数理物質科学研究科

微分幾何学 III

理工学研究科

微分幾何学 I

積分幾何学入門

田崎博之

2005 年度

数理物質科学研究科

微分幾何学 III

Differential Geometry III

理工学研究科

微分幾何学 I

Differential Geometry I

開講授業科目概要

　積分幾何学の基本的な研究対象である交叉積分公式を平面やユークリッド空間の場合に解説し、種々の交叉積分公式が部分多様体の変分問題に応用できることを示す。

目 次

数学のスタッフの研究・教育に関する情報をインターネットで公開することになった。その企画の一環として

`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/`

に情報を公開した。今年度のこの講義ノートを含めて多くの大学院での講義ノートをこのページに公開した。

第1章　多様体上の積分

テンソル代数と外積代数の定義と基本的性質を述べ、外積代数の内積を定める。この外積代数の内積を使って Riemann 多様体上の測度を定義し、Riemann 多様体上の積分の基本的性質を述べる。特に、1.5 余面積公式で述べる余面積公式（定理 1.5.5）は積分幾何学において重要な役割を演じる。

1.1　テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間 V に対して、V から実数 $\mathbf{R}$ への線形写像の全体を V^* で表わし、V の**双対ベクトル空間**と呼ぶ。V^* は $\mathbf{R}$ の和と積から自然に定まる演算によってベクトル空間の構造を持つ。$v \in V$ に対して

$$v(f) = f(v) \qquad (f \in V^*)$$

によって、$v : V^* \to \mathbf{R}$ を定めると、$v \in (V^*)^*$ とみなすことができ、この対応によって $(V^*)^*$ と V は線形同型になる。この線形同型によって $(V^*)^*$ と V を同一視する。δ^i_j を

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

によって定める。V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して、$f^i(u_j) = \delta^i_j$ によって定まる V^* の元 $\{f^i\}$ は V^* の基底になる。特に $\dim V^* = \dim V$ となる。$\{f^i\}$ を $\{u_j\}$ の**双対基底**と呼ぶ。

定義 1.1.2 有限次元実ベクトル空間 V に対して、$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p}$ 上で定義された p 変数の実数値多重線形写像を V 上の p **次テンソル**と呼び、その全体を $\otimes^p V$ で表わす。

$$\otimes^* V = \mathbf{R} + V + \otimes^2 V + \cdots$$

を V 上の**テンソル代数**と呼ぶ。$\otimes^1 V = (V^*)^* = V$ だから、$\otimes^0 V = \mathbf{R}$ と約束すると、テンソル代数の定義は $\otimes^* V = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \otimes^i V$ と書くこともできる。$\otimes^p V$ は自然な

加法とスカラー倍によって実ベクトル空間になる。$\otimes^p V$ の元 A と $\otimes^q V$ の元 B に対して、

$$(A \otimes B)(g^1, \dots, g^{p+q}) = A(g^1, \dots, g^p) \cdot B(g^{p+1}, \dots, g^{p+q}) \qquad (g^1, \dots, g^{p+q} \in V^*)$$

によって写像

$$A \otimes B : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p+q} \to \mathbf{R}$$

を定めると、$A \otimes B$ は V 上の $p+q$ 次テンソルになる。$A \otimes B$ を A と B の**テンソル積**と呼ぶ。V の元 $u_1, \dots, u_p$ に対して、

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p)(f^1, \dots, f^p) = f^1(u_1) \cdots f^p(u_p) \qquad (f^1, \dots, f^p \in V^*)$$

によって写像

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \to \mathbf{R}$$

は定まり、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ は V 上の p 次テンソルになる。

命題 1.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{array}{ccc} \otimes^p V \times \otimes^q V & \to & \otimes^{p+q} V \\ (A, B) & \mapsto & A \otimes B \end{array}$$

は双線形写像になる。テンソル積は結合律も満たし、テンソル代数は代数の構造を持つ。写像

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} & \to & \otimes^p V \\ (u_1, \dots, u_p) & \mapsto & u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \end{array}$$

は多重線形写像になる。

証明　定義 1.1.2 での定め方より、$A \otimes B$ は A と B に関して線形になる。したがって、上の写像は双線形写像になる。テンソル積が結合律を満たすことは定義式からわかる。また、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ は u_i に関して線形になるので、上の写像は多重線形写像になる。

命題 1.1.4 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \dots, u_n$ を V の基底とすると、

$$(*) \qquad u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \quad (1 \le i_1, \dots, i_p \le n)$$

は $\otimes^p V$ の基底になる。特に、$\otimes^p V$ の次元は n^p になる。

証明 $u_1, \dots, u_n$ の双対基底を $f^1, \dots, f^n$ とする。まず $(*)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a^{i_1\cdots i_p} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p} = 0 \qquad (a^{i_1\cdots i_p}\in\mathbf{R})$$

とする。$1 \le k_1, \dots, k_p \le n$ となる $k_1, \dots, k_p$ をとり、$(f^{k_1}, \dots, f^{k_p})$ を上の式に代入すると $a^{k_1\cdots k_p} = 0$ となる。したがって $(*)$ は線形独立である。

次に $(*)$ は $\otimes^p V$ を生成することを示す。$\otimes^p V$ の元 A を任意に一つとる。V^* の元 g に対して $g = \sum_{i=1}^{n} g(u_i) f^i$ となるので、$g^1, \dots, g^p \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned} A(g^1, \dots, g^p) &= A\left(\sum_{i_1=1}^{n} g^1(u_{i_1}) f^{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} g^p(u_{i_p}) f^{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} g^1(u_{i_1})\cdots g^p(u_{i_p}) A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p})(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p})(g^1, \dots, g^p). \end{aligned}$$

よって、

$$A = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}$$

が成り立つ。したがって $(*)$ は $\otimes^p V$ を生成する。

以上より $(*)$ は $\otimes^p V$ の基底になる。$(*)$ の元の形から、$\otimes^p V$ の次元は n^p になる。

定義 1.1.5 命題 1.1.4 の証明中にある $\otimes^p V$ の元 A の基底による表示

$$A = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}$$

を A の**成分表示**と呼び、$A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p})$ を A の**成分**と呼ぶ。

命題 1.1.6 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi : \overbrace{V\times\cdots\times V}^{p} \to W$$

を多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1\otimes\cdots\otimes v_p) = \phi(v_1, \dots, v_p) \qquad (v_i \in V)$$

を満たす線形写像 $\Phi : \otimes^p V \to W$ が唯一つ存在する。

証明　$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とする。命題1.1.4より、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n)$$

は $\otimes^p V$ の基底になる。そこで、

$$\Phi(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = \phi(u_1, \ldots, u_p)$$

によって Φ の基底上の値を定め、$\otimes^p V$ 上の線形写像に拡張する。任意の $v_i \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) &= \Phi\left(\sum_{i_1=1}^{n} f^{i_1}(v_1)u_{i_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{i_p=1}^{n} f^{i_p}(v_p)u_{i_p}\right) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)\Phi(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} f^{i_1}(v_1)\cdots f^{i_p}(v_p)\phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}) \\
&= \phi\left(\sum_{i_1=1}^{n} f^{i_1}(v_1)u_{i_1}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n} f^{i_p}(v_p)u_{i_p}\right) \\
&= \phi(v_1, \ldots, v_p)
\end{aligned}$$

となり、Φ は与えられた条件を満たす。

Φ の条件は $\otimes^p V$ の基底の像を定めているので、このような Φ は一意的である。

命題 1.1.7 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F : V \to W$ を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像 $\otimes^p F : \otimes^p V \to \otimes^p W$ が唯一つ存在する。
条件：任意の $v_1, \ldots, v_p \in V$ に対して

$$\otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。

証明　$\otimes^p V$ の元 A に対して

$$\otimes^p F(A)(f^1, \ldots, f^p) = A(f^1 \circ F, \ldots, f^p \circ F) \qquad (f^1, \ldots, f^p \in W^*)$$

とおくと、$\otimes^p F(A) \in \otimes^p W$ となる。上の定義式から $\otimes^p F$ が線形写像であることもわかる。$f^1, \ldots, f^p \in W^*$ に対して

$$\begin{aligned}
\otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1, \ldots, f^p) &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1 \circ F, \ldots, f^p \circ F) \\
&= (f^1 \circ F)(v_1)\cdots(f^p \circ F)(v_p) \\
&= (F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p))(f^1, \ldots, f^p)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。命題 1.1.4 より条件は $\otimes^p V$ の基底の像を定めているので、このような $\otimes^p F$ は一意的である。

1.2　外積代数

定義 1.2.1 有限次元実ベクトル空間 V に関する $\otimes^p V$ の元 A と $1 \leq i < j \leq p$ に対して

$$(t_{i,j}A)(f^1, \ldots, f^p) = A(f^1, \ldots, \overset{i}{\breve{f^j}}, \ldots, \overset{j}{\breve{f^i}}, \ldots, f^p) \qquad (f^1, \ldots, f^p \in V^*)$$

とおくと、線形写像 $t_{i,j} : \otimes^p V \to \otimes^p V$ が定まる。

$$\wedge^p V = \{A \in \otimes^p V \mid t_{i,j}A = -A \ (1 \leq i < j \leq p)\}$$

とおいて

$$\wedge^* V = \mathbf{R} + V + \wedge^2 V + \cdots$$

を V 上の**外積代数**と呼ぶ。$\{1, \ldots, p\}$ の元の置換全体から成る群を S_p で表わす。$\wedge^p V$ の元 A と $\wedge^q V$ の元 B に対して、

$$\begin{aligned}(A \wedge B)(g^1, \ldots, g^{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)(A \otimes B)(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q)}) \\ &\quad (g^1, \ldots, g^{p+q} \in V^*)\end{aligned}$$

によって $A \wedge B \in \otimes^{p+q} V$ を定めると、$A \wedge B \in \wedge^{p+q} V$ が成り立つ。$A \wedge B$ を A と B の**外積**と呼ぶ。

注意 1.2.2 $v_1, \ldots, v_p \in V$ に対して $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in \otimes^p V$ となり、次の等式が成り立つ。

$$t_{i,j}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{\breve{v_j}} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{\breve{v_i}} \otimes \cdots \otimes v_p.$$

命題 1.2.3 有限次元実ベクトル空間 V 上の r 次テンソル T に対して

$$\tilde{T}(g^1, \ldots, g^r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) T(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(r)}) \qquad (g^1, \ldots, g^r \in V^*)$$

によって $\tilde{T} \in \otimes^r V$ を定めると、$\tilde{T} \in \wedge^r V$ が成り立つ。特に、定義 1.2.1 における $A \wedge B$ は $\wedge^{p+q} V$ の元になる。これによって定まる写像

$$\begin{array}{ccc} \wedge^p V \times \wedge^q V & \to & \wedge^{p+q} V \\ (A, B) & \mapsto & A \wedge B \end{array}$$

は双線形写像になる。さらに、$C \in \wedge^r V$ に対して結合律

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

が成り立つ。これらより外積代数 $\wedge^* V$ は代数の構造を持つ。V の元 $u_1, \ldots, u_p$ に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。$\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{p} u_i = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ とも書くことがある。

証明　$\tilde{T} \in \wedge^r V$ を示す。$1 \leq i < j \leq r$ をとり、i と j の互換を $\tau \in S_r$ で表わす。

$$\begin{aligned}
(t_{i,j}\tilde{T})(g^1, \ldots, g^r) &= \tilde{T}(g^1, \ldots, \overset{i}{\smile}\!\!\!\!g^j, \ldots, \overset{j}{\smile}\!\!\!\!g^i, \ldots, g^r) \\
&= \tilde{T}(g^{\tau(1)}, \ldots, g^{\tau(r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \ldots, g^{\tau\sigma(r)}) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \ldots, g^{\tau\sigma(r)}) \\
&= -\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) T(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(r)}) \\
&= -\tilde{T}(g^1, \ldots, g^r).
\end{aligned}$$

したがって、$t_{i,j}\tilde{T} = -\tilde{T}$ となり、$\tilde{T} \in \wedge^r V$ が成り立つ。

$A \in \wedge^p V$ と $B \in \wedge^q V$ に対して $A \otimes B \in \otimes^{p+q} V$ となり、$A \wedge B \in \wedge^{p+q} V$ が成り立つ。

写像

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^p V \times \wedge^q V & \to & \wedge^{p+q} V \\
(A, B) & \mapsto & A \wedge B
\end{array}$$

が双線形写像になることは、(A, B) に対して $A \otimes B$ を対応させる写像が双線形になることと (命題 1.1.3)、T に対して $\tilde{T}$ を対応させる写像が線形写像になることからわかる。

$A \in \wedge^p V$, $B \in \wedge^q V$, $C \in \wedge^r V$ に対して

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

が成り立つことを示す。以下の計算では、

$$S_{p+q} = \{\tau \in S_{p+q+r} \mid \tau(i) = i \ (p+q+1 \leq i \leq p+q+r)\}$$

とみなすことにする。

$$
\begin{aligned}
& ((A \wedge B) \wedge C)(g^1, \ldots, g^{p+q+r}) \\
= \ & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma)(A \wedge B)(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q)}) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)})) \\
= \ & \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& \left\{ \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\tau) A(g^{\sigma\tau(1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p)}) \cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p+q)}) \right\} \\
& \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)}) \\
= \ & \frac{1}{p!q!r!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \cdot \\
& (A(g^{\sigma\tau(1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p)}) \cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p+q)})) \cdot C(g^{\sigma\tau(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma\tau(p+q+r)}) \\
= \ & \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& (A(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(p)}) \cdot B(g^{\sigma(p+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q)})) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)})
\end{aligned}
$$

同様の計算で

$$
\begin{aligned}
& (A \wedge (B \wedge C))(g^1, \ldots, g^{p+q+r}) \\
= \ & \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \\
& A(g^{\sigma(1)}, \ldots, g^{\sigma(p)}) \cdot (B(g^{\sigma(p+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q)}) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \ldots, g^{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}
$$

となることもわかる。したがって

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

を得る。

$\sigma \in S_p$ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ であることに注意すると、V の元 $u_1, \ldots, u_p$ に対しては

$$
\begin{aligned}
& (u_1 \wedge \cdots \wedge u_p)(g^1, \ldots, g^p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_1(g^{\sigma(1)}) \cdots u_p(g^{\sigma(p)}) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1) \cdots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1)\cdots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p) \\ &= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}(g^1)\cdots u_{\sigma(p)}(g^p) \\ &= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)})(g^1,\ldots,g^p). \end{aligned}$$

したがって、

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_p = \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。

命題 1.2.4 有限次元実ベクトル空間 V に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V\times\cdots\times V}^{p} & \to & \wedge^p V \\ (u_1,\ldots,u_p) & \mapsto & u_1\wedge\cdots\wedge u_p \end{array}$$

は多重線形写像になる。$u_1,\ldots,u_p\in V$ と $1\le i<j\le p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge \overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p = -u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つ。さらに p 次正方行列 $A=(A^i_j)$ に対して $v_j=\displaystyle\sum_{i=1}^p A^i_j u_i$ とおくと

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_p = (\det A)u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つ。

証明　命題 1.1.3 より、対応 $(u_1,\ldots,u_p)\mapsto u_1\wedge\cdots\wedge u_p$ は多重線形になることがわかる。

$u_1,\ldots,u_p\in V$ と $1\le i<j\le p$ に対して

$$u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge \overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p = -u_1\wedge\cdots\wedge u_p$$

が成り立つことを示そう。i と j の互換を $\tau\in S_p$ で表わす。

$$\begin{aligned} & u_1\wedge\cdots\wedge \overset{i}{\breve{u}_j}\wedge\cdots\wedge \overset{j}{\breve{u}_i}\wedge\cdots\wedge u_p \\ &= u_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge u_{\tau(p)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\tau\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\tau\sigma(p)} \\ &= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) u_{\tau\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\tau\sigma(p)} \\ &= -\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)} \\ &= -u_1\wedge\cdots\wedge u_p. \end{aligned}$$

したがって

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{u}_j} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\breve{u}_i} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。特に $u_1, \ldots, u_p$ の中で等しい元があるときは、$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$ となる。これは次のようにしてわかる。ある $i \neq j$ に対して u_i と u_j が等しいと仮定する。$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ において u_i と u_j を入れ換えると、上で示したことから -1 倍になる。ところが、u_i と u_j は等しいのだから入れ換えても変らない。つまり、$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ は自分自身の -1 倍と等しいことになり 0 になる。

上で示したことは互換 σ に対して

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)} = \mathrm{sgn}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つということである。S_p の任意の元は互換の積になることから、任意の置換 $\sigma \in S_p$ に対してこの等式は成り立つ。さらに p 次正方行列 $A = (A^i_j)$ に対して $v_j = \sum_{i=1}^{p} A^i_j u_i$ とおくと

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \\ = \ & \left(\sum_{i_1=1}^{p} A^{i_1}_1 u_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^{p} A^{i_p}_p u_{i_p} \right) \\ = \ & \sum_{\sigma \in S_p} A^{\sigma(1)}_1 u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge A^{\sigma(p)}_p u_{\sigma(p)} \qquad (\text{同じものがあると } 0 \text{ になる}) \\ = \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)}_1 \cdots A^{\sigma(p)}_p u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \\ = \ & (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p. \end{aligned}$$

命題 1.2.5 $u_1, \ldots, u_n$ を実ベクトル空間 V の基底とする。このとき

$$(*) \qquad u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。特に $\dim(\wedge^p V) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ となる。

証明　$u_1, \ldots, u_n$ の双対基底を $f^1, \ldots, f^n$ とする。まず $(*)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a^{i_1 \cdots i_p} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} = 0 \qquad (a^{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R})$$

とする。$1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$ となる $k_1, \ldots, k_p$ をとり、$(f^{k_1}, \ldots, f^{k_p})$ を上の式に代入すると $a_{k_1 \cdots k_p} = 0$ となる。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は線形独立である。

次に $(*)$ は $\wedge^p V$ を生成することを示す。$\wedge^p V$ の元 A を任意に一つとる。$g^1, \dots, g^p \in V^*$ に対して

$$
\begin{aligned}
& A(g^1, \dots, g^p) \\
= \ & A\left(\sum_{j_1=1}^{n} g^1(u_{j_1}) f^{j_1}, \dots, \sum_{j_p=1}^{n} g^p(u_{j_p}) f^{j_p}\right) \\
= \ & \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} g^1(u_{j_1}) \cdots g^p(u_{j_p}) A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p}) \\
= \ & \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_p})(g^1, \dots, g^p) \\
= \ & \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{\sigma \in S_p} A(f^{j_{\sigma(1)}}, \dots, f^{j_{\sigma(p)}})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1, \dots, g^p) \\
= \ & \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1, \dots, g^p) \\
= \ & \sum_{j_1<\cdots<j_p} A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p})(g^1, \dots, g^p).
\end{aligned}
$$

よって、

$$
A = \sum_{j_1<\cdots<j_p} A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p}) u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}
$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は $\wedge^p V$ を生成する。

以上 $(*)$ は $\wedge^p V$ の基底になる。$(*)$ の元の形から、$\wedge^p V$ の次元は $\binom{n}{p}$ になる。

命題 1.2.6 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F : V \to W$ を線形写像とする。命題 1.1.7 で定めた線形写像 $\otimes^p F : \otimes^p V \to \otimes^p W$ は $\otimes^p F(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像 $\wedge^p F : \wedge^p V \to \wedge^p W$ を誘導する。

証明　定義 1.2.1 で定めた $t_{i,j}^V : \otimes^p V \to \otimes^p V$, $t_{i,j}^W : \otimes^p W \to \otimes^p W$ と $\otimes^p F$ に関して、$\otimes^p F \circ t_{i,j}^V = t_{i,j}^W \circ \otimes^p F$ となることが、これらの定め方よりわかる。したがって $\otimes^p F$ は $\otimes^p F(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像 $\wedge^p F : \wedge^p V \to \wedge^p W$ を誘導する。

1.3　外積代数における内積

補題 1.3.1 V を有限次元実ベクトル空間とする。このとき V 上の二次形式 A と V から V^* への線形写像 α は

$$
A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)
$$

によって一対一に対応する。この対応によって V 上の二次形式全体 $\otimes^2 V^*$ と、V から V^* への線形写像全体 $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。$\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対応する $\otimes^2 V^*$ の元 A が対称になっていて、さらに、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき A は V 上の内積になる。

証明 $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ に対して

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \qquad (x, y \in V)$$

で定まる A は双線形になり、$\otimes^2 V^*$ の元になる。逆に、$A \in \otimes^2 V^*$ に対して、上の等式で定まる α は $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元になる。定め方より、この対応は一対一になり、$\otimes^2 V^*$ と $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ は線形同型になる。

A が対称であり、0 でない $x \in V$ に対して $(\alpha(x))(x) > 0$ が成り立つとき、$A(x, x) > 0$ となり A は V 上の内積になる。

命題 1.3.2 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に補題 1.3.1 によって対応する $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ の元を α で表わす。$\wedge^p V^*$ は自然に $(\wedge^p V)^*$ と同一視され、命題 1.2.6 によって $\alpha : V \to V^*$ が誘導する線形写像

$$\wedge^p \alpha : \wedge^p V \to \wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$$

に対応する $\otimes^2(\wedge^p V)^*$ の元は、$\wedge^p V$ 上の内積になる。

証明 まず、$\wedge^p V^*$ と $(\wedge^p V)^*$ を同一視する対応を述べておく。$\wedge^p V^*$ の元 ϕ と $(\wedge^p V)^*$ の元 Φ は

$$\phi(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \qquad (v_1, \ldots, v_p \in V)$$

によって対応している。

$\wedge^p \alpha$ に対応する $\otimes^2(\wedge^p V)^*$ の元を A で表わすと、V の元 $u_1, \ldots, u_p$ と $v_1, \ldots, v_p$ に対して、

$$\begin{aligned}
& A(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\wedge^p \alpha(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \\
= \ & (\alpha(u_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(u_p))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \alpha(u_{\sigma(p)}))(v_1, \ldots, v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha(u_{\sigma(1)}))(v_1) \cdots (\alpha(u_{\sigma(p)}))(v_p) \\
= \ & \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\langle u_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle u_{\sigma(p)}, v_p \rangle \\
= \ & \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \le i,j \le p}.
\end{aligned}$$

そこで、$u_1, \dots, u_n$ を V の正規直交基底とすると、命題 1.2.5 より

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は $\wedge^p V$ の基底になる。さらに、上の計算より、$1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ と $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ をとると

$$A(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}$$

が成り立つ。したがって、A は $\wedge^p V$ 上の内積になり、上の基底はこの内積に関する正規直交基底になる。

注意 1.3.3 以後、特に断わらない限り、内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間 V の外積代数 $\wedge^p V$ の内積は命題 1.3.2 で示した A を考えることとし、A も $\langle\ ,\ \rangle$ で表わすことにする。また、これらの内積から定まるノルムは $|\quad|$ で表わす。すなわち、$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$。

系 1.3.4 命題 1.3.2 の条件のもとで、V の元 $u_1, \dots, u_p$ と $v_1, \dots, v_p$ に対して、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det[\langle u_i, v_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq p}$$

が成り立つ。さらに、V の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ をとると、

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は $\wedge^p V$ の正規直交基底になる。

注意 1.3.5 上の系 1.3.4 より V の元 u_1, u_2 に対して

$$|u_1 \wedge u_2|^2 = \langle u_1 \wedge u_2, u_1 \wedge u_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{vmatrix} = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2$$

となる。u_1 と u_2 のなす角度を θ で表わすと、u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積の二乗は

$$|u_1|^2 |u_2|^2 \sin^2\theta = |u_1|^2 |u_2|^2 (1 - \cos^2\theta) = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2 = |u_1 \wedge u_2|^2$$

となる。つまり $|u_1 \wedge u_2|$ は u_1 と u_2 の張る平行四辺形の面積になる。このように $\wedge^2 V$ の内積によって、V 内の平行四辺形の面積を求めることができる。

注意 1.3.6 $\mathbf{R}^n$ の元を横ベクトルとみなす。横ベクトル u を縦ベクトルにしたものを u^* で表わす。$m \leq n$ として $\mathbf{R}^n$ の元 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ をとり、$u_i = [u_{ij}]$, $v_i = [v_{ij}]$ とおく。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [v_1^* \ \cdots \ v_m^*] = [u_i v_j^*] = [\langle u_i, v_j \rangle].$$

これらは m 次正方行列になり、両辺の行列式をとると、補題 1.3.4 より

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn}\end{bmatrix}\right) &= \det[\langle u_i, v_j\rangle] \\ &= \langle u_1\wedge\cdots\wedge u_m, v_1\wedge\cdots\wedge v_m\rangle.\end{aligned}$$

$\mathbf{R}^n$ の標準的正規直交基底を $e_1,\ldots,e_n$ で表わすと、

$$u_i = [u_{i1}\ \ldots\ u_{in}] = \sum_{j=1}^n u_{ij}e_j.$$

外積の多重線形性と交代性 (命題 1.2.4) より

$$\begin{aligned} u_1\wedge\cdots\wedge u_m &= \left(\sum_{j_1=1}^n u_{1j_1}e_{j_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j_m=1}^n u_{mj_m}e_{j_m}\right) \\ &= \sum_{\#\{j_1,\ldots,j_m\}=m} u_{1j_1}\cdots u_{mj_m}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_m} \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m}\begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix} e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_m}\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_m = \sum_{j_1<\cdots<j_m}\begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix} e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_m}$$

となり、

$$\langle u_1\wedge\cdots\wedge u_m, v_1\wedge\cdots\wedge v_m\rangle = \sum_{j_1<\cdots<j_m}\begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn}\end{bmatrix}\right) \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m}\begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_m}\begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{mj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1j_m} & \cdots & v_{mj_m}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

を得る。$m = n$ の場合は、正方行列の積の行列式がそれぞれの正方行列の行列式の積に等しいというよく知られた等式になる。

命題 1.3.7 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。V の元 $u_1, \ldots, u_p$ に対して、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^{p} |u_i|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、$u_1, \ldots, u_p$ が互いに直交していることである。

証明　u_i から v_i と w_i を以下のように帰納的に構成する。まず $v_1 = 0,\ w_1 = u_1$ とおく。$v_{i-1},\ w_{i-1}$ まで定まっていると仮定して、v_i と w_i を次のように定める。

$$u_i = v_i + w_i, \qquad v_i \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{i-1}\},\ w_i \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}^{\perp}$$

となるように v_i と w_i をとる。すると、$|w_i|^2 \leq |u_i|^2$ となり、さらに

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_i = w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \qquad (1 \leq i \leq p)$$

が成り立つ。特に

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$$

となる。系 1.3.4 を使うと

$$\begin{aligned}
|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p|^2 &= |w_1 \wedge \cdots \wedge w_p|^2 \\
&= \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle \\
&= \det(\langle w_i, w_j \rangle) \\
&= \det \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_p, w_p \rangle \end{bmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{p} \langle w_i, w_i \rangle \leq \prod_{i=1}^{p} \langle u_i, u_i \rangle = \prod_{i=1}^{p} |u_i|^2.
\end{aligned}$$

したがって、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^{p} |u_i|$$

が成り立つ。

等号が成立するための必要十分条件は、すべての i について $\langle w_i, w_i \rangle = \langle u_i, u_i \rangle$ が成り立つことだから、これは $v_i = 0$ と同値になり、$u_1, \ldots, u_p$ が互いに直交していることである。

補題 1.3.8 V と W をそれぞれ内積を持つ m 次元と n 次元のベクトル空間とし ($m \geq n$)、$F : V \to W$ を線形写像とする。

$$JF = \sup\{|F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)| \mid u_1, \ldots, u_n \text{は} V \text{の正規直交系}\}$$

とおく。F が全射でないときは、$JF = 0$ となり、F が全射のときは、$(\ker F)^{\perp}$ の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に対して

$$JF = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

証明 F が全射でないときは $\dim(\mathrm{im} F) < n$ となり、V の任意の正規直交系 $u_1, \ldots, u_n$ に対して $F(u_1), \ldots, F(u_n)$ は線形従属になる。したがって

$$F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n) = 0$$

となり、$JF = 0$ が成り立つ。

次に F が全射の場合を考える。$(\ker F)^{\perp}$ の任意の基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとる。さらに $(\ker F)^{\perp}$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ をとる。これらの間の変換行列を (a_{ij}) で表わす。すなわち、

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

とおく。すると、命題 1.2.4 より

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &= \det(a_{ij}) u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, \\ \wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \det(a_{ij}) \wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})||\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|\det(a_{ij})||u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= \frac{|\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

系 1.3.4 より $|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n| = 1$ となることを最後の等式に使った。これより、

$$JF \geq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

V の任意の正規直交系 $w_1 \ldots, w_n$ に対して

$$w_i = w_i^1 + w_i^2, \quad w_i^1 \in (\ker F)^{\perp},\ w_i^2 \in \ker F$$

とおくと $|w_i^1| \leq |w_i| = 1$ となり、さらに

$$\begin{aligned} & \wedge^n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) = F(w_1) \wedge \cdots \wedge F(w_n) \\ = \ & F(w_1^1) \wedge \cdots \wedge F(w_n^1) = \wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1). \end{aligned}$$

ここで、$w_1^1, \ldots, w_n^1$ が線形従属の場合は命題 1.2.4 より $\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1) = 0$ となり、線形独立の場合は $(\ker F)^\perp$ の基底になる。このときは、上で示したことより、

$$\frac{|\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)|}{|w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1|} = |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|.$$

命題 1.3.7 を使うと

$$\begin{aligned} |\wedge^n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n)| &= |\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)| \\ &= |w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1| \cdot |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |w_1^1| \cdots |w_n^1| \cdot |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

よって

$$JF \leq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

以上の結果より、

$$JF \leq \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \leq JF.$$

したがって、

$$JF = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

例 1.3.9 内積を持つ有限次元ベクトル空間 V の二つの超平面 V_0, V_1 に対して、それぞれの単位法ベクトル v_0, v_1 をとり、V_0 から V_1 への直交射影を F で表わすと $JF = |\langle v_0, v_1 \rangle|$ が成り立つ。

証明　$x \in V_0$ に対して

$$x = (x - \langle x, v_1 \rangle v_1) + \langle x, v_1 \rangle v_1, \qquad (x - \langle x, v_1 \rangle v_1 \in V_1,\ \langle x, v_1 \rangle v_1 \in V_1^\perp)$$

となるので、

$$F(x) = x - \langle x, v_1 \rangle v_1 \qquad (x \in V_0)$$

が成り立つ。次に V_0 と V_1 は一致するかまたは

$$\dim(V_0 \cap V_1) = \dim V_0 - 1 = \dim V_1 - 1$$

となることに注意する。V_0 と V_1 が一致する場合は、$F(x)=x$ と $v_1=\pm v_0$ が成り立つので、

$$JF = 1 = |\langle v_0, v_1\rangle|.$$

$\dim(V_0 \cap V_1) = \dim V_0 - 1 = \dim V_1 - 1$ の場合は、$V_0 \cap V_1$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_{p-1}$ をとり、$u_1, \ldots, u_p$ が V_0 の正規直交基底になるようにできる。

$$F(u_i) = \begin{cases} u_i & (1 \leq i \leq p-1), \\ u_p - \langle u_p, v_1\rangle v_1 & (i = p) \end{cases}$$

となるので

$$[\langle F(u_i), F(u_j)\rangle] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \langle u_p, v_1\rangle^2 \end{bmatrix}.$$

これより

$$JF^2 = |F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_p)|^2 = \det[\langle F(u_i), F(u_j)\rangle] = 1 - \langle u_p, v_1\rangle^2.$$

$(V_0 \cap V_1)^\perp$ は2次元になり、u_p, v_0 は $(V_0 \cap V_1)^\perp$ の正規直交基底になる。$v_1 \in (V_0 \cap V_1)^\perp$ を u_p, v_0 の線形結合で表わすと

$$v_1 = \langle u_p, v_1\rangle u_p + \langle v_0, v_1\rangle v_0.$$

これより、$1 = \langle u_p, v_1\rangle^2 + \langle v_0, v_1\rangle^2$ となり、$JF^2 = \langle v_0, v_1\rangle^2$ を得る。

