

千葉大学大学院自然科学研究科

集中講義

---

積分幾何学入門

田崎博之

2005年度

千葉大学大学院自然科学研究科

## 集中講義

## 授業内容

ユークリッド空間内の曲線の長さ、曲面の曲面積、立体図形の体積等の積分で定義される幾何学的量の性質や、それらの量の間について解説し、積分幾何学の入門を目的とする。

# 目次

第1章	多様体上の積分	1
1.1	テンソル代数	1
1.2	外積代数	5
1.3	外積代数における内積	10
1.4	Riemann 測度	20
1.5	余面積公式	25
第2章	平面における交叉積分公式	37
2.1	平面直線の全体	37
2.2	Crofton の公式	43
2.3	平面の等長変換群	48
2.4	Poincaré の公式	50
2.5	Steiner の公式と Hotelling の公式	56
2.6	Blaschke の公式	62

# 第1章 多様体上の積分

テンソル代数と外積代数の定義と基本的性質を述べ、外積代数の内積を定める。接ベクトル空間が内積を持つ多様体を Riemann 多様体という。<sup>1</sup>この外積代数の内積を使って Riemann 多様体上の測度を定義し、Riemann 多様体上の積分の基本的性質を述べる。特に、1.5 余面積公式で述べる余面積公式 (定理 1.5.5) は積分幾何学において重要な役割を演じる。

## 1.1 テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間  $V$  に対して、 $V$  から実数  $\mathbf{R}$  への線形写像の全体を  $V^*$  で表わし、 $V$  の双対ベクトル空間と呼ぶ。 $V^*$  は  $\mathbf{R}$  の和と積から自然に定まる演算によってベクトル空間の構造を持つ。 $v \in V$  に対して

$$v(f) = f(v) \quad (f \in V^*)$$

によって、 $v : V^* \rightarrow \mathbf{R}$  を定めると、 $v \in (V^*)^*$  とみなすことができ、この対応によって  $(V^*)^*$  と  $V$  は線形同型になる。この線形同型によって  $(V^*)^*$  と  $V$  を同一視する。 $\delta_j^i$  を

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

によって定める。 $V$  の基底  $\{u_1, \dots, u_n\}$  に対して、 $f^i(u_j) = \delta_j^i$  によって定まる  $V^*$  の元  $\{f^i\}$  は  $V^*$  の基底になる。特に  $\dim V^* = \dim V$  となる。 $\{f^i\}$  を  $\{u_j\}$  の双対基底と呼ぶ。

定義 1.1.2 有限次元実ベクトル空間  $V$  に対して、 $\overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^p$  上で定義された  $p$  変数の実数値多重線形写像を  $V$  上の  $p$  次テンソルと呼び、その全体を  $\otimes^p V$  で表わす。

$$\otimes^* V = \mathbf{R} + V + \otimes^2 V + \dots$$

を  $V$  上のテンソル代数と呼ぶ。 $\otimes^1 V = (V^*)^* = V$  だから、 $\otimes^0 V = \mathbf{R}$  と約束すると、テンソル代数の定義は  $\otimes^* V = \sum_{i=0}^{\infty} \otimes^i V$  と書くこともできる。 $\otimes^p V$  は自然な

<sup>1</sup>Riemann 多様体の正確な定義は定義 1.4.14 で述べる。

加法とスカラー倍によって実ベクトル空間になる。 $\otimes^p V$  の元  $A$  と  $\otimes^q V$  の元  $B$  に対して、

$$(A \otimes B)(g^1, \dots, g^{p+q}) = A(g^1, \dots, g^p) \cdot B(g^{p+1}, \dots, g^{p+q}) \quad (g^1, \dots, g^{p+q} \in V^*)$$

によって写像

$$A \otimes B : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p+q} \rightarrow \mathbf{R}$$

を定めると、 $A \otimes B$  は  $V$  上の  $p+q$  次テンソルになる。 $A \otimes B$  を  $A$  と  $B$  のテンソル積と呼ぶ。 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  に対して、

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p)(f^1, \dots, f^p) = f^1(u_1) \cdots f^p(u_p) \quad (f^1, \dots, f^p \in V^*)$$

によって写像

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^p \rightarrow \mathbf{R}$$

は定まり、 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$  は  $V$  上の  $p$  次テンソルになる。

命題 1.1.3  $V$  を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{aligned} \otimes^p V \times \otimes^q V &\rightarrow \otimes^{p+q} V \\ (A, B) &\mapsto A \otimes B \end{aligned}$$

