m^{m+1}) = \mathcal{T}_m$ が成り立つ。よって $\hat{\psi} : \Sigma_m^{m+1}\to\mathcal{T}_m$ は位相同型になる。

すでに示したように $P_m(m)$ は $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ 次元閉円板に位相同型になる。$P_m(m)$ の内点は正定値行列になり境界点は退化する半正定値行列になる。$\mathcal{T}_m$ は $P_m(m)$ 上の境界を零点集合に持つ連続関数 $S \mapsto \sqrt{\det S}$ と $S \mapsto -\sqrt{\det S}$ のグラフの合併になるので、$\mathcal{T}_m$ は $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ 次元球面に位相同型になる。したがって、Σ_m^{m+1} は $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ 次元球面に位相同型になる。

例 3.4.4 $m=2$ の場合に定理 3.4.1 の証明中の $\mathcal{T}_2$ を記述する。対称行列 $S \in M(2)$ が $\mathrm{tr}S=1$ と $\det S = t^2$ を満たせば、S の固有値は二つとも 0 以上になる。よって S は半正定値になるので、次の等式が成り立つ。

$$\mathcal{T}_2 = \{(S,t) \in V_2 \times \mathbf{R} \mid \det S = t^2\}.$$

この集合を具体的に表示するために V_2 の任意の元を

$$S = \begin{bmatrix} x & y \\ y & 1-x \end{bmatrix}$$

と表わす。

$$\det \begin{bmatrix} x & y \\ y & 1-x \end{bmatrix} = x(1-x) - y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2$$

となるので、

$$\mathcal{T}_2 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & 1-x \end{bmatrix}, t \right) \in V_2 \times \mathbf{R} \;\middle|\; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}.$$

一般の場合は $\det S$ は S の成分の m 次多項式になるので、$m \geq 3$ のときに上のように簡単に記述することはできない。

注意 3.4.5 定理 3.4.1 の証明の中で重要な点の一つは $P_m(m)$ が $(m-1)(m+2)/2$ 次元閉円板に位相同型になるということである。一般の $m < n$ の場合には

$$P_m(n) = \{S \in M(n,n) \mid S^* = S \geq 0,\ \mathrm{tr}S = 1,\ \mathrm{rank}S \leq m\}$$

の条件 $\mathrm{rank}S \leq m$ をはずすことができない。$P_m(n)$ の対角成分は単体の境界にある低次元単体の合併で表わすことができるが、閉円板ほど簡単な位相を持っているわけではない。

3.5 形状空間の距離構造

商写像 $\pi : \mathcal{S}_m^k \to \Sigma_m^k$ を利用して、$\mathcal{S}_m^k$ の距離から形状空間 Σ_m^k の距離を誘導する。商写像 π は $SO(m)$ の作用から定まっていたので、コンパクト等長変換群による距離空間の商空間の距離について考察しておく。

(X, d) を距離空間とし、G を X の等長変換群とする。すなわち、G は X の変換群であり

$$d(gx, gy) = d(x, y) \qquad (g \in G,\ x, y \in X)$$

を満たす。さらに G は位相群であり、作用を定める写像

$$G \times X \to X\,;\ (g, x) \mapsto gx$$

が連続であると仮定する。X の G による商空間を X/G で表わす。これは X の元が G の作用で写り合うときに同値として定めた同値関係による同値類の集合に X の位相から定まる商位相を入れた位相空間である。商写像を

$$\pi : X \to X/G\,;\ x \mapsto \pi(x)$$

と書くことにする。G の作用による軌道 Gx の全体とも見ることができるので、軌道空間と呼ばれることもある。

定理 3.5.1 G を距離空間 (X, d) のコンパクト等長変換群とする。

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) = \inf\{d(g_1 x, g_2 y) \mid g_1, g_2 \in G\} \qquad (x, y \in X)$$

によって ρ を定めると、ρ は X/G の距離になる。さらに ρ が定める X/G の位相は X/G の商位相に一致する。

証明　G はコンパクトなので ρ の定義の inf は min に置き換えることができる。G の X への作用は等長的なので

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) = \min\{d(gx, y) \mid g \in G\} = \min\{d(x, gy) \mid g \in G\}$$

が成り立つ。

$\rho(\pi(x), \pi(x)) = 0$ は定義よりわかる。逆に $\rho(\pi(x), \pi(y)) = 0$ とするとある $g \in G$ に対して $d(gx, y) = 0$ となり $gx = y$ が成り立つ。よって $\pi(x) = \pi(y)$ が成り立つ。