系 1.3.10 補題1.3.8の設定において $m=n$ とし、さらに $F_0 : V_0 \to V$ を内積を持つベクトル空間 V_0 から V への線形同型写像とする。このとき、$J(F \circ F_0) = JF \cdot JF_0$ が成り立つ。

証明　F が全射でなければ $F \circ F_0$ も全射ではなく、補題1.3.8より $J(F \circ F_0) = 0 = JF \cdot JF_0$ が成り立つ。F が全射のときは線形同型写像になり、補題1.3.8より V_0 の基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとると

$$\begin{aligned} J(F \circ F_0) &= \frac{|F \circ F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F \circ F_0(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \\ &= \frac{|F \circ F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F \circ F_0(v_n)|}{|F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F_0(v_n)|} \cdot \frac{|F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F_0(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \\ &= JF \cdot JF_0. \end{aligned}$$

定義 1.3.11 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と向きを持つ n 次元実ベクトル空間とする。V の正の向きの正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \wedge^n V$ を考えると、これは命題 1.2.4 より正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ のとり方に依存しないことがわかる。すなわち、$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ は V の内積と向きにのみ依存して定まる。命題 1.2.5 より $\wedge^n V = \mathbf{R} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ が成り立つ。$0 \leq k \leq n$ をとる。$\xi \in \wedge^k V$ と $\eta \in \wedge^{n-k} V$ に対して $\xi \wedge \eta \in \wedge^n V$ となるので、ξ と η によって定まる $B(\xi, \eta) \in \mathbf{R}$ が存在し

$$\xi \wedge \eta = B(\xi, \eta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

と表わすことができる。これによって双線形写像

$$B : \wedge^k V \times \wedge^{n-k} V \to \mathbf{R}$$

が定まる。命題 1.2.5 より

$$\dim \wedge^k V = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim \wedge^{n-k} V$$

であることに注意する。$\{1, \ldots, n\}$ の元の個数が k 個の部分集合

$$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$$

に対して $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in \wedge^k V$ と表わす。$\{1, \ldots, n\}$ 内の I の補集合を I^c で表わすと $e_{I^c} \in \wedge^{n-k} V$ となる。さらに命題 1.2.4 より $e_I \wedge e_{I^c} = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ となるので、

$$B(e_I, e_{I^c}) = \pm 1 \quad (I \subset \{1, \ldots, n\},\ \# I = k)$$

が成り立つ。特に $B : \wedge^k V \times \wedge^{n-k} V \to \mathbf{R}$ は非退化になり、

$$\langle \xi, \xi' \rangle = B(\xi, *\xi') \quad (\xi, \xi' \in \wedge^k V)$$

を満たす線形同型写像 $* : \wedge^k V \to \wedge^{n-k} V$ が定まる。これを $*$ **作用素**と呼ぶ。定め方より $\xi, \xi' \in \wedge^k V$ に対して

$$\langle \xi, \xi' \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = B(\xi, *\xi') e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \xi \wedge *\xi'$$

が成り立つ。

命題 1.3.12 V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と向きを持つ n 次元実ベクトル空間とし、$e_1, \ldots, e_n$ を V の正の向きの正規直交基底とする。$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ に対して $\{1_1, \ldots, i_k\}^c = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ を満たすように $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq n$ をとる。このとき

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}$$

が成り立つ。特に $* : \wedge^k V \to \wedge^{n-k} V$ は等長的線形同型写像になる。さらに $\xi, \eta \in \wedge^k V$ に対して次の等式が成り立つ。

$$(1) \quad \xi \wedge *\eta = \langle \xi, \eta \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \qquad (2) \quad *(*\xi) = (-1)^{k(n-k)} \xi.$$

証明 定義 1.3.11 で述べたことより (1) が成り立つ。命題 1.2.4 より

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

となり、他の $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ については

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_{n-k}} = 0$$

が成り立つ。したがって、系 1.3.4 と (1) より

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}$$

が成り立つ。さらにこれより

$$\begin{aligned} & *(*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \\ = \ & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} * (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}) \\ = \ & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ j_1 \ldots j_{n-k} i_1 \ldots i_k \end{pmatrix} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ j_1 \ldots j_{n-k} i_1 \ldots i_k \end{pmatrix} \\ = \ & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ j_1 \ldots j_{n-k} i_1 \ldots i_k \end{pmatrix} \\ = \ & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k} \\ j_1 \ldots j_{n-k} i_1 \ldots i_k \end{pmatrix} = (-1)^{k(n-k)} \end{aligned}$$

となるので、

$$*(*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) = (-1)^{k(n-k)} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

を得る。よって一般の $\xi \in \wedge^k V$ に対しても $*(*\xi) = (-1)^{k(n-k)}\xi$ が成り立つ。

例 1.3.13 V を内積 $\langle\, ,\, \rangle$ と向きを持つ 2 次元実ベクトル空間とする。e_1, e_2 を V の正の向きの正規直交基底とする。

$$*e_1 = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{pmatrix} e_2 = e_2, \qquad *e_2 = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} e_1 = -e_1$$

となるので、$* : V \to V$ は反時計回りの $\pi/2$ の回転になる。

例 1.3.14 V を内積 $\langle\,,\,\rangle$ と向きを持つ 3 次元実ベクトル空間とする。e_1, e_2, e_3 を V の正の向きの正規直交基底とする。

$$\begin{aligned} *(e_1 \wedge e_2) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix} e_3 = e_3, \\ *(e_2 \wedge e_3) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix} e_1 = e_1, \\ *(e_3 \wedge e_1) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix} e_2 = e_2 \end{aligned}$$

となるので、

$$V \times V \to V\,;(u, v) \mapsto *(u \wedge v)$$

は 3 次元実ベクトル空間のベクトル積に一致する。

1.4 Riemann 測度

Riesz の表現定理 (定理 1.4.7) を使って、定義 1.4.14 で Riemann 多様体上の Riemann 測度を定義する。

定義 1.4.1 集合 X の部分集合全体 2^X 上で定義された $[0, \infty]$ に値を持つ関数 μ が次の条件を満たすとき、μ を X 上の**測度**と呼ぶ。

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) X の部分集合の可算族 $\{A_i\}$ と $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を満たす $A \in 2^X$ に対して

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定義 1.4.2 μ を集合 X 上の測度とする。X の部分集合 A に対して、

$$\mu(T) = \mu(T - A) + \mu(T \cap A)$$

が任意の $T \in 2^X$ について成り立つとき、A を X の μ **可測部分集合**という。

定義 1.4.3 f を測度 μ を持つ集合 X の部分集合 S 上で定義された $[-\infty, \infty]$ に値を持つ関数とする。さらに $\mu(X - S) = 0$ を仮定する。$[-\infty, \infty]$ の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ が X の μ 可測部分集合になるとき、f を μ **可測関数**と呼ぶ。

注意 1.4.4 以上の概念を使って集合上の測度に関する積分論を $\mathbf{R}^n$ における Lebesgue 積分論と同様に展開することができ、Lebesgue の収束定理や Fubini の定理等が成り立つ。

定義 1.4.5 位相空間 X の開集合全体が生成する σ 集合族の元を **Borel 集合**と呼ぶ。μ を X 上の測度とする。X の Borel 集合がすべて μ 可測になり、任意の $A \subset X$ に対して Borel 集合 B が存在し、$A \subset B$ と $\mu(A) = \mu(B)$ を満たすとき、μ を **Borel 正則測度**と呼ぶ。

定義 1.4.6 X を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X 上の Borel 正則測度 μ が、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $\mu(K) < \infty$ を満たすとき、μ を **Radon 測度**と呼ぶ。

定理 1.4.7 (Riesz の表現定理) X を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。X 上の台がコンパクトになる実数値連続関数の全体を $\mathcal{K}(X)$ で表わす。$\mathcal{K}(X)$ 上の実数値線形汎関数 $L : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ が、

(1) $f \geq 0$ となる $f \in \mathcal{K}(X)$ に対して $L(f) \geq 0$

(2) コンパクト集合 $K \subset X$ に対して

$$\sup\{L(f) \mid f \in \mathcal{K}(X),\ |f| \leq 1,\ \mathrm{supp} f \subset K\} < \infty$$

を満たすとき、Radon 測度 μ が X 上に存在し、

$$L(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。

注意 1.4.8 この講義では多様体は可算開基を持つ C^∞ 級多様体のみ考えることにする。可算開基を持つ多様体は可分になるので、ここでの多様体は定理 1.4.7 の仮定を満たしている。

Riesz の表現定理を利用して Riemann 多様体に測度を定めるために、いくつかの準備をしておく。

命題 1.4.9 (積分の変数変換公式) U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。$x_1, \ldots, x_n$ と $y_1, \ldots, y_n$ を U 上の座標とする。これらは $\mathbf{R}^n$ の標準的な座標である必要はない。U で定義された連続関数 f に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_U f(y) \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \right| dy_1 \cdots dy_n.$$

定義 1.4.10 位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が**局所有限**とは、X の任意の点がこの開被覆の有限個の開集合としか交わらない近傍を持つこととする。X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ に対して、$\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ が $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の**細分**であるとは、どの V_β もある U_α に含まれていることとする。X が**パラコンパクト**であるとは、X の任意の開被覆に対してその細分であり局所有限な開被覆が存在することとする。

定義 1.4.11 多様体 M の局所有限な開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して、M 上の C^∞ 級関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ であって次の条件を満たすものを開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属する**単位の分割**と呼ぶ。

(1) 各 $\alpha\in A$ に対して $0\leq f_\alpha(x)\leq 1\,(x\in M)$.

(2) 各 $\alpha\in A$ について $\mathrm{supp} f_\alpha=\overline{\{x\in M\mid f_\alpha(x)\neq 0\}}$ (これを f_α の**台**と呼ぶ) は U_α に含まれる。

(3) 各点 $x\in M$ に対して $\displaystyle\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)=1.$

定理 1.4.12 パラコンパクトな多様体 M の局所有限な開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して、各 $\alpha\in A$ について $\bar{U}_\alpha$ がコンパクトならば $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属する単位の分割が存在する。

注意 1.4.13 可算開基を持つ多様体はパラコンパクトになることが知られているので、この講義で対象にしている多様体に上の定理を適用できる。

定義 1.4.14 (M,g) を Riemann 多様体とする。M の局所座標系 $(U;x_1,\ldots,x_n)$ をとる。各 $x\in U$ に対して $\wedge^n T_x(M)$ に Riemann 計量から自然に定まる内積を入れておく。$\mathrm{supp} f\subset U$ となる $f\in\mathcal{K}(M)$ に対して

$$L(f)=\int_U f(x_1,\ldots,x_n)\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right|dx_1\cdots dx_n$$

によって $L(f)$ を定める。右辺は Euclid 空間における Lebesgue 積分である。被積分関数はコンパクトな台を持つ連続関数だから、Riemann 積分に一致している。この値 $L(f)$ は積分の変数変換の公式から、局所座標系のとり方に依存しないことがわかる。さらに一つの局所座標近傍に台が含まれない $\mathcal{K}(M)$ の元に対しては、単位の分割を使うことによって $L:\mathcal{K}(M)\to\mathbf{R}$ を定義することができる。これも単位の分割のとり方に依存しないことがわかる。さらに L は定理 1.4.7 の仮定を満たすので、Radon 測度 μ が M 上に存在し、

$$L(f)=\int_M f d\mu \qquad (f\in\mathcal{K}(M))$$

が成り立つ。この測度 μ を M の **Riemann 測度**と呼ぶ。今後 Riemann 多様体上の測度は Riemann 測度のみを考えることにする。μ を $\mu_{(M,g)}$ と記したり、Riemann 計量がわかっているときは μ_M と記したりする。$\mathrm{vol}(M)=\mu_M(M)$ と表わし、$\mathrm{vol}(M)$ を M の**体積**と呼ぶ。通常 M の次元が 1 のときは、**長さ**と呼び $L(M)$ とも表わす。M の次元が 2 のときは、**面積**と呼び $A(M)$ とも表わす。M の次元が 3 のときは、$V(M)$ とも表わす。

証明 まず $\mathrm{supp} f \subset U$ となる $f \in \mathcal{K}(M)$ に対して $L(f)$ の定義が局所座標系のとり方に依存しないことを示そう。U にもう一つの局所座標系 $y_1, \ldots, y_n$ があるとする。局所座標系から定まる接ベクトル空間の基底は

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と変換されるので、命題 1.2.4 より

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
& \int_U f(x) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n \\
= & \int_U f(y) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| \left| \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \right| dy_1 \cdots dy_n \\
= & \int_U f(y) \left| \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dy_1 \cdots dy_n \\
= & \int_U f(y) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right| dy_1 \cdots dy_n
\end{aligned}$$

となり、この場合の $L(f)$ の定め方は局所座標系のとり方に依存しないことがわかった。

一つの局所座標近傍に台が含まれない $\mathcal{K}(M)$ の元に対する L の定義を単位の分割によって定める。まず各点 $x \in M$ に対して $\bar{U}_x$ がコンパクトになるような x の局所座標近傍 U_x をとる。$\{U_x\}_{x \in M}$ は M の開被覆であり、M はパラコンパクトなので、$\{U_x\}_{x \in M}$ の細分であり局所有限な開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在する。各 $\bar{U}_x$ はコンパクトだから各 $\bar{V}_\alpha$ もコンパクトになる。定理 1.4.12 より $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する単位の分割 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在する。任意に $f \in \mathcal{K}(M)$ と一つとる。f の台はコンパクトだから有限個の V_α としか交わらない。各 $f_\alpha f$ は V_α の外では 0 になるので、有限個の α を除いて $f_\alpha f$ は 0 になる。よって

$$f = 1 \cdot f = \left(\sum_\alpha f_\alpha \right) f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha f$$

が成り立ち、右辺は有限個の和になる。各 $f_\alpha f$ の台は V_α に含まれ、さらにこれはある U_x に含まれるので $L(f_\alpha f)$ はすでに定義されている。これを使って

$$L(f) = \sum_{\alpha \in A} L(f_\alpha f)$$

によって $L(f)$ を定める。

上で定めた L が局所有限な開被覆とそれに従属する単位の分割のとり方にも依存しないことを示そう。$\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ を M の局所有限な開被覆であって、各 W_β は M の閉包がコンパクトになる局所座標近傍に含まれるものとする。さらに、$\{g_\beta\}_{\beta\in B}$ を $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ に従属する単位の分割とする。各 $\alpha\in A$ について

$$f_\alpha f=\sum_{\beta\in B}g_\beta f_\alpha f$$

が成り立ち、右辺の和は有限和になる。よって、L の定義にある Euclid 空間の積分の線形性より

$$L(f_\alpha f)=\sum_{\beta\in B}L(g_\beta f_\alpha f)$$

が成り立ち、

$$\sum_{\alpha\in A}L(f_\alpha f)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}L(g_\beta f_\alpha f).$$

両辺の和はどちらも有限和である。同様にして

$$\sum_{\beta\in B}L(g_\beta f)=\sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}L(f_\alpha g_\beta f).$$

したがって、

$$\sum_{\alpha\in A}L(f_\alpha f)=\sum_{\beta\in B}L(g_\beta f)$$

が成り立ち、L の定め方は開被覆や単位の分割のとり方に依存しない。

L が Riesz の表現定理の仮定を満たすことは、Euclid 空間における積分の性質からわかる。

注意 1.4.15 n 次元多様体上のコンパクトな台を持つ n 次連続微分形式の積分の定義をするためには、多様体に向きがついていることが必要になるが、Riemann 多様体上のコンパクトな台を持つ連続関数の積分を定義するためには、多様体の向きは必要ない。

命題 1.4.16 M を Riemann 多様体とし、$(U;x_1,\ldots,x_n)$ を M の局所座標近傍とする。U 上定義された μ_M 可測関数 ϕ が、μ_M 可積分であるかまたは $\phi\geq 0$ であるとき、

$$\int_U\phi d\mu_M=\int_U\phi(x_1,\ldots,x_n)\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right|dx_1\cdots dx_n$$

が成り立つ。

1.5　余面積公式

積分幾何学の種々の公式を証明するうえで基本的な役割を果たす余面積公式を示し、その簡単な応用として Fenchel の定理を証明する。

定義 1.5.1 $f: M \to N$ を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x \in M$ に対して、$df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ が全射になるとき、x を f の**正則点**と呼ぶ。M の正則点ではない点を**臨界点**と呼ぶ。$y \in N$ に対して、$f(x) = y$ となる f の臨界点 x が存在するとき、y を f の**臨界値**と呼ぶ。N の臨界値ではない点を**正則値**と呼ぶ。

定理 1.5.2 (Sard の定理) U を $\mathbf{R}^n$ 内の開集合とし、$f: U \to \mathbf{R}^p$ を C^∞ 級写像とする。f の臨界点の全体を C で表わし、$\mathbf{R}^p$ の Lebesgue 測度を μ で表わすと、$\mu(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定理 1.5.3 $f: M \to N$ を Riemann 多様体 M から Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。f の臨界点の全体を C で表わすと、$\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

証明　M と N は可算開基を持っているので、M と N の可算開被覆 $\{U_i\}$ と $\{V_i\}$ を、各 i について

(1) U_i は M の局所座標近傍に含まれる、

(2) $\bar{V}_i$ はコンパクトで、N の局所座標近傍に含まれる、

(3) $f(U_i) \subset V_i$ を満たす

が成り立つようにとることができる。$C_i = C \cap U_i$ とおいて、$\bar{V}_i$ を含む N の局所座標近傍を $(V_i'; x_1, \ldots, x_p)$ で表わす。$V_i' \subset \mathbf{R}^p$ とみなし、$\mathbf{R}^p$ の Lebesgue 測度を μ と書くことにすると、定理 1.5.2 より、$\mu(f(C_i)) = 0$ が成り立つ。

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

は V_i' 上の連続関数になり、$\bar{V}_i (\subset V_i')$ はコンパクトだから

$$A = \sup_{\bar{V}_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

が存在する。したがって、命題 1.4.16 より、

$$0 \le \mu_N(f(C_i)) \le A\mu(f(C_i)) = 0$$

となり、$\mu_N(f(C_i)) = 0$。これより、

$$0 \le \mu_N(f(C)) \le \sum_i \mu_N(f(C_i)) = 0,$$

つまり、$\mu_N(f(C)) = 0$ が成り立つ。

定義 1.5.4 $m \geq n$ とし、$f : M \to N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x \in M$ に対して補題 1.3.8 の J を使って、$Jf(x) = Jdf_x$ とおく。

定理 1.5.5 (余面積公式) $f : M \to N$ を m 次元 Riemann 多様体 M から n 次元 Riemann 多様体 N への C^∞ 級写像とし、ϕ を M 上の μ_M 可測関数とする。このとき、N の元 y に対して $\displaystyle\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、$\phi J f$ が M 上 μ_M 可積分であるか、または $\phi \geq 0$ のとき、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

証明　各 $x \in M$ について、$V_x^n(M)$ で $T_x(M)$ 内の n 個の正規直交系全体の成す Stiefel 多様体とし、

$$V^n(M) = \bigcup_{x \in M} V_x^n(M)$$

とおくと、$V^n(M)$ は $V^n(M) \to M$ を射影とし Stiefel 多様体をファイバーとするファイバー束の全空間になり、特に $V^n(M)$ は多様体になる。

$$V^n(M) \to \mathbf{R}\,; (u_1, \ldots, u_n) \mapsto |df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)|$$

は連続関数になり、

$$Jf(x) = \sup\{|df(u_1) \wedge \cdots \wedge df(u_n)| \mid (u_1, \ldots, u_n) \in V_x^n(M)\}$$

は M から $\mathbf{R}$ への連続関数になる。したがって、

$$O = \{x \in M \mid Jf(x) \neq 0\}$$

は M の開集合になる。特に、O は μ_M 可測集合になり、

$$\int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x) = \int_O \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。各 $x \in O$ に対して、陰関数定理より x の局所座標近傍 U_x が存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f : U_x \to f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、f 自身が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、まず定理の公式を証明する。

N が $\mathbf{R}^n$ の開集合になっていて、F が $\mathbf{R}^{m-n}$ の開集合で $M = N \times F$ となり、

$$f : M = N \times F \to N;\ (y, t) \mapsto y$$

である場合を考える。$y_1, \ldots, y_n$ を $N \subset \mathbf{R}^n$ の座標とし、$x_1, \ldots, x_m$ を $M = N \times F \subset \mathbf{R}^m$ の座標とする。ただし、$y_i \circ f = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ となるようにとっておく。このとき、$x_{n+1}, \ldots, x_m$ は F の座標になる。ϕ は M 上の可測関数だから、

$$\phi(y,t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f$$

も M 上の可測になる。したがって、Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
y \mapsto \quad & \int_F \phi(y,t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_{n+1} \cdots dx_m(t) \\
&= \left(\int_F \phi(y,t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M dx_{n+1} \cdots dx_m(t) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\
&= \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N
\end{aligned}$$

は N 上の可測関数になり、

$$\begin{aligned}
& \int_M \phi(y,t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_1 \cdots dx_m \\
= \quad & \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N dy_1 \cdots dy_n(y) \\
= \quad & \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)
\end{aligned}$$

が成り立つ。各 $1 \leq i \leq n$ について、$M = N \times F$ の接ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を F に接する成分と直交する成分に分解する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_F + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp}.$$

すると

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\
= \quad & \left| df \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \wedge \cdots \wedge df \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right|_N \\
= \quad & \left| df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \right) \wedge \cdots \wedge df \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right) \right|_N .
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ は F に接しているので、

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \\
= & \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \\
= & \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right|_M \left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M .
\end{aligned}$$

以上の計算と補題 1.3.8 より、

$$\begin{aligned}
& \int_M \phi(y,t) \left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}\right|_M \left|\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}\right|_N \circ f dx_1 \cdots dx_m \\
= & \int_M \phi(x) \frac{\left|df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right)\right|_N}{\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{F^\perp}\right|_M} d\mu_M(x) \\
= & \int_M \phi J f d\mu_M
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)\right) d\mu_N(y) = \int_M \phi J f d\mu_M$$

を得る。これで f が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、定理の証明ができた。

一般の場合にもどる。各 $x \in O$ に対して、x の局所座標近傍 U_x が存在し、$f(U_x)$ は $f(x)$ の開近傍になり、$f : U_x \to f(U_x)$ は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、このような開集合を O の各点でとると、$\{U_x\}_{x\in O}$ は O の開被覆になる。M は可算開基を持つので、O も可算開基を持つ。したがって O の開被覆 $\{U_x\}_{x\in O}$ から可算個 $\{U_k\}$ をとり、$\{U_k\}$ が O の開被覆になるようにできる。$\{U_k\}$ に付随する単位の分割 $\{\psi_k\}$ をとる。f の U_k への制限を

$$f_k : U_k \to V_k = f(U_k)$$

で表わすことにして、すでに示したことを $\psi_k\phi$ に適用すると、

$$y \mapsto \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は V_k 上の μ_N 可測関数になり、

$$\int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k\phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)\right) d\mu_{V_k}(y) = \int_{U_k} \psi_k\phi J f d\mu_{U_k}.$$

よって

$$y \mapsto \sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。各 y について $\{\psi_k|_{f^{-1}(y)}\}$ は $f^{-1}(y)$ の単位の分割になるので、

$$\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) = \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

となる。これより

$$y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

は N 上の μ_N 可測関数になる。ϕJf が M 上 μ_M 可積分のときは Lebesgue の有界収束定理を使い、$\phi \geq 0$ のときは Lebesgue の単調収束定理を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_M \phi Jf d\mu_M &= \sum_k \int_{U_k} \psi_k \phi Jf d\mu_{U_k} \\
&= \sum_k \int_{V_k} \left(\int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) \\
&= \int_N \left(\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \\
&= \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)
\end{aligned}$$

となり、

$$\int_M \phi Jf d\mu_M = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)$$

を得る。

系 1.5.6 定理 1.5.5 において $m = n$ の場合、N の元 y に対して $\displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、

$$\int_N \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

注意 1.5.7 系 1.5.6 を適用する際に、次のことに注意しておくと、右辺の $\displaystyle\int_M \phi Jf d\mu_M$ の計算が簡単になる。系 1.3.10 より、M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ において

$$\int_U \phi Jf d\mu_M = \int \phi \left| df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \cdots \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right| dx_1 \cdots dx_n.$$

したがって M の接ベクトル空間の正規直交基底をとる必要はない。他方、N の接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ をとって、$x \in U$ に対して $f(x)$ での変換行列 $F(x)$ を

$$\left[df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\cdots df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right] = [e_1 \cdots e_n]F(x)$$

で定めると、

$$\left|df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\wedge\cdots\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right| = |\det F(x)|$$

となり、

$$\int_U \phi J f d\mu_M = \int \phi(x)|\det F(x)|dx_1 \cdots dx_n.$$

命題 1.5.8 (Archimedes) $r > 0$ に対して、

$$S^k(r) = \{x \in \mathbf{R}^{k+1} \mid |x| = r\}$$

とおくと、写像

$$\begin{array}{rlcl} f: & S^1(r) \times (-r, r) & \mapsto & S^2(r) \\ ; & (r\cos\theta, r\sin\theta, t) & \mapsto & (\sqrt{r^2-t^2}\cos\theta, \sqrt{r^2-t^2}\sin\theta, t) \end{array}$$

は面積保存写像になる。

注意 1.5.9 命題 1.5.8 の 2 次元球面の面積保存写像は n 次元球面の場合に拡張できる (命題 1.5.11)。

証明　$\mathbf{R}^3$ の標準的正規直交基底を e_1, e_2, e_3 とする。f の微分写像を計算するために定義域の接ベクトル空間の基底を求めておこう。$S^1(r)$ の接ベクトル $\partial/\partial\theta$ と $(-r, r)$ の接ベクトル $\partial/\partial t$ を合わせたものが $S^1(r) \times (-r, r)$ の接ベクトル空間の基底になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta, t) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(r\cos\theta, r\sin\theta, t) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|\cdot\left|\frac{\partial}{\partial t}\right| = r$$

が成り立つ。これらの接ベクトルの微分写像 df による像は次のようになる。

$$\begin{aligned} df\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= \frac{\partial f}{\partial\theta} = (-\sqrt{r^2-t^2}\sin\theta, \sqrt{r^2-t^2}\cos\theta, 0), \\ df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \frac{\partial f}{\partial t} = (-(r^2-t^2)^{-1/2}t\cos\theta, -(r^2-t^2)^{-1/2}t\sin\theta, 1). \end{aligned}$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned}\left|df\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2 &= \left|df\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right|^2\cdot\left|df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2 \\ =\ (r^2-t^2)\left(\frac{t^2}{r^2-t^2}+1\right) &= r^2\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$Jf = \frac{\left|df\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|}{\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial}{\partial t}\right|} = \frac{r}{r} = 1$$

となり f は面積を保つ。

例 1.5.10 命題 1.5.8 の面積保存写像 f を使うと

$$A(S^2(r)) = \int_{S^2(r)} 1d\mu = \int_{S^1(r)\times(-r,r)} 1d\mu = 2\pi r\cdot 2r = 4\pi r^2$$

によって 2 次元球面 $S^2(r)$ の面積を求めることができる。

命題 1.5.11 $r>0$ に対して、

$$D^k(r) = \{x\in\mathbf{R}^k \mid |x|<r\}$$

とおくと、写像

$$\begin{array}{rccc} f: & S^1(r)\times D^{n-1}(r) & \mapsto & S^n(r) \\ ; & (r\cos\theta, r\sin\theta, x) & \mapsto & (\sqrt{r^2-|x|^2}\cos\theta, \sqrt{r^2-|x|^2}\sin\theta, x)\end{array}$$

は n 次元体積保存写像になる。

注意 1.5.12 命題 1.5.11 の n 次元球面の体積保存写像は、積分幾何学に関するセミナー中に井川治・酒井高司両氏と共同で発見した。すでに知られていることのようにも思えるが、この体積保存写像について書かれた文献を知らない。

証明　$S^1(r)\times D^{n-1}(r)$ と $S^n(r)$ はどちらも $\mathbf{R}^{n+1}$ に含まれているとみなせる。$\mathbf{R}^{n+1}$ の最初の二つの成分に $SO(2)$ が作用し残りの成分に $SO(n-1)$ が作用することで、$SO(2)\times SO(n-1)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ に作用する。この作用に関して $S^1(r)\times D^{n-1}(r)$ と $S^n(r)$ はどちらも不変になる。さらにこれらの作用は等長的になる。$SO(2)\times SO(n-1)$ の作用で移り合う点における Jf の値は等しい。$S^1(r)\times D^{n-1}(r)$ の任意の点は $SO(2)\times SO(n-1)$ の作用で $(r,0,s,0,\ldots,0)$ $(0\le s<r)$ という形の点に移るので、この点における Jf を計算すればよい。

$\mathbf{R}^{n+1}$ の標準的正規直交基底を $e_1,\ldots,e_{n+1}$ とする。f の微分写像を計算するために定義域の接ベクトル空間の基底を求めておこう。$S^1(r)$ の接ベクトル $\partial/\partial\theta|_{\theta=0}$

と $D^{n-1}(r)$ の接ベクトル $e_3, \ldots, e_{n+1}$ を合わせたものが $S^1(r) \times D^{n-1}(r)$ の接ベクトル空間の基底になる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} (r\cos\theta, r\sin\theta, s, 0, \ldots, 0) = (0, r, 0, \ldots, 0)$$

と $e_3, \ldots, e_{n+1}$ は互いに直交するので、命題 1.3.7 より

$$\left| \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \wedge e_3 \wedge \cdots \wedge e_{n+1} \right| = r \cdot |e_3| \cdots |e_{n+1}| = r$$

が成り立つ。これらの接ベクトルの微分写像 df による像は次のようになる。

$$\begin{aligned} df\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\right) &= \left.\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = (0, \sqrt{r^2 - s^2}, 0, \ldots, 0) = \sqrt{r^2 - s^2} e_2, \\ df(e_3) &= \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} (\sqrt{r^2 - (s+t)^2}, 0, s+t, 0, \ldots, 0) \\ &= (-(r^2 - s^2)^{-1/2} s, 0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &= -(r^2 - s^2)^{-1/2} s e_1 + e_3 \end{aligned}$$

となり $4 \leq i \leq n+1$ のときは

$$df(e_i) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} (\sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}, 0, s, 0, \ldots, \overset{i}{\smile}{t}, \ldots, 0) = e_i.$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned} & \left| df\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\right) \wedge df(e_3) \wedge \cdots \wedge df(e_{n+1}) \right|^2 \\ = & \left| df\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\right) \right|^2 \cdot |df(e_3)|^2 \cdots |df(e_{n+1})|^2 \\ = & (r^2 - s^2)\left(\frac{s^2}{r^2 - s^2} + 1\right) = r^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$Jf = \frac{\left| df\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\right) \wedge df(e_3) \wedge \cdots \wedge df(e_{n+1}) \right|}{\left| \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \wedge e_3 \wedge \cdots \wedge e_{n+1} \right|} = \frac{r}{r} = 1$$

となり f は体積を保つ。

例 1.5.13 $\omega_n = \mathrm{vol}(S^{n-1}(1)), \kappa_n = \mathrm{vol}(D^n(1))$ とおくと

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}(r)) = \omega_n r^{n-1}, \quad \mathrm{vol}(D^n(r)) = \kappa_n r^n$$

が成り立つ。$n \geq 2$ のとき、写像 $f : D^n(1) \to [0,1]\ ;\ x \mapsto |x|$ に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用する。$Jf = 1$ となるので、

$$\mathrm{vol}(D^n(1)) = \int_0^1 \mathrm{vol}(S^{n-1}(r))dr$$

を得る。したがって、

$$\kappa_n = \mathrm{vol}(D^n(1)) = \int_0^1 \mathrm{vol}(S^{n-1}(r))dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1}dr = \left[\frac{\omega_n}{n}r^n\right]_0^1 = \frac{\omega_n}{n}.$$

さらに命題 1.5.11 より

$$\omega_{n+1} = \mathrm{vol}(S^n(1)) = \mathrm{vol}(S^1(1))\mathrm{vol}(D^{n-1}(1)) = 2\pi\kappa_{n-1}.$$