は双線形写像になる。テンソル積は結合律も満たし、テンソル代数は代数の構造を持つ。写像

$$\begin{aligned} \overbrace{V \times \cdots \times V}^p &\rightarrow \otimes^p V \\ (u_1, \dots, u_p) &\mapsto u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \end{aligned}$$

は多重線形写像になる。

証明 定義 1.1.2 での定め方より、 $A \otimes B$  は  $A$  と  $B$  に関して線形になる。したがって、上の写像は双線形写像になる。テンソル積が結合律を満たすことは定義式からわかる。また、 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$  は  $u_i$  に関して線形になるので、上の写像は多重線形写像になる。

命題 1.1.4  $V$  を  $n$  次元実ベクトル空間とする。 $u_1, \dots, u_n$  を  $V$  の基底とすると、

$$(*) \quad u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \quad (1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n)$$

は  $\otimes^p V$  の基底になる。特に、 $\otimes^p V$  の次元は  $n^p$  になる。

証明  $u_1, \dots, u_n$  の双対基底を  $f^1, \dots, f^n$  とする。まず (\*) が線形独立になることを示す。

$$\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n a^{i_1 \dots i_p} u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p} = 0 \quad (a^{i_1 \dots i_p} \in \mathbf{R})$$

とする。  $1 \leq k_1, \dots, k_p \leq n$  となる  $k_1, \dots, k_p$  をとり、  $(f^{k_1}, \dots, f^{k_p})$  を上の式に代入すると  $a^{k_1 \dots k_p} = 0$  となる。したがって (\*) は線形独立である。

次に (\*) は  $\otimes^p V$  を生成することを示す。  $\otimes^p V$  の元  $A$  を任意の一つとる。  $V^*$  の元  $g$  に対して  $g = \sum_{i=1}^n g(u_i) f^i$  となるので、  $g^1, \dots, g^p \in V^*$  に対して

$$\begin{aligned} A(g^1, \dots, g^p) &= A\left(\sum_{i_1=1}^n g^1(u_{i_1}) f^{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^n g^p(u_{i_p}) f^{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n g^1(u_{i_1}) \cdots g^p(u_{i_p}) A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) (u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p}) (g^1, \dots, g^p). \end{aligned}$$

よって、

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p}$$

が成り立つ。したがって (\*) は  $\otimes^p V$  を生成する。

以上より (\*) は  $\otimes^p V$  の基底になる。 (\*) の元の形から、  $\otimes^p V$  の次元は  $n^p$  になる。

定義 1.1.5 命題 1.1.4 の証明中にある  $\otimes^p V$  の元  $A$  の基底による表示

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}) u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p}$$

を  $A$  の成分表示と呼び、  $A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p})$  を  $A$  の成分と呼ぶ。

命題 1.1.6  $V$  と  $W$  を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi : \overbrace{V \times \dots \times V}^p \rightarrow W$$

を多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \phi(v_1, \dots, v_p) \quad (v_i \in V)$$

を満たす線形写像  $\Phi : \otimes^p V \rightarrow W$  が唯一つ存在する。

証明  $u_1, \dots, u_n$  を  $V$  の基底とし、 $f^1, \dots, f^n$  をその双対基底とする。命題 1.1.4 より、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \quad (1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n)$$

は  $\otimes^p V$  の基底になる。そこで、

$$\Phi(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = \phi(u_1, \dots, u_p)$$

によって  $\Phi$  の基底上の値を定め、 $\otimes^p V$  上の線形写像に拡張する。任意の  $v_i \in V$  に対して

$$\begin{aligned} \Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) &= \Phi \left( \sum_{i_1=1}^n f^{i_1}(v_1) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{i_p=1}^n f^{i_p}(v_p) u_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n f^{i_1}(v_1) \cdots f^{i_p}(v_p) \Phi(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n f^{i_1}(v_1) \cdots f^{i_p}(v_p) \phi(u_{i_1}, \dots, u_{i_p}) \\ &= \phi \left( \sum_{i_1=1}^n f^{i_1}(v_1) u_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^n f^{i_p}(v_p) u_{i_p} \right) \\ &= \phi(v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

となり、 $\Phi$  は与えられた条件を満たす。

$\Phi$  の条件は  $\otimes^p V$  の基底の像を定めているので、このような  $\Phi$  は一意的である。

命題 1.1.7  $V$  と  $W$  を有限次元実ベクトル空間とし、 $F: V \rightarrow W$  を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像  $\otimes^p F: \otimes^p V \rightarrow \otimes^p W$  が唯一つ存在する。条件：任意の  $v_1, \dots, v_p \in V$  に対して

$$\otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。

証明  $\otimes^p V$  の元  $A$  に対して

$$\otimes^p F(A)(f^1, \dots, f^p) = A(f^1 \circ F, \dots, f^p \circ F) \quad (f^1, \dots, f^p \in W^*)$$