$\rho(\pi(x), \pi(y)) = \rho(\pi(y), \pi(x))$ は定義よりわかる。

(X, d) の三角不等式より

$$d(g_1 x, g_2 z) \leq d(g_1 x, y) + d(y, g_2 z)$$

が成り立つ。左辺の最小値が $\rho(\pi(x), \pi(z))$ だから

$$\rho(\pi(x), \pi(z)) \leq d(g_1 x, y) + d(y, g_2 z)$$

となり

$$\rho(\pi(x), \pi(z)) \leq \rho(\pi(x), \pi(y)) + \rho(\pi(y), \pi(z)).$$

したがって、ρ は X/G の距離になる。

距離 ρ の定め方より

$$\rho(\pi(x),\pi(y)) \leq d(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

が成り立つ。よって $\pi : (X,d) \to (X/G,\rho)$ は Lipschitz 写像になり、ρ が定める X/G の位相に関しても連続になる。X/G の商位相は $\pi : X \to X/G$ が連続になる最も強い X/G の位相なので、ρ に関する開集合は X/G の商位相に関する開集合になる。逆に X/G の商位相に関する開集合 O をとると $\pi^{-1}(O)$ は X の開集合になる。O の任意の元は $x \in \pi^{-1}(O)$ によって $\pi(x)$ と表わすことがきる。X の位相は距離 d から定まっているので、ある $r > 0$ が存在し

$$B_d(x;r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subset \pi^{-1}(O)$$

が成り立つ。この r に対して

$$(*) \qquad B_\rho(\pi(x);r) = \{\pi(y) \in X/G \mid \rho(\pi(x),\pi(y)) < r\} \subset O$$

が成り立つことを示そう。$\pi(y) \in B_\rho(\pi(x);r)$ をとるとある $g \in G$ が存在して

$$d(x,gy) = \rho(\pi(x),\pi(y)) < r.$$

よって $gy \in B_d(x;r) \subset \pi^{-1}(O)$ となり $\pi(y) = \pi(gy) \in O$ を得る。これで $(*)$ を示すことができた。以上で X/G の商位相に関する開集合 O は距離 ρ に関しても開集合になり、X/G のこれら二つの位相は一致することがわかる。

定義 3.5.2 $\mathcal{S}_m^k = S^{m(k-1)-1}(1) \subset M(m,k-1)$ の自然な Riemann 計量から定まる距離を d で表わす。この距離は $m \geq 2$ のとき

$$d(X,Y) = \arccos \mathrm{tr}(XY^*) = \arccos \mathrm{tr}(YX^*) \quad (X,Y \in \mathcal{S}_m^k)$$

によって定まる。右辺の $\mathrm{tr}(XY^*)$ は通常の内積になっている。定理 3.5.1 より、この $\mathcal{S}_m^k$ の距離から Σ_m^k の距離が誘導される。

$$\rho(\pi(X),\pi(Y)) = \min_{T \in SO(m)} d(TX,Y) = d(\pi^{-1}(\pi(X)),\pi^{-1}(\pi(Y))).$$

注意 3.5.3 $\mathcal{S}_m^k = S^{m(k-1)-1}(1)$ 上の X, Y を結ぶ大円の中点は角度 $d(X,Y)$ を二等分し、この角度の sin を考えると

$$\sin \frac{1}{2} d(X,Y) = \frac{1}{2}\|X - Y\|$$

が成り立つ。したがって次の等式を得る。

$$d(X,Y) = 2 \arcsin \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

補題 3.5.4 $m \geq 2$ のとき Σ_m^k の距離 ρ は次の等式で与えられる。

$$\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \arccos \max_{T \in SO(m)} \operatorname{tr}(TYX^*).$$

特に ρ の値域は $0 \leq \rho \leq \pi$ となる。

この形状空間の距離を調べるためには、補題 3.5.4 より行列のトレースの最大値が重要になる。これを調べるための準備をしておく。系 3.2.17 の前半で述べたことを Weyl 群の作用も考慮に入れることで次のように精密化できる。

系 3.5.5 対角行列を

$$\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_m) = \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \end{bmatrix} \in M(m)$$