これらの関係式と

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \mathrm{vol}(S^0(1)) = 2, \quad &\kappa_1 = \mathrm{vol}(D^1(1)) = 2, \\ &\omega_2 = \mathrm{vol}(S^1(1)) = 2\pi, \quad &\kappa_2 = \mathrm{vol}(D^2(1)) = \pi \end{aligned}$$

より帰納的に ω_n と κ_n を計算することができる。

例 1.5.14

$$S_+^{n-1} = \{u \in S^{n-1}(1) \mid 0 \leq u_1\}$$

とおくと次の等式が成り立つ。

$$\int_{S_+^{n-1}} u_1 d\mu(u) = \mathrm{vol}(D^{n-1}(1)) = \kappa_{n-1}.$$

証明 写像 $f : S_+^{n-1} \to D^{n-1}(1)$ を $\mathbf{R}^n$ から $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{R}^{n-1}$ への直交射影 P の S_+^{n-1} への制限とする。すると f は全単射になりさらに微分同型写像になる。f は線形写像 P の制限だから、f の微分写像も P の接ベクトル空間への制限になる。S_+^{n-1} の単位法ベクトルを e で表わし $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$ の単位法ベクトルを e_1 で表わすと例 1.3.9 より $Jf = |\langle e, e_1\rangle| = u_1$ が成り立つ。$f : S_+^{n-1} \to D^{n-1}(1)$ と S_+^{n-1} 上恒等的に 1 に等しい関数に余面積公式 (系 1.5.6) を適用すると次の等式を得る。

$$\int_{S_+^{n-1}} u_1 d\mu(u) = \int_{S_+^{n-1}} Jf d\mu(u) = \mathrm{vol}(D^{n-1}(1)).$$

定義 1.5.15 **平面曲線**とは区間上定義された平面 $\mathbf{R}^2$ への微分が消えない C^∞ 級写像である。平面曲線は $\mathbf{R}^2$ の部分多様体とみなすことができる。$c : I \to \mathbf{R}^2$ を平面曲線とする。$t_0 \in I$ を一つとり固定する。

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left|\frac{dc}{dt}\right| dt$$

によって I 上の関数 $s(t)$ を定める。$s(t)$ は曲線 c の $c(t_0)$ から $c(t)$ までの向きを付けた長さになる。これをパラメータ t で微分すると

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dc}{dt}\right| > 0$$

が成り立つ。これより $s(t)$ は単調増加関数になり、逆関数 $t = t(s)$ が存在する。$t(s)$ も C^∞ 級になる。これにより、

$$\bar{c}(s) = c(t(s))$$

とおいて、曲線のパラメータを s にとりかえることができる。s を曲線の**弧長パラメータ**という。

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{dc}{dt} \Big/ \left|\frac{dc}{dt}\right|$$

となるので、長さは 1 になる。すなわち、曲線の弧長パラメータによる速度ベクトルは単位ベクトルになる。曲線のパラメータは通常弧長パラメータ s を使うことにして、最初から $c(s)$ と表わすことにする。$c(s) = (x(s), y(s))$ と表わすと

$$\boldsymbol{e}(s) = c'(s) = (x'(s), y'(s))$$

は単位ベクトルになる。$\boldsymbol{e}(s)$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転させた単位ベクトルを

$$\boldsymbol{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

で表わす。$c'(s)$ は長さ 1 なので、

$$\langle c'(s), c'(s)\rangle = 1$$

となる。両辺を s で微分すると、

$$2\langle c''(s), c'(s)\rangle = 0$$

を得る。すなわち、$c''(s)$ は $c'(s) = \boldsymbol{e}(s)$ に直交する。したがって、$c''(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ に比例することになり、ある $\kappa(s)$ が存在し $c''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ が成り立つ。$\kappa(s)$ を曲線 $c(s)$ の**曲率**という。

$$(x''(s), y''(s)) = c''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) = \kappa(s)(-y'(s), x'(s))$$

となるので、

$$\boldsymbol{n}'(s) = (-y''(s), x''(s)) = (-\kappa(s)x'(s), -\kappa(s)y'(s)) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s).$$

以上より、

$$\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \qquad \boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)$$

を得る。

定理 1.5.16 (Fenchel) c を平面閉曲線とする。c の弧長パラメーターを s で表わし、曲率を $\kappa(s)$ で表わす。このとき、

$$2\pi \leq \int_c |\kappa(s)|ds$$

が成り立つ。

証明　$\mathbf{R}^2$ 内の 1 次元部分ベクトル空間全体が成す 1 次元実射影空間を $P^1(\mathbf{R})$ で表わす。$P^1(\mathbf{R})$ の元

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = 0\}$$

に θ を対応させると、θ は $P^1(\mathbf{R})$ の局所座標系になる。$d\theta \otimes d\theta$ は $P^1(\mathbf{R})$ 全体で定義される Riemann 計量になる。このとき、長さは $L(P^1(\mathbf{R})) = \pi$ となることに注意しておく。

曲線 c の点 $c(s)$ に対して、$c(s)$ での接線を $\mathbf{R}^2$ の原点を通るように平行移動したものを対応させる写像を g で表わすと、$g : c \to P^1(\mathbf{R})$ は C^∞ 級写像になる。c 上恒等的に 1 に等しい関数と g に余面積公式 (系 1.5.6) を適用すると、

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} \#(g^{-1}(l))d\mu_{P^1(\mathbf{R})}(l) = \int_c Jgd\mu_c$$

を得る。ただし、$\#X$ は集合 X の元の個数を表わす。接線を定める単位法ベクトルは $\boldsymbol{n}(s)$ になるので、$\boldsymbol{n}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ と表わすと $g(s) = \theta(s)$ とみなすことができる。

$$Jg = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d}{ds}(\cos\theta(s), \sin\theta(s))\right| = |\boldsymbol{n}'(s)| = |\kappa(s)|$$

となるので、

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} \#(g^{-1}(l))d\mu_{P^1(\mathbf{R})}(l) = \int_c |\kappa(s)|ds.$$

各 $l \in P^1(\mathbf{R})$ に対して c を l に平行な直線ではさむことにより、$\#(g^{-1}(l)) \geq 2$ となることがわかる。したがって

$$\int_c |\kappa(s)|ds \geq 2\mathrm{vol}(P^1(\mathbf{R})) = 2\pi.$$

注意 1.5.17 定理 1.5.16 の証明方法を Euclid 空間内のコンパクト部分多様体に適用すると、被積分関数は高さの関数の臨界点の個数になるので、Morse 理論より位相不変量で下から評価することができる。これが Chern-Lashof の定理の証明の概略である。

第2章　平面における交叉積分公式

この章では、$\mathbf{R}^2$ の直線の全体 $L(\mathbf{R}^2)$ の元を使って、平面図形に関する幾何学を展開をする。そのために、この節では $L(\mathbf{R}^2)$ に Riemann 計量を定める。この Riemann 計量を使って、平面単純閉曲線の囲む領域の面積を $L(\mathbf{R}^2)$ 上の積分で表す。その応用として、平面凸閉曲線の等周不等式を証明する。

2.1　平面直線の全体

例 2.1.1 $\mathbf{R}^2$ の直線の全体を $L(\mathbf{R}^2)$ で表す。実数の組 (r,θ) に対して $L(\mathbf{R}^2)$ の元 $l(r,\theta)$ を

$$l(r,\theta) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = r\}$$

とおいて、写像

$$l : \mathbf{R}^2 \to L(\mathbf{R}^2)\,; \quad (r,\theta) \mapsto l(r,\theta)$$

を定義する。このとき次の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) l は全射になる。

(2) $L(\mathbf{R}^2)$ は写像 l に関する商位相について Hausdorff 位相空間になる。

(3) $t \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\begin{array}{rcl} O_t & = & \{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r \in \mathbf{R},\ t < \theta < t+\pi\} \\ U_t & = & l(O_t) \\ \phi_t & : & U_t \to \mathbf{R}^2\,;\ l(r,\theta) \mapsto (r,\theta) \quad ((r,\theta) \in O_t) \end{array}$$

とおく。すると $(L(\mathbf{R}^2), \{(U_0,\phi_0),(U_{\pi/2},\phi_{\pi/2})\})$ は 2 次元多様体になる。

証明　(1) $\mathbf{R}^2$ の任意の直線の定義方程式は

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

と Hesse の標準形にすることができるので、l は全射になる。

(2) l の定め方から、$l(r,\theta) = l(r',\theta')$ となるための必要十分条件は、$r' = r, \theta' \in \theta + 2\pi\mathbf{Z}$ または $r' = -r, \theta' \in \theta + \pi + 2\pi\mathbf{Z}$ である。$L(\mathbf{R}^2)$ の相異なる l_1 と l_2 をとる。

$l_1 = l(r_1, \theta_1)$, $l_2 = l(r_2, \theta_2)$ となるように $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ を選ぶ。さらに $\theta_0 < \theta_1,\ \theta_2 < \theta_0 + \pi$ を満たす θ_0 をとることができる。このとき

$$O = \mathbf{R} \times (\theta_0, \theta_0 + \pi)$$

とおくと、O は $\mathbf{R}^2$ の開集合になる。O は Hausdorff 位相空間だから (r_1, θ_1) の開近傍 V_1 と (r_2, θ_2) の開近傍 V_2 で $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となるものが存在する。$l(V_1)$ と $l(V_2)$ は $L(\mathbf{R}^2)$ において l_1 と l_2 の開近傍になり、しかも $l(V_1) \cap l(V_2) = \emptyset$ が成り立つ。したがって $L(\mathbf{R}^2)$ は Hausdorff 位相空間になる。

(3) 今までの議論から U_t が $L(\mathbf{R}^2)$ の開集合になること、$L(\mathbf{R}^2)$ が $\{U_t\}$ の合併になること、$\phi_t : U_t \to \phi_t(U_t)$ が位相同型になることはすぐにわかる。あとは $\phi_{\pi/2} \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) \to \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2})$ が微分同型写像になることを示せばよい。

$$U_0 \cap U_{\pi/2} = \{l(r, \theta) \mid 0 < \theta < \pi/2 \text{ または} \pi/2 < \theta < \pi\}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) &= \{(r, \theta) \mid 0 < \theta < \pi/2 \text{ または} \pi/2 < \theta < \pi\} \\ \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2}) &= \{(r, \theta) \mid \pi/2 < \theta < \pi \text{ または} \pi < \theta < 3\pi/2\}. \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi/2$ のとき

$$\phi_{\pi/2}\phi_0^{-1}(r, \theta) = \phi_{\pi/2}(l(r, \theta)) = \phi_{\pi/2}(l(-r, \theta + \pi)) = (-r, \theta + \pi).$$

$\pi/2 < \theta < \pi$ のとき

$$\phi_{\pi/2}\phi_0^{-1}(r, \theta) = \phi_{\pi/2}(l(r, \theta)) = (r, \theta).$$

したがって $\phi_{\pi/2} \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) \to \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2})$ は微分同型写像になる。

(U_t, ϕ_t) はすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $L(\mathbf{R}^2)$ の局所座標近傍になる。これを $(U_t; r_t, \theta_t)$ と表して、局所座標系 r_t, θ_t を使う。特に t を明記する必要がないときは、単に r, θ で表す。$L(\mathbf{R}^2)$ は向きづけ不可能であることに注意しておく。

各 $t \in \mathbf{R}$ に対して U_t 上

$$g_t = dr_t \otimes dr_t + d\theta_t \otimes d\theta_t$$

によって Riemann 計量を定める。$L(\mathbf{R}^2)$ における局所座標系の変換は、

$$r_{t'} = (-1)^m r_t, \quad \theta_{t'} = \theta_t + n\pi \qquad (m, n \text{ は整数})$$

となるので、$U_t \cap U_{t'}$ 上 $g_t = g_{t'}$ となる。したがって、$\{(U_t, g_t)\}$ は $L(\mathbf{R}^2)$ 上の Riemann 計量を定める。

$\mathbf{R}^2$ の向きを保つ等長変換の全体を $M(\mathbf{R}^2)$ で表す。$M(\mathbf{R}^2)$ の任意の元は

$$T(\phi, u_1, u_2) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

と表すことができ、ϕ, u_1, u_2 は $M(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系になる。したがって、$M(\mathbf{R}^2)$ は $\mathbf{R}^2$ の Lie 変換群になる。

$$T(\phi, u_1, u_2)l(r, \theta) = l(r + u_1\cos(\theta - \phi) + u_2\sin(\theta - \phi), \theta - \phi)$$

となるので、$M(\mathbf{R}^2)$ の元は $\mathbf{R}^2$ の直線を直線に写し、さらに、$M(\mathbf{R}^2)$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の Lie 変換群になる。上の等式から変換 $T(\phi, u_1, u_2)$ の $L(\mathbf{R}^2)$ への作用の微分写像を求めることができる。

$$\begin{aligned} d(T(\phi, u_1, u_2))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}, \\ d(T(\phi, u_1, u_2))\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-u_1\sin(\theta - \phi) + u_2\cos(\theta - \phi))\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

これより $d(T(\phi, u_1, u_2))$ は等長線形写像にならない。ところが、

$$d(T(\phi, u_1, u_2))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \wedge d(T(\phi, u_1, u_2))\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta}$$

は成り立ち、$d(T(\phi, u_1, u_2))$ は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、$T(\phi, u_1, u_2)$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の面積保存変換になる。

定義 2.1.2 $\mathbf{R}^2$ の有界開集合 B に対して

$$D(B) = \{l \in L(\mathbf{R}^2) \mid B \cap l \neq \emptyset\}$$

とおく。$D(B)$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の開集合になる。したがって、Fubini の定理より、各整数 k について $D(B)$ 上の関数

$$D(B) \to [0, \infty]\ ;\ \ l \mapsto L(B \cap l)^k$$

は可測関数になる。そこで

$$I_k(B) = \int_{D(B)} L(B \cap l)^k d\mu(l)$$

によって積分 $I_k(B)$ を定義する。

次の $I_1(B)$ を表す等式は後で等周不等式 (定理 2.1.4) の証明をする際に必要になる。

命題 2.1.3 $\mathbf{R}^2$ の有界開集合 B に対して

$$I_1(B) = \pi A(B)$$

が成り立つ。

証明 $L(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系 r, θ の内で、θ を固定して関数 $L(B \cap l)$ の r による積分を考えると、

$$\int L(B \cap l(r,\theta))dr = A(B)$$

となる。したがって

$$I_1(B) = \int_{D(B)} L(B \cap l)d\mu(l) = \int_0^\pi \int L(B \cap l(r,\theta))drd\theta = \pi A(B).$$

定理 2.1.4 (等周不等式) $\mathbf{R}^2$ 内の凸閉曲線 c が囲む領域を B で表すと、

$$4\pi A(B) \leq L(c)^2$$

が成り立つ。さらに等号が成立するのは、c が円の場合に限る。

証明 c に $\mathbf{R}^2$ から定まる誘導 Riemann 計量を入れ、開区間 $(0,\pi)$ に $\mathbf{R}$ から定まる誘導 Riemann 計量を入れておく。$M = c \times (0,\pi)$ に積 Riemann 計量を入れ、2 次元 Riemann 多様体とみる。写像 $p : M \to L(\mathbf{R}^2)$ を $p(c(s),\phi)$ が点 $c(s)$ を通り $\dfrac{dc}{ds}$ と B の内部に向かって角度 ϕ で交わる直線になるように定める。このとき

$$M \to \mathbf{R}\ ;\ (c(s),\phi) \mapsto L(B \cap p(c(s),\phi))$$

は連続関数になる。そこで、$M^2 = M \times M$ の局所座標系を (s_1,ϕ_1,s_2,ϕ_2) で表し、積分

$$I = \int_{M^2} (L(B \cap p(c(s_1),\phi_1))\sin\phi_2 - L(B \cap p(c(s_2),\phi_2))\sin\phi_1)^2 d\mu_{M^2} \geq 0$$

について考える。

$$\begin{aligned}
I &= \int_{M^2} L(B \cap p(c(s_1),\phi_1))^2 \sin^2\phi_2 d\mu_{M^2} \\
&\quad -2\int_{M^2} L(B \cap p(c(s_1),\phi_1))\sin\phi_1 L(B \cap p(c(s_2),\phi_2))\sin\phi_2 d\mu_{M^2} \\
&\quad +\int_{M^2} L(B \cap p(c(s_2),\phi_2))^2 \sin^2\phi_1 d\mu_{M^2} \\
&= \int_M L(B \cap p(c(s_1),\phi_1))^2 d\mu_M \int_M \sin^2\phi_2 d\mu_M \\
&\quad -2\int_M L(B \cap p(c(s_1),\phi_1))\sin\phi_1 d\mu_M \int_M L(B \cap p(c(s_2),\phi_2))\sin\phi_2 d\mu_M \\
&\quad +\int_M L(B \cap p(c(s_2),\phi_2))^2 d\mu_M \int_M \sin^2\phi_1 d\mu_M.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))^2 d\mu_M = \int_0^{L(c)}\int_0^{\pi} L(B\cap p(c(s),\phi))^2 d\phi ds$$

となり、$x^2 = \displaystyle\int_0^x 2rdr$ と極座標表示による積分の変数変換を使うと

$$\int_0^{\pi} L(B\cap p(c(s),\phi))^2 d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{L(B\cap p(c(s),\phi))} 2rdrd\phi = 2A(B)$$

を得る。したがって

$$\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))^2 d\mu_M = 2L(c)A(B)$$

が成り立つ。次に

$$\int_M \sin^2\phi d\mu_M = \int_0^{L(c)}\int_0^{\pi}\sin^2\phi d\phi ds$$

となり、

$$\int_0^{\pi}\sin^2\phi d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\phi)d\phi = \frac{\pi}{2}$$

を得る。したがって

$$\int_M \sin^2\phi d\mu_M = \frac{\pi}{2}L(c)$$

が成り立つ。もう一つの積分

$$\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))\sin\phi d\mu_M$$

を考えるために、M 上の連続関数 $L(B\cap p(c(s),\phi))$ と写像 $p : M \to L(\mathbf{R}^2)$ に定理 1.5.5 を適用する。

$$\begin{aligned}\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))Jpd\mu_M &= \int_{L(\mathbf{R}^2)}\sum_{x\in p^{-1}(l)} L(B\cap p(x))d\mu_{L(\mathbf{R}^2)}(l)\\ &= \int_{D(B)}\#(p^{-1}(l))L(B\cap l)d\mu_{L(\mathbf{R}^2)}(l).\end{aligned}$$

ここで、各 $l\in D(B)$ に対して $\#(p^{-1}(l)) = 2$ となるので、命題 2.1.3 の結果より、

$$\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))Jpd\mu_M = 2\pi A(B).$$

次に Jp を計算する。

$$\frac{dc}{ds} = (\cos\psi(s),\sin\psi(s))$$

と表すことにすると

$$
\begin{aligned}
& p(c(s),\phi) \\
= \ & l\left(0, \psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right)+c(s) \\
= \ & T(0, c_1(s), c_2(s))\, l\left(0, \psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right) \\
= \ & l\left(c_1(s)\cos\left(\psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right)+c_2(s)\sin\left(\psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right), \psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\xi=\psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
dp\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \left\{\frac{dc_1}{ds}\cos\xi+\frac{dc_2}{ds}\sin\xi-c_1(s)\sin\xi\frac{d\psi}{ds}+c_2(s)\cos\xi\frac{d\psi}{ds}\right\}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{d\psi}{ds}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
dp\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) &= \{-c_1(s)\sin\xi+c_2(s)\cos\xi\}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の接ベクトル空間の正規直交基底だから、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$
\begin{aligned}
& \left|dp\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\wedge dp\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right| \\
= \ & \left|\det\begin{bmatrix} \dfrac{dc_1}{ds}\cos\xi+\dfrac{dc_2}{ds}\sin\xi-c_1\sin\xi\dfrac{d\psi}{ds}+c_2\cos\xi\dfrac{d\psi}{ds} & -c_1\sin\xi+c_2\cos\xi \\ \dfrac{d\psi}{ds} & 1 \end{bmatrix}\right| \\
= \ & \left|\frac{dc_1}{ds}\cos\xi+\frac{dc_2}{ds}\sin\xi\right| \\
= \ & \left|\cos\psi(s)\cos\left(\psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\psi(s)\sin\left(\psi(s)+\phi-\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
= \ & \left|\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
= \ & |\sin\phi| \\
= \ & \sin\phi.
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))Jp\,d\mu_M=\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))\sin\phi\, d\mu_M.
$$

以上で

$$
\int_M L(B\cap p(c(s),\phi))\sin\phi\, d\mu_M=2\pi A(B)
$$

となることがわかった。したがって

$$I = 2 \cdot 2L(c)A(B)\frac{\pi}{2}L(c) - 2(2\pi A(B))^2 = 2\pi A(B)\{L(c)^2 - 4\pi A(B)\}$$

が成り立ち、

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq 0.$$

等号が成り立つための必要十分条件は、$I = 0$ だから、M^2 上で

$$L(B \cap p(c(s_1), \phi_1)) \sin\phi_2 - L(B \cap p(c(s_2), \phi_2)) \sin\phi_1 = 0$$

が成り立つことである。これは関数 $L(B \cap p(c(s), \phi))/\sin\phi$ が M 上一定値をとることになる。このような曲線が円に限られることを証明するためには、曲線の極座標による表示 $r(\phi)$ が

$$\frac{r(\phi)}{\sin\phi} = C \qquad (C : \text{定数})$$

を満たすとき、円になることを示せば十分である。$r(\phi) = C\sin\phi$ となるので、曲線の直交座標系による表示は

$$\begin{aligned}(C\sin\phi\cos\phi, C\sin^2\phi) &= \left(\frac{C}{2}\sin 2\phi, \frac{C}{2}(2\sin^2 - 1) + \frac{C}{2}\right)\\ &= \left(\frac{C}{2}\sin 2\phi, -\frac{C}{2}\cos 2\phi + \frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。これより、曲線は中心 $(0, C/2)$ で半径 $C/2$ の円になる。

2.2 Crofton の公式

平面曲線と直線との交点数を $L(\mathbf{R}^2)$ 上の関数とみて積分すると、その積分値はその曲線の長さの2倍に一致するという Crofton の公式を証明する。

定理 2.2.1

$$I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)) = \{(x, l) \in \mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2) \mid x \in l\}$$

とおくと、$I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ は $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ の3次元正規部分多様体になる。さらに

$$i : \mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R}) \to I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))\ ; \quad (x, l) \mapsto (x, l + x)$$

によって i を定めると、i は微分同型写像になる。

証明 $\mathbf{R}^2$ の座標系 x_1, x_2 と $L(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系 r, θ を合わせた x_1, x_2, r, θ を積多様体 $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系として使う。$\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ の元が $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ に含まれるための必要十分条件をこの局所座標系を使って表すと、

$$x_1\cos\theta + x_2\sin\theta = r$$

となる。そこで

$$F(x_1, x_2, r, \theta) = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta - r$$

とおくと

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\ \frac{\partial F}{\partial r}\ \frac{\partial F}{\partial \theta}\right] = [\cos\theta \quad \sin\theta \quad -1 \quad -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta]$$

となり、この行列の階数はすべての点で 1 だから、$I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ は $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ の 3 次元正規部分多様体になる。

次に i が微分同型写像になることを示す。

$$\begin{aligned} i(u_1, u_2, l(0,\theta)) &= (u_1, u_2, T(0, u_1, u_2)l(0,\theta)) \\ &= (u_1, u_2, l(u_1\cos\theta + u_2\sin\theta, \theta)) \end{aligned}$$

となるので、i は $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ への C^∞ 級写像にもなる。i の定め方より、i は全単射になることがわかる。上の i の表示より、

$$\begin{aligned} di_{(u_1,u_2,l(0,\theta))}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} \\ di_{(u_1,u_2,l(0,\theta))}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} \\ di_{(u_1,u_2,l(0,\theta))}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-u_1\sin\theta + u_2\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり、$\mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R})$ の接ベクトル空間の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ と $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ の接ベクトル空間の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ に関する i の微分写像 di の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -u_1\sin\theta + u_2\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

この行列の階数はすべての点で 3 になることがわかる。以上より、i は微分同型写像になる。

定理 2.2.2 (Crofton の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の曲線 c に対して

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l)\, d\mu(l) = 2L(c)$$

が成り立つ。

折れ線近似による証明　曲線を折れ線で近似すると曲線の長さも折れ線の長さで近似される。折れ線は線分の合併になり折れ線の長さは線分の長さの和になる。そこで c が線分の場合に Crofton の公式を示し、次に c が折れ線の場合を示し、最後に c が一般の曲線の場合を証明する。

$c = [0, L(c)] \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$ とする。直線が c と交わるときの交点の数は 1 になるので、$l(r,\theta)$ が c と交わる r, θ の条件を求めれば Crofton の公式の積分を計算することができる。$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ の範囲を θ が動くようにすると、r の条件は $0 \le r \le L(c)\cos\theta$ になる。したがって、交点数の積分は次のようになる。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{L(c)\cos\theta} 1 dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} L(c)\cos\theta d\theta = 2L(c).$$

したがって c が x 軸上の線分の場合に Crofton の公式が成り立つことがわかった。平面の任意の線分は等長変換によって x 軸に移すことができ、$L(\mathbf{R}^2)$ 上の測度は平面の等長変換の作用によって不変なので、平面の任意の線分に対して Crofton の公式が成り立つ。

次に c が線分 $c_1, \ldots, c_k$ からなる折れ線の場合を考える。

$$\begin{aligned}\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) &= \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#\left(\bigcup_{i=1}^k c_i \cap l\right) d\mu(l) = \int_{L(\mathbf{R}^2)} \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l) d\mu(l) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c_i \cap l) d\mu(l) = \sum_{i=1}^k L(c_i) = L(c).\end{aligned}$$

ここで、等式

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^k c_i \cap l\right) = \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l)$$

は直線 l が c_i の端点を通らないときに成り立つが、l が c_i の端点を通るときには成り立たない。c_i の端点を通る l の全体は 1 次元になり $L(\mathbf{R}^2)$ の測度に関して測度 0 になるので、積分の等式

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#\left(\bigcup_{i=1}^k c_i \cap l\right) d\mu(l) = \int_{L(\mathbf{R}^2)} \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l) d\mu(l)$$

は成り立つ。

最後に c が一般の曲線の場合を証明する。c を弧長に関して i 等分した点を結んで得られる折れ線を d_i で表すと、$\lim_{i\to\infty} L(d_i) = L(c)$ が成り立つ。直線 l と二点を結ぶ曲線との交点数は同じ二点を結ぶ線分との交点数以上になるので、

$$\#(d_{2^i} \cap l) \le \#(d_{2^{i+1}}) \le \cdots \le \#(c \cap l)$$

となる。さらに、c と l がトランスバーサルに交わるとき、$\#(d_{2^i} \cap l)$ は $\#(c \cap l)$ に単調収束する。c とトランスバーサルに交わらない l の全体は $L(\mathbf{R}^2)$ の測度に関して測度 0 になるので、Lebesgue の単調収束定理と上で示したことより

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = \lim_{i \to \infty} \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(d_{2^i} \cap l) d\mu(l) = \lim_{i \to \infty} 2L(d_{2^i}) = 2L(c)$$

が成り立つ。

別証明

$$I(c) = \{(x,l) \in I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)) \mid x \in c\}$$

とおく。定理 2.2.1 の微分同型写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(c)) = c \times P^1(\mathbf{R})$$

となるので、これは $\mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R})$ の 2 次元部分多様体になる。したがって、$I(c)$ は $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ の 2 次元部分多様体になる。

$$\pi_L : I(c) \to L(\mathbf{R}^2) \ ; \quad (x,l) \mapsto l$$

によって写像 π_L を定義すると、π_L は、包含写像 $I(c) \to \mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2) \to L(\mathbf{R}^2)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこで $I(c)$ 上恒等的に 1 に等しい関数とこの写像 π_L に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(\pi_L^{-1}(l)) d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_L^{-1}(l) = \{(x,l) \mid x \in l,\ x \in c\} = (c \cap l) \times \{l\}$$

だから、$\#(\pi_L^{-1}(l)) = \#(c \cap l)$ となり、

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_L の微分写像 $d\pi_L$ を求める。曲線 c の弧長パラメーター s と $P^1(\mathbf{R})$ の元 $l(0,\theta)$ のパラメーター θ を使うと、s, θ は $c \times P^1(\mathbf{R})$ の局所座標系になる。定理 2.2.1 の証明中に示した i の微分写像の公式を使うと、$c \times P^1(\mathbf{R})$ において

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{dc_1}{ds}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dc_2}{ds}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

だから、

$$\begin{aligned} di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{dc_1}{ds}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{dc_2}{ds}\frac{\partial}{\partial x_2}+\left(\frac{dc_1}{ds}\cos\theta+\frac{dc_2}{ds}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} \\ di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-c_1(s)\sin\theta+c_2(s)\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり、これらは $I(c)$ の接ベクトル空間の基底になる。

$$\begin{aligned} d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \left(\frac{dc_1}{ds}\cos\theta+\frac{dc_2}{ds}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} \\ d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-c_1(s)\sin\theta+c_2(s)\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の接ベクトル空間の正規直交基底だから、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$\begin{aligned} & \left|d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\wedge d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right| \\ &= \left|\det\begin{bmatrix} \dfrac{dc_1}{ds}\cos\theta+\dfrac{dc_2}{ds}\sin\theta & -c_1(s)\sin\theta+c_2(s)\cos\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\frac{dc_1}{ds}\cos\theta+\frac{dc_2}{ds}\sin\theta\right| \end{aligned}$$

となり、

$$\int_{I(c)} J\pi_L d\mu = \int_c\int_0^\pi \left|\frac{dc_1}{ds}\cos\theta+\frac{dc_2}{ds}\sin\theta\right| d\theta ds.$$

ここで $\dfrac{dc}{ds}$ は単位ベクトルだから、

$$\frac{dc}{ds}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$$

となる φ をとることができ、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left|\frac{dc_1}{ds}\cos\theta+\frac{dc_2}{ds}\sin\theta\right| d\theta &= \int_0^\pi |\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta| d\theta \\ &= \int_0^\pi |\cos(\theta-\varphi)| d\theta \\ &= 2 \qquad (\text{この積分はパラメーター } s \text{ に依存しない}). \end{aligned}$$

以上より、Fubini の定理を使うと

$$\int_{I(c)} J\pi_L d\mu = \int_c 2ds = 2L(c)$$

を得る。先に得た等式と合わせると

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l)d\mu(l) = 2L(c)$$

を得る。

定義 2.2.3 c を $\mathbf{R}^2$ 内の凸閉曲線とする。平行な二直線で c をはさむとき、この二直線の間の距離をこの直線に垂直な方向の**幅**と呼び、方向 $(\cos\theta, \sin\theta)$ の幅を $d_c(\theta)$ で表す。すべての方向の幅が一定の凸閉曲線を**定幅曲線**と呼ぶ。

系 2.2.4 定理 2.2.2 の仮定のもとで、さらに c は凸閉曲線であると仮定し、c の囲む領域を B で表す。このとき、

$$I_0(B) = \int_0^\pi d_c(\theta)d\theta = L(c)$$

が成り立つ。特に、c が幅 d の定幅曲線のとき、$L(c) = \pi d$ が成り立つ。

証明 c は凸閉曲線だから、直線との交点は高々二点になる。そこで

$$D(B) = \{l \in L(\mathbf{R}^2) \mid c \cap l \neq \emptyset\}$$

とおくと、$D(B)$ は $L(\mathbf{R}^2)$ の開集合になる。$D(B)$ の元と c との交点数は 2 になり、c と交わる他の直線は c の接線のみで $L(\mathbf{R}^2)$ の測度に関して測度 0 になる。したがって、定理 2.2.2 より

$$L(c) = \int_{D(B)} d\mu = \int_{D(B)} drd\theta = \int_0^\pi d_c(\theta)d\theta$$