とおくと、 $\otimes^p F(A) \in \otimes^p W$  となる。上の定義式から  $\otimes^p F$  が線形写像であることもわかる。 $f^1, \dots, f^p \in W^*$  に対して

$$\begin{aligned} \otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1, \dots, f^p) &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(f^1 \circ F, \dots, f^p \circ F) \\ &= (f^1 \circ F)(v_1) \cdots (f^p \circ F)(v_p) \\ &= (F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p))(f^1, \dots, f^p) \end{aligned}$$

となるので、

$$\otimes^p F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。命題 1.1.4 より条件は  $\otimes^p V$  の基底の像を定めているので、このような  $\otimes^p F$  は一意的である。

## 1.2 外積代数

定義 1.2.1 有限次元実ベクトル空間  $V$  に関する  $\otimes^p V$  の元  $A$  と  $1 \leq i < j \leq p$  に対して

$$(t_{i,j}A)(f^1, \dots, f^p) = A(f^1, \dots, \overset{i}{\check{f}^j}, \dots, \overset{j}{\check{f}^i}, \dots, f^p) \quad (f^1, \dots, f^p \in V^*)$$

とおくと、線形写像  $t_{i,j} : \otimes^p V \rightarrow \otimes^p V$  が定まる。

$$\wedge^p V = \{A \in \otimes^p V \mid t_{i,j}A = -A \ (1 \leq i < j \leq p)\}$$

とおいて

$$\wedge^* V = \mathbf{R} + V + \wedge^2 V + \cdots$$

を  $V$  上の外積代数と呼ぶ。  $\{1, \dots, p\}$  の元の置換全体から成る群を  $S_p$  で表わす。 $\wedge^p V$  の元  $A$  と  $\wedge^q V$  の元  $B$  に対して、

$$(A \wedge B)(g^1, \dots, g^{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) (A \otimes B)(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(p+q)})$$

$$(g^1, \dots, g^{p+q} \in V^*)$$

によって  $A \wedge B \in \otimes^{p+q} V$  を定めると、  $A \wedge B \in \wedge^{p+q} V$  が成り立つ。  $A \wedge B$  を  $A$  と  $B$  の外積と呼ぶ。

注意 1.2.2  $v_1, \dots, v_p \in V$  に対して  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in \otimes^p V$  となり、次の等式が成り立つ。

$$t_{i,j}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{\check{v}^j} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{\check{v}^i} \otimes \cdots \otimes v_p.$$

命題 1.2.3 有限次元実ベクトル空間  $V$  上の  $r$  次テンソル  $T$  に対して

$$\tilde{T}(g^1, \dots, g^r) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(r)}) \quad (g^1, \dots, g^r \in V^*)$$

によって  $\tilde{T} \in \otimes^r V$  を定めると、  $\tilde{T} \in \wedge^r V$  が成り立つ。特に、定義 1.2.1 における  $A \wedge B$  は  $\wedge^{p+q} V$  の元になる。これによって定まる写像

$$\begin{aligned} \wedge^p V \times \wedge^q V &\rightarrow \wedge^{p+q} V \\ (A, B) &\mapsto A \wedge B \end{aligned}$$



は双線形写像になる。さらに、 $C \in \wedge^r V$  に対して結合律

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

が成り立つ。これらより外積代数  $\wedge^* V$  は代数の構造を持つ。 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。 $\bigwedge_{i=1}^p u_i = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$  とも書くことがある。

証明  $\tilde{T} \in \wedge^r V$  を示す。 $1 \leq i < j \leq r$  をとり、 $i$  と  $j$  の互換を  $\tau \in S_r$  で表わす。

$$\begin{aligned} (t_{i,j}\tilde{T})(g^1, \dots, g^r) &= \tilde{T}(g^1, \dots, \overset{i}{g^j}, \dots, \overset{j}{g^i}, \dots, g^r) \\ &= \tilde{T}(g^{\tau(1)}, \dots, g^{\tau(r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \dots, g^{\tau\sigma(r)}) \\ &= \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\tau\sigma) T(g^{\tau\sigma(1)}, \dots, g^{\tau\sigma(r)}) \\ &= - \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(r)}) \\ &= -\tilde{T}(g^1, \dots, g^r). \end{aligned}$$

したがって、 $t_{i,j}\tilde{T} = -\tilde{T}$  となり、 $\tilde{T} \in \wedge^r V$  が成り立つ。

$A \in \wedge^p V$  と  $B \in \wedge^q V$  に対して  $A \otimes B \in \otimes^{p+q} V$  となり、 $A \wedge B \in \wedge^{p+q} V$  が成り立つ。