と表わすことにする。任意の $X \in M(m,m)$ に対して $S \in SO(m)$, $T \in SO(m)$ と $t_j \in \mathbf{R}$ が存在し

$$(*) \qquad X = S\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_m)T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m|$$

が成り立つ。また $S, T \in SO(m)$ と $u_j, v_j \in \mathbf{R}$ に対して

$$\operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_m) = S\operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_m)T$$

が成り立つ必要十分条件は、(u_j) と (v_j) は m 次の置換と偶数個の成分の -1 倍によって写り合うことである。特に上の $(*)$ における X の標準形

$$\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_m) \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m|$$

は一意的である。

定義 3.5.6 $X \in M(m)$ に対する系 3.5.5 の標準形

$$(*) \qquad X = S\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_m)T, \qquad t_1 \geq \cdots \geq t_{m-1} \geq |t_m|$$

の $t_1, \ldots, t_m$ を X の**準特異値**と呼ぶ。

定理 3.5.7 $A \in M(m)$ の準特異値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ とする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\max\{\operatorname{tr}(TA) \mid T \in SO(n)\} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j.$$

この定理の証明のために次の簡単だが重要な補題を準備する。

補題 3.5.8 A を m 次正方行列とする。以下の (1) から (3) は同値になる。

(1) 回転群 $SO(m)$ 上の関数 $T \mapsto \mathrm{tr}(TA)$ の単位元における微分は 0 になる。

(2) 任意の m 次交代行列 X に対して $\mathrm{tr}(XA) = 0$ が成り立つ。

(3) A は対称行列である。

証明　(1) と

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{tr}(e^{tX}A) = 0 \qquad (X \in \mathfrak{o}(m))$$

は同値になる。

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{tr}(e^{tX}A) = \mathrm{tr}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}A\right) = \mathrm{tr}(XA)$$

だから、(1) と (2) は同値になる。

$M(m)$ において

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^*Y) \qquad (X, Y \in M(m))$$

は内積になり、$M(m)$ は対称行列全体の成す部分ベクトル空間と交代行列全体の成す部分ベクトル空間との直交直和になる。これより (2) と (3) は同値になる。

定理 3.5.7 の証明　$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ が A の準特異値だから、ある $S, T \in SO(m)$ が存在し

$$A = S\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)T$$

が成り立つ。$SO(m)$ はコンパクトだから、$SO(m)$ 上の関数 $T \mapsto \mathrm{tr}(TA)$ はある $T_0 \in SO(m)$ で最大値 $\mathrm{tr}(T_0A)$ をとる。よって $SO(m)$ 上の関数 $T \mapsto \mathrm{tr}(TT_0A)$ の単位元における微分は 0 になる。補題 3.5.8 より T_0A は対称行列になる。対称行列は回転行列によって対角化できるので、ある $U \in SO(m)$ が存在し

$$T_0A = U\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m)U^*$$

となる。これより問題の最大値は

$$\mathrm{tr}(T_0A) = \mathrm{tr}(U\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m)U^*) = \sum_{j=1}^{m} t_j$$

となる。さらに

$$S\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)T = A = T_0^*U\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m)U^*$$

となるので、系 3.5.5 の後半の主張より、(t_j) と (λ_j) は m 次の置換と偶数個の成分の -1 倍によって写り合う。(t_j) の m 次の置換によって $\sum_{j=1}^{m} t_j$ は変化しないが、偶数個の負の t_j を -1 倍することで $\sum_{j=1}^{m} t_j$ は大きくなる。$\sum_{j=1}^{m} t_j$ が最大値になることから、t_j はすべて 0 以上になるか、絶対値が最小になる t_j のみが負になるかのいずれかである。これと準特異値の定め方より

$$\{t_j \mid 1 \le j \le m\} = \{\lambda_j \mid 1 \le j \le m\}$$

が成り立つことになり、最大値は

$$\mathrm{tr}(T_0 A) = \sum_{j=1}^{m} t_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$$

となる。

系 3.5.9 $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ に対して m 次正方行列 YX^* の準特異値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ で表わすと、$\pi(X), \pi(Y) \in \Sigma_m^k$ の距離は次の等式で与えられる。

$$\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \arccos \sum_{j=1}^{m} \lambda_j.$$

特に ρ の値域は $0 \le \rho \le \pi/2$ となる。

証明　距離を与える等式は補題 3.5.4 と定理 3.5.7 から従う。$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j$ は $\mathcal{S}_m^k$ の元の内積になるので 1 以下になる。さらに、準特異値の定め方から $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j$ は 0 以上になる。したがって、$0 \le \rho \le \pi/2$ が成り立つ。