を得る。これらは $I_0(B)$ に等しい。特に、c が幅 d の定幅曲線のときは、上の等式より $L(c) = \pi d$ が成り立つ。

2.3 平面の等長変換群

$\mathbf{R}^2$ の向きを保つ等長変換の全体を $M(\mathbf{R}^2)$ で表す。$M(\mathbf{R}^2)$ の任意の元は

$$T(\phi, u_1, u_2) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

と表すことができ、ϕ, u_1, u_2 は $M(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系になる。$M(\mathbf{R}^2)$ の $\mathbf{R}^2$ への作用は次のように表すとわかりやすい。

$$T(\phi, u_1, u_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & u_1 \\ \sin\phi & \cos\phi & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これによって、$M(\mathbf{R}^2)$ は $\mathbf{R}^2$ の Lie 変換群になる。積は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& T(\psi, v_1, v_2)T(\phi, u_1, u_2) \\
= & \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & v_1 \\ \sin\psi & \cos\psi & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & u_1 \\ \sin\phi & \cos\phi & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \cos(\psi+\phi) & -\sin(\psi+\phi) & u_1\cos\psi - u_2\sin\psi + v_1 \\ \sin(\psi+\phi) & \cos(\psi+\phi) & u_1\sin\psi + u_2\cos\psi + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & T(\psi+\phi, u_1\cos\psi - u_2\sin\psi + v_1, u_1\sin\psi + u_2\cos\psi + v_2).
\end{aligned}$$

写像

$$SO(2) \times \mathbf{R}^2 \to M(\mathbf{R}^2)\ ; \quad (T(\phi, 0), u_1, u_2) \mapsto T(\phi, u_1, u_2)$$

は微分同型写像になる。ϕ, u_1, u_2 は $M(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系になる。ϕ が弧長パラメータになる $SO(2)$ の Riemann 計量と $\mathbf{R}^2$ の計量の積 Riemann 計量を $M(\mathbf{R}^2)$ に導入する。

命題 2.3.1 ベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}$$

は $M(\mathbf{R}^2)$ 全体で定義された正規直交系になり、$M(\mathbf{R}^2)$ の左移動は等長変換になる。

証明 $M(\mathbf{R}^2)$ は三つの１次元多様体の積になっているので、それぞれのパラメーター ϕ, u_1, u_2 によるベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}$$

は $M(\mathbf{R}^2)$ 全体で定義される。Riemann 計量の定め方よりこれらは正規直交系になる。

$M(\mathbf{R}^2)$ の任意の点 g に対して

$$L_g(x) = gx \qquad (x \in M(\mathbf{R}^2))$$

によって左移動 L_g を定める。$g = T(\psi, v_1, v_2)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
& L_g(T(\phi, u_1, u_2)) \\
= & T(\psi+\phi, u_1\cos\psi - u_2\sin\psi + v_1, u_1\sin\psi + u_2\cos\psi + v_2)
\end{aligned}$$

となる。この等式より、

$$\begin{aligned}
(dL_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_e\right) &= \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_g \\
(dL_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_e\right) &= \cos\psi\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_g + \sin\psi\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_g \\
(dL_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_e\right) &= -\sin\psi\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_g + \cos\psi\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_g
\end{aligned}$$

となる。これより $(dL_g)_e : T_e(M(\mathbf{R}^2)) \to T_g(M(\mathbf{R}^2))$ は等長線形写像になり、L_g は等長変換になる。したがって、L_g は体積保存変換にもなる。

注意 2.3.2 $M(\mathbf{R}^2)$ の任意の点 g に対して

$$R_g(x) = xg \qquad (x \in M(\mathbf{R}^2))$$

によって右移動 R_g を定める。$g = T(\psi, v_1, v_2)$ とおくと、

$$R_g(T(\phi, u_1, u_2)) = T(\phi + \psi, v_1 \cos\phi - v_2 \sin\phi + u_1, v_1 \sin\phi + v_2 \cos\phi + u_2)$$

となる。この等式より、

$$\begin{aligned}
(dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_e\right) &= \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_g + (-v_1 \sin\phi - v_2 \cos\phi)\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_g + (v_1 \cos\phi - v_2 \sin\phi)\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_g \\
(dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_e\right) &= \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_g \\
(dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_e\right) &= \left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_g
\end{aligned}$$

となる。これより $(dR_g)_e : T_e(M(\mathbf{R}^2)) \to T_g(M(\mathbf{R}^2))$ は左移動の場合とは異なり等長線形写像にならない。ところが、

$$(dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_e\right) \wedge (dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_e\right) \wedge (dR_g)_e\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_e\right) = \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_g \wedge \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_g \wedge \left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_g$$

は成り立ち、命題 2.3.1 より、R_g は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、R_g は $M(\mathbf{R}^2)$ の体積保存変換になる。

2.4 Poincaré の公式

二つの平面曲線 c_0, c_1 の一方 c_1 を $M(\mathbf{R}^2)$ の元 g で動かし、交点数 $\#(c_0 \cap cg_1)$ を $M(\mathbf{R}^2)$ 上の関数とみて積分すると、その積分値は $4L(c_0)L(c_1)$ に一致するという Poincaré の公式を証明する。

補題 2.4.1

$$I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) = \{(x, y, g) \in (\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2) \mid x = g(y)\}$$

とおくと、$I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ は $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$ の 5 次元正規部分多様体になる。さらに

$$\begin{aligned}
i &: (\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2) \to I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) \\
&; (x, y, T(\phi, 0)) \mapsto (x, y, T(0, x)T(\phi, 0)T(0, -y))
\end{aligned}$$

によって i を定めると、i は微分同型写像になる。

証明　$(\mathbf{R}^2)^2$ の第一成分の座標系 x_1, x_2 と第二成分の座標系 y_1, y_2 と $M(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系 ϕ, u_1, u_2 を合わせた x_1, x_2, y_1, y_2、ϕ, u_1, u_2 を積多様体 $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$ の局所座標系として使う。$(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$ の元が $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ に含まれるための必要十分条件

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

をこの局所座標系を使って表すと、

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos\phi - y_2 \sin\phi + u_1 \\ x_2 &= y_1 \sin\phi + y_2 \cos\phi + u_2 \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi, u_1, u_2) \\ = \ & (y_1 \cos\phi - y_2 \sin\phi + u_1 - x_1,\ y_1 \sin\phi + y_2 \cos\phi + u_2 - x_2) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} & \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} & \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\ = \ & \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & -y_1 \sin\phi + y_2 \cos\phi & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sin\phi & \cos\phi & y_1 \cos\phi - y_2 \sin\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、この行列の階数はすべての点で 2 になる。陰関数定理より $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ は $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$ の 5 次元正規部分多様体になる。

次に i が微分同型写像になることを示す。

$$\begin{aligned} & T(0, x_1, x_2) T(\phi, 0, 0) T(0, -y_1, -y_2) \\ = \ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \ & \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & x_1 \\ \sin\phi & \cos\phi & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \ & \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & -y_1 \cos\phi + y_2 \sin\phi + x_1 \\ \sin\phi & \cos\phi & -y_1 \sin\phi - y_2 \cos\phi + x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \ & T(\phi, -y_1 \cos\phi + y_2 \sin\phi + x_1,\ -y_1 \sin\phi - y_2 \cos\phi + x_2) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&i(x_1,x_2,y_1,y_2,T(\phi,0))\\ =\ &(x_1,x_2,y_1,y_2,T(\phi,-y_1\cos\phi+y_2\sin\phi+x_1,\ -y_1\sin\phi-y_2\cos\phi+x_2))\end{aligned}$$

となるので、i は $(\mathbf{R}^2)^2\times M(\mathbf{R}^2)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I((\mathbf{R}^2)^2\times M(\mathbf{R}^2))$ への C^∞ 級写像にもなる。i の定め方より、i は全単射になることがわかる。上の i の表示より、

$$\begin{aligned}
di_{(x_1,x_2,y_1,y_2,\phi)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial u_1},\\
di_{(x_1,x_2,y_1,y_2,\phi)}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial u_2},\\
di_{(x_1,x_2,y_1,y_2,\phi)}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_1}-\cos\phi\frac{\partial}{\partial u_1}-\sin\phi\frac{\partial}{\partial u_2},\\
di_{(x_1,x_2,y_1,y_2,\phi)}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_2}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial u_1}-\cos\phi\frac{\partial}{\partial u_2},\\
di_{(x_1,x_2,y_1,y_2,\phi)}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) &= \frac{\partial}{\partial \phi}+(y_1\sin\phi+y_2\cos\phi)\frac{\partial}{\partial u_1}\\
&\quad+(-y_1\cos\phi+y_2\sin\phi)\frac{\partial}{\partial u_2}
\end{aligned}$$

となり、$(\mathbf{R}^2)^2\times SO(2)$ の接ベクトル空間の基底 $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial \phi}$ と $(\mathbf{R}^2)^2\times M(\mathbf{R}^2)$ の接ベクトル空間の基底 $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial \phi},\frac{\partial}{\partial u_1},\frac{\partial}{\partial u_2}$ に関する i の微分写像 di の表現行列は

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & -\cos\phi & \sin\phi & y_1\sin\phi+y_2\cos\phi\\
0 & 1 & -\sin\phi & -\cos\phi & -y_1\cos\phi+y_2\sin\phi
\end{bmatrix}.$$

この行列の階数はすべての点で 5 になることがわかる。以上より、i は微分同型写像になる。

定理 2.4.2 (Poincaré の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の二曲線 c_0,c_1 に対して

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)}\#(c_0\cap gc_1)d\mu(g)=4L(c_0)L(c_1)$$

が成り立つ。

証明

$$I(c_0, c_1) = \{(x, y, g) \in I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) \mid x \in c_0,\ y \in c_1\}$$

とおく。補題 2.4.1 の微分同型写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(c_0, c_1)) = c_0 \times c_1 \times SO(2)$$

となるので、これは $SO(2)\times(\mathbf{R}^2)^2$ の 3 次元部分多様体になる。したがって、$I(c_0, c_1)$ は $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ の 3 次元部分多様体になる。

$$\pi_M : I(c_0, c_1) \to M(\mathbf{R}^2)\ ; \quad (x, y, g) \mapsto g$$

によって写像 π_M を定義すると、π_M は包含写像 $I(c_0, c_1) \to (\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$ と第三成分への射影 $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2) \to M(\mathbf{R}^2)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこでこの写像 π_M に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(\pi_M^{-1}(g))d\mu(g) = \int_{I(c_0,c_1)} J\pi_M d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_M^{-1}(g) = \{(g(y), y, g)) \mid g(y) \in c_0 \cap gc_1\}$$

だから、$\#(\pi_M^{-1}(g)) = \#(c_0 \cap gc_1)$ となり、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c_0 \cap gc_1)d\mu(g) = \int_{I(c_0,c_1)} J\pi_M d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_M の微分写像 $d\pi_M$ を求める。曲線 c_0 の弧長パラメータ s と曲線 c_1 の弧長パラメータ t と $SO(2)$ の元 $T(\phi, 0)$ のパラメータ ϕ を使うと、s, t, ϕ は $c_0 \times c_1 \times SO(2)$ の局所座標系になる。上で示したことより、補題 2.4.1 の i は $c_0 \times c_1 \times SO(2)$ と $I(c_0, c_1)$ の間の微分同型写像を誘導し、

$$di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \quad di\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad di\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

は $I(c_0, c_1)$ の接ベクトル空間の基底になる。この基底に $d\pi_M$ を作用させ $J\pi_M$ を計算する。補題 2.4.1 の証明中の di の計算結果を使うと

$$\begin{aligned}
d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= d\pi_M di\left(\frac{d(c_0(s))_1}{ds}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{d(c_0(s))_1}{ds}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds}\frac{\partial}{\partial u_2}, \\
d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= d\pi_M di\left(\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \left(-\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\cos\phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial u_1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& & & +\left(-\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\sin\phi - \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\cos\phi\right)\frac{\partial}{\partial u_2}, \\
d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) & = & & ((c_1(t))_1\sin\phi + (c_1(t))_2\cos\phi)\frac{\partial}{\partial u_1} \\
& & & +(-(c_1(t))_1\cos\phi + (c_1(t))_2\sin\phi)\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

となり、命題 2.3.1 で得た結果を使うと

$$
\begin{aligned}
& \left| d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \wedge d\pi_M di\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right| \\
= & \left|\det\begin{bmatrix} \frac{d(c_0(s))_1}{ds} & -\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\cos\phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\sin\phi & (c_1(t))_1\sin\phi + (c_1(t))_2\cos\phi \\ \frac{d(c_0(s))_2}{ds} & -\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\sin\phi - \frac{d(c_1(t))_2}{ds}\cos\phi & -(c_1(t))_1\cos\phi + (c_1(t))_2\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \\
= & \left|\frac{d(c_0(s))_1}{ds}\left(-\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\sin\phi - \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\cos\phi\right)\right. \\
& \left. - \frac{d(c_0(s))_2}{ds}\left(-\frac{d(c_1(t))_1}{dt}\cos\phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\sin\phi\right)\right|.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\left(\frac{d(c_0(s))_1}{ds}, \frac{d(c_0(s))_2}{ds}\right) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \left(\frac{d(c_1(t))_1}{dt}, \frac{d(c_1(t))_2}{dt}\right) = (\cos\beta, \sin\beta)
$$

とおくと、上の式は

$$
\begin{aligned}
& |\cos\alpha(-\cos\beta\sin\phi - \sin\beta\cos\phi) - \sin\alpha(-\cos\beta\cos\phi + \sin\beta\sin\phi)| \\
= & |-\cos\alpha\sin(\phi+\beta) + \sin\alpha\cos(\phi+\beta)| \\
= & |\sin(\phi+\beta-\alpha)|
\end{aligned}
$$

となる。したがって、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$
\begin{aligned}
\int_{I(c_0,c_1)} J\pi_M d\mu & = \int_0^{L(c_0)}\int_0^{L(c_1)}\int_0^{2\pi} |\sin(\phi+\beta-\alpha)| d\phi dt ds \\
& \quad (\text{この } \phi \text{ に関する積分は } \alpha, \beta \text{ に依存しない}) \\
& = \int_0^{L(c_0)}\int_0^{L(c_1)}\int_0^{2\pi} |\sin\phi| d\phi dt ds \\
& = \int_0^{L(c_0)}\int_0^{L(c_1)} 4 dt ds \\
& = 4L(c_0)L(c_1).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c_0 \cap gc_1) d\mu(g) = 4L(c_0)L(c_1)
$$

が成り立つ。

系 2.4.3 $\mathbf{R}^2$ 内の中心 x で半径 r の円を $S(x;r)$ で表す。$\mathbf{R}^2$ 内の曲線 c に対して

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x;r))d\mu(x) = 4rL(c)$$

が成り立つ。

証明　定理 2.4.2 を $c_0 = c$ と $c_1 = S(0;r)$ に適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap gS(0;r))d\mu(g) = 4 \cdot L(c)2\pi r$$

を得る。以下で上の等式の左辺を計算する。命題 2.3.1 で得た結果を使うと

$$\begin{aligned}\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap gS(0;r))d\mu(g) &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap S(g0;r))d\mu(g) \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x;r))d\mu(x).\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x;r))d\mu(x) = 4rL(c)$$

が成り立つ。

補題 2.4.4 $\mathbf{R}^2$ 内の二曲線 c_0, c_1 をとる。$g \in M(\mathbf{R}^2)$ に対して $c_0 \cap gc_1$ の各点における c_0 と gc_1 の単位速度ベクトルの成す角度を θ_i で表わし $c_0 \cap gc_1$ におけるそれらの和を $\displaystyle\sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i$ で表わす。ただし、$0 \leq \theta_i \leq \pi$ となるように定める。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1).$$

証明　定理 2.4.2 の証明中に定めた $I(c_0, c_1)$ の各点 (x, y, g) において c_0 の単位速度ベクトルと gc_1 の単位速度ベクトルの成す角度を $\theta(x, y, g)$ とおくことによって、$I(c_0, c_1)$ 上の関数 θ を定める。この関数 θ と定理 2.4.2 の証明中に定めた写像 $\pi_M : I(c_0, c_1) \to M(\mathbf{R}^2)$ に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{\pi_M^{-1}(g)} \theta d\mu(g) = \int_{I(c_0,c_1)} \theta J\pi_M d\mu$$

を得る。左辺は問題の積分

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g)$$

に一致する。右辺は定理 2.4.2 の証明中の議論より

$$\begin{aligned}
& \int_{I(c_0,c_1)} \theta J\pi_M d\mu \\
= & \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_{\phi+\beta-\alpha=-\pi}^{\phi+\beta-\alpha=\pi} |\phi+\beta-\alpha| \cdot |\sin(\phi+\beta-\alpha)| d\phi dt ds \\
& (\text{この } \phi \text{ に関する積分は } \alpha, \beta \text{ に依存しない}) \\
= & \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi| \cdot |\sin\phi| d\phi dt ds.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\phi| \cdot |\sin\phi| d\phi &= 2\int_0^{\pi} \phi \sin\phi d\phi = 2\int_0^{\pi} \phi(-\cos\phi)' d\phi \\
&= 2[-\phi\cos\phi]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos\phi d\phi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\int_{I(c_0,c_1)} \theta J\pi_M d\mu = 2\pi L(c_0)L(c_1)$$

となり、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1)$$

を得る。

2.5 Steiner の公式と Hotelling の公式

補題 2.5.1 定理 1.5.16 の証明中に定めた $\mathbf{R}^2$ 内の 1 次元部分ベクトル空間全体 $P^1(\mathbf{R})$ にやはりそこで定めた Riemann 計量 $d\theta \otimes d\theta$ が備わっているとする。各 $l \in P^1(\mathbf{R})$ に対して $\mathbf{R}^2$ から l への直交射影を $P_l : \mathbf{R}^2 \to l$ で表す。$I = [0,1] \subset \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2$ とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(I)) d\mu(l) = 2.$$

証明 $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して

$$l(\theta) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = 0\} \in P^1(\mathbf{R})$$

とおくと、$L(P_{l(\theta)}(I)) = \sin\theta$ となるので

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(I)) d\mu(l) = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2.$$

定義 2.5.2 $\mathbf{R}^2$ 内のコンパクト凸集合 K に対して $W_1^2(K)$ を次の等式で定める。

$$W_1^2(K) = \frac{1}{2}\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K))d\mu(l).$$

補題 2.5.1 より $W_1^2(I) = 1$ となる。

注意 2.5.3 定義 2.5.2 において、$L(P_l(K))$ は定義 2.2.3 で定めた直線 l の法方向の凸閉曲線 ∂K の幅になり、次の Barbier の公式は系 2.2.4 と同じである。ここでは別証明を与える。

定理 2.5.4 (Barbier の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の境界が区分的に滑らかなコンパクト凸集合 K に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K))d\mu(l) = 2W_1^2(K) = L(\partial K).$$

証明　$l \in P^1(\mathbf{R})$ に対して $f = (P_l)|_{\partial K} : \partial K \to l$ に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用する。K が凸であることから $y \in \mathrm{int}(P_l(K))$ に対して $\#(f^{-1}(y)) = 2$ となるので、余面積公式 (定理 1.5.5) より

$$\int_{\partial K} Jf d\mu = \int_{P_l(K)} \#(f^{-1}(y))d\mu(y) = 2L(P_l(K))$$

が成り立つ。df は ∂K の接線から l への直交射影になる。∂K の単位法ベクトルを e で表し l の単位法ベクトルを u で表すと、例 1.3.9 より $Jf = |\langle e, u\rangle|$ が成り立つ。よって

$$\int_{\partial K} |\langle e, u\rangle| d\mu = 2L(P_l(K)).$$

これより

$$\begin{aligned}
\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(I))d\mu(l) &= \frac{1}{2}\int_{P^1(\mathbf{R})}\left(\int_{\partial K} |\langle e, u\rangle| d\mu\right) d\mu(l) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial K}\left(\int_{P^1(\mathbf{R})} |\langle e, u\rangle| d\mu(l)\right) d\mu \\
&\quad (\text{補題 } 2.5.1 \text{ より}) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial K} 2 d\mu = L(\partial K).
\end{aligned}$$

定理 2.5.5 (Steiner の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の境界が滑らかなコンパクト凸集合 K から距離 ρ 以下の点の全体を K_ρ で表すと、次の等式が成り立つ。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

証明 $r \geq 0$ とする。$l \in P^1(\mathbf{R})$ に対して $P_l(K_r)$ は直線 l 内の線分 $P_l(K)$ の両端を長さ r だけ伸ばした線分になるので、$L(P_l(K_r)) = L(P_l(K)) + 2r$ が成り立つ。この両辺を $l \in P^1(\mathbf{R})$ について積分すると

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K_r))d\mu(l) = \int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K))d\mu(l) + 2\pi r.$$

Barbier の公式 (定理 2.5.4) より $L(\partial K_r) = L(\partial K) + 2\pi r$ を得る。これより

$$\begin{aligned} A(K_\rho) &= A(K) + \int_0^\rho L(\partial K_r)dr = A(K) + \int_0^\rho (L(\partial K) + 2\pi r)dr \\ &= A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2. \end{aligned}$$

定理 2.5.6 (Steiner の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の滑らかな単純閉曲線が囲む領域 K から距離 ρ 以下の点の全体を K_ρ で表すと、十分小さい ρ に対して次の等式が成り立つ。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

証明 ∂K の弧長パラータ s の向きは囲む領域 K を左に見て進む方向にとる。∂K における単位接ベクトルを u で表し K の内向きの単位法ベクトルを e で表す。∂K の曲率を $\kappa(s)$ で表すと Frenet-Serret の公式より

$$\frac{du}{ds} = \kappa e, \qquad \frac{de}{ds} = -\kappa u.$$

$\rho \geq 0$ に対して

$$f : \partial K \times [0, \rho] \to K_\rho - \mathrm{int}K \ ; \ (x, t) \mapsto x - te$$

によって写像 f を定める。

$$df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial f}{\partial s} = u - t\frac{de}{ds} = (1 + \kappa t)u, \qquad df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} = -e$$

となりこれらは直交しているので、命題 1.3.7 より

$$Jf = \left|df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right| = \left|df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right| \cdot \left|df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right| = |1 + \kappa t|.$$

よって十分小さい ρ に対して f は微分同型写像になり、$Jf = 1 + \kappa t$ が成り立つ。余面積公式 (定理 1.5.5) と単純閉曲線の曲率の積分は 2π になることより

$$\begin{aligned} A(K_\rho - \mathrm{int}K) &= \int_{\partial K \times [0,\rho]} Jf d\mu = \int_{\partial K \times [0,\rho]} (1 + \kappa t)d\mu \\ &= L(\partial K)\rho + \int_{\partial K} \kappa ds \int_0^\rho tdt = L(\partial K)\rho + 2\pi \cdot \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= L(\partial K)\rho + \pi\rho^2. \end{aligned}$$

したがって次の等式を得る。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

等周不等式 (定理 2.1.4) の別証明　$x \in \mathbf{R}^2$ と $r \geq 0$ に対して

$$B(x;r) = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid |x-y| \leq r\}$$

とする。

$$\begin{aligned} M_i(r) &= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid B(x;r) \subset \bar{B}\} \\ M_e(r) &= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \bar{B} \subset B(x;r)\} \end{aligned}$$

とおくと $M_i(r)$ と $M_e(r)$ はコンパクト凸集合になる。$r \leq r'$ のとき

$$M_i(r) \supset M_i(r'), \qquad M_e(r) \subset M_e(r')$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} I_i &= \{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0,\ M_i(r) \neq \emptyset\} \\ I_e &= \{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0,\ M_e(r) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

とおくと、I_i と I_e は区間になる。

$$\bigcap_{r \in I_i} M_i(r), \qquad \bigcap_{r \in I_e} M_e(r)$$

はどちらも空でないコンパクト凸集合になり、

$$r_i = \sup I_i, \qquad r_e = \inf I_e$$

とおくと、

$$M_i(r_i) = \bigcap_{r \in I_i} M_i(r), \qquad M_e(r_e) = \bigcap_{r \in I_e} M_e(r)$$

が成り立つ。特に、

$$I_i = [0, r_i], \qquad I_e = [r_e, \infty)$$

となる。

以下では $r_i \leq r \leq r_e$ と仮定する。この r と曲線 c に系 2.4.3 を適用すると

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x;r))d\mu(x) = 4rL(c)$$

を得る。$x \mapsto \#(c \cap S(x;r))$ は $\mu_{\mathbf{R}^2}$ 可測だから

$$D_k = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \#(c \cap S(x;r)) = k\}$$

とおくと、各 D_k は $\mu_{\mathbf{R}^2}$ 可測集合になる。交点数が奇数になる円は c と接することになる。また交点数が ∞ になる円は局所的に c に一致する。したがって

$$A(D_{2k-1}) = A(D_\infty) = 0.$$

Lebesgue の単調収束定理より、

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x;r))d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kA(D_{2k}).$$

上で得た結果と合わせると

$$\sum_{k=1}^{\infty} kA(D_{2k}) = 2rL(c).$$

r のとり方から

$$\bar{B}_r = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid c \cap S(x;r) \neq \emptyset\}$$

となるので、

$$\sum_{k=1}^{\infty} A(D_{2k}) = A(B_r)$$

が成り立つ。よって

$$2rL(c) - A(B_r) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)A(D_{2k}).$$

補題 2.5.5 より

$$A(B_r) = A(B) + rL(c) + \pi r^2$$

となるので、$2rL(c) - A(B_r) = 2rL(c) - (A(B) + rL(c) + \pi r^2)$ を r について平方完成すると

$$2rL(c) - A(B_r) = -\pi\left(\frac{L(c)}{2\pi} - r\right)^2 + \left(\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B)\right).$$

上の $2rL(c) - A(B_r)$ の二種類の表示を使うと

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) = \pi\left(\frac{L(c)}{2\pi} - r\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)A(D_{2k}) \geq 0$$

となり、

$$4\pi A(B) \leq L(c)^2$$

が成り立つ。

等号が成り立つとすると、

$$\frac{L(c)}{2\pi} - r = 0$$

となる。ところが、r は $r_i \leq r \leq r_e$ であれば何でもよかったので、

$$\frac{L(c)}{2\pi} = r_i = r_e$$

となる。したがって、c は円になる。

系 2.5.7 (Bonnesen の不等式) $\mathbf{R}^2$ 内の凸閉曲線 c が囲む領域を B で表す。$\bar{B}$ に含まれる最大の円の半径を r_i とし、$\bar{B}$ を含む最小の円の半径を r_e とすると、

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq \pi^2 (r_e - r_i)^2$$

が成り立つ。

証明　等周不等式の別証明中に示したことより、$r_i \leq r \leq r_e$ となる r に対して

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) \geq \pi \left(\frac{L(c)}{2\pi} - r \right)^2 .$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) &\geq \pi \left(\frac{L(c)}{2\pi} - r_i \right)^2 \\ \frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) &\geq \pi \left(-\frac{L(c)}{2\pi} + r_e \right)^2 . \end{aligned}$$

上の不等式と不等式

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \geq \left(\frac{u+v}{2} \right)^2$$

より

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) \geq \pi \left(\frac{r_e - r_i}{2} \right)^2 .$$

以上より

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq \pi^2 (r_e - r_i)^2$$

が成り立つ。

定理 2.5.8 (Hotelling の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の滑らかな単純閉曲線 c から距離 ρ 以下の点の全体を c_ρ で表すと、十分小さい ρ に対して $A(c_\rho) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho$ が成り立つ。

証明　c の弧長パラータを s で表す。c の単位接ベクトルを u で表し u を反時計回りに $\pi/2$ 回転させた単位法ベクトルを e で表す。c の曲率を $\kappa(s)$ で表すと Frenet-Serret の公式より

$$\frac{du}{ds} = \kappa e, \qquad \frac{de}{ds} = -\kappa u.$$

$\rho \geq 0$ に対して

$$f : c \times [-\rho, \rho] \to c_\rho \ ; \ (x, t) \mapsto x - te$$

によって写像 f を定める。

$$df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial f}{\partial s} = u - t\frac{de}{ds} = (1 + \kappa t)u, \qquad df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} = -e$$

となりこれらは直交しているので、命題 1.3.7 より

$$Jf = \left|df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right| = \left|df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right| \cdot \left|df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right| = |1 + \kappa t|.$$

よって十分小さい ρ に対して f は微分同型写像になり、$Jf = 1 + \kappa t$ が成り立つ。余面積公式 (定理 1.5.5) より

$$\begin{aligned} A(c_\rho) &= \int_{c \times [-\rho, \rho]} Jf d\mu = \int_{c \times [-\rho, \rho]} (1 + \kappa t) d\mu = \int_{c \times [-\rho, \rho]} 1 d\mu + \int_c \kappa(s) ds \int_{-\rho}^{\rho} t dt \\ &= L(c)L([-\rho, \rho]) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho. \end{aligned}$$

したがって次の等式を得る。

$$A(c_\rho) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho.$$

2.6　Blaschke の公式

定理 2.6.1 (Blaschke の公式) $\mathbf{R}^2$ 内の二つの単純閉曲線 c_0, c_1 に対して、それらの囲む領域を D_0, D_1 で表す。$\mathbf{R}^2$ 内の領域 D に対してその連結成分の個数を $\chi(D)$ で表す。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) = 2\pi(A(D_0) + A(D_1)) + L(c_0)L(c_1).$$

証明　単純閉曲線の囲む領域を左に見て進む方向に関してその単純閉曲線の曲率を積分すると 2π になる。単純閉曲線が区分的に滑らかな場合は滑らかにならない点での速度ベクトルの角度を反時計回りを正の方向としてその点で積分に加えることで 2π になる。したがって、領域 $D_0 \cap gD_1$ の境界 $\partial(D_0 \cap gD_1)$ の曲率を $\kappa(\partial(D_0 \cap gD_1))$

で表し、滑らかではない点での速度ベクトルの角度を $\theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1))$ で表すと、囲む領域を左に見て進む方向を選んでいることから $\theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) \geq 0$ となり

$$\int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1))ds + \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) = 2\pi\chi(D_0 \cap gD_1)$$

が成り立つ。そこで以下ではこの等式の左辺の $g \in M(\mathbf{R}^2)$ に関する積分を計算する。

上の等式の左辺の第二項

$$\sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1))$$

の $g \in M(\mathbf{R}^2)$ に関する積分は補題 2.4.4 より

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1))d\mu(g) = \int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1).$$

次に $\partial(D_0 \cap gD_1)$ を c_0 が gD_1 に含まれている部分と gc_1 が D_0 に含まれている部分に分解することで積分

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1))ds \right) d\mu(g)$$

を分解して計算する。まず c_0 が gD_1 に含まれている部分の曲率を計算するために

$$I(c_0, D_1) = \{(x, y, g) \in c_0 \times D_1 \times M(\mathbf{R}^2) \mid x = gy\}$$

について考える。定義より $I(c_0, D_1) \subset I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ となり、微分同型写像 $i : (\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2) \to I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$ による逆像 $i^{-1}(I(c_0, D_1)) = c_0 \times D_1 \times SO(2)$ は $(\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2)$ の 4 次元部分多様体になる。

$$\pi_M(x, y, g) = g \qquad ((x, y, g) \in I(c_0, D_1))$$

によって写像 $\pi_M : I(c_0, D_1) \to M(\mathbf{R}^2)$ を定める。c_0 の曲率 κ_0 を $c_0 \times D_1 \times SO(2)$ 上の関数とみなして、この関数 κ_0 と合成写像 $f = \pi_M \circ i$ に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用すると

$$(*) \qquad \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{f^{-1}(g)} \kappa_0 d\mu \right) d\mu(g) = \int_{c_0 \times D_1 \times SO(2)} \kappa_0 Jf d\mu$$

を得る。g の $SO(2)$ 成分を g_0 で表すと

$$f^{-1}(g) = \{(x, y, g_0) \mid x \in c_0, y \in D_1, x = gy\}$$

となる。これは $c_0 \cap gD_1$ と $\sqrt{2}$ の比で相似になり、

$$\int_{f^{-1}(g)} \kappa_0 d\mu = \sqrt{2} \int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds$$

が成り立つ。したがって、上の $(*)$ の左辺は

$$\sqrt{2} \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds \right) d\mu(g)$$

に一致する。次に $(*)$ の右辺を計算するためにまず Jf を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}$$