写像

$$\begin{aligned} \wedge^p V \times \wedge^q V &\rightarrow \wedge^{p+q} V \\ (A, B) &\mapsto A \wedge B \end{aligned}$$

が双線形写像になることは、 $(A, B)$  に対して  $A \otimes B$  を対応させる写像が双線形になることと (命題 1.1.3)、 $T$  に対して  $\tilde{T}$  を対応させる写像が線形写像になることからわかる。

$A \in \wedge^p V, B \in \wedge^q V, C \in \wedge^r V$  に対して

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

が成り立つことを示す。以下の計算では、

$$S_{p+q} = \{\tau \in S_{p+q+r} \mid \tau(i) = i \ (p+q+1 \leq i \leq p+q+r)\}$$

とみなすことにする。

$$\begin{aligned}
& ((A \wedge B) \wedge C)(g^1, \dots, g^{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma) (A \wedge B)(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(p+q)}) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \\
&\quad \left\{ \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\tau) A(g^{\sigma\tau(1)}, \dots, g^{\sigma\tau(p)}) \cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)}, \dots, g^{\sigma\tau(p+q)}) \right\} \\
&\quad \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot \\
&\quad (A(g^{\sigma\tau(1)}, \dots, g^{\sigma\tau(p)}) \cdot B(g^{\sigma\tau(p+1)}, \dots, g^{\sigma\tau(p+q)})) \cdot C(g^{\sigma\tau(p+q+1)}, \dots, g^{\sigma\tau(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \\
&\quad (A(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(p)}) \cdot B(g^{\sigma(p+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q)})) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q+r)})
\end{aligned}$$

同様の計算で

$$\begin{aligned}
& (A \wedge (B \wedge C))(g^1, \dots, g^{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \\
&\quad A(g^{\sigma(1)}, \dots, g^{\sigma(p)}) \cdot (B(g^{\sigma(p+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q)}) \cdot C(g^{\sigma(p+q+1)}, \dots, g^{\sigma(p+q+r)}))
\end{aligned}$$

となることもわかる。したがって

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

を得る。

$\sigma \in S_p$  に対して  $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$  であることに注意すると、 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  に対しては

$$\begin{aligned}
& (u_1 \wedge \dots \wedge u_p)(g^1, \dots, g^p) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_1(g^{\sigma(1)}) \dots u_p(g^{\sigma(p)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1) \dots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) u_{\sigma^{-1}(1)}(g^1) \cdots u_{\sigma^{-1}(p)}(g^p) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}(g^1) \cdots u_{\sigma(p)}(g^p) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) (u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)})(g^1, \dots, g^p).
\end{aligned}$$

したがって、

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$$

が成り立つ。

命題 1.2.4 有限次元実ベクトル空間  $V$  に対して、写像

$$\begin{aligned}
\overbrace{V \times \cdots \times V}^p &\rightarrow \wedge^p V \\
(u_1, \dots, u_p) &\mapsto u_1 \wedge \cdots \wedge u_p
\end{aligned}$$

は多重線形写像になる。 $u_1, \dots, u_p \in V$  と  $1 \leq i < j \leq p$  に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\widetilde{u}}_j \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\widetilde{u}}_i \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。さらに  $p$  次正方形行列  $A = (A_j^i)$  に対して  $v_j = \sum_{i=1}^p A_j^i u_i$  とおくと

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。

証明 命題 1.1.3 より、対応  $(u_1, \dots, u_p) \mapsto u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$  は多重線形になることがわかる。

$u_1, \dots, u_p \in V$  と  $1 \leq i < j \leq p$  に対して

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\widetilde{u}}_j \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\widetilde{u}}_i \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つことを示そう。 $i$  と  $j$  の互換を  $\tau \in S_p$  で表わす。

$$\begin{aligned}
&u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\widetilde{u}}_j \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\widetilde{u}}_i \wedge \cdots \wedge u_p \\
&= u_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(p)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau\sigma(p)} \\
&= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\tau\sigma) u_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau\sigma(p)} \\
&= - \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)} \\
&= -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p.
\end{aligned}$$

したがって

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\widetilde{u_j}} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\widetilde{u_i}} \wedge \cdots \wedge u_p = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ。特に  $u_1, \dots, u_p$  の中で等しい元があるときは、 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$  となる。これは次のようにしてわかる。ある  $i \neq j$  に対して  $u_i$  と  $u_j$  が等しいと仮定する。 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$  において  $u_i$  と  $u_j$  を入れ換えると、上で示したことから  $-1$  倍になる。ところが、 $u_i$  と  $u_j$  は等しいのだから入れ換えても変わらない。つまり、 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$  は自分自身の  $-1$  倍と等しいことになり  $0$  になる。