定義 3.5.10 $1 \le j \le m$ に対して

$$\mathcal{D}_j = \{X \in \mathcal{S}_m^k \mid \mathrm{rank} X \le j\}$$

とおく。$\pi(\mathcal{D}_j)$ は $\mathbf{R}^m$ 内の j 次元部分アファイン空間に含まれた形状全体になる。

定理 3.5.11 $m = 2$ の場合、任意の $X \in \mathcal{S}_2^k$ に対して $\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \pi/2$ を満たす $Y \in \mathcal{S}_2^k$ が存在する。$m \ge 3$ の場合、$\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \pi/2$ を満たす $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ に対して以下が成り立つ。

(1) $k = m + 1$ のとき、$\pi(X), \pi(Y) \in \pi(\mathcal{D}_{m-1})$ が成り立つ。

(2) $m+1<k\leq 2m$ のとき、$\pi(X),\pi(Y)$ のうちの少なくとも一方は $\pi(\mathcal{D}_{m-1})$ に含まれる。

(3) $2m<k$ のとき、どちらも $\pi(\mathcal{D}_{m-1})$ に含まれない $\pi(X),\pi(Y)$ が存在する。

証明　$\rho(\pi(X),\pi(Y))=\pi/2$ が成り立つための必要十分条件は、系 3.5.9 より

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=0$$

が成り立つことである。

$m=2$ の場合は Σ_2^k は複素射影空間に等長的になることを後で示す。その結果、任意の $X\in\mathcal{S}_2^k$ に対して $\rho(\pi(X),\pi(Y))=\pi/2$ を満たす $Y\in\mathcal{S}_2^k$ が存在することがわかる。

$m\geq 3$ の場合は

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+(\lambda_{m-1}+\lambda_m)$$

となり、$\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-2},\lambda_{m-1}+\lambda_m\geq 0$ はすべて 0 以上だから、準特異値の満たす不等式より、

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=0$$

の必要十分条件は $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$ になる。これは $YX^*=0$ と同値になる。さらに、X と Y の横ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{y}_j$ で表わすことにすると

$$0=YX^*=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{y}_m\end{bmatrix}[\mathbf{x}_1^*\cdots\mathbf{x}_m^*]=\begin{bmatrix}\langle\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_1\rangle & \cdots & \langle\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_m\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\mathbf{y}_m,\mathbf{x}_1\rangle & \cdots & \langle\mathbf{y}_m,\mathbf{x}_m\rangle\end{bmatrix}$$

は X の横ベクトルの張る $\mathbf{R}^{k-1}$ 内の部分ベクトル空間 $V(X)$ と Y の横ベクトルの張る $\mathbf{R}^{k-1}$ 内の部分ベクトル空間 $V(Y)$ が直交するとと同値になる。

$$\dim V(X)=\mathrm{rank}X,\qquad \dim V(Y)=\mathrm{rank}Y$$

となる。よって、$\rho(\pi(X),\pi(Y))=\pi/2$ が成り立つならば、

$$\mathrm{rank}X+\mathrm{rank}Y\leq k-1$$

が成り立つ。

$k=m+1$ のときを考える。X,Y は 0 行列ではないので、階数は 1 以上であることに注意しておく。$\rho(\pi(X),\pi(Y))=\pi/2$ が成り立つならば、

$$\mathrm{rank}X+\mathrm{rank}Y\leq k-1$$

となり、

$$\mathrm{rank}X \leq k-1-\mathrm{rank}Y \leq k-1-1 = m-1.$$

同様にして $\mathrm{rank}Y \leq m-1$ も成り立つ。したがって、$\pi(X), \pi(Y) \in \pi(\mathcal{D}_{m-1})$ が成り立つ。

$m+1 < k \leq 2m$ のとき、$\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \pi/2$ が成り立つならば、

$$\mathrm{rank}X + \mathrm{rank}Y \leq k-1$$

となる。もし $m \leq \mathrm{rank}X$ かつ $m \leq \mathrm{rank}Y$ ならば、

$$2m \leq k-1 < k \leq 2m$$

となり、矛盾する。したがって、X, Y のうちの少なくとも一方の階数は $m-1$ 以下になり、$\pi(X), \pi(Y)$ のうちの少なくとも一方は $\pi(\mathcal{D}_{m-1})$ に含まれる。