は $c_0 \times D_1 \times SO(2)$ の接ベクトル空間の正規直交基底になる。この基底に df を作用させ Jf を計算する。補題 2.4.1 の証明中の di の計算結果を使うと

$$\begin{aligned}
df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= d\pi_M di \left(\frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial u_2}, \\
df\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= -\cos\phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \sin\phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\
df\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) &= \sin\phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \cos\phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\
df\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) &= (y_1 \sin\phi + y_2 \cos\phi) \frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1 \cos\phi + y_2 \sin\phi) \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

となるので、df の表現行列は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& df \left[\frac{\partial}{\partial s} \ \frac{\partial}{\partial y_1} \ \frac{\partial}{\partial y_2} \ \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\
= & \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \ \frac{\partial}{\partial u_2} \ \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[\begin{array}{cccc} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos\phi & \sin\phi & y_1 \sin\phi + y_2 \cos\phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin\phi & -\cos\phi & -y_1 \cos\phi + y_2 \sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

よって、df の階数はつねに 3 になり核の次元は 1 になる。核を求めるために

$$\frac{(c_0(s))_1}{ds} = \cos\psi, \quad \frac{(c_0(s))_2}{ds} = \sin\psi$$

とおいておく。

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc} \cos\psi & -\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\psi & -\sin\phi & -\cos\phi \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \cos(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) \end{array} \right] \\
= & \left[\begin{array}{c} \cos\psi - \cos\phi \cos(\psi - \phi) + \sin\phi \sin(\psi - \phi) \\ \sin\psi - \sin\phi \cos(\psi - \phi) - \cos\phi \sin(\psi - \phi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

となるので、

$$\ker df = \mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial s} + \cos(\psi-\phi)\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin(\psi-\phi)\frac{\partial}{\partial y_2}\right).$$

これより

$$\begin{aligned}
&(\ker df)^{\perp}\\
= \ & \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\left\{\cos\psi\frac{\partial}{\partial s} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_2},\ \sin\psi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_2},\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right\}.
\end{aligned}$$

上で求めた $(\ker df)^{\perp}$ の基底に df を作用させ、補題1.3.8を利用して Jf を計算する。

$$\begin{aligned}
& df\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial s} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos\phi & \sin\phi & y_1\sin\phi + y_2\cos\phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin\phi & -\cos\phi & -y_1\cos\phi + y_2\sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi \\ -\cos\phi \\ \sin\phi \\ 0\end{bmatrix}\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \cos^2\psi + \cos^2\phi + \sin^2\phi \\ \cos\psi\sin\psi + \sin\phi\cos\phi - \cos\phi\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \cos^2\psi + 1 \\ \cos\psi\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}\\
= \ & (\cos^2\psi + 1)\frac{\partial}{\partial u_1} + \cos\psi\sin\psi\frac{\partial}{\partial u_2},\\
& df\left(\sin\psi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos\phi & \sin\phi & y_1\sin\phi + y_2\cos\phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin\phi & -\cos\phi & -y_1\cos\phi + y_2\sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\psi \\ -\sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0\end{bmatrix}\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \cos\psi\sin\psi + \cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi \\ \sin^2\psi + \sin^2\phi + \cos^2\phi \\ 0 \end{bmatrix}\\
= \ & \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\ \frac{\partial}{\partial u_2}\ \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\begin{bmatrix} \cos\psi\sin\psi \\ \sin^2\psi + 1 \\ 0 \end{bmatrix}\\
= \ & \cos\psi\sin\psi\frac{\partial}{\partial u_1} + (\sin^2\psi + 1)\frac{\partial}{\partial u_2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& df\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
= \ & (y_1\sin\phi + y_2\cos\phi)\frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1\cos\phi + y_2\sin\phi)\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned}
$$

以上の計算より、

$$
\begin{aligned}
& \left|\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial s} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\wedge\left(\sin\psi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\wedge\frac{\partial}{\partial\phi}\right| \\
= \ & \left|\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial s} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\wedge\left(\sin\psi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right| \\
= \ & \left|(-\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi)\frac{\partial}{\partial s}\wedge\frac{\partial}{\partial y_1} + (-\cos\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\psi)\frac{\partial}{\partial s}\wedge\frac{\partial}{\partial y_2}\right. \\
& \left. +(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\frac{\partial}{\partial y_2}\right| \\
= \ & \left|\sin(\psi-\phi)\frac{\partial}{\partial s}\wedge\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos(\psi-\phi)\frac{\partial}{\partial s}\wedge\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_1}\wedge\frac{\partial}{\partial y_2}\right| \\
= \ & \sqrt{\sin(\psi-\phi)^2 + \cos(\psi-\phi)^2 + 1} \\
= \ & \sqrt{2}, \\
& \left|df\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial s} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\wedge df\left(\sin\psi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right. \\
& \left.\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right| \\
= \ & \left|\left\{(\cos^2\psi + 1)\frac{\partial}{\partial u_1} + \cos\psi\sin\psi\frac{\partial}{\partial u_2}\right\}\wedge\left\{\cos\psi\sin\psi\frac{\partial}{\partial u_1} + (\sin^2\psi + 1)\frac{\partial}{\partial u_2}\right\}\right. \\
& \left.\wedge\left\{(y_1\sin\phi + y_2\cos\phi)\frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1\cos\phi + y_2\sin\phi)\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\right| \\
= \ & \left|\det\begin{bmatrix} \cos^2\psi + 1 & \cos\psi\sin\psi & y_1\sin\phi + y_2\cos\phi \\ \cos\psi\sin\psi & \sin^2\psi + 1 & -y_1\cos\phi + y_2\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \\
= \ & |(\cos^2\psi + 1)(\sin^2\psi + 1) - \cos^2\psi\sin^2\psi| \\
= \ & |\cos^2\psi + \sin^2\psi + 1| \\
= \ & 2.
\end{aligned}
$$

したがって、補題 1.3.8 より

$$
Jf = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}
$$

が成り立つ。これより、積分の等式 $(*)$ の右辺は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\int_{c_0\times D_1\times SO(2)} \kappa_0 d\mu &= \sqrt{2}\int_{c_0}\kappa_0(s)ds\cdot A(D_1)\cdot 2\pi \\
&= \sqrt{2}(2\pi)^2\cdot A(D_1).
\end{aligned}
$$

さきに得た結果と合せると次の等式を得る。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds \right) d\mu(g) = (2\pi)^2 \cdot A(D_1).$$

次に gc_1 が D_0 に含まれている部分での曲率の積分は上の結果より次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{D_0 \cap gc_1} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{c_1 \cap g^{-1}D_0} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) \\ &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{c_1 \cap gD_0} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) \\ &= (2\pi)^2 \cdot A(D_0). \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds \right) d\mu(g) = (2\pi)^2 (A(D_0) + A(D_1))$$

が成り立つ。

以上の計算より

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{M(\mathbf{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) \\ = \ & \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left(\int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds + \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) \right) d\mu(g) \\ = \ & (2\pi)^2 (A(D_0) + A(D_1)) + 2\pi L(c_0) L(c_1) \end{aligned}$$

となり、次の等式を得る。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) = 2\pi (A(D_0) + A(D_1)) + L(c_0) L(c_1).$$

第3章　Euclid空間における交叉積分公式

3.1　Euclid空間の超平面の全体と直線の全体

例 3.1.1 $\mathbf{R}^n$ の超平面の全体を $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ で表す。$(r,u) \in \mathbf{R} \times S^{n-1}(1)$ に対して $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の元 $l(r,u)$ を

$$l(r,u) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, u \rangle = r\}$$

とおいて、写像

$$l : \mathbf{R} \times S^{n-1}(1) \to L_{n-1}(\mathbf{R}^n)\,; \quad (r,u) \mapsto l(r,u)$$

を定義する。このとき次の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) l は全射になる。

(2) $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ は写像 l に関する商位相について Hausdorff 位相空間になる。

(3) $v \in S^{n-1}(1)$ に対して、

$$\begin{aligned} O_v &= \{(r,u) \in \mathbf{R} \times S^{n-1}(1) \mid r \in \mathbf{R},\ 0 < \langle u, v \rangle\} \\ U_v &= l(O_v) \\ \phi_v &: U_v \to \mathbf{R}^n\,;\ l(r,u) \mapsto (r, u - \langle u, v \rangle v) \quad ((r,u) \in O_t) \end{aligned}$$

とおく。すると $(L_{n-1}(\mathbf{R}^n), \{(U_v, \phi_v) \mid v \in S^{n-1}(1)\})$ は n 次元多様体になる。

証明 (1) $\mathbf{R}^n$ の任意の超平面の定義方程式は、超平面の単位法ベクトル u と原点からの距離 r によって

$$\langle x, u \rangle = r$$

という標準形にすることができるので、l は全射になる。

(2) l の定め方から、$l(r,u) = l(r',u')$ となるための必要十分条件は、$r' = r, u = u'$ または $r' = -r, u = -u'$ である。$L(\mathbf{R}^n)$ の相異なる l_1 と l_2 をとる。$l_1 = l(r_1,u_1)$, $l_2 = l(r_2,u_2)$ となるように r_1,u_1,r_2,u_2 を選ぶ。さらに $0 < \langle u_1, u_0 \rangle$, $\langle u_2, u_0 \rangle$ を満たす u_0 をとることができる。このとき、O_{u_0} は $\mathbf{R} \times S^{n-1}(1)$ の開集合になる。O_{u_0} は

Hausdorff 位相空間だから (r_1, u_1) の開近傍 V_1 と (r_2, u_2) の開近傍 V_2 で $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となるものが存在する。$l(V_1)$ と $l(V_2)$ は $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ において l_1 と l_2 の開近傍になり、しかも $l(V_1) \cap l(V_2) = \emptyset$ が成り立つ。したがって $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ は Hausdorff 位相空間になる。

(3) 今までの議論から U_v が $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の開集合になること、$L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ が $\{U_v\}$ の合併になること、$\phi_v : U_v \to \phi_v(U_v)$ が位相同型になることはすぐにわかる。$\phi_{v'} \circ \phi_v^{-1} : \phi_v(U_v \cap U_{v'}) \to \phi_{v'}(U_v \cap U_{v'})$ が微分同型写像になることもわかる。

(U_v, ϕ_v) はすべての $v \in S^{n-1}$ に対して $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の局所座標近傍になる。この局所座標近傍を $(U_v; r_v, u_v)$ と表して、局所座標系 r_v, u_v を使う。特に v を明記する必要がないときは、単に r, u で表す。各 $v \in S^{n-1}(1)$ に対して U_v 上

$$g_v = dr_v \otimes dr_v + g_{S^{n-1}}$$

によって Riemann 計量を定める。$L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ における局所座標系の変換は、

$$r_{v'} = \epsilon r_v, \quad u_{v'} = \epsilon u_v \qquad (\epsilon = \pm 1)$$

となるので、$U_v \cap U_{v'}$ 上 $g_v = g_{v'}$ となる。したがって、$\{(U_v, g_v)\}$ は $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ 上の Riemann 計量を定める。

$\mathbf{R}^n$ の向きを保つ等長変換の全体を $M(\mathbf{R}^n)$ で表す。$M(\mathbf{R}^n)$ の任意の元は $\Phi \in SO(n)$ と $U \in \mathbf{R}^n$ によって

$$T(\Phi, U) : X \mapsto \Phi X + U$$

と表すことができ、$M(\mathbf{R}^n)$ は $SO(n)$ と $\mathbf{R}^n$ の半直積になる。さらに、$M(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ の Lie 変換群になる。$l(r, u) \in L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\langle T(\Phi, U)x, \Phi u \rangle = \langle \Phi x, \Phi u \rangle + \langle U, \Phi u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle U, \Phi u \rangle = r + \langle U, \Phi u \rangle$$

より

$$T(\Phi, U) l(r, u) = l(r + \langle U, \Phi u \rangle, \Phi u)$$

を得る。したがって、$M(\mathbf{R}^n)$ の元は $\mathbf{R}^n$ の超平面を超平面に写し、$M(\mathbf{R}^n)$ は $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の Lie 変換群になる。上の等式から変換 $T(\Phi, u)$ の $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ への作用の微分写像を求めることができる。$u \in S^{n-1}(1)$ における接ベクトル空間の正規直交基底を $e_1, \ldots, e_{n-1}$ で表す。

$$\begin{aligned} d(T(\Phi, U))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}, \\ d(T(\Phi, U))(e_i) &= \langle U, \Phi e_i \rangle \frac{\partial}{\partial r} + \Phi e_i \qquad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

これより $d(T(\Phi,U))$ は等長線形写像にならない。ところが、

$$d(T(\Phi,U))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}d(T(\Phi,U))(e_i)=\frac{\partial}{\partial r}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}\Phi e_i$$

は成り立ち、$d(T(\Phi,U))$ は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、$T(\Phi,U)$ は $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の体積保存変換になる。

次に Euclid 空間の直線の全体について考える。$\mathbf{R}^n$ の直線の全体を $L_1(\mathbf{R}^n)$ で表す。$L_1(\mathbf{R}^n)$ に多様体構造を導入するために、$S^{n-1}(1)$ の接ベクトル束

$$T(S^{n-1}(1))=\{(x,v)\in(\mathbf{R}^n)^2 \mid x\in S^{n-1}(1),\ \langle x,v\rangle=0\}$$

を考える。$T(S^{n-1}(1))$ は $(\mathbf{R}^n)^2$ の $2n-2$ 次元正規部分多様体になることを以下で示す。

$$F:(\mathbf{R}^n)^2\to\mathbf{R}^2\ ;\ (x,v)\mapsto(\langle x,x\rangle,\langle x,v\rangle)$$

によって C^∞ 級写像 F を定める。すると、$T(S^2(1))=F^{-1}(1,0)$ が成り立つ。F の第一成分を F_1 で表し第二成分を F_2 で表すと

$$F_1(x,v)=\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^n x_i^2,\qquad F_2(x,v)=\langle x,v\rangle=\sum_{i=1}^n x_iv_i$$

となる。これらの偏微分係数は

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}&\frac{\partial F_1}{\partial v_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial v_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_2}{\partial x_n}&\frac{\partial F_2}{\partial v_1}&\cdots&\frac{\partial F_2}{\partial v_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1&\cdots&2x_n&0&\cdots&0\\ v_1&\cdots&v_n&x_1&\cdots&x_n\end{bmatrix}.$$

$(x,v)\in T(S^{n-1}(1))$ に対して $x\neq 0$ だから、上の行列の第 i 列と第 $n+i$ 列を並べた二次正方行列

$$\begin{bmatrix}2x_i&0\\ v_i&x_i\end{bmatrix}$$

はある i について階数 2 になる。したがって、陰関数定理より $F^{-1}(1,0)=T(S^{n-1}(1))$ は $2n-2$ 次元正規部分多様体になる。

$(x,v)\in T(S^{n-1}(1))$ に対して

$$l_1(x,v)=\{v+tx \mid t\in\mathbf{R}\}\in L_1(\mathbf{R}^n)$$

によって $l_1(x,v)$ を定める。これにより写像 $l_1:T(S^{n-1}(1))\to L_1(\mathbf{R}^n)$ が定まる。$L_1(\mathbf{R}^n)$ の任意の元、すなわち、$\mathbf{R}^n$ の任意の直線は、原点からの距離を与える位置ベクトル v と直線の単位方向ベクトル x によって

$$\{v+tx \mid t\in\mathbf{R}\}$$

と表現することができる。このとき v は原点からの距離を与える位置ベクトルだから $\langle x, v\rangle = 0$ となり $(x, v) \in T(S^{n-1}(1))$ が成り立つ。したがって、写像 $l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ は全射になる。l_1 の定め方より $l_1(x, v) = l_1(x', v')$ となるための必要十分条件は $x' = \pm x$ かつ $v' = v$ が成り立つことである。これより、$l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ が二重被覆写像になるように $L_1(\mathbf{R}^n)$ に多様体構造を導入することができる。二重被覆写像 l_1 の自明ではない被覆変換は $(x, v) \mapsto (-x, v)$ になる。

まず $T(S^{n-1}(1))$ に Riemann 計量を入れ二重被覆写像 $l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ によって $L_1(\mathbf{R}^n)$ に Riemann 計量を導入する。$T(S^{n-1}(1))$ の Riemann 計量 g を次のように定める。$(x, v) \in T(S^{n-1}(1))$ における $T(S^{n-1}(1))$ の接ベクトル $(X, U), (Y, V)$ に対して

$$
\begin{aligned}
g((X, U), (Y, V)) &= \langle (X, U), (Y, V)\rangle - \langle U, x\rangle\langle V, x\rangle \\
&= \langle X, Y\rangle + \langle U, V\rangle - \langle U, x\rangle\langle V, x\rangle.
\end{aligned}
$$

g が対称双線形形式であることは上の定義からわかる。$x \in S^{n-1}(1)$ における接ベクトル空間 $T_x(S^{n-1}(1))$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ をとる。各 $1 \le i \le n-1$ について $\{x, e_i\}$ の張る平面の x から e_i への回転を $\phi_i(s) \in SO(n)$ で表す。すなわち

$$
\phi_i(s)(x) = \cos sx + \sin se_i, \quad \phi_i(s)(e_i) = -\sin sx + \cos se_i, \quad \phi_i(s)(e_j) = e_j \quad (j \ne i)
$$

とする。

$$
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_i(s)(x) = e_i, \quad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_i(s)(e_i) = -x, \quad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_i(s)(e_j) = 0 \quad (j \ne i).
$$

が成り立つ。$SO(n)$ の $S^{n-1}(1)$ への作用を微分すると、$SO(n)$ の $T(S^{n-1}(1))$ への作用を誘導する。$v \in T_x(S^{n-1}(1))$ に対して

$$
v = \sum_{j=1}^{n-1} \langle v, e_j\rangle e_j
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\phi_i(s)(x, v) &= (\phi_i(s)(x), \phi_i(s)(v)) \\
&= \left(\cos sx + \sin se_i, \langle v, e_i\rangle(-\sin sx + \cos se_i) + \sum_{j \ne i} \langle v, e_j\rangle e_j \right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_i(s)(x, v) = (e_i, -\langle v, e_i\rangle x).
$$

次に

$$
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, v + se_i) = (0, e_i).
$$

以上より、

$$(e_i, -\langle v, e_i\rangle x), \quad (0, e_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

は $T(S^{n-1}(1))$ の (x,v) における接ベクトル空間の基底になる。さらにこの基底が正規直交基底になることを示す。$1 \leq i,j,k \leq n-1,\ i \neq j$ に対して

$$\begin{aligned}
&g((e_i, -\langle v, e_i\rangle x), (e_i, -\langle v, e_i\rangle x)) = \langle e_i, e_i\rangle + \langle v, e_i\rangle\langle v, e_i\rangle - \langle v, e_i\rangle\langle v, e_i\rangle = 1,\\
&g((e_i, -\langle v, e_i\rangle x), (e_j, -\langle v, e_j\rangle x)) = \langle e_i, e_j\rangle + \langle v, e_i\rangle\langle v, e_j\rangle - \langle v, e_i\rangle\langle v, e_j\rangle = 0,\\
&g((e_i, -\langle v, e_i\rangle x), (0, e_k)) = \langle e_i, 0\rangle - \langle v, e_i\rangle\langle x, e_k\rangle + \langle v, e_i\rangle\langle e_k, x\rangle = 0,\\
&g((0, e_i), (0, e_i)) = \langle e_i, e_i\rangle - \langle e_i, x\rangle\langle e_i, x\rangle = 1,\\
&g((0, e_i), (0, e_j)) = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, x\rangle\langle e_j, x\rangle = 0.
\end{aligned}$$

以上で g が $T(S^{n-1}(1))$ の Riemann 計量になることがわかった。

$T(S^{n-1}(1))$ の接ベクトル空間を次のように表示することもできる。

$$\begin{aligned}
&T_{(x,v)}(T(S^{n-1}(1)))\\
= \ &\{(u, -\langle v, u\rangle x) \mid u \in T_x(S^{n-1}(1))\} \oplus \{(0, u) \mid u \in T_x(S^{n-1}(1))\}\\
= \ &\{(u_1, -\langle v, u_1\rangle x + u_2) \mid u_1, u_2 \in T_x(S^{n-1}(1))\}\\
= \ &(v, x)^\perp \cap (x, 0)^\perp.
\end{aligned}$$

ただし、最後の直交補空間は $(\mathbf{R}^n)^2$ 内の通常の内積に関するものである。

自然な射影 $\pi : T(S^{n-1}(1)) \to S^{n-1}(1)$ は Riemannian submersion になる。すなわち、任意の $(x,v) \in T(S^{n-1}(1))$ において $d\pi : \ker(d\pi)^\perp \to T_x(S^{n-1}(1))$ は等長線形同型写像になる。$\pi(x,v) = x$ だから

$$\ker(d\pi) = \{(0, u) \mid u \in T_x(S^{n-1}(1))\}$$

となり、Riemann 計量の定め方より

$$\ker(d\pi)^\perp = \{(u, -\langle v, u\rangle x) \mid u \in T_x(S^{n-1}(1))\}.$$

さらに、

$$d\pi : \ker(d\pi)^\perp \to T_x(S^{n-1}(1))\ ;\ (u, -\langle v, u\rangle x) \mapsto u$$

は等長線形同型写像になる。

この $T(S^{n-1}(1))$ の Riemann 計量は $l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ の被覆変換に関して不変になり、l_1 を通して $L_1(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量を誘導できることを示す。l_1 の被覆変換を

$$\tau(x,v) = (-x, v) \qquad ((x,v) \in T(S^{n-1}(1)))$$

で表すことにする。τ は $(\mathbf{R}^n)^2$ 全体の線形変換の制限になっているので、

$$d\tau(X, U) = (-X, U) \qquad ((X,U) \in T_{(x,v)}(T(S^{n-1}(1))))$$

が成り立つ。g の定め方より $d\tau$ は g を不変にする。したがって、被覆変換 τ は g を不変にし、被覆写像 $l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ を通して g は $L_1(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量を誘導する。

$M(\mathbf{R}^n)$ の $\mathbf{R}^n$ への作用は $M(\mathbf{R}^n)$ の $L_1(\mathbf{R}^n)$ への作用を誘導する。

$$T(\Phi, u) \in M(\mathbf{R}^n) \quad (\Phi \in SO(n),\ u \in \mathbf{R}^n)$$

と $(x, v) \in T(S^{n-1}(1))$ に対して

$$T(\Phi, u)(v + tx) = \Phi(v + tx) + u = \Phi v + u + t\Phi x = T(\Phi, u)v + t\Phi x$$

となる。これを Φx に比例する成分とその直交成分の和に分解する。

$$\langle T(\Phi, u)v, \Phi x\rangle = \langle \Phi v + u, \Phi x\rangle = \langle u, \Phi x\rangle$$

となるので、

$$T(\Phi, u)v + t\Phi x = T(\Phi, u)v - \langle u, \Phi x\rangle \Phi x + (t + \langle u, \Phi x\rangle)\Phi x$$

を得る。これより

$$T(\Phi, u)l_1(x, v) = l_1(\Phi x, T(\Phi, u)v - \langle u, \Phi x\rangle \Phi x)$$

が成り立つ。これより、$M(\mathbf{R}^n)$ の $T(S^{n-1}(1))$ への作用を

$$T(\Phi, u)(x, v) = (\Phi x, T(\Phi, u)v - \langle u, \Phi x\rangle \Phi x)$$

によって定める。これが実際に $M(\mathbf{R}^n)$ の $T(S^{n-1}(1))$ への作用になっていることを確かめる。$M(\mathbf{R}^n)$ の元 $T(\Phi_1, u_1), T(\Phi_2, u_2)$ に対して、

$$T(\Phi_1, u_1)T(\Phi_2, u_2) = T(\Phi_1\Phi_2, \Phi_1 u_2 + u_1)$$

となる。また

$$\begin{aligned}
& T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)(x, v)) \\
= \ & T(\Phi_1, u_1)(\Phi_2 x, T(\Phi_2, u_2)v - \langle u_2, \Phi_2 x\rangle \Phi_2 x) \\
= \ & (\Phi_1\Phi_2 x, T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)v - \langle u_2, \Phi_2 x\rangle \Phi_2 x) - \langle u_1, \Phi_1\Phi_2 x\rangle \Phi_1\Phi_2 x)
\end{aligned}$$

となり、この第二成分は

$$\begin{aligned}
& (\text{第二成分}) \\
= \ & T(\Phi_1, u_1)T(\Phi_2, u_2)v - \langle u_2, \Phi_2 x\rangle \Phi_1\Phi_2 x - \langle u_1, \Phi_1\Phi_2 x\rangle \Phi_1\Phi_2 x \\
= \ & T(\Phi_1\Phi_2, \Phi_1 u_2 + u_1)v - \langle \Phi_1 u_2 + u_1, \Phi_1\Phi_2 x\rangle \Phi_1\Phi_2 x.
\end{aligned}$$

したがって、

$$T(\Phi_1,u_1)(T(\Phi_2,u_2)(x,v)) = (T(\Phi_1,u_1)T(\Phi_2,u_2))(x,v)$$

が成り立ち、$M(\mathbf{R}^n)$ は $T(S^{n-1}(1))$ の Lie 変換群になる。この $M(\mathbf{R}^n)$ の作用に関して $l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ は同変写像になる。

$M(\mathbf{R}^n)$ の $T(S^{n-1}(1))$ への作用の等長性、体積保存性について調べる。$x \in S^{n-1}(1)$ における接ベクトル空間 $T_x(S^{n-1}(1))$ の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_{n-1}$ をとる。$T(S^{n-1}(1))$ の (x,v) における接ベクトル空間の正規直交基底

$$(e_i, -\langle v,e_i\rangle x), \quad (0,e_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

の微分写像 $d(T(\Phi,u))$ による像を求める。

$$\begin{aligned}
& d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi,u)(\phi_i(s)(x),\phi_i(s)(v)) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\Phi\phi_i(s)(x), T(\Phi,u)\phi_i(s)(v) - \langle u,\Phi\phi_i(s)(x)\rangle\Phi\phi_i(s)(x)) \\
= \ & (\Phi e_i, -\langle v,e_i\rangle\Phi x - \langle u,\Phi e_i\rangle\Phi x - \langle u,\Phi x\rangle\Phi e_i), \\
& d(T(\Phi,u))(0,e_i) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi,u)(x,v+se_i) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\Phi x, T(\Phi,u)(v+se_i) - \langle u,\Phi x\rangle\Phi x) \\
= \ & (0,\Phi e_i).
\end{aligned}$$

これらが

$$T(\Phi,u)(x,v) = (\Phi x, T(\Phi,u)v - \langle u,\Phi x\rangle\Phi x)$$

における接ベクトルであることに注意して、これらの内積を求める。$d(T(\Phi,u))$ が等長線形写像にはならないことは次の計算からわかる。$1 \leq i,j \leq n-1,\ i \neq j$ に対して

$$\begin{aligned}
& g(d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x), d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x)) \\
= \ & \langle\Phi e_i,\Phi e_i\rangle + \langle u,\Phi x\rangle^2\langle\Phi e_i,\Phi e_i\rangle = 1+\langle u,\Phi x\rangle^2, \\
& g(d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x), d(T(\Phi,u))(e_j,-\langle v,e_j\rangle x)) \\
= \ & \langle\Phi e_i,\Phi e_j\rangle + \langle u,\Phi x\rangle^2\langle\Phi e_i,\Phi e_j\rangle = 0, \\
& g(d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x), d(T(\Phi,u))(0,e_i)) \\
= \ & -\langle u,\Phi x\rangle\langle\Phi e_i,\Phi e_i\rangle = -\langle u,\Phi x\rangle, \\
& g(d(T(\Phi,u))(e_i,-\langle v,e_i\rangle x), d(T(\Phi,u))(0,e_j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\langle u, \Phi x\rangle\langle \Phi e_i, \Phi e_j\rangle = 0,\\
&\quad g(d(T(\Phi,u))(0,e_i), d(T(\Phi,u))(0,e_i))\\
&= \langle \Phi e_i, \Phi e_i\rangle = 1,\\
&\quad g(d(T(\Phi,u))(0,e_i), d(T(\Phi,u))(0,e_j))\\
&= \langle \Phi e_i, \Phi e_j\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

以上の計算から定義域の接ベクトル空間の正規直交基底の $d(T(\Phi,u))$ による像の外積の長さの二乗を求めることができる。

$$
\begin{aligned}
&\left|\bigwedge_{i=1}^{n-1} d(T(\Phi,u))(e_i, -\langle v, e_i\rangle x) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} d(T(\Phi,u))(0,e_j)\right|^2\\
&= \begin{vmatrix} (1+\langle u,\Phi x\rangle^2)\cdot 1_{n-1} & -\langle u,\Phi x\rangle \cdot 1_{n-1} \\ -\langle u,\Phi x\rangle\cdot 1_{n-1} & 1_{n-1} \end{vmatrix}\\
&\quad (\text{第 2 行を } \langle u,\Phi x\rangle \text{ 倍して第 1 行に加える})\\
&= \begin{vmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ -\langle u,\Phi x\rangle\cdot 1_{n-1} & 1_{n-1} \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}
$$

したがって、$d(T(\Phi,u))$ は体積を保存し、$T(\Phi,u)$ は $T(S^{n-1}(1))$ の体積保存変換になる。これより $T(\Phi,u)$ は $L_1(\mathbf{R}^n)$ の体積保存変換になる。

3.2　Euclid 空間の Crofton の公式 I

$\mathbf{R}^n$ 内の 1 次元部分ベクトル空間全体が成す $n-1$ 次元実射影空間を $P^{n-1}(\mathbf{R})$ で表す。$S^{n-1}(1)$ の各元 x に $\mathbf{R}x \in P^{n-1}(\mathbf{R})$ を対応させると、$S^{n-1}(1)$ から $P^{n-1}(\mathbf{R})$ への二重被覆写像になる。この二重被覆写像の被覆変換は $S^{n-1}(1)$ の元の ± 1 倍になり等長変換になるので、この二重被覆写像が局所等長写像になるように $P^{n-1}(\mathbf{R})$ に Riemann 計量を導入することができる。$P^{n-1}(\mathbf{R})$ の各元にその直交補空間を対応させることで、$P^{n-1}(\mathbf{R})$ から $G_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ への全単射を得る。この全単射が等長同型写像になるように $G_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ に Riemann 多様体の構造を導入する。

定理 3.2.1

$$
I(\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)) = \{(x,l) \in \mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n) \mid x \in l\}
$$

とおくと、$I(\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の $2n-1$ 次元正規部分多様体になる。さらに

$$
i : \mathbf{R}^n \times G_{n-1}(\mathbf{R}^n) \to I(\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))\ ; \quad (x,l) \mapsto (x, l+x)
$$

によって i を定めると、i は微分同型写像になる。

証明　$\mathbf{R}\times S^{n-1}$ から $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ への二重被覆写像があるので、局所的には $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の開集合を $\mathbf{R}\times S^{n-1}$ の開集合と同一視することができる。すなわち $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の元 $l(r,u)$ を $(r,u)\in\mathbf{R}\times S^{n-1}$ と同一視する。$\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の元が $I(\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))$ に含まれるための必要十分条件をこの局所的な同一視を使って表すと、

$$\langle x,u\rangle = r$$

となる。そこで

$$F(x,r,u)=\langle x,u\rangle - r$$

とおくと dF の階数はすべての点で 1 になり、$I(\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の $2n-1$ 次元正規部分多様体になる。

次に i が微分同型写像になることを示す。先に示した $M(\mathbf{R}^n)$ の $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ への作用の表示より

$$l(0,u)+x=T(1,x)l(0,u)=l(\langle x,u\rangle,u)$$

となるので、$i(x,l(0,u))=(x,l(\langle x,u\rangle,u))$。よって i は $\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I(\mathbf{R}^n\times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))$ への C^∞ 級写像にもなる。i の定め方より、i は全単射になることがわかる。上の i の表示より、微分写像 di はすべての点で退化しないことがわかる。以上より、i は微分同型写像になる。

定理 3.2.2 (Crofton の公式)　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線 c に対して

$$\int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)}\#(c\cap l)d\mu(l)=\kappa_{n-1}L(c)$$