上で示したことは互換  $\sigma$  に対して

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)} = \text{sgn}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つということである。 $S_p$  の任意の元は互換の積になることから、任意の置換  $\sigma \in S_p$  に対してこの等式は成り立つ。さらに  $p$  次正方形行列  $A = (A_j^i)$  に対し

て  $v_j = \sum_{i=1}^p A_j^i u_i$  とおくと

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^p A_1^{i_1} u_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{i_p=1}^p A_p^{i_p} u_{i_p} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} A_1^{\sigma(1)} u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge A_p^{\sigma(p)} u_{\sigma(p)} \quad (\text{同じものがあると } 0 \text{ になる}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_p^{\sigma(p)} u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \\ &= (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_p. \end{aligned}$$

**命題 1.2.5**  $u_1, \dots, u_n$  を実ベクトル空間  $V$  の基底とする。このとき

$$(*) \quad u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は  $\wedge^p V$  の基底になる。特に  $\dim(\wedge^p V) = \binom{n}{p}$  となる。

**証明**  $u_1, \dots, u_n$  の双対基底を  $f^1, \dots, f^n$  とする。まず  $(*)$  が線形独立になることを示す。

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a^{i_1 \cdots i_p} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} = 0 \quad (a^{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R})$$

とする。  $1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$  となる  $k_1, \dots, k_p$  をとり、 $(f^{k_1}, \dots, f^{k_p})$  を上の式に代入すると  $a_{k_1 \cdots k_p} = 0$  となる。したがって  $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$  は線形独立である。

次に(\*)は $\wedge^p V$ を生成することを示す。 $\wedge^p V$ の元 $A$ を任意の一つとる。 $g^1, \dots, g^p \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}
& A(g^1, \dots, g^p) \\
&= A\left(\sum_{j_1=1}^n g^1(u_{j_1})f^{j_1}, \dots, \sum_{j_p=1}^n g^p(u_{j_p})f^{j_p}\right) \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n g^1(u_{j_1}) \cdots g^p(u_{j_p}) A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p}) \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_p})(g^1, \dots, g^p) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} A(f^{j_{\sigma(1)}}, \dots, f^{j_{\sigma(p)}})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1, \dots, g^p) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{j_{\sigma(p)}})(g^1, \dots, g^p) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p})(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p})(g^1, \dots, g^p).
\end{aligned}$$

よって、

$$A = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} A(f^{j_1}, \dots, f^{j_p}) u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ は $\wedge^p V$ を生成する。

以上(\*)は $\wedge^p V$ の基底になる。(\*)の元の形から、 $\wedge^p V$ の次元は $\binom{n}{p}$ になる。

**命題 1.2.6**  $V$ と $W$ を有限次元実ベクトル空間とし、 $F: V \rightarrow W$ を線形写像とする。命題 1.1.7 で定めた線形写像 $\otimes^p F: \otimes^p V \rightarrow \otimes^p W$ は $\otimes^p F(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像 $\wedge^p F: \wedge^p V \rightarrow \wedge^p W$ を誘導する。

**証明** 定義 1.2.1 で定めた $t_{i,j}^V: \otimes^p V \rightarrow \otimes^p V$ ,  $t_{i,j}^W: \otimes^p W \rightarrow \otimes^p W$ と $\otimes^p F$ に関して、 $\otimes^p F \circ t_{i,j}^V = t_{i,j}^W \circ \otimes^p F$ となることから、これらの定め方よりわかる。したがって $\otimes^p F$ は $\otimes^p F(\wedge^p V) \subset \wedge^p W$ を満たし、線形写像 $\wedge^p F: \wedge^p V \rightarrow \wedge^p W$ を誘導する。

### 1.3 外積代数における内積

**補題 1.3.1**  $V$ を有限次元実ベクトル空間とする。このとき $V$ 上の二次形式 $A$ と $V$ から $V^*$ への線形写像 $\alpha$ は

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \quad (x, y \in V)$$

によって一対一に対応する。この対応によって  $V$  上の二次形式全体  $\otimes^2 V^*$  と、 $V$  から  $V^*$  への線形写像全体  $\text{Hom}(V, V^*)$  は線形同型になる。 $\alpha \in \text{Hom}(V, V^*)$  に対応する  $\otimes^2 V^*$  の元  $A$  が対称になっていて、さらに、0 でない  $x \in V$  に対して  $(\alpha(x))(x) > 0$  が成り立つとき  $A$  は  $V$  上の内積になる。