$2m < k$ のとき、$\mathrm{rank}X = \mathrm{rank}Y = m$ であって、$V(X)$ と $V(Y)$ が $\mathbf{R}^{k-1}$ 内で直交するものをとることができる。したがって、どちらも $\pi(\mathcal{D}_{m-1})$ に含まれない $\pi(X), \pi(Y)$ が存在する。

そこで、形状空間内の部分集合 $\pi(\mathcal{D}_{m-1})$、さらに一般の $\pi(\mathcal{D}_j)$ について調べる。そのために前形状空間内の $\mathcal{D}_j$ についてまず考察する。

命題 3.5.12 各 $1 \leq j \leq m-1$ について、

$$\tilde{\mathcal{D}}_j = \{X \in \mathcal{S}_m^k \mid \mathrm{rank}X = j\}$$

は $\mathcal{S}_m^k$ 内の部分多様体になる。

証明

$$\tilde{\mathcal{E}}_j = \{X \in M(m, k-1) \mid \mathrm{rank}X = j\}$$

とおくと $\tilde{\mathcal{D}}_j = \tilde{\mathcal{E}}_j \cap \mathcal{S}_m^k$ が成り立つ。$(1,1)$ 成分から (j,j) 成分までの対角成分が 1 であって、他の成分はすべて 0 になる $M(m, k-1)$ の元を $\tilde{E}_j$ で表わすと、$GL(m, \mathbf{R}) \times GL(k-1, \mathbf{R})$ の $M(m, k-1)$ への自然な作用に関する $\tilde{\mathcal{E}}_j$ の元の標準形が $\tilde{E}_j$ になる。よって、

$$\tilde{\mathcal{E}}_j = GL(m, \mathbf{R})\tilde{E}_j GL(k-1, \mathbf{R})$$

が成り立つ。命題 2.1.7 より $\tilde{\mathcal{E}}_j$ は $M(m, k-1)$ の部分多様体になる。

任意の $X \in \tilde{\mathcal{D}}_j = \tilde{\mathcal{E}}_j \cap \mathcal{S}_m^k$ に対して、

$$T_X^{\perp}\mathcal{S}_m^k = \mathbf{R}X \subset T_X\tilde{\mathcal{E}}_j$$

となるので、

$$T_X\mathcal{S}_m^k + T_X\tilde{\mathcal{E}}_j = M(m, k-1)$$

が成り立つ。特に、$\mathcal{S}_m^k$ と $\tilde{\mathcal{E}}_j$ はトランスバーサルに交わることになり、$\tilde{\mathcal{D}}_j = \tilde{\mathcal{E}}_j \cap \mathcal{S}_m^k$ は $\mathcal{S}_m^k$ 内の部分多様体になる。

定義 3.5.13 $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ に対して

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{R \in SO(m) \mid \rho(\pi(X),\pi(Y)) = d(X, R^*Y)\}$$

によって $\mathcal{R}(X,Y)$ を定める。

補題 3.5.14 $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ に対して

$$\mathcal{R}(Y,X) = \{R^* \mid R \in \mathcal{R}(X,Y)\}$$

が成り立つ。$T_1, T_2 \in SO(m)$ に対して

$$\mathcal{R}(T_1X,Y) = \mathcal{R}(X,Y)T_1^*, \qquad \mathcal{R}(X,T_2Y) = T_2\mathcal{R}(X,Y)$$

が成り立つ。

証明

$$\rho(\pi(X),\pi(Y)) = \min_{T\in SO(m)} d(TX,Y) = \min_{T\in SO(m)} d(X,T^*Y)$$

となっているので、この最小値を与える $T \in SO(m)$ の全体が $\mathcal{R}(X,Y)$ である。これらの等式より

$$\mathcal{R}(Y,X) = \{R^* \mid R \in \mathcal{R}(X,Y)\}$$

が従う。

$R \in SO(m)$ に対して $R \in \mathcal{R}(T_1X,Y)$ の必要十分条件は

$$\min_{T\in SO(m)} d(T_1X,T^*Y) = d(T_1X,R^*Y) = d(X,T_1^*R^*Y) = d(X,(RT_1)^*Y).$$

他方

$$\min_{T\in SO(m)} d(T_1X,T^*Y) = \min_{T\in SO(m)} d(X,T_1^*T^*Y) = \min_{T\in SO(m)} d(X,T^*Y)$$