が成り立つ。ここで $\kappa_{n-1}=\mathrm{vol}(D^{n-1}(1))$ である (例 1.5.13)。

折れ線近似による証明　曲線を折れ線で近似すると曲線の長さも折れ線の長さで近似される。折れ線は線分の合併になり折れ線の長さは線分の長さの和になる。そこで c が線分の場合に Crofton の公式を示し、次に c が折れ線の場合を示し、最後に c が一般の曲線の場合を証明する。

$c=[0,L(c)]\times\{0\}\subset\mathbf{R}^n$ とする。超平面が c と交わるときの交点の数は 1 になるので、$l(r,u)$ が c と交わる r,u の条件を求めれば Crofton の公式の積分を計算することができる。u は S^{n-1}_+ 内を動くようにすると、r の条件は $0\le r\le L(c)u_1$ になる。したがって、交点数の積分は次のようになる。

$$\int_{S^{n-1}_+}\int_0^{L(c)u_1}1drdu=\int_{S^{n-1}_+}L(c)u_1du=\kappa_{n-1}L(c).$$

最後の積分は例 1.5.14 の結果を使った。したがって c が $(1,0,\dots,0)$ の軸上の線分の場合に Crofton の公式が成り立つことがわかった。Euclid 空間の任意の線分は等長変換によって $(1,0,\dots,0)$ の軸に移すことができ、$L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ 上の測度は平面

の等長変換の作用によって不変なので、Euclid 空間の任意の線分に対して Crofton の公式が成り立つ。

次に c が線分 $c_1, \dots, c_k$ からなる折れ線の場合を考える。

$$\begin{aligned} & \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(c \cap l) d\mu(l) \\ = & \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \# \left(\bigcup_{i=1}^{k} c_i \cap l \right) d\mu(l) = \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \sum_{i=1}^{k} \#(c_i \cap l) d\mu(l) \\ = & \sum_{i=1}^{k} \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(c_i \cap l) d\mu(l) = \sum_{i=1}^{k} \kappa_{n-1} L(c_i) = \kappa_{n-1} L(c). \end{aligned}$$

ここで、等式

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^{k} c_i \cap l \right) = \sum_{i=1}^{k} \#(c_i \cap l)$$

は超平面 l が c_i の端点を通らないときに成り立つが、l が c_i の端点を通るときには成り立たない。c_i の端点を通る l の全体は $n-1$ 次元になり $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の測度に関して測度 0 になるので、積分の等式

$$\int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \# \left(\bigcup_{i=1}^{k} c_i \cap l \right) d\mu(l) = \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \sum_{i=1}^{k} \#(c_i \cap l) d\mu(l)$$

は成り立つ。

最後に c が一般の曲線の場合を証明する。c を弧長に関して i 等分した点を結んで得られる折れ線を d_i で表すと、$\lim_{i \to \infty} L(d_i) = L(c)$ が成り立つ。超平面 l と二点を結ぶ曲線との交点数は同じ二点を結ぶ線分との交点数以上になるので、

$$\#(d_{2^i} \cap l) \leq \#(d_{2^{i+1}}) \leq \cdots \leq \#(c \cap l)$$

となる。さらに、c と l がトランスバーサルに交わるとき、$\#(d_{2^i} \cap l)$ は $\#(c \cap l)$ に単調収束する。c とトランスバーサルに交わらない l の全体は $L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の測度に関して測度 0 になるので、Lebesgue の単調収束定理と上で示したことより

$$\begin{aligned} \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(c \cap l) d\mu(l) &= \lim_{i \to \infty} \int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(d_{2^i} \cap l) d\mu(l) = \lim_{i \to \infty} \kappa_{n-1} L(d_{2^i}) \\ &= \kappa_{n-1} L(c) \end{aligned}$$

が成り立つ。

別証明

$$I(c) = \{(x, l) \in I(\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)) \mid x \in c\}$$

とおく。定理 3.2.1 の微分同型写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(c)) = c \times G_{n-1}(\mathbf{R}^n)$$

となるので、これは $\mathbf{R}^n \times G_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の n 次元部分多様体になる。したがって、$I(c)$ は $I(\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n))$ の n 次元部分多様体になる。

$$\pi_L : I(c) \to L_{n-1}(\mathbf{R}^n)\ ; \quad (x, l) \mapsto l$$

によって写像 π_L を定義すると、π_L は、包含写像 $I(c) \to \mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^n \times L_{n-1}(\mathbf{R}^n) \to L_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこで $I(c)$ 上恒等的に 1 に等しい関数とこの写像 π_L に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(\pi_L^{-1}(l))d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_L^{-1}(l) = \{(x, l) \mid x \in l,\ x \in c\} = (c \cap l) \times \{l\}$$

だから、$\#(\pi_L^{-1}(l)) = \#(c \cap l)$ となり、

$$\int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(c \cap l)d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_L の微分写像 $d\pi_L$ を求める。曲線 c の弧長パラメーター s と $G_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ の元 $l(0, u)$ のパラメーター $u \in S^{n-1}(1)$ を使う。定理 3.2.1 の証明中に示した i の表示を使うと、

$$\pi_L \circ i(c(s), l(0, u)) = \pi_L(c(s), l(\langle c(s), u\rangle, u)) = l(\langle c(s), u\rangle, u).$$

これより

$$d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{d}{ds} l(\langle c(s), u\rangle, u) = \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \frac{\partial}{\partial r}.$$

$X \in T_u(S^{n-1}(1))$ に対して、$S^{n-1}(1)$ の曲線 $u(t)$ を $u(0) = u$ と $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=0} = X$ を満たすようにとる。すると

$$d\pi_L di(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} l(\langle c(s), u(t)\rangle, u(t)) = \langle c(s), X\rangle \frac{\partial}{\partial r} + X.$$

そこで、$T_u(S^{n-1}(1))$ の正規直交基底 $X_1, \ldots, X_{n-1}$ をとると、$\partial/\partial s, X_1, \ldots, X_{n-1}$ は $c \times P^{n-1}(\mathbf{R})$ の接ベクトル空間の正規直交基底になり、

$$\left| d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} d\pi_L di(X_i) \right| = \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \frac{\partial}{\partial r} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \left(\langle c(s), X_i\rangle \frac{\partial}{\partial r} + X_i \right) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \frac{\partial}{\partial r} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} X_i \right| \\
&= \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \frac{\partial}{\partial r} \right| \cdot \left| \bigwedge_{i=1}^{n-1} X_i \right| \\
&= \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \right|.
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\int_{I(c)} J\pi_L d\mu = \int_c \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}(1)} \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, u \right\rangle \right| d\mu(u) ds = \int_c \kappa_{n-1} ds = \kappa_{n-1} L(c)
$$

を得る。先に得た等式と合わせると

$$
\int_{L_{n-1}(\mathbf{R}^n)} \#(c \cap l) d\mu(l) = \kappa_{n-1} L(c)
$$

を得る。

定理 3.2.3

$$
I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)) = \{(z, l) \in \mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n) \mid z \in l\}
$$

とおき、写像 j を

$$
j : \mathbf{R} \times T(S^{n-1}(1)) \to \mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n);\ (t, x, v) \mapsto (v + tx, l_1(x, v))
$$

によって定める。このとき、j は挿入になりその像は $I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ に一致する。さらに $j : \mathbf{R} \times T(S^{n-1}(1)) \to I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ は二重被覆写像になり、$I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)$ の $2n-1$ 次元部分多様体になる。さらに写像 i を

$$
i : \mathbf{R}^n \times P^{n-1}(\mathbf{R}) \to I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n));\ (z, l) \mapsto (z, l + z)
$$

によって定めると、i は微分同型写像になる。

証明 j の微分写像 dj を計算する。j の像に現われる $L_1(\mathbf{R}^n)$ は局所的には $T(S^{n-1}(1))$ と微分同型になるので、$L_1(\mathbf{R}^n)$ を局所的に $T(S^{n-1}(1))$ と同一視して微分の計算をする。$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$
\begin{aligned}
dj\left(\frac{\partial}{\partial t}, 0, 0\right) &= (x, 0, 0), \\
dj(0, e_k, -\langle v, e_k \rangle x) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} j(t, \phi_k(s)(x), \phi_k(s)(v)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\phi_k(s)(v) + t\phi_k(s)(x), l_1(\phi_k(s)(x), \phi_k(s)(v)))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= (-\langle v, e_k\rangle x + te_k, e_k, -\langle v, e_k\rangle x),\\
dj(0,0,e_k) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} j(t,x,v+se_k)\\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (v+se_k+tx, l_1(x,v+se_k))\\
&= (e_k, 0, e_k).
\end{aligned}$$

これらが線形独立になるかどうか調べるために、これらの外積の長さの二乗を計算する。

$$\begin{aligned}
&\left| dj\left(\frac{\partial}{\partial t}, 0, 0\right) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} dj(0, e_k, -\langle v, e_k\rangle x) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1} dj(0,0,e_l)\right|^2\\
= &\left|(x,0,0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1}(-\langle v, e_k\rangle x + te_k, e_k, -\langle v, e_k\rangle x) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1}(e_l, 0, e_l)\right|^2\\
= &\left|(x,0,0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1}(te_k, e_k, -\langle v, e_k\rangle x) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1}(e_l, 0, e_l)\right|^2\\
= &|(x,0,0)|^2 \cdot \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1}(te_k, e_k, -\langle v, e_k\rangle x) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1}(e_l, 0, e_l)\right|^2\\
= &\left|\bigwedge_{k=1}^{n-1}(te_k, e_k, -\langle v, e_k\rangle x) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1}(e_k, 0, e_k)\right|^2\\
= &\begin{vmatrix} (t^2+1)1_{n-1} & t1_{n-1} \\ t1_{n-1} & 2\cdot 1_{n-1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (t^2/2+1)1_{n-1} & 0 \\ t1_{n-1} & 2\cdot 1_{n-1}\end{vmatrix} = (t^2+2)^{n-1}.
\end{aligned}$$

これは 0 にはならないので、j は挿入になる。

$l_1 : T(S^{n-1}(1)) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ が全射になっていることから、j の像は $I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ に一致することがわかる。

j の定め方より $j(t,x,v) = j(t',x',v')$ となるための必要十分条件は、$v' + t'x' = v + tx$ かつ $l_1(x',v') = l_1(x,v)$ が成り立つことである。$l_1(x',v') = l_1(x,v)$ の必要十分条件は $x' = \pm x$ かつ $v' = v$ であることに注意すると、

$$(t',x',v') = (t,x,v) \quad \text{または} \quad (t',x',v') = (-t,-x,v)$$

が $j(t,x,v) = j(t',x',v')$ となるための必要十分条件になることがわかる。したがって、$j : \mathbf{R}\times T(S^{n-1}(1)) \to I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ は二重被覆写像になり、$I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)$ の $2n-1$ 次元部分多様体になる。

$l = l_1(x,0) \in P^{n-1}(\mathbf{R}) \subset L_1(\mathbf{R}^n)$ $(x \in S^{n-1}(1))$ とおくと

$$l + z = T(1,z)l_1(x,0) = l_1(x, z - \langle z, x\rangle x).$$

これより

$$i(z, l_1(x, 0)) = (z, l_1(x, z - \langle z, x \rangle x))$$

となるので、i は $\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ への C^∞ 級写像にもなる。i の定め方より、i は全単射になることがわかる。i が微分同型写像になることを示すために、微分写像 di を計算する。$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned}
di(x, 0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z + sx, l_1(x, 0)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (z + sx, l_1(x, z + sx - \langle z + sx, x \rangle x)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (z + sx, l_1(x, z - \langle z, x \rangle x)) \\
&= (x, 0, 0), \\
di(e_k, 0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z + se_k, l_1(x, 0)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (z + se_k, l_1(x, z + se_k - \langle z + se_k, x \rangle x)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (z + se_k, l_1(x, z + se_k - \langle z, x \rangle x)) \\
&= (e_k, 0, e_k), \\
di(0, e_k) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z, l_1(\phi_k(s)(x), 0)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (z, l_1(\phi_k(s)(x), z - \langle z, \phi_k(s)(x) \rangle \phi_k(s)(x))) \\
&= (0, e_k, -\langle z, e_k \rangle x - \langle z, x \rangle e_k).
\end{aligned}$$

これらが線形独立になるかどうか調べるために、これらの外積の長さの二乗を計算する。

$$\begin{aligned}
&\left| di(x, 0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} di(e_k, 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1} di(0, e_l) \right|^2 \\
= &\left| (x, 0, 0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} (e_k, 0, e_k) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1} (0, e_l, -\langle z, e_l \rangle x - \langle z, x \rangle e_l) \right|^2 \\
= &\ |(x, 0, 0)|^2 \cdot \left| \bigwedge_{k=1}^{n-1} (e_k, 0, e_k) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1} (0, e_l, -\langle z, e_l \rangle x - \langle z, x \rangle e_l) \right|^2 \\
= &\left| \bigwedge_{k=1}^{n-1} (e_k, 0, e_k) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n-1} (0, e_l, -\langle z, e_l \rangle x - \langle z, x \rangle e_l) \right|^2 .
\end{aligned}$$

これを計算するためにこれらのベクトルの内積を計算しておく。$1 \leq k, l \leq n-1,\ k \neq l$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle (e_k, 0, e_k), (e_k, 0, e_k) \rangle = 2, \\
&\langle (e_k, 0, e_k), (e_l, 0, e_l) \rangle = 0, \\
&\langle (e_k, 0, e_k), (0, e_k, -\langle z, e_k \rangle x - \langle z, x \rangle e_k) \rangle = -\langle z, x \rangle, \\
&\langle (e_k, 0, e_k), (0, e_l, -\langle z, e_l \rangle x - \langle z, x \rangle e_l) \rangle = 0, \\
&\langle (0, e_k, -\langle z, e_k \rangle x - \langle z, x \rangle e_k), (0, e_k, -\langle z, e_k \rangle x - \langle z, x \rangle e_k) \rangle = 1 + \langle z, x \rangle^2, \\
&\langle (0, e_k, -\langle z, e_k \rangle x - \langle z, x \rangle e_k), (0, e_l, -\langle z, e_l \rangle x - \langle z, x \rangle e_l) \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

これらの内積の値より次の等式を得る。

$$
\begin{aligned}
& \left| di(x,0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} di(e_k, 0) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} di(0, e_k) \right|^2 \\
= & \begin{vmatrix} 2 \cdot 1_{n-1} & -\langle z, x \rangle 1_{n-1} \\ -\langle z, x \rangle 1_{n-1} & (1 + \langle z, x \rangle^2) 1_{n-1} \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 2 \cdot 1_{n-1} & -\langle z, x \rangle 1_{n-1} \\ 0 & (1 + \langle z, x \rangle^2/2) 1_{n-1} \end{vmatrix} \\
= & (2 + \langle z, x \rangle^2)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

これは 0 にはならないので、di は線形同型写像になる。i は全単射になるので、i は微分同型写像になることがわかる。

定理 3.2.4 (Crofton の公式) $\mathbf{R}^n$ 内の超曲面 S に対して

$$\int_{L_1(\mathbf{R}^n)} \#(S \cap l) d\mu(l) = \kappa_{n-1} \mathrm{vol}(S)$$

が成り立つ。

証明

$$I(S) = \{(z, l) \in I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)) \mid z \in S\}$$

とおく。先に定めた微分同型写像写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(S)) = S \times P^{n-1}(\mathbf{R})$$

となるので、これは $\mathbf{R}^n \times P^{n-1}(\mathbf{R})$ の $2n-2$ 次元部分多様体になる。したがって、$I(S)$ は $I(\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n))$ の $2n-2$ 次元部分多様体になる。

$$\pi_L : I(S) \to L_1(\mathbf{R}^n) \ ; \quad (z, l) \mapsto l$$

によって写像 π_L を定義すると、π_L は、包含写像 $I(S) \to \mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^n \times L_1(\mathbf{R}^n) \to L_1(\mathbf{R}^n)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこで $I(S)$ 上恒等的に 1 に等しい関数とこの写像 π_L に余面積公式を適用すると

$$\int_{L_1(\mathbf{R}^n)} \#(\pi_L^{-1}(l))d\mu(l) = \int_{I(S)} J\pi_L d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_L^{-1}(l) = \{(z,l) \mid z \in l,\ z \in S\} = (S \cap l) \times \{l\}$$

だから、$\#(\pi_L^{-1}(l)) = \#(S \cap l)$ となり、

$$\int_{L_1(\mathbf{R}^n)} \#(S \cap l)d\mu(l) = \int_{I(S)} J\pi_L d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_L の微分写像 $d\pi_L$ を求める。$l_1(x,0) \in P^{n-1}(\mathbf{R})$ をとり、$T_x(S^{n-1}(1))$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ をとっておく。S の z における接ベクトル X を

$$X = \langle X, x\rangle x + \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, e_k\rangle e_k$$

と表す。先に示した i の微分写像の計算より $1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned}
di(X,0) &= di\left(\langle X, x\rangle x + \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, e_k\rangle e_k\right) \\
&= \langle X, x\rangle (x,0,0) + \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, e_k\rangle (e_k, 0, e_k) \\
&= \left(X, 0, \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, e_k\rangle e_k\right) \\
&= (X, 0, X - \langle X, x\rangle x), \\
di(0, e_k) &= (0, e_k, -\langle z, e_k\rangle x - \langle z, x\rangle e_k).
\end{aligned}$$

$d\pi_L$ は $L_1(\mathbf{R}^n)$ の接成分への射影なので、

$$\begin{aligned}
d\pi_L di(X,0) &= \left(0, \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, e_k\rangle e_k\right) = (0, X - \langle X, x\rangle x), \\
d\pi_L di(0, e_k) &= (e_k, -\langle z, e_k\rangle x - \langle z, x\rangle e_k).
\end{aligned}$$

そこで S の z における接ベクトル空間の正規直交基底 $X_1, \ldots, X_{n-1}$ をとると

$$\begin{aligned}
J(\pi_L \circ i) &= \left| \bigwedge_{k=1}^{n-1} d\pi_L di(X_k, 0) \wedge \bigwedge_{m=1}^{n-1} d\pi_L di(0, e_m) \right| \\
&= \left| \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left(0, \sum_{l=1}^{n-1} \langle X_k, e_l\rangle e_l\right) \wedge \bigwedge_{m=1}^{n-1} (e_m, -\langle z, e_m\rangle x - \langle z, x\rangle e_m) \right|.
\end{aligned}$$

ここでほとんどすべての x に対して

$$\sum_{l=1}^{n-1}\langle X_1, e_l\rangle e_l,\ \ldots,\ \sum_{l=1}^{n-1}\langle X_{n-1}, e_l\rangle e_l$$

は $x^{\perp} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ を張るので、このとき、

$$\begin{aligned}
J(\pi_L \circ i) &= \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1}\left(0, \sum_{l=1}^{n-1}\langle X_k, e_l\rangle e_l\right) \wedge \bigwedge_{m=1}^{n-1}(e_m, -\langle z, e_m\rangle x)\right| \\
&= \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1}\left(0, \sum_{l=1}^{n-1}\langle X_k, e_l\rangle e_l\right)\right| \cdot \left|\bigwedge_{m=1}^{n-1}(e_m, -\langle z, e_m\rangle x)\right| \\
&= \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\langle X_k, e_l\rangle e_l\right| \cdot 1 = \left|\det(\langle X_k, e_l\rangle)\bigwedge_{m=1}^{n-1} e_m\right| \\
&= |\det(\langle X_k, e_l\rangle)| = \left|\left\langle \bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k, \bigwedge_{l=1}^{n-1} e_l\right\rangle\right| = \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right|.
\end{aligned}$$

最後の等号は命題 1.3.12 より

$$\left|\left\langle \bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k, \bigwedge_{l=1}^{n-1} e_l\right\rangle\right| = \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge *\left(\bigwedge_{l=1}^{n-1} e_l\right)\right| = \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right|$$

となることを使った。以上より

$$\begin{aligned}
\int_{I(S)} J\pi_L d\mu &= \int_{S\times P^{n-1}(\mathbf{R})} J\pi_L Ji d\mu = \int_{S\times P^{n-1}(\mathbf{R})} J(\pi_L \circ i) d\mu \\
&= \int_{S\times P^{n-1}(\mathbf{R})} \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right| d\mu = \int_S \left(\int_{P^{n-1}(\mathbf{R})} \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right| d\mu\right) d\mu.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_{P^{n-1}(\mathbf{R})} \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right| d\mu = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}(1)} \left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right| d\mu(x)$$

となり、被積分関数の $\left|\bigwedge_{k=1}^{n-1} X_k \wedge x\right|$ は T_zS の法直線への x の直交射影の長さに等しい。$S^{n-1}(1)$ 上の測度の不変性よりこの積分は

$$\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}(1)} |x_1| d\mu(x) = \int_{S_+^{n-1}} x_1 d\mu(x) = \mathrm{vol}(D^{n-1}(1)) = \kappa_{n-1}$$

に等しい。後半の計算は例 1.5.14 の結果を利用した。したがって、

$$\int_{I(S)} J\pi_L d\mu = \int_S \kappa_{n-1} d\mu = \kappa_{n-1}\mathrm{vol}(S).$$

余面積公式から得られた積分の等式と合せると次の Crofton の公式を得る。

$$\int_{L_1(\mathbf{R}^n)} \#(S \cap l) d\mu(l) = \kappa_{n-1}\mathrm{vol}(S).$$

3.3 Euclid 空間の等長変換群

n 次実正方行列全体を $M_n(\mathbf{R})$ で表す。直交群 $O(n)$ が $M_n(\mathbf{R})$ 内の部分多様体になることを示す。n 次実対称行列全体を $S_n(\mathbf{R})$ で表す。

$$\varphi : M_n(\mathbf{R}) \to S_n(\mathbf{R})\ ;\ X \mapsto {}^tXX$$

によって C^∞ 級写像 φ を定める。$O(n) = \varphi^{-1}(1)$ が成り立つ。$O(n)$ の各点で φ の微分写像が全射になることを示せば、$O(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ 内の部分多様体になることがわかる。$X, Y \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$d\varphi_X(Y) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \varphi(X+sY) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} {}^t(X+sY)(X+sY) = {}^tXY + {}^tYX.$$

$g \in O(n)$ に対して

$$d\varphi_{gX}(gY) = {}^t(gX)gY + {}^t(gY)gX = {}^tXY + {}^tYX = d\varphi_X(Y).$$

これより $d\varphi_{gX} \circ g = d\varphi_X : M_n(\mathbf{R}) \to S_n(\mathbf{R})$ となり、$\mathrm{rank}(d\varphi_{gX}) = \mathrm{rank}(d\varphi_X)$ が成り立つ。よって、$d\varphi_1$ が全射になることを示せば十分である。

$$d\varphi_1(Y) = Y + {}^tY \qquad (Y \in M_n(\mathbf{R}))$$

より $d\varphi_1$ は全射になり、$O(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ 内の部分多様体になることがわかる。さらに

$$\dim O(n) = \dim M_n(\mathbf{R}) - \dim S_n(\mathbf{R}) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

この $O(n)$ の多様体構造に関して

$$O(n) \times O(n) \to O(n)\ ;\ (g,h) \mapsto gh, \qquad O(n) \to O(n)\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

は C^∞ 級写像になり、$O(n)$ は Lie 群になる。

n 次交代行列全体を $A_n(\mathbf{R})$ で表す。$O(n)$ の単位元 1 における接ベクトル空間は

$$T_1(O(n)) = \ker d\varphi_1 = A_n(\mathbf{R})$$

になる。ベクトル空間 $M_n(\mathbf{R})$ の内積を

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tXY) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n X_{ij}Y_{ij} \qquad (X, Y \in M_n(\mathbf{R}))$$

によって定める。$M_n(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間 $S_n(\mathbf{R})$ と $A_n(\mathbf{R})$ にもこの内積から内積が定まる。$g \in O(n)$ に対して

$$\langle gX, gY\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t(gX)gY) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tX{}^tggY) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tXY) = \langle X, Y\rangle$$

となるので、$O(n)$ の元を左からかける作用は $M_n(\mathbf{R})$ の等長変換になる。

$$\langle Xg, Yg\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t(Xg)Yg) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tg{}^tXYg) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tXYg{}^tg) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tXY) = \langle X, Y\rangle$$

となるので、$O(n)$ の元を右からかける作用も $M_n(\mathbf{R})$ の等長変換になる。$M_n(\mathbf{R})$ の部分多様体 $O(n)$ には誘導 Riemann 計量を導入しておく。すると $g \in O(n)$ に対して

$$L_g : O(n) \to O(n)\ ;\ h \mapsto gh, \qquad R_g : O(n) \to O(n)\ ;\ h \mapsto hg$$

の微分写像は等長的線形同型写像になり、どちらも $O(n)$ の等長変換になる。

$$i : O(n) \to O(n)\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

も等長変換になることがわかる。i が全単射であることは群の逆元の対応であることからわかるので、後は各点における微分写像が等長的線形同型写像になることを示せばよい。$g \in O(n)$ と $A \in A_n(\mathbf{R})$ に対して

$$di_g(dL_g(A)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i(g\exp tA) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-tA)g^{-1} = -dR_{g^{-1}}(A).$$

これより、$di_g = -dR_{g^{-1}} \circ (dL_g)^{-1}$ となり、di_g も等長的線形同型写像になる。

回転群 $SO(n)$ は $O(n)$ の単位元の連結成分になる。$\mathbf{R}^n$ の向きを保つ等長変換の全体を $M(\mathbf{R}^n)$ で表す。$M(\mathbf{R}^n)$ の任意の元は $g \in SO(n)$ と $u \in \mathbf{R}^n$ によって

$$T(g, u)(x) = gx + u \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表すことができる。これより $M(\mathbf{R}^n)$ は多様体としては積 $SO(n) \times \mathbf{R}^n$ になる。$M(\mathbf{R}^n)$ の $\mathbf{R}^n$ への作用は次のように表すとわかりやすい。

$$T(g, u)\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これによって、$M(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ の Lie 変換群になる。積は次のようになる。

$$T(g, u)T(h, v) = \begin{bmatrix} g & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gh & gv + u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

写像

$$SO(n) \times \mathbf{R}^n \to M(\mathbf{R}^n)\ ;\ (g, u) \mapsto T(g, u)$$

は微分同型写像になる。$SO(n)$ の Riemann 計量と $\mathbf{R}^n$ の計量の積 Riemann 計量を $M(\mathbf{R}^n)$ に導入する。

命題 3.3.1 $M(\mathbf{R}^n)$ の左移動は等長変換になり、さらに、体積保存変換になる。

証明　$\alpha = T(g,u) \in M(\mathbf{R}^n)$ とおくと $L_\alpha(T(h,v)) = T(gh, gv+u)$ となるので、$A \in A_n(\mathbf{R}),\ Y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
dL_\alpha(dL_h(A),0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_\alpha T(h\exp tA, v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(gh\exp tA, gv+u) \\
&= (dL_{gh}(A),0), \\
dL_\alpha(0,Y) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_\alpha T(h, v+tY) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(gh, g(v+tY)+u) \\
&= (0,gY).
\end{aligned}$$

これより dL_α は等長線形写像になり、L_α は等長変換になる。したがって、L_α は体積保存変換にもなる。

注意 3.3.2 $M(\mathbf{R}^n)$ の任意の点 α に対して

$$R_\alpha(x) = x\alpha \qquad (x \in M(\mathbf{R}^n))$$

によって右移動 R_α を定める。$\alpha = T(g,u) \in M(\mathbf{R}^n)$ とおくと $R_\alpha(T(h,v)) = T(hg, hu+v)$ となるので、$A \in A_n(\mathbf{R}),\ Y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
dR_\alpha(dL_h(A),0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_\alpha T(h\exp tA, v) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(h(\exp tA)g, h(\exp tA)u+v) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(hg(\exp tg^{-1}Ag), h(\exp tA)u+v) \\
&= (dL_{hg}(g^{-1}Ag), hAu), \\
dR_\alpha(0,Y) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_\alpha T(h, v+tY) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(hg, hu+v+tY) \\
&= (0,Y).
\end{aligned}$$

これより dR_α は左移動の場合とは異なり等長線形写像にならない。ところが、R_α は体積保存変換になる。これを以下で示す。$1 \le a < b \le n$ に対して、(a,b) 成分が 1、(b,a) 成分が -1 であって他の成分は 0 である行列を $A_{a,b}$ で表わす。すると、$\{A_{a,b} \mid 1 \le a < b \le n\}$ は $A_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる。さらに、$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\{X_i \mid 1 \le i \le n\}$ をとると、

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{a<b} dR_\alpha(dL_h(A_{a,b}),0) \wedge \bigwedge_{i=1}^n dR_\alpha(0,X_i) \\
={}& \bigwedge_{a<b} (dL_{hg}(g^{-1}A_{a,b}g), hA_{a,b}u) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (0,X_i) \\
={}& \bigwedge_{a<b} (dL_{hg}(g^{-1}A_{a,b}g), 0) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (0,X_i)
\end{aligned}$$

が成り立ち、$SO(n)$ において左移動と右移動はどちらも等長変換になることと命題 3.3.1 より、dR_α は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、R_α は体積保存変換になる。

3.4 Poincaré の公式

Euclid 空間の二つの部分多様体について Poincaré の公式を証明する。

補題 3.4.1

$$I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)) = \{(x, y, \alpha) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n) \mid x = \alpha(y)\}$$

とおくと、$I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ は $(\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)$ の $n + \dim M(\mathbf{R}^n)$ 次元正規部分多様体になる。さらに

$$\begin{aligned} i \ &: \ (\mathbf{R}^n)^2 \times SO(n) \to I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)) \\ &; \ (x, y, g) \mapsto (x, y, T(1, x)T(g, 0)T(1, -y)) \end{aligned}$$

によって i を定めると、i は微分同型写像になる。

証明　$(\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)$ の元 $(x, y, T(g, u))$ が $I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ に含まれるための必要十分条件は $x = gy + u$ となる。そこで

$$F : (\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n \ ; \ (x, y, T(g, u)) \mapsto gy + u - x$$

とおくと $I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)) = F^{-1}(0)$ が成り立つ。さらに F の定義より、$X \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} dF_{(x,y,T(g,u))}(X, 0, 0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(x + tX, y, T(g, u)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (gy + u - x - tX) \\ &= -X \end{aligned}$$

となり、各点で dF は全射になることがわかる。陰関数定理より $I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ は $(\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)$ の正規部分多様体になる。

次に i が微分同型写像になることを示す。i の定め方より i は $(\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ への C^∞ 級写像にもなる。$(x, y, \alpha) \in I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ に対して

$$T(1, -x)\alpha T(1, y)(0) = T(1, -x)\alpha(y) = T(1, -x)(x) = 0$$

となり $T(1,-x)\alpha T(1,y)$ は向きを保つので $T(1,-x)\alpha T(1,y) \in SO(n)$ が成り立つ。そこで、

$$\begin{aligned} j \quad &: \quad I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)) \to (\mathbf{R}^n)^2 \times SO(n) \\ &; \quad (x,y,\alpha) \mapsto (x,y,T(1,-x)\alpha T(1,y)) \end{aligned}$$

によって写像 j を定めると、j も C^∞ 級写像になり i の逆写像になる。したがって、i は微分同型写像になる。

定理 3.4.2 (Poincaré の公式) 自然数 p,q,n が $p+q=n$ を満たすとする。p,q にのみ依存する定数 C が存在し、$\mathbf{R}^n$ 内の p 次元部分多様体 S_0 と q 次元部分多様体 S_1 に対して

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S_0 \cap gS_1) d\mu(g) = C\mathrm{vol}(S_0)\mathrm{vol}(S_1)$$

が成り立つ。

注意 3.4.3 第 3.5 節で Euclid 空間における Hotelling の公式の応用として $p = 1,\ q = n-1$ の場合に定理 3.4.2 の Poincaré の公式の係数 C が

$$C = \frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{L(S^1(1))\mathrm{vol}(S^{n-1}(1))}$$

で与えられることを示す。さらに $p+q \geq n$ を満たす p,q についても Poincaré の公式は成立し、その場合の Poincaré の公式は次のようになる。$\mathbf{R}^n$ 内の p 次元部分多様体 S_0 と q 次元部分多様体 S_1 に対して

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \mathrm{vol}(S_0 \cap gS_1) d\mu(g) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n}(1))\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p(1))\mathrm{vol}(S^q(1))}\mathrm{vol}(S_0)\mathrm{vol}(S_1)$$