証明  $\alpha \in \text{Hom}(V, V^*)$  に対して

$$A(x, y) = (\alpha(x))(y) \quad (x, y \in V)$$

で定まる  $A$  は双線形になり、 $\otimes^2 V^*$  の元になる。逆に、 $A \in \otimes^2 V^*$  に対して、上の等式で定まる  $\alpha$  は  $\text{Hom}(V, V^*)$  の元になる。定め方より、この対応は一対一になり、 $\otimes^2 V^*$  と  $\text{Hom}(V, V^*)$  は線形同型になる。

$A$  が対称であり、0 でない  $x \in V$  に対して  $(\alpha(x))(x) > 0$  が成り立つとき、 $A(x, x) > 0$  となり  $A$  は  $V$  上の内積になる。

命題 1.3.2  $V$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に補題 1.3.1 によって対応する  $\text{Hom}(V, V^*)$  の元を  $\alpha$  で表わす。 $\wedge^p V^*$  は自然に  $(\wedge^p V)^*$  と同一視され、命題 1.2.6 によって  $\alpha : V \rightarrow V^*$  が誘導する線形写像

$$\wedge^p \alpha : \wedge^p V \rightarrow \wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$$

に対応する  $\otimes^2 (\wedge^p V)^*$  の元は、 $\wedge^p V$  上の内積になる。

証明 まず、 $\wedge^p V^*$  と  $(\wedge^p V)^*$  を同一視する対応を述べておく。 $\wedge^p V^*$  の元  $\phi$  と  $(\wedge^p V)^*$  の元  $\Phi$  は

$$\phi(v_1, \dots, v_p) = \Phi(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \quad (v_1, \dots, v_p \in V)$$

によって対応している。

$\wedge^p \alpha$  に対応する  $\otimes^2 (\wedge^p V)^*$  の元を  $A$  で表わすと、 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  と  $v_1, \dots, v_p$  に対して、

$$\begin{aligned} & A(u_1 \wedge \dots \wedge u_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \\ &= (\wedge^p \alpha(u_1 \wedge \dots \wedge u_p))(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \\ &= (\alpha(u_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u_p))(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \\ &= (\alpha(u_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u_p))(v_1, \dots, v_p) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (\alpha(u_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \alpha(u_{\sigma(p)}))(v_1, \dots, v_p) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (\alpha(u_{\sigma(1)})(v_1) \cdots (\alpha(u_{\sigma(p)})(v_p)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \langle u_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle u_{\sigma(p)}, v_p \rangle \\ &= \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}. \end{aligned}$$

そこで、 $u_1, \dots, u_n$  を  $V$  の正規直交基底とすると、命題 1.2.5 より

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は  $\wedge^p V$  の基底になる。さらに、上の計算より、 $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$  と  $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$  をとると

$$A(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}$$

が成り立つ。したがって、 $A$  は  $\wedge^p V$  上の内積になり、上の基底はこの内積に関する正規直交基底になる。

注意 1.3.3 以後、特に断わらない限り、内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を持つ有限次元実ベクトル空間  $V$  の外積代数  $\wedge^p V$  の内積は命題 1.3.2 で示した  $A$  を考えることとし、 $A$  も  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表わすことにする。また、これらの内積から定まるノルムは  $|\cdot|$  で表わす。すなわち、 $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ 。

系 1.3.4 命題 1.3.2 の条件のもとで、 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  と  $v_1, \dots, v_p$  に対して、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det[\langle u_i, v_j \rangle]_{1 \leq i, j \leq p}$$

が成り立つ。さらに、 $V$  の正規直交基底  $e_1, \dots, e_n$  をとると、

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

は  $\wedge^p V$  の正規直交基底になる。

注意 1.3.5 上の系 1.3.4 より  $V$  の元  $u_1, u_2$  に対して

$$|u_1 \wedge u_2|^2 = \langle u_1 \wedge u_2, u_1 \wedge u_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{vmatrix} = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2$$

となる。 $u_1$  と  $u_2$  のなす角度を  $\theta$  で表わすと、 $u_1$  と  $u_2$  の張る平行四辺形の面積の二乗は

$$|u_1|^2 |u_2|^2 \sin^2 \theta = |u_1|^2 |u_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |u_1|^2 |u_2|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2 = |u_1 \wedge u_2|^2$$

となる。つまり  $|u_1 \wedge u_2|$  は  $u_1$  と  $u_2$  の張る平行四辺形の面積になる。このように  $\wedge^2 V$  の内積によって、 $V$  内の平行四辺形の面積を求めることができる。