だから、$R \in \mathcal{R}(T_1X,Y)$ の必要十分条件は $RT_1 \in \mathcal{R}(X,Y)$ になり、

$$\mathcal{R}(T_1X,Y) = \mathcal{R}(X,Y)T_1^*$$

を得る。

また $R \in \mathcal{R}(X,T_2Y)$ の必要十分条件は

$$\min_{T\in SO(m)} d(X,T^*T_2Y) = d(X,R^*T_2Y) = d(X,(T_2^*R)^*Y).$$

他方

$$\min_{T\in SO(m)} d(X,T^*T_2Y) = \min_{T\in SO(m)} d(X,T^*Y)$$

だから、$R \in \mathcal{R}(X,T_2Y)$ の必要十分条件は $T_2^*R \in \mathcal{R}(X,Y)$ になり、

$$\mathcal{R}(X,T_2Y) = T_2\mathcal{R}(X,Y)$$

を得る。

補題 3.5.15 $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ とする。$R \in \mathcal{R}(X, Y)$ に対して R^*YX^* は対称行列になる。

証明

$$\rho(\pi(X), \pi(Y)) = \min_{T \in SO(m)} d(X, T^*Y) = \arccos \max_{T \in SO(m)} \mathrm{tr}(T^*YX^*)$$

の右辺の最大値を与えることが $\mathcal{R}(X, Y)$ の元になるための必要十分条件である。定理 3.5.7 の証明中に示したことから、$R \in \mathcal{R}(X, Y)$ ならば、R^*YX^* は対称行列になることがわかる。

命題 3.5.16 $X, Y \in \mathcal{S}_m^k$ とする。$R \in SO(m)$ に対して次の条件は同値になる。

(1) $R \in \mathcal{R}(X, Y)$.

(2) R^*YX^* の固有値全体が YX^* の準特異値全体と一致する。

(3) R^*YX^* の固有値全体の和が YX^* の準特異値全体の和と一致する。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ ならば、定理 3.5.7 の証明中に示したことから、R^*YX^* の固有値全体が YX^* の準特異値全体と一致することがわかる。

(2) $\Rightarrow$ (3) R^*YX^* の固有値全体が YX^* の準特異値全体と一致するならば、当然 R^*YX^* の固有値全体の和が YX^* の準特異値全体の和と一致する。

(3) $\Rightarrow$ (1) 定理 3.5.7 より

$$SO(m) \ni T \mapsto \mathrm{tr}(T^*YX^*)$$

の最大値は

$$YX^* \text{ の準特異値の和} = R^*YX^* \text{ の固有値の和} = \mathrm{tr}(R^*YX^*)$$

となるので、$R \in \mathcal{R}(X, Y)$ が成り立つ。

3.6 平面の形状

この節では平面の形状空間 Σ_2^k について詳しく考察する。

平面 $\mathbf{R}^2$ は対応

$$\mathbf{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C}$$

によって複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視することができる。このとき、$\mathbf{R}^2$ の元の長さは $\mathbf{C}$ の元の長さに対応する。$SO(2)$ の $\mathbf{R}^2$ への作用は、$U(1)$ の $\mathbf{C}$ への作用が対応する。さらに、前形状空間は

$$\mathcal{S}_2^k = \left\{ (z_1, x_2, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \;\middle|\; \sum_{i=1}^k z_i = 0,\ \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1 \right\}$$

と同一視することができる。命題 3.1.7 よりこれは

$$\tilde{\mathcal{S}}_2^k = \left\{ (z_1, x_2, \dots, z_{k-1}) \in \mathbf{C}^{k-1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k-1} |z_i|^2 = 1 \right\}$$

と同一視することができる。Σ_2^k は $\tilde{\mathcal{S}}_2^k$ への $U(1)$ の作用による商空間 $\tilde{\mathcal{S}}_2^k/\sim$ に位相同型になる。$\tilde{\mathcal{S}}_2^k/\sim$ は定義 2.2.11 で定めた複素射影空間 $P^{k-2}(\mathbf{C})$ と位相同型になる。特に、Σ_2^k は多様体の構造を持つ。さらに $k-2$ 次元複素多様体になる。一般に $n \geq 3$ 以上のとき Σ_n^k は特異点を持つが、Σ_2^k は多様体構造を持つ。