が成り立つ。

証明

$$I(S_0,S_1) = \{(x,y,g) \in I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)) \mid x \in S_0,\ y \in S_1\}$$

とおく。補題 3.4.1 の微分同型写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(S_0,S_1)) = S_0 \times S_1 \times SO(n)$$

となるので、これは $SO(n) \times (\mathbf{R}^n)^2$ の $n + n(n-1)/2 = \dim M(\mathbf{R}^n)$ 次元部分多様体になる。したがって、$I(S_0,S_1)$ は $I((\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n))$ の $\dim M(\mathbf{R}^n)$ 次元部分多様体になる。

$$\pi_M : I(S_0,S_1) \to M(\mathbf{R}^n)\ ; \quad (x,y,g) \mapsto g$$

によって写像 π_M を定義すると、π_M は包含写像 $I(S_0, S_1) \to (\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n)$ と第三成分への射影 $(\mathbf{R}^n)^2 \times M(\mathbf{R}^n) \to M(\mathbf{R}^n)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこでこの写像 π_M に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(\pi_M^{-1}(g))d\mu(g) = \int_{I(S_0,S_1)} J\pi_M d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_M^{-1}(g) = \{(g(y), y, g)) \mid g(y) \in S_0 \cap gS_1\}$$

だから、$\#(\pi_M^{-1}(g)) = \#(S_0 \cap gS_1)$ となり、

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S_0 \cap gS_1)d\mu(g) = \int_{I(S_0,S_1)} J\pi_M d\mu.$$

さらに微分同型写像 $i : S_0 \times S_1 \times SO(n) \to I(S_0, S_1)$ に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{I(S_0,S_1)} J\pi_M d\mu = \int_{S_0\times S_1\times SO(n)} J\pi_M Jid\mu = \int_{S_0\times S_1\times SO(n)} J(\pi_M \circ i)d\mu$$

となり

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S_0 \cap gS_1)d\mu(g) = \int_{S_0\times S_1\times SO(n)} J(\pi_M \circ i)d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず $\pi_M \circ i$ の微分写像 $d(\pi_M \circ i)$ を求める。$(x, y, g) \in (\pi_M \circ i)$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi_M \circ i(x, y, g) &= T(1, x)T(g, 0)T(1, -y) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & -gy \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & x - gy \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= T(g, x - gy).
\end{aligned}$$

これより $\pi_M \circ i$ の微分写像 $d(\pi_M \circ i)$ の $X \in T_x(S_0),\ Y \in T_y(S_1),\ A \in A_n(\mathbf{R})$ への作用は次のようになる。

$$\begin{aligned}
d(\pi_M \circ i)(X, 0, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
d(\pi_M \circ i)(0, Y, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & -gY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
d(\pi_M \circ i)(0, 0, dL_g(A)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \begin{bmatrix} g\exp tA & x - g\exp tAy \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} dL_g(A) & -gAy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$T_x(S_0)$ の正規直交基底 $\{X_i \mid 1 \le i \le p\}$、$T_y(S_1)$ の正規直交基底 $\{Y_j \mid 1 \le j \le q\}$、$A_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底 $\{A_{a,b} \mid 1 \le a < b \le n\}$ をとる。上の計算より、

$$\begin{aligned}
& d(\pi_M \circ i)\left(\bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} Y_j \wedge \bigwedge_{a<b} dL_g(A_{a,b})\right) \\
= \ & \bigwedge_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} 0 & X_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} \begin{bmatrix} 0 & -gY_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{a<b} \begin{bmatrix} dL_g(A_{a,b}) & -gA_{a,b}y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
= \ & \bigwedge_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} 0 & X_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} \begin{bmatrix} 0 & -gY_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{a<b} \begin{bmatrix} dL_g(A_{a,b}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \left| d(\pi_M \circ i)\left(\bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} Y_j \wedge \bigwedge_{a<b} dL_g(A_{a,b})\right) \right| \\
= \ & \left| \bigwedge_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} 0 & X_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} \begin{bmatrix} 0 & -gY_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{a<b} \begin{bmatrix} dL_g(A_{a,b}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| \\
= \ & \left| \bigwedge_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} 0 & X_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} \begin{bmatrix} 0 & -gY_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \bigwedge_{a<b} \begin{bmatrix} dL_g(A_{a,b}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| \\
= \ & \left| \bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} (-gY_j) \right| \cdot \left| \bigwedge_{a<b} dL_g(A_{a,b}) \right| \\
= \ & \left| \bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} gY_j \right|.
\end{aligned}$$

となり

$$J(\pi_M \circ i) = \left| \bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} gY_j \right|$$

を得る。問題の積分 $\displaystyle\int_{S_0 \times S_1 \times SO(n)} J(\pi_M \circ i) d\mu$ をまず $SO(n)$ 上で積分する。$SO(n)$ は個数を固定した正規直交系の全体に推移的に作用するので、積分

$$\int_{SO(n)} \left| \bigwedge_{i=1}^{p} X_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} gY_j \right| d\mu(g)$$

は X_i と Y_j のとり方には依存しないだけでなく、接空間 $T_x(S_0)$ と $T_y(S_1)$ にも依存せず、これらの次元 p, q にのみ依存して定まる定数 C になる。したがって、

$$\int_{S_0 \times S_1 \times SO(n)} J(\pi_M \circ i) d\mu = \int_{S_0 \times S_1} C d\mu = C \mathrm{vol}(S_0) \mathrm{vol}(S_1)$$

となり、次の Poincaré の公式を得る。

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S_0 \cap gS_1)d\mu(g) = C\mathrm{vol}(S_0)\mathrm{vol}(S_1).$$

3.5 Steiner の公式と Hotelling の公式

$\mathbf{R}^n$ の滑かな超曲面 S に単位法ベクトル e が定まっているとする。S の接ベクトル場 X で $\langle e, e\rangle = 1$ を微分すると、

$$0 = X\langle e, e\rangle = 2\langle Xe, e\rangle$$

となるので、Xe は S の接ベクトル場になる。S 上の関数 f に対して $(fX)e = f(Xe)$ となるので、$x \in S$ における $(Xe)_x$ は X_x に対して定まる。そこで、

$$AX = -Xe$$

とおくと、A は S の各点で接ベクトル空間の線形変換を定める。A を S の**シェイプ作用素**と呼ぶ。S の接ベクトル場 X, Y に対して

$$\langle XY, e\rangle - \langle YX, e\rangle = \langle [X, Y], e\rangle = 0$$

となるので、$\langle XY, e\rangle = \langle YX, e\rangle$ が成り立つ。X で $\langle Y, e\rangle = 0$ を微分すると

$$0 = X\langle Y, e\rangle = \langle XY, e\rangle + \langle Y, Xe\rangle = \langle XY, e\rangle - \langle Y, AX\rangle.$$

したがって、

$$\langle Y, AX\rangle = \langle XY, e\rangle = \langle YX, e\rangle = \langle X, AY\rangle$$

となり、A は対称線形変換になる。よって、A は正規直交基底によって対角化可能になり、固有値はすべて実数になる。A の固有値を S の**主曲率**と呼ぶ。それらを $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ とする。$t_1, \ldots, t_{n-1}$ の第 i 次基本対称式を $\sigma_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$ で表す。すなわち

$$\begin{aligned}
\sigma_1(t_1, \ldots, t_{n-1}) &= \sum_{p=1}^{n-1} t_p, \\
\sigma_2(t_1, \ldots, t_{n-1}) &= \sum_{1 \le p < q \le n-1} t_p t_q, \\
&\ldots, \\
\sigma_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}) &= t_1 \cdots t_{n-1}.
\end{aligned}$$

S の**第 i 次平均曲率の積分** $M_i(S)$ を

$$M_i(S) = \binom{n-1}{i}^{-1} \int_S \sigma_i(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) d\mu$$

によって定義する。ただし、$M_0(S) = \mathrm{vol}(S)$ とする。$M_1(S)$ は通常の平均曲率の積分である。S の各点にそこでの単位法ベクトルを対応させる Gauss 写像を γ で表す。S のシェイプ作用素を A で表すことにする。S の接ベクトル X に対して

$$d\gamma(X) = X\gamma = -A(X)$$

となる。よって、$J\gamma = |\kappa_1 \cdots \kappa_{n-1}|$ が成り立つ。S がコンパクトで向きがついている場合に $\chi(S)$ によって S の Euler 数を表すことにする。S が偶数次元のとき、

$$M_{n-1}(S) = \frac{1}{2}\omega_n \chi(S)$$

が成り立つことが知られている。K が B^n と同相の領域のときは

$$M_{n-1}(\partial K) = \omega_n$$

が成り立つ。

$K \subset \mathbf{R}^n$ が滑らかな境界 ∂K を持つコンパクト領域の場合を考える。∂K における K の内向きの単位法ベクトルを e で表す。十分小さな $\rho \geq 0$ に対して

$$f : \partial K \times [0, \rho] \to K_\rho - \mathrm{int}K\ ;\ (x, t) \mapsto x - te$$

は微分同型写像になる。∂K のシェイプ作用素を A で表す。∂K の接ベクトル X に対して

$$df(X) = X - tXe = X + tA(X)$$

となり、$[0, \rho]$ の方向の接ベクトル $\partial/\partial t$ に対しては

$$df(\partial/\partial t) = -e$$

が成り立つ。よって、

$$Jf = (1 + t\kappa_1) \cdots (1 + t\kappa_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) t^i$$

となる。ただし、$\sigma_0 = 1$ と約束しておく。以上の計算より

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K_\rho) &= \mathrm{vol}(K) + \mathrm{vol}(K_\rho - \mathrm{int}K) \\
&= \mathrm{vol}(K) + \int_{\partial K} \int_0^\rho \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) t^i dt d\mu \\
&= \mathrm{vol}(K) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^{i+1}}{i+1} \int_{\partial K} \sigma_i(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) d\mu \\
&= \mathrm{vol}(K) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^{i+1}}{i+1} \binom{n-1}{i} M_i(\partial K).
\end{aligned}$$

これより次の Steiner の公式を得る。

定理 3.5.1 (Steiner の公式) $K \subset \mathbf{R}^n$ を滑らかな境界 ∂K を持つコンパクト領域から距離 ρ 以下の点の全体を K_ρ で表わすと、十分小さい ρ に対して次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{vol}(K_\rho) = \mathrm{vol}(K) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^{i+1}}{i+1} \binom{n-1}{i} M_i(\partial K).$$

これは 2 次元の Steiner の公式 (定理 2.5.6) の一般化である。さらに、2 次元の Hotelling の公式 (定理 2.5.8) は次のように一般化できる。

定理 3.5.2 (Hotelling の公式) $\mathbf{R}^n$ 内の滑らかな単純閉曲線 c から距離 ρ 以下の点の全体を c_ρ で表すと、十分小さい ρ に対して $\mathrm{vol}(c_\rho) = L(c)\mathrm{vol}(\bar{D}^{n-1}(\rho))$ が成り立つ。

証明 c の弧長パラータを s で表わす。c に沿った法ベクトル場 X に対して X の s による微分の法成分を

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^\perp = \nabla^\perp X$$

で表わすことにする。Gram-Schmidt の直交化法により、c に沿った正規直交法ベクトル場 $v_1, \ldots, v_{n-1}$ を構成できる。$\nabla^\perp v_i$ は $v_1, \ldots, v_{n-1}$ の線形結合で表現できるので、

$$\nabla^\perp v_i = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_i^j v_j$$

を満たす関数 ω_i^j が存在する。任意の法ベクトル場 X を

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X^i v_i$$

と表わすと、

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp X &= \left(\frac{dX}{ds}\right)^\perp = \left(\frac{d}{ds}\sum_{i=1}^{n-1} X^i v_i\right)^\perp = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX^i}{ds} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} X^i \frac{dv_i}{ds}\right)^\perp \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX^i}{ds} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} X^i \left(\frac{dv_i}{ds}\right)^\perp = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX^i}{ds} v_i + \sum_{i=1}^{n-1} X^i \nabla^\perp v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX^i}{ds} v_i + \sum_{i,j=1}^{n-1} X^i \omega_i^j v_j = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dX^i}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^i X^j\right) v_i
\end{aligned}$$

となる。これより、法ベクトル場 X が $\nabla^\perp X = 0$ を満たすための必要十分条件は、$X_1, \ldots, X_{n-1}$ が連立線形常微分方程式

$$\frac{dX^i}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^i X^j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

を満たすことになる。連立線形常微分方程式の解は初期条件に対して一意的に存在し、初期条件に解を対応させる写像は線形になる。したがって、$c(0)$ における曲線 c の法ベクトル空間の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ をとり、c 上の法ベクトル場 e_i に $\nabla^\perp e_i = 0$ を満たすように拡張することができる。

$$\frac{d}{ds}\langle e_i, e_j\rangle = \left\langle \frac{de_i}{ds}, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \frac{de_j}{ds} \right\rangle = \langle \nabla^\perp e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla^\perp e_j\rangle = 0$$

となるので、$e_1, \ldots, e_{n-1}$ はすべての点で正規直交系になる。さらに、$\nabla^\perp e_i = 0$ ということは、$\dfrac{de_i}{ds}$ は曲線 c に接することになる。すなわち、c の単位接ベクトルを u で表わすと、$\dfrac{de_i}{ds}$ は u に比例する。$\rho \geq 0$ に対して

$$f : c \times \bar{D}^{n-1}(\rho) \to c_\rho\ ;\ (x, t) \mapsto x - \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i$$

によって写像 f を定める。各 e_i と u は直交するので $\langle e_i, u\rangle = 0$. これを s で微分すると

$$\left\langle \frac{de_i}{ds}, u \right\rangle + \left\langle e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle = 0$$

となり

$$\left\langle \frac{de_i}{ds}, u \right\rangle = -\left\langle e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle$$

が成り立つことに注意しておく。

$$\begin{aligned}
df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{\partial f}{\partial s} = u - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{de_i}{ds} = u - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \left\langle \frac{de_i}{ds}, u \right\rangle u \\
&= u + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \left\langle e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle u = \left(1 + \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle\right) u, \\
df\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= \frac{\partial f}{\partial t_i} = -e_i
\end{aligned}$$

となりこれらは直交しているので、命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned}
Jf &= \left| df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} df\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \right| = \left| df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \right| \cdot \left| \bigwedge_{i=1}^{n-1} df\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \right| \\
&= \left| 1 + \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

ここまでの計算は e_i を平行法ベクトル場になるように拡張しなくても示すことができる。e_i は c に沿った正規直交法ベクトル場であればよい。このとき上と同じ形

で f を定めると

$$df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial f}{\partial s} = u - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{de_i}{ds}, \qquad df\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial t_i} = -e_i$$

となり

$$\begin{aligned}
df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} df\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= (-1)^{n-1}\left(u - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{de_i}{ds}\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} e_i \\
&\quad (de_i/ds \text{ の法成分は } e_i \text{ との外積で } 0 \text{ になる}) \\
&= (-1)^{n-1}\left(u - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \left\langle \frac{de_i}{ds}, u \right\rangle u\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} e_i \\
&= (-1)^{n-1}\left(u + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \left\langle e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle u\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} e_i \\
&= (-1)^{n-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \left\langle e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle\right) u \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} e_i.
\end{aligned}$$

したがって、この場合も次の等式を得る。

$$Jf = \left| 1 + \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle \right|.$$

いずれにしても十分小さい ρ に対して f は微分同型写像になり、

$$Jf = 1 + \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle$$

が成り立つ。余面積公式 (定理 1.5.5) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(c_\rho) &= \int_{c\times\bar{D}^{n-1}(\rho)} Jf d\mu = \int_{c\times\bar{D}^{n-1}(\rho)} \left(1 + \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle\right) d\mu \\
&= \int_{c\times\bar{D}^{n-1}(\rho)} 1 d\mu + \int_{c\times\bar{D}^{n-1}(\rho)} \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle d\mu \\
&= L(c)\mathrm{vol}(\bar{D}^{n-1}(\rho)) + \int_c \left(\int_{\bar{D}^{n-1}(\rho)} \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i, \frac{du}{ds} \right\rangle d\mu(t) \right) ds \\
&= L(c)\mathrm{vol}(\bar{D}^{n-1}(\rho)).
\end{aligned}$$

したがって次の等式を得る。

$$\mathrm{vol}(c_\rho) = L(c)\mathrm{vol}(\bar{D}^{n-1}(\rho)).$$

命題 3.5.3 定理 3.4.2 において、$p = 1,\ q = n - 1$ に対する Poincaré の公式の係数 C は

$$C = \frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{L(S^1(1))\mathrm{vol}(S^{n-1}(1))}$$

で与えられる。すなわち、$\mathbf{R}^n$ 内の 1 次元部分多様体 S_0 と $n-1$ 次元部分多様体 S_1 に対して

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S_0 \cap gS_1) d\mu(g) = \frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{L(S^1(1))\mathrm{vol}(S^{n-1}(1))} L(S_0)\mathrm{vol}(S_1)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.4.2 において、$S_0 = S^1(1),\ S_1 = S^{n-1}(1)$ とおいて Poincaré の公式の係数 C を決定する。$S^{n-1}(1)$ を $T(\Phi, u) \in M(\mathbf{R}^n)$ によって移すと中心 u 半径 1 の $n-1$ 次元球面になる。これが $S^1(1)$ と交点を持つための必要十分条件は、$S^1(1)$ と u の距離が 1 以下になることである。この距離がちょうど 1 になる u の全体は $n-1$ 次元になり、そのような $T(\Phi, u)$ の全体は $M(\mathbf{R}^n)$ の測度に関して測度 0 になる。よって Poincaré の公式の積分は $S^1(1)$ との距離が 1 未満になる点の全体 $S^1(1)_1$ に u が含まれる部分だけで考えればよい。このとき

$$\#(S^1(1) \cap T(\Phi, u)S^{n-1}(1)) = 2$$

となる。定理 3.5.2 と例 1.5.13 より

$$\begin{aligned} & \int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S^1(1) \cap gS^{n-1}(1)) d\mu(g) = 2\mathrm{vol}(SO(n))\mathrm{vol}(S^1(1)_1) \\ = \ & 2\mathrm{vol}(SO(n))L(S^1(1))\mathrm{vol}(D^{n-1}(1)) = 2\mathrm{vol}(SO(n))\mathrm{vol}(S^n(1)). \end{aligned}$$

ここで写像 $f : SO(n+1) \to S^n(1)$ を $f(\Phi) = \Phi e_1\ (\Phi \in SO(n+1))$ によって定める。すると $Jf = 1$ が成り立ち余面積公式より

$$\int_{SO(n+1)} 1 d\mu = \int_{S^n(1)} \left(\int_{SO(n)} 1 d\mu \right) d\mu$$

となり $\mathrm{vol}(SO(n+1)) = \mathrm{vol}(SO(n))\mathrm{vol}(S^n(1))$ を得る。したがって、上で得た等式より

$$\int_{M(\mathbf{R}^n)} \#(S^1(1) \cap gS^{n-1}(1)) d\mu(g) = 2\mathrm{vol}(SO(n+1)).$$

これを Poincaré の公式に適用すると、

$$2\mathrm{vol}(SO(n+1)) = CL(S^1(1))\mathrm{vol}(S^{n-1}(1))$$

となり

$$C = \frac{2\mathrm{vol}(SO(n+1))}{L(S^1(1))\mathrm{vol}(S^{n-1}(1))}$$

を得る。

注意 3.5.4 命題 3.5.3 の証明では、Hotelling の公式 (定理 3.5.2) からの結論

$$\mathrm{vol}(S^1(1)_1) = L(S^1(1))\mathrm{vol}(D^{n-1}(1))$$

を使った。より一般に $0 < r \leq R$ のとき

$$\mathrm{vol}(S^1(R)_r) = L(S^1(R))\mathrm{vol}(D^{n-1}(r))$$

が成り立つ。これらは次のように回転体の体積の計算によって求めることもできる。

$$S^1(R) = \{(R\cos\theta, 0, \ldots, R\sin\theta) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とすると、$S^1(R)$ からの距離が r 未満の点全体 $S^1(R)_r$ は

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbf{R}^n \mid (x_1 - R)^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < r^2\}$$

から x_1x_n 平面の回転によって得られる回転体

$$\{(x_1\cos\theta, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1\sin\theta) \mid (x_1 - R)^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < r^2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

に一致する。したがって、

$$\begin{aligned}
& \mathrm{vol}(S^1(R)_r) \\
= \ & \int_{D^{n-2}(r)} \pi \left(R + \sqrt{r^2 - (x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)} \right)^2 d\mu(x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
& - \int_{D^{n-2}(r)} \pi \left(R - \sqrt{r^2 - (x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)} \right)^2 d\mu(x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
= \ & 2\pi R \int_{D^{n-2}(r)} 2\sqrt{r^2 - (x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)} d\mu(x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
= \ & L(S^1(R)) \int_{D^{n-2}(r)} L(\{(t, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mid t \in \mathbf{R}\} \cap D^{n-1}(r)) d\mu(x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
= \ & L(S^1(R))\mathrm{vol}(D^{n-1}(r)).
\end{aligned}$$

3.6 Euclid 空間のアファイン部分空間の全体

Euclid 空間の一般次元部分多様体に関する Crofton の公式を定式化するために、Euclid 空間のアファイン部分空間の全体について考える。そのために $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間全体の成す Grassmann 多様体を準備する。ここでは Lie 群や等質空間の知識が若干必要になる。

$\mathbf{R}^n$ に通常の内積を入れておく。$\mathbf{R}^n$ 内の k 次元部分ベクトル空間の全体を $G_k(\mathbf{R}^n)$ で表わし、向きのついた k 次元部分ベクトル空間の全体を $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ で表わす。

$$O_k(\mathbf{R}^n) = \{u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \in \wedge^k \mathbf{R}^n \mid u_1, \ldots, u_k \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ 内の正規直交系}\}$$

とおくと、$x \in \tilde{G}_l(\mathbf{R}^n)$ に対して x の正の向きの正規直交基底 $u_1, \ldots, u_k$ をとり $i(x) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \in O_k(\mathbf{R}^n)$ とおく。x の別の正の向きの正規直交基底 $u'_1, \ldots, u'_l$ をとっても、$u'_1, \ldots, u'_k$ は $u_1, \ldots, u_k$ に $SO(k)$ の元を作用させることで得られるので、

$$u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_k = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$$

が成り立つ。よって、$i : \tilde{G}_k(\mathbf{R}^n) \to O_k(\mathbf{R}^n)$ は正の向きの正規直交基底のとり方によらずに定まる。$x, x' \in \tilde{G}_l(\mathbf{R}^n)$ に対して、$i(x) = i(x')$ となるのは x と x' が向きをこめて等しくなることと同値になるので、写像 i は単射になる。正規直交系に対してそれらの生成する部分ベクトル空間を考えることにより、写像 i は全射であることがわかる。以上で i は全単射であることがわかった。$SO(n)$ の $\mathbf{R}^n$ への作用は自然に $SO(n)$ の $\wedge^k\mathbf{R}^n$ への作用を誘導する。$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとると、

$$O_k(\mathbf{R}^n) = SO(n) \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)$$

が成り立つ。Lie 群と等質空間の一般論より右辺は $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の $k(n-k)$ 次元部分多様体になることがわかる。全単射 $i : \tilde{G}_k(\mathbf{R}^n) \to O_k(\mathbf{R}^n)$ を通して $O_k(\mathbf{R}^n)$ の多様体構造を $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ に導入する。$\mathbf{R}^n$ の通常の内積は命題 1.3.2 より $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の内積を誘導し、さらにその内積は部分多様体 $O_k(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量を誘導する。この Riemann 計量から $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量も定まる。$\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ の元に対してその向きを忘れることで $G_k(\mathbf{R}^n)$ の元を対応させることができる。この対応が二重被覆写像になるように $G_k(\mathbf{R}^n)$ に $k(n-k)$ 次元多様体構造を入れる。この被覆の被覆変換は $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ の元の向きを逆にする対応になり、$O_k(\mathbf{R}^n)$ では $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の -1 倍になる。したがって、被覆変換は等長変換になり二重被覆写像を通して $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量は $G_k(\mathbf{R}^n)$ の Riemann 計量を誘導する。$G_k(\mathbf{R}^n)$ は局所的には $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ と等長的な微分同型になるので、局所的に $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の Riemann 部分多様体とみなすことができる。

以上の準備をもとにして、$G_k(\mathbf{R}^n)$ の接ベクトル空間とその正規直交基底を記述しておく。$G_k(\mathbf{R}^n)$ の元 x をとる。x の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_k$ をとり、$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ に延長する。各 $1 \le i \le k$ と $k+1 \le \alpha \le n$ について $\{e_i, e_\alpha\}$ の張る平面の e_i から e_α への回転を $\phi_{i\alpha}(s) \in SO(n)$ で表わす。すなわち

$$\phi_{i\alpha}(s)(e_i) = \cos s e_i + \sin s e_\alpha, \quad \phi_{i\alpha}(s)(e_\alpha) = -\sin s e_i + \cos s e_\alpha,$$
$$\phi_{i\alpha}(s)(e_j) = e_j \quad (j \ne i, \alpha)$$

とする。$SO(n)$ の自然な $\mathbf{R}^n$ への作用は $G_k(\mathbf{R}^n)$ への作用を誘導する。$\phi_{i\alpha}(s)(x)$ は $G_k(\mathbf{R}^n)$ の曲線になる。この曲線の速度ベクトルとして接ベクトルを定めたいのだが、Lie 群と等質空間の準備なしでこの接ベクトルを扱うのには困難を伴う。そこで、次のような迂回策をとることにする。二重被覆写像 $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n) \to G_k(\mathbf{R}^n)$ を通して局所的には $\phi_{i\alpha}(s)(x)$ を $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ の曲線とみなすことができる。さらに、微分同型写像 $i : \tilde{G}_k(\mathbf{R}^n) \to O_k(\mathbf{R}^n)$ によって $\phi_{i\alpha}(s)(x)$ を $O_k(\mathbf{R}^n)$ の曲線とみなす。

$O_k(\mathbf{R}^n)$ はベクトル空間 $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の部分多様体なので、ここでは曲線の速度ベクトルは通常の微分で得られる。x に対応する $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の元は $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ になり、対応する曲線は

$$\phi_{i\alpha}(s)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = \cos s e_1 \wedge \cdots \wedge e_k + \sin s e_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{e}_\alpha} \wedge \cdots \wedge e_k.$$

よって

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = e_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{e}_\alpha} \wedge \cdots \wedge e_k.$$

簡単のために

$$\vec{x} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, \qquad \vec{e}_{i\alpha} = e_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\breve{e}_\alpha} \wedge \cdots \wedge e_k$$

とおくと、上の計算は次のように書ける。

$$\phi_{i\alpha}(s)(\vec{x}) = \cos s\vec{x} + \sin s\vec{e}_{i\alpha}, \qquad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)(\vec{x}) = \vec{e}_{i\alpha}.$$

さらに接ベクトルとして現われた

$$\{\vec{e}_{i\alpha} \mid 1 \le i \le k,\ k+1 \le \alpha \le n\}$$

は $\wedge^k\mathbf{R}^n$ の正規直交系であることがわかる。$\dim G_k(\mathbf{R}^n) = k(n-k)$ であることが知られているので、この正規直交系は接ベクトル空間 $T_x(G_k(\mathbf{R}^n))$ の正規直交基底であることがわかる。

次に Euclid 空間のアファイン部分空間の全体について考える。$\mathbf{R}^n$ の k 次元アファイン部分空間の全体を $L_k(\mathbf{R}^n)$ で表わす。$L_k(\mathbf{R}^n)$ に多様体構造を導入するために、$G_k(\mathbf{R}^n)$ 上のベクトル束

$$E(G_k(\mathbf{R}^n)) = \{(x, v) \in G_k(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n \mid x \perp v\}$$

を考える。これは各 $x \in G_k(\mathbf{R}^n)$ でのファイバーが $x^\perp$ になるベクトル束である。次元は

$$\dim E(G_k(\mathbf{R}^n)) = k(n-k) + (n-k) = (k+1)(n-k)$$

となる。

$(x, v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ に対して

$$l_k(x, v) = x + v \in L_k(\mathbf{R}^n)$$

によって $l_k(x, v)$ を定める。これにより写像 $l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ が定まる。$L_k(\mathbf{R}^n)$ の任意の元、すなわち、$\mathbf{R}^n$ の任意の k 次元アファイン部分ベクトル空間は、原点からの距離を与える位置ベクトル v と k 次元アファイン部分ベクトル空間に平行な部分ベクトル空間 x によって $x + v$ と表現することができる。このとき

v は原点からの距離を与える位置ベクトルだから $x \perp v$ となり $(x,v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ が成り立つ。したがって、写像 $l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ は全射になる。l_k の定め方より $l_k(x,v) = l_k(x',v')$ となるための必要十分条件は $x' = x$ かつ $v' = v$ が成り立つことである。よって l_k は単射になり、$l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ は全単射になる。この写像を通して、$E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の多様体構造を $L_k(\mathbf{R}^n)$ に導入する。

まず $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ に Riemann 計量を入れ微分同型写像 $l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ によって $L_k(\mathbf{R}^n)$ に Riemann 計量を導入する。$E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の Riemann 計量 g を次のように定める。$x \in G_k(\mathbf{R}^n)$ に対して $\mathbf{R}^n$ から x への直交射影を $P_x : \mathbf{R}^n \to x$ で表わす。$(x,v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ における $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の接ベクトル $(X,U),(Y,V)$ に対して

$$\begin{aligned} g((X,U),(Y,V)) &= \langle (X,U),(Y,V)\rangle - \langle P_x(U), P_x(V)\rangle \\ &= \langle X,Y\rangle + \langle U,V\rangle - \langle P_x(U), P_x(V)\rangle. \end{aligned}$$

g が対称双線形形式であることは上の定義からわかる。$SO(n)$ の $\mathbf{R}^n$ への作用は自然に $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ への作用も誘導する。$(x,v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ に対して x の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_k$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_n$ に延長すると

$$v = \sum_{\beta=k+1}^{n} \langle v, e_\beta\rangle e_\beta$$

となるので、

$$\begin{aligned} \phi_{i\alpha}(s)(\vec{x},v) &= (\phi_{i\alpha}(s)\vec{x}, \phi_{i\alpha}(s)v) \\ &= \left(\cos s\vec{x} + \sin s\vec{e}_{i\alpha}, \langle v,e_\alpha\rangle(-\sin se_i + \cos se_\alpha) + \sum_{\beta\neq\alpha}\langle v,e_\beta\rangle e_\beta\right). \end{aligned}$$

よって

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)(\vec{x},v) = (\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v,e_\alpha\rangle e_i).$$

次に

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\vec{x}, v+se_\alpha) = (0,e_\alpha).$$

以上より、

$$(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v,e_\alpha\rangle e_i), \quad (0,e_\alpha) \qquad (1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n)$$

は $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の $(\vec{x},v)$ における接ベクトル空間の基底になる。さらにこの基底が正規直交基底になることを示す。$1 \leq i,j \leq k,\ k+1 \leq \alpha,\beta \leq n$ に対して

$$g((\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v,e_\alpha\rangle e_i),(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v,e_\alpha\rangle e_i)) = \langle \vec{e}_{i\alpha}, \vec{e}_{i\alpha}\rangle + \langle v,e_\alpha\rangle\langle v,e_\alpha\rangle - \langle v,e_\alpha\rangle\langle v,e_\alpha\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= 1, \\
g((\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i), (\vec{e}_{j\beta}, -\langle v, e_\beta\rangle e_j)) &= \langle \vec{e}_{i\alpha}, \vec{e}_{j\beta}\rangle = 0 \\
&\quad (i = j \text{ かつ } \alpha = \beta \text{ ではない場合}), \\
g((\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i), (0, e_\beta)) &= 0, \\
g((0, e_\alpha), (0, e_\alpha)) &= \langle e_\alpha, e_\alpha\rangle = 1, \\
g((0, e_\alpha), (0, e_\beta)) &= \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0 \quad (\alpha \neq \beta \text{ の場合}).
\end{aligned}
$$

以上で g が $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の Riemann 計量になることがわかった。