注意 1.3.6  $\mathbb{R}^n$  の元を横ベクトルとみなす。横ベクトル  $u$  を縦ベクトルにしたものを  $u^*$  で表わす。 $m \leq n$  として  $\mathbb{R}^n$  の元  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$  をとり、 $u_i = [u_{ij}]$ ,  $v_i = [v_{ij}]$  とおく。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [v_1^* \cdots v_m^*] = [u_i v_j^*] = [\langle u_i, v_j \rangle].$$

これらは  $m$  次正方形行列になり、両辺の行列式をとると、補題 1.3.4 より

$$\det \left( \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \right) = \det[\langle u_i, v_j \rangle] \\ = \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \rangle.$$

$\mathbf{R}^n$  の標準的正規直交基底を  $e_1, \dots, e_n$  で表わすと、

$$u_i = [u_{i1} \ \cdots \ u_{in}] = \sum_{j=1}^n u_{ij} e_j.$$

外積の多重線形性と交代性 (命題 1.2.4) より

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_m &= \left( \sum_{j_1=1}^n u_{1j_1} e_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{j_m=1}^n u_{mj_m} e_{j_m} \right) \\ &= \sum_{\#\{j_1, \dots, j_m\}=m} u_{1j_1} \cdots u_{mj_m} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}$$

となり、

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \rangle = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} &\det \left( \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{mj_1} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \begin{vmatrix} u_{1j_1} & \cdots & u_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj_1} & \cdots & u_{mj_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1j_1} & \cdots & v_{mj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1j_m} & \cdots & v_{mj_m} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



を得る。 $m = n$  の場合は、正方行列の積の行列式がそれぞれの正方行列の行列式の積に等しいというよく知られた等式になる。

命題 1.3.7  $V$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を持つ有限次元実ベクトル空間とする。 $V$  の元  $u_1, \dots, u_p$  に対して、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^p |u_i|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、 $u_1, \dots, u_p$  が互いに直交していることである。

証明  $u_i$  から  $v_i$  と  $w_i$  を以下のように帰納的に構成する。まず  $v_1 = 0$ ,  $w_1 = u_1$  とおく。 $v_{i-1}$ ,  $w_{i-1}$  まで定まっていると仮定して、 $v_i$  と  $w_i$  を次のように定める。

$$u_i = v_i + w_i, \quad v_i \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}, \quad w_i \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}^\perp$$

となるように  $v_i$  と  $w_i$  をとる。すると、 $|w_i|^2 \leq |u_i|^2$  となり、さらに

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_i = w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \quad (1 \leq i \leq p)$$

が成り立つ。特に

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$$

となる。系 1.3.4 を使うと

$$\begin{aligned} |u_1 \wedge \cdots \wedge u_p|^2 &= |w_1 \wedge \cdots \wedge w_p|^2 \\ &= \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle \\ &= \det(\langle w_i, w_j \rangle) \\ &= \det \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_p, w_p \rangle \end{bmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^p \langle w_i, w_i \rangle \leq \prod_{i=1}^p \langle u_i, u_i \rangle = \prod_{i=1}^p |u_i|^2. \end{aligned}$$

したがって、

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_p| \leq \prod_{i=1}^p |u_i|$$

が成り立つ。

等号が成立するための必要十分条件は、すべての  $i$  について  $\langle w_i, w_i \rangle = \langle u_i, u_i \rangle$  が成り立つことだから、これは  $v_i = 0$  と同値になり、 $u_1, \dots, u_p$  が互いに直交していることである。

補題 1.3.8  $V$  と  $W$  をそれぞれ内積を持つ  $m$  次元と  $n$  次元のベクトル空間とし ( $m \geq n$ )、 $F : V \rightarrow W$  を線形写像とする。

$$JF = \sup\{|F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)| \mid u_1, \dots, u_n \text{ は } V \text{ の正規直交系}\}$$

とおく。 $F$  が全射でないときは、 $JF = 0$  となり、 $F$  が全射のときは、 $(\ker F)^\perp$  の基底  $v_1, \dots, v_n$  に対して

$$JF = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} = \frac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

証明  $F$  が全射でないときは  $\dim(\operatorname{im} F) < n$  となり、 $V$  の任意の正規直交系  $u_1, \dots, u_n$  に対して  $F(u_1), \dots, F(u_n)$  は線形従属になる。したがって

$$F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n) = 0$$

となり、 $JF = 0$  が成り立つ。

次に  $F$  が全射の場合を考える。 $(\ker F)^\perp$  の任意の基底  $v_1, \dots, v_n$  をとる。さらに  $(\ker F)^\perp$  の正規直交基底  $u_1, \dots, u_n$  をとる。これらの間の変換行列を  $(a_{ij})$  で表わす。すなわち、