自然な射影 $\pi : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to G_k(\mathbf{R}^n)$ は Riemannian submersion になる。すなわち、任意の $(x, v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ において $d\pi : \ker(d\pi)^\perp \to T_x(G_k(\mathbf{R}^n))$ は等長線形同型写像になる。$\pi(x, v) = x$ だから

$$\ker(d\pi) = (0, x^\perp)$$

となり、Riemann 計量の定め方より

$$\ker(d\pi)^\perp = \mathrm{span}\{(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \mid 1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n\}.$$

さらに、

$$d\pi(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) = \vec{e}_{i\alpha}$$

より

$$d\pi : \ker(d\pi)^\perp \to T_x(G_k(\mathbf{R}^n))$$

は正規直交基底を正規直交基底に写すことになり等長線形同型写像になる。

上の $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の Riemann 計量は微分同型写像 $l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ によって $L_k(\mathbf{R}^n)$ に Riemann 計量を誘導する。

$M(\mathbf{R}^n)$ の $\mathbf{R}^n$ への作用は $M(\mathbf{R}^n)$ の $L_k(\mathbf{R}^n)$ への作用を誘導する。

$$T(\Phi, u) \in M(\mathbf{R}^n) \quad (\Phi \in SO(n),\ u \in \mathbf{R}^n)$$

と $(x, v) \in E(G_k(\mathbf{R}^n))$ に対して

$$T(\Phi, u)(i(x, v)) = T(\Phi, u)(x + v) = \Phi(x + v) + u = \Phi x + \Phi v + u$$

となる。これを Φx の成分とその直交成分の和に分解する。

$$
\begin{aligned}
T(\Phi, u)(i(x, v)) &= \Phi x + \Phi v + u - P_{\Phi x} u + P_{\Phi x} u = \Phi x + \Phi v + u - P_{\Phi x} u \\
&= i(\Phi x, \Phi v + u - P_{\Phi x} u) = i(\Phi x, T(\Phi, u)v - P_{\Phi x} u).
\end{aligned}
$$

これより、$M(\mathbf{R}^n)$ の $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ への作用を

$$T(\Phi, u)(x, v) = (\Phi x, T(\Phi, u)v - P_{\Phi x} u)$$

によって定める。これが実際に $M(\mathbf{R}^n)$ の $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ への作用になっていることを確かめる。$M(\mathbf{R}^n)$ の元 $T(\Phi_1, u_1), T(\Phi_2, u_2)$ に対して、

$$T(\Phi_1, u_1)T(\Phi_2, u_2) = T(\Phi_1\Phi_2, \Phi_1 u_2 + u_1)$$

となる。また

$$\begin{aligned}
& T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)(x, v)) \\
= \ & T(\Phi_1, u_1)(\Phi_2 x, T(\Phi_2, u_2)v - P_{\Phi_2 x}u_2) \\
= \ & (\Phi_1\Phi_2 x, T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)v - P_{\Phi_2 x}u_2) - P_{\Phi_1\Phi_2 x}u_1)
\end{aligned}$$

となり、この第二成分は

$$\begin{aligned}
& (\text{第二成分}) \\
= \ & T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)v - P_{\Phi_2 x}u_2) - P_{\Phi_1\Phi_2 x}u_1 \\
= \ & T(\Phi_1\Phi_2, \Phi_1 u_2 + u_1)v - \Phi_1 P_{\Phi_2 x}u_2 - P_{\Phi_1\Phi_2 x}u_1.
\end{aligned}$$

ここで、$y \in G_k(\mathbf{R}^n)$ とその正規直交基底 f_i、$\Phi \in SO(n),\ u \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\Phi P_y u = \Phi \sum_i \langle u, f_i\rangle f_i = \sum_i \langle u, f_i\rangle \Phi f_i = \sum_i \langle \Phi u, \Phi f_i\rangle \Phi f_i = P_{\Phi y}\Phi u$$

となるので、$\Phi P_y = P_{\Phi y}\Phi$ が成り立つ。これより

$$(\text{第二成分}) = T(\Phi_1\Phi_2, \Phi_1 u_2 + u_1)v - P_{\Phi_1\Phi_2 x}(\Phi_1 u_2 + u_1).$$

したがって、

$$T(\Phi_1, u_1)(T(\Phi_2, u_2)(x, v)) = (T(\Phi_1, u_1)T(\Phi_2, u_2))(x, v)$$

が成り立ち、$M(\mathbf{R}^n)$ は $L_k(\mathbf{R}^n)$ の Lie 変換群になる。この $M(\mathbf{R}^n)$ の作用に関して $l_k : E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to L_k(\mathbf{R}^n)$ は同変写像になる。

$M(\mathbf{R}^n)$ の $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ への作用の等長性、体積保存性について調べる。x の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_k$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ に延長する。$E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の (x, v) における接ベクトル空間の正規直交基底

$$(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i), \quad (0, e_\alpha) \qquad (1 \le i \le k,\ k+1 \le \alpha \le n)$$

の微分写像 $d(T(\Phi, u))$ による像を求める。

$$\begin{aligned}
& d(T(\Phi, u))(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi, u)(\phi_{i\alpha}(s)(\vec{x}), \phi_{i\alpha}(s)(v)) \\
= \ & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\Phi\phi_{i\alpha}(s)(\vec{x}), T(\Phi, u)\phi_{i\alpha}(s)(v) - P_{\Phi\phi_{i\alpha}(s)(x)}u).
\end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi\phi_{i\alpha}(s)(\vec{x}) &= \Phi\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)(\vec{x})\right) = \Phi\vec{e}_{i\alpha}, \\
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi,u)\phi_{i\alpha}(s)(v) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi,u)\phi_{i\alpha}(s)\left(\sum_{\beta=k+1}^{n}\langle v,e_\beta\rangle e_\beta\right) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \langle v,e_\alpha\rangle\Phi\phi_{i\alpha}(s)e_\alpha = -\langle v,e_\alpha\rangle\Phi e_i, \\
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} P_{\Phi\phi_{i\alpha}(s)(x)}u &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \sum_{j=1}^{k}\langle u,\Phi\phi_{i\alpha}(s)e_j\rangle\Phi\phi_{i\alpha}(s)e_j \\
&= \langle u,\Phi e_\alpha\rangle\Phi e_i + \langle u,\Phi e_i\rangle\Phi e_\alpha
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i) = (\Phi\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle\Phi e_i - \langle u,\Phi e_\alpha\rangle\Phi e_i - \langle u,\Phi e_i\rangle\Phi e_\alpha).
$$

次に

$$
\begin{aligned}
d(T(\Phi,u))(0,e_\alpha) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\Phi,u)(x,v+se_\alpha) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\Phi x, T(\Phi,u)(v+se_\alpha) - P_{\Phi x}u) \\
&= (0,\Phi e_\alpha).
\end{aligned}
$$

これら $d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i)$ と $d(T(\Phi,u))(0,e_\alpha)$ が

$$
T(\Phi,u)(x,v) = (\Phi x, T(\Phi,u)v - P_{\Phi x}u)
$$

における接ベクトルであることに注意して、これらの内積を求める。$d(T(\Phi,u))$ が等長線形写像にはならないことは次の計算からわかる。$1 \leq i,j \leq k,\ k+1 \leq \alpha,\beta \leq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
& g(d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i), d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i)) \\
= \ & \langle\Phi\vec{e}_{i\alpha},\Phi\vec{e}_{i\alpha}\rangle + \langle u,\Phi e_i\rangle^2\langle\Phi e_\alpha,\Phi e_\alpha\rangle = 1 + \langle u,\Phi e_i\rangle^2, \\
& g(d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i), d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{j\beta},-\langle v,e_\beta\rangle e_j)) \\
= \ & \langle\Phi\vec{e}_{i\alpha},\Phi\vec{e}_{j\beta}\rangle + \langle u,\Phi e_i\rangle\langle u,\Phi e_j\rangle\langle\Phi e_\alpha,\Phi e_\beta\rangle \\
= \ & \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}), \\ \langle u,\Phi e_i\rangle\langle u,\Phi e_j\rangle\langle\Phi e_\alpha,\Phi e_\beta\rangle & (i \neq j \text{ の場合}), \end{cases} \\
& g(d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha},-\langle v,e_\alpha\rangle e_i), d(T(\Phi,u))(0,e_\beta)) \\
= \ & -\langle u,\Phi e_i\rangle\langle\Phi e_\alpha,\Phi e_\beta\rangle = \begin{cases} -\langle u,\Phi e_i\rangle & (\alpha = \beta \text{ の場合}), \\ 0 & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}), \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} & g(d(T(\Phi,u))(0,e_\alpha), d(T(\Phi,u))(0,e_\beta)) \\ = \ & \langle \Phi e_\alpha, \Phi e_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta \text{ の場合}), \\ 0 & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}). \end{cases} \end{aligned}$$

以上の計算から定義域の接ベクトル空間の正規直交基底の $d(T(\Phi,u))$ による像の外積の長さの二乗

$$\left| \bigwedge_{\substack{k+1 \le \alpha \le n \\ 1 \le i \le k}} d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1 \le \beta \le n} d(T(\Phi,u))(0,e_\beta) \right|^2$$

を計算する。外積におけるベクトルの並べ方は $\alpha = k+1$ について $i = 1, \ldots, k$ を並べ、α を大きくして同様に並べる。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 + \langle u, \Phi e_1 \rangle^2 & & \langle u, \Phi e_i \rangle \langle u, \Phi e_j \rangle \\ & \ddots & \\ \langle u, \Phi e_j \rangle \langle u, \Phi e_i \rangle & & 1 + \langle u, \Phi e_k \rangle^2 \end{bmatrix} \in M_k(\mathbf{R}), \\ b &= \begin{bmatrix} -\langle u, \Phi e_1 \rangle \\ \vdots \\ -\langle u, \Phi e_k \rangle \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^k \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} & \left| \bigwedge_{\substack{k+1 \le \alpha \le n \\ 1 \le i \le k}} d(T(\Phi,u))(\vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1 \le \beta \le n} d(T(\Phi,u))(0,e_\beta) \right|^2 \\ = & \begin{vmatrix} A & & & b & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & A & & & b \\ b^* & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b^* & & & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

この行列式の第 $k(n-k)+1$ 行目を $\langle u, \Phi e_1 \rangle$ 倍して第 1 行目に加え、$\langle u, \Phi e_2 \rangle$ 倍して第 2 行目に加え、$\ldots$ $\langle u, \Phi e_k \rangle$ 倍して第 k 行目に加えると、この行列式の第 1 行目から第 k 行目までは $[1_k \ 0]$ に変形される。同様の行基本変形を第 $k+1$ 行目から第 $2k$ 行目まで、$\ldots$ と続けると、上の行列式は次の行列式に等しくなることがわ

かる。

$$\begin{vmatrix} 1_k & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1_k & & & 0 \\ b^* & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b^* & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

したがって、$d(T(\Phi, u))$ は体積を保存し、$T(\Phi, u)$ は $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ の体積保存変換になる。これより $T(\Phi, u)$ は $L_k(\mathbf{R}^n)$ の体積保存変換になる。

3.7 Euclid 空間の Crofton の公式 II

3.2 節では $\mathbf{R}^n$ 内の 1 次元アファイン部分空間と $n-1$ 次元アファイン部分空間に関する Crofton の公式を定式化した。この節では前節の準備を元にして、$\mathbf{R}^n$ 内の一般の k 次元アファイン部分空間に関する Crofton の公式を定式化する。

定理 3.7.1

$$I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)) = \{(z, l) \in \mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n) \mid z \in l\}$$

とおくと、$I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)$ の $k + (k+1)(n-k)$ 次元部分多様体になる。さらに

$$i : \mathbf{R}^n \times G_k(\mathbf{R}^n) \to I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))\ ; \quad (z, x) \mapsto (z, x+z)$$

によって i を定めると、i は微分同型写像になる。

証明 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbf{R}^n)$ の元は局所的には $G_k(\mathbf{R}^n)$ 上の $\mathbf{R}^n$ に値を持つ滑かな正規直交ベクトル場 $e_1, \dots, e_n$ によって $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ と表わすことができる。このような滑かな正規直交ベクトル場が存在することは、前節に述べた $G_k(\mathbf{R}^n)$ の多様体構造の存在と関係しているが、ここでは前節同様に詳細には立ち入らないことにする。$\vec{x} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ と書き、対応する $\mathbf{R}^n$ 内の k 次元部分ベクトル空間を x で表わす。局所的な写像 j を

$$j : \mathbf{R}^k \times E(G_k(\mathbf{R}^n)) \to \mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)\ ;\ ((t_p), x, v) \mapsto \left(v + \sum_{p=1}^{k} t_p e_p, l_k(x, v) \right)$$

によって定める。このとき、j は挿入になりその像は局所的に $I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))$ に一致することを示す。そのために j の微分写像 dj を計算する。j の像に現われる

$L_k(\mathbf{R}^n)$ は $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ と微分同型になるので、$L_k(\mathbf{R}^n)$ を $E(G_k(\mathbf{R}^n))$ と同一視して微分の計算をする。$1 \leq i \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}
dj\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, 0, 0\right) &= (e_i, 0, 0), \\
dj(0, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} j((t_p), \phi_{i\alpha}(s)x, \phi_{i\alpha}(s)v) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(\phi_{i\alpha}(s)\left(v + \sum_{p=1}^k t_p e_p\right), l_k(\phi_{i\alpha}(s)x, \phi_{i\alpha}(s)v)\right).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)\left(v + \sum_{p=1}^k t_p e_p\right) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{i\alpha}(s)\left(\sum_{\beta=k+1}^n \langle v, e_\beta \rangle e_\beta + \sum_{p=1}^k t_p e_p\right) \\
&= -\langle v, e_\alpha \rangle e_i + t_i e_\alpha
\end{aligned}$$

となるので、

$$dj(0, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) = (-\langle v, e_\alpha \rangle e_i + t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i).$$

次に

$$\begin{aligned}
dj(0, 0, e_\alpha) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} j((t_p), x, v + s e_\alpha) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(v + s e_\alpha + \sum_{p=1}^k t_p e_p, l_k(x, v + s e_\alpha)\right) \\
&= (e_\alpha, 0, e_\alpha).
\end{aligned}$$

以上より dj の基底への作用は次のようになる。

$$\begin{aligned}
dj\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, 0, 0\right) &= (e_i, 0, 0), \\
dj(0, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) &= (-\langle v, e_\alpha \rangle e_i + t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i), \\
dj(0, 0, e_\alpha) &= (e_\alpha, 0, e_\alpha).
\end{aligned}$$

これらが線形独立になるかどうか調べるために、これらの外積の長さの二乗を計算する。

$$\begin{aligned}
&\left| \bigwedge_{1 \leq i \leq k} dj\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, 0, 0\right) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k}} dj(0, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1 \leq \beta \leq n} dj(0, 0, e_\beta) \right|^2 \\
= &\left| \bigwedge_{1 \leq i \leq k} (e_i, 0, 0) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k}} (-\langle v, e_\alpha \rangle e_i + t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha \rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1 \leq \beta \leq n} (e_\beta, 0, e_\beta) \right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \bigwedge_{1\le i\le k} (e_i,0,0) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1\le\alpha\le n\\1\le i\le k}} (t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} (e_\beta,0,e_\beta) \right|^2 \\
&= \prod_{1\le i\le k} |(e_i,0,0)|^2 \cdot \left| \bigwedge_{\substack{k+1\le\alpha\le n\\1\le i\le k}} (t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} (e_\beta,0,e_\beta) \right|^2 \\
&= \left| \bigwedge_{\substack{k+1\le\alpha\le n\\1\le i\le k}} (t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} (e_\beta,0,e_\beta) \right|^2 .
\end{aligned}
$$

外積におけるベクトルの並べ方は $\alpha = k+1$ について $i = 1,\dots,k$ を並べ、α を大きくして同様に並べる。

$$
A = \begin{bmatrix} t_1^2+1 & & t_it_j \\ & \ddots & \\ t_jt_i & & t_k^2+1 \end{bmatrix} \in M_k(\mathbf{R}), \qquad b = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^k
$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
& \left| \bigwedge_{\substack{k+1\le\alpha\le n\\1\le i\le k}} (t_i e_\alpha, \vec{e}_{i\alpha}, -\langle v, e_\alpha\rangle e_i) \wedge \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} (e_\beta,0,e_\beta) \right|^2 \\
&= \begin{vmatrix} A & & & b & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & A & & & b \\ b^* & & & 2 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b^* & & & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & b \\ b^* & 2 \end{vmatrix}^{n-k} \\
&= \begin{vmatrix} t_1^2+1 & & t_it_j & t_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ t_jt_i & & t_k^2+1 & t_k \\ t_1 & \cdots & t_k & 2 \end{vmatrix}^{n-k} = \begin{vmatrix} t_1^2/2+1 & & t_it_j/2 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ t_jt_i/2 & & t_k^2/2+1 & 0 \\ t_1 & \cdots & t_k & 2 \end{vmatrix}^{n-k} \\
&= 2^{n-k} \begin{vmatrix} t_1^2/2+1 & & t_it_j/2 \\ & \ddots & \\ t_jt_i/2 & & t_k^2/2+1 \end{vmatrix}^{n-k} .
\end{aligned}
$$

この行列式を求めるために、次の補題を準備する。

補題 3.7.2 $a_1,\dots,a_k$ に対して $\det(\delta_{ij}+a_ia_j) = 1 + a_1^2 + \cdots + a_k^2$ が成り立つ。

証明　a_i を i 成分に持つ k 次縦ベクトルを $\boldsymbol{a}$ で表わし、i 成分のみ 1 であって他の成分は 0 である k 次縦ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ で表わすと、

$$\det(\delta_{ij} + a_i a_j) = \det(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}a_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{a}a_k)$$

となる。右辺を行列式の多重線形性によって展開したときに、二つ以上の列に $\boldsymbol{a}$ が現われると行列式は 0 になる。よって、残る項は $\boldsymbol{a}$ が現われる列が 0 または 1 個の項になる。したがって、$\det(\delta_{ij} + a_i a_j) = 1 + a_1^2 + \cdots + a_k^2$ が成り立つ。

補題 3.7.2 を利用して中断した計算を続ける。

$$2^{n-k}\left(1 + \frac{t_1^2}{2} + \cdots + \frac{t_k^2}{2}\right)^{n-k} = (2 + t_1^2 + \cdots + t_k^2)^{n-k}.$$

これは 0 にはならないので、j は挿入になる。j の定め方から j の像は局所的に $I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))$ に一致することがわかる。

$$\dim I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)) = \dim(\mathbf{R}^k \times E(G_k(\mathbf{R}^n))) = k + (k+1)(n-k)$$

となるので、$I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))$ は $\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)$ の $k + (k+1)(n-k)$ 次元部分多様体になる。

$z \in \mathbf{R}^n$ と $x \in G_k(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$x + z = T(1, z)l_k(x, 0) = l_k\left(x, z - \sum_{i=1}^{k}\langle z, e_i\rangle e_i\right).$$

これより

$$i(z, x) = \left(z, l_k\left(x, z - \sum_{i=1}^{k}\langle z, e_i\rangle e_i\right)\right)$$

となるので、i は $\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n)$ への C^∞ 級写像になる。したがって、i は $I(\mathbf{R}^n \times L_k(\mathbf{R}^n))$ への C^∞ 級写像にもなる。i の定め方より、i は全単射になることがわかる。i が微分同型写像になることを示すために、微分写像 di を計算する。$1 \leq p \leq k,\ k+1 \leq \alpha \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}
di(e_p, 0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z + se_p, x) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(z + se_p, l_k\left(x, z + se_p - \sum_{i=1}^{k}\langle z + se_p, e_i\rangle e_i\right)\right) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(z + se_p, l_k\left(x, z - \sum_{i=1}^{k}\langle z, e_i\rangle e_i\right)\right) \\
&= (e_p, 0, 0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
di(e_\alpha, 0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z + se_\alpha, x) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(z + se_\alpha, l_k \left(x, z + se_\alpha - \sum_{i=1}^{k} \langle z + se_\alpha, e_i \rangle e_i \right) \right) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(z + se_\alpha, l_k \left(x, z + se_\alpha - \sum_{i=1}^{k} \langle z, e_i \rangle e_i \right) \right) \\
&= (e_\alpha, 0, e_\alpha), \\
di(0, \vec{e}_{p\alpha}) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i(z, \phi_{p\alpha}(s)x) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(z, l_k \left(\phi_{p\alpha}(s)x, z - \sum_{i=1}^{k} \langle z, \phi_{p\alpha}(s)e_i \rangle \phi_{p\alpha}(s)e_i \right) \right) \\
&= (0, \vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p - \langle z, e_p \rangle e_\alpha).
\end{aligned}
$$

これらが線形独立になるかどうか調べるために、これらの外積の長さの二乗を計算する。

$$
\begin{aligned}
& \left| \bigwedge_{1 \le p \le k} di(e_p, 0) \wedge \bigwedge_{k+1 \le \alpha \le n} di(e_\alpha, 0) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \beta \le n \\ 1 \le q \le k}} di(0, \vec{e}_{q\beta}) \right|^2 \\
= & \left| \bigwedge_{1 \le p \le k} (e_p, 0, 0) \wedge \bigwedge_{k+1 \le \alpha \le n} (e_\alpha, 0, e_\alpha) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \beta \le n \\ 1 \le q \le k}} (0, \vec{e}_{q\beta}, -\langle z, e_\beta \rangle e_q - \langle z, e_q \rangle e_\beta) \right|^2 \\
= & \prod_{1 \le p \le k} |(e_p, 0, 0)|^2 \cdot \left| \bigwedge_{k+1 \le \alpha \le n} (e_\alpha, 0, e_\alpha) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \beta \le n \\ 1 \le q \le k}} (0, \vec{e}_{q\beta}, -\langle z, e_\beta \rangle e_q - \langle z, e_q \rangle e_\beta) \right|^2 \\
= & \left| \bigwedge_{k+1 \le \alpha \le n} (e_\alpha, 0, e_\alpha) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \beta \le n \\ 1 \le q \le k}} (0, \vec{e}_{q\beta}, -\langle z, e_\beta \rangle e_q - \langle z, e_q \rangle e_\beta) \right|^2 .
\end{aligned}
$$

これを計算するためにこれらのベクトルの内積を計算しておく。$1 \le p, q \le k,\ k + 1 \le \alpha, \beta \le n$ に対して

$$
\begin{aligned}
& \langle (e_\alpha, 0, e_\alpha), (e_\beta, 0, e_\beta) \rangle = 2\delta_{\alpha\beta}, \\
& \langle (e_\alpha, 0, e_\alpha), (0, \vec{e}_{q\beta}, -\langle z, e_\beta \rangle e_q - \langle z, e_q \rangle e_\beta) \rangle = -\langle z, e_q \rangle \delta_{\alpha\beta}, \\
& \langle (0, \vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p - \langle z, e_p \rangle e_\alpha), (0, \vec{e}_{q\beta}, -\langle z, e_\beta \rangle e_q - \langle z, e_q \rangle e_\beta) \rangle \\
= \; & \delta_{pq}\delta_{\alpha\beta} + \langle z, e_p \rangle \langle z, e_q \rangle \delta_{\alpha\beta} = (\delta_{pq} + \langle z, e_p \rangle \langle z, e_q \rangle)\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

これらの内積の値と補題 3.7.2 より次の等式を得る。

$$\begin{aligned}&\left|\bigwedge_{1\le p\le k} di(e_p,0)\wedge \bigwedge_{k+1\le\alpha\le n} di(e_\alpha,0)\wedge \bigwedge_{\substack{k+1\le\beta\le n\\ 1\le q\le k}} di(0,\vec{e}_{q\beta})\right|^2\\ =\ & (1+\langle z,e_1\rangle^2+\cdots+\langle z,e_k\rangle^2)^{n-k}.\end{aligned}$$

これは 0 にはならないので、di は線形同型写像になる。i は全単射になるので、i は微分同型写像になることがわかる。

定理 3.7.3 (Crofton の公式) ある定数 $C_{n,k}$ が存在し、$\mathbf{R}^n$ 内の $n-k$ 次元部分多様体 S に対して

$$\int_{L_k(\mathbf{R}^n)} \#(S\cap l)d\mu(l) = C_{n,k}\mathrm{vol}(S)$$

が成り立つ。

証明

$$I(S)=\{(z,l)\in I(\mathbf{R}^n\times L_k(\mathbf{R}^n)) \mid z\in S\}$$

とおく。先に定めた微分同型写像写像 i を使うと、

$$i^{-1}(I(S)) = S\times G_k(\mathbf{R}^n)$$

となるので、これは $\mathbf{R}^n\times G_k(\mathbf{R}^n)$ の $(k+1)(n-k)$ 次元部分多様体になる。したがって、$I(S)$ は $I(\mathbf{R}^n\times L_k(\mathbf{R}^n))$ の $(k+1)(n-k)$ 次元部分多様体になる。

$$\pi_L : I(S)\to L_k(\mathbf{R}^n)\ ;\quad (z,l)\mapsto l$$

によって写像 π_L を定義すると、π_L は、包含写像 $I(S)\to \mathbf{R}^n\times L_k(\mathbf{R}^n)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^n\times L_k(\mathbf{R}^n)\to L_k(\mathbf{R}^n)$ との合成になるので、C^∞ 級写像になる。そこで $I(S)$ 上恒等的に 1 に等しい関数とこの写像 π_L に余面積公式を適用すると

$$\int_{L_k(\mathbf{R}^n)} \#(\pi_L^{-1}(l))d\mu(l) = \int_{I(S)} J\pi_L d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_L^{-1}(l) = \{(z,l)\mid z\in l,\ z\in S\} = (S\cap l)\times\{l\}$$

だから、$\#(\pi_L^{-1}(l)) = \#(S\cap l)$ となり、

$$\int_{L_k(\mathbf{R}^n)} \#(S\cap l)d\mu(l) = \int_{I(S)} J\pi_L d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず π_L の微分写像 $d\pi_L$ を求める。$x \in G_k(\mathbf{R}^n)$ をとる。x の正規直交基底 $e_1, \dots, e_k$ をとり、$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ に延長する。S の z における接ベクトル X を

$$X = \sum_{p=1}^{k} \langle X, e_p \rangle e_p + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \langle X, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

と表わす。先に示した i の微分写像の計算より $k+1 \le \alpha \le n$ に対して

$$\begin{aligned}
di(X, 0) &= di\left(\sum_{p=1}^{k} \langle X, e_p \rangle e_p + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \langle X, e_\alpha \rangle e_\alpha, 0 \right) \\
&= \sum_{p=1}^{k} \langle X, e_p \rangle (e_p, 0, 0) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \langle X, e_\alpha \rangle (e_\alpha, 0, e_\alpha) \\
&= \left(X, 0, \sum_{\alpha=k+1}^{n} \langle X, e_\alpha \rangle e_\alpha \right), \\
di(0, \vec{e}_{p\alpha}) &= (0, \vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p - \langle z, e_p \rangle e_\alpha).
\end{aligned}$$

$d\pi_L$ は $L_k(\mathbf{R}^n)$ の接成分への射影なので、

$$\begin{aligned}
d\pi_L di(X, 0) &= \left(0, \sum_{\alpha=k+1}^{n} \langle X, e_\alpha \rangle e_\alpha \right), \\
d\pi_L di(0, \vec{e}_{p\alpha}) &= (\vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p - \langle z, e_p \rangle e_\alpha).
\end{aligned}$$

そこで S の z における接ベクトル空間の正規直交基底 $X_{k+1}, \dots, X_n$ をとると

$$\begin{aligned}
& J(\pi_L \circ i) \\
= & \left| \bigwedge_{k+1 \le \beta \le n} d\pi_L di(X_\beta, 0) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \alpha \le n \\ 1 \le p \le k}} d\pi_L di(0, \vec{e}_{p\alpha}) \right| \\
= & \left| \bigwedge_{k+1 \le \beta \le n} \left(0, \sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_\beta, e_\gamma \rangle e_\gamma \right) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \alpha \le n \\ 1 \le p \le k}} (\vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p - \langle z, e_p \rangle e_\alpha) \right|.
\end{aligned}$$

ここでほとんどすべての x に対して

$$\sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_{k+1}, e_\gamma \rangle e_\gamma, \dots, \sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_n, e_\gamma \rangle e_\gamma$$

は $x^\perp = \mathrm{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ を張るので、このとき、

$$J(\pi_L \circ i) = \left| \bigwedge_{k+1 \le \beta \le n} \left(0, \sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_\beta, e_\gamma \rangle e_\gamma \right) \wedge \bigwedge_{\substack{k+1 \le \alpha \le n \\ 1 \le p \le k}} (\vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha \rangle e_p) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} \left(0, \sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_\beta, e_\gamma\rangle e_\gamma\right)\right| \cdot \left| \bigwedge_{\substack{k+1\le\alpha\le n\\ 1\le p\le k}} (\vec{e}_{p\alpha}, -\langle z, e_\alpha\rangle e_p)\right| \\
&= \left| \bigwedge_{k+1\le\beta\le n} \sum_{\gamma=k+1}^{n} \langle X_\beta, e_\gamma\rangle e_\gamma\right| \cdot 1 = \left|\det(\langle X_\beta, e_\gamma\rangle) \bigwedge_{\alpha=k+1}^{n} e_\alpha\right| \\
&= |\det(\langle X_\beta, e_\gamma\rangle)| = \left|\left\langle \bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta, \bigwedge_{\gamma=k+1}^{n} e_\gamma \right\rangle\right| = \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge \vec{x}\right|.
\end{aligned}
$$

最後の等号は命題 1.3.12 より

$$
\left|\left\langle \bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta, \bigwedge_{\gamma=k+1}^{n} e_\gamma \right\rangle\right| = \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge * \left(\bigwedge_{\gamma=k+1}^{n} e_\gamma\right)\right| = \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge \vec{x}\right|
$$

となることを使った。以上より

$$
\begin{aligned}
\int_{I(S)} J\pi_L d\mu &= \int_{S\times G_k(\mathbf{R}^n)} J\pi_L Ji d\mu = \int_{S\times G_k(\mathbf{R}^n)} J(\pi_L \circ i) d\mu \\
&= \int_{S\times G_k(\mathbf{R}^n)} \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge \vec{x}\right| d\mu \\
&= \int_S \left(\int_{G_k(\mathbf{R}^n)} \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge \vec{x}\right| d\mu\right) d\mu.
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\int_{G_k(\mathbf{R}^n)} \left|\bigwedge_{\beta=k+1}^{n} X_\beta \wedge \vec{x}\right| d\mu
$$

の被積分関数は T_zS の法ベクトル空間への $\vec{x}$ の直交射影の長さに等しい。$G_k(\mathbf{R}^n)$ 上の測度の不変性よりこの積分は T_zS に依存しない定数になる。この定数を $C_{n,k}$ とおくと、

$$
\int_{I(S)} J\pi_L d\mu = \int_S C_{n,k} d\mu = C_{n,k}\mathrm{vol}(S).
$$

余面積公式から得られた積分の等式と合せると次の Crofton の公式を得る。

$$
\int_{L_k(\mathbf{R}^n)} \#(S\cap l) d\mu(l) = C_{n,k}\mathrm{vol}(S).
$$

3.8　やり残したこと

投影体積積分の観点からも Euclid 空間の Steiner の公式を定式化し証明するつもりだった。いずれ講義ノートに追加したい。さらに、一般次元の場合の Crofton

の公式と Poincaré の公式の係数を決定するためには、これらの公式を球面に対しても示し、球面内の基本的な部分多様体に適用して係数を求めてそれを Euclid 空間の場合にも利用するのが初等的な求め方だと思われる。そこで、第 4 章として「球面における交叉積分公式」を追加する。双曲空間の次元を定めた全測地的部分多様体の全体はアファイン対称空間の構造を持つことが知られている。このことに注意して第 5 章として「双曲空間における交叉積分公式」を追加する。第 6 章は「Riemann 等質空間における Poincaré の公式」という題名にして、Howard の定式化した Poincaré の公式を示しその応用として種々の Riemann 等質空間の Poincaré の公式の具体的な表示を求める。第 7 章は「Riemann 対称空間における Crofton の公式」という題名にして、鏡映部分多様体に関する Crofton の公式を扱う。