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

とおく。すると、命題 1.2.4 より

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &= \det(a_{ij}) u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, \\ \wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \det(a_{ij}) \wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} &= \frac{|\det(a_{ij})| |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|\det(a_{ij})| |u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= \frac{|\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|}{|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n|} \\ &= |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

系 1.3.4 より  $|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n| = 1$  となることを最後の等式に使った。これより、

$$JF \geq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

$V$  の任意の正規直交系  $w_1, \dots, w_n$  に対して

$$w_i = w_i^1 + w_i^2, \quad w_i^1 \in (\ker F)^\perp, \quad w_i^2 \in \ker F$$

とおくと  $|w_i^1| \leq |w_i| = 1$  となり、さらに

$$\begin{aligned} \wedge^n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= F(w_1) \wedge \cdots \wedge F(w_n) \\ &= F(w_1^1) \wedge \cdots \wedge F(w_n^1) = \wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1). \end{aligned}$$

ここで、 $w_1^1, \dots, w_n^1$  が線形従属の場合は命題 1.2.4 より  $\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1) = 0$  となり、線形独立の場合は  $(\ker F)^\perp$  の基底になる。このときは、上で示したことより、

$$\frac{|\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)|}{|w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1|} = |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|.$$

命題 1.3.7 を使うと

$$\begin{aligned} |\wedge^n F(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n)| &= |\wedge^n F(w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1)| \\ &= |w_1^1 \wedge \cdots \wedge w_n^1| \cdot |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |w_1^1| \cdots |w_n^1| \cdot |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| \\ &\leq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)|. \end{aligned}$$

よって

$$JF \leq |\wedge^n F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)| = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}.$$

以上の結果より、

$$JF \leq \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \leq JF.$$

したがって、

$$JF = \frac{|\wedge^n F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$$

が成り立つ。

例 1.3.9 内積を持つ有限次元ベクトル空間  $V$  の二つの超平面  $V_0, V_1$  に対して、それぞれの単位法ベクトル  $v_0, v_1$  をとり、 $V_0$  から  $V_1$  への直交射影を  $F$  で表わすと  $JF = |\langle v_0, v_1 \rangle|$  が成り立つ。

証明  $x \in V_0$  に対して

$$x = (x - \langle x, v_1 \rangle v_1) + \langle x, v_1 \rangle v_1, \quad (x - \langle x, v_1 \rangle v_1 \in V_1, \langle x, v_1 \rangle v_1 \in V_1^\perp)$$

となるので、

$$F(x) = x - \langle x, v_1 \rangle v_1 \quad (x \in V_0)$$

が成り立つ。次に  $V_0$  と  $V_1$  は一致するかまたは

$$\dim(V_0 \cap V_1) = \dim V_0 - 1 = \dim V_1 - 1$$

となることに注意する。 $V_0$  と  $V_1$  が一致する場合は、 $F(x) = x$  と  $v_1 = \pm v_0$  が成り立つので、

$$JF = 1 = |\langle v_0, v_1 \rangle|.$$

$\dim(V_0 \cap V_1) = \dim V_0 - 1 = \dim V_1 - 1$  の場合は、 $V_0 \cap V_1$  の正規直交基底  $u_1, \dots, u_{p-1}$  をとり、 $u_1, \dots, u_p$  が  $V_0$  の正規直交基底になるようにできる。

$$F(u_i) = \begin{cases} u_i & (1 \leq i \leq p-1), \\ u_p - \langle u_p, v_1 \rangle v_1 & (i = p) \end{cases}$$

となるので

$$[\langle F(u_i), F(u_j) \rangle] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \langle u_p, v_1 \rangle^2 \end{bmatrix}.$$

これより

$$JF^2 = |F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_p)|^2 = \det[\langle F(u_i), F(u_j) \rangle] = 1 - \langle u_p, v_1 \rangle^2.$$

$(V_0 \cap V_1)^\perp$  は 2次元になり、 $u_p, v_0$  は  $(V_0 \cap V_1)^\perp$  の正規直交基底になる。 $v_1 \in (V_0 \cap V_1)^\perp$  を  $u_p, v_0$  の線形結合で表わすと

$$v_1 = \langle u_p, v_1 \rangle u_p + \langle v_0, v_1 \rangle v_0.$$

これより、 $1 = \langle u_p, v_1 \rangle^2 + \langle v_0, v_1 \rangle^2$  となり、 $JF^2 = \langle v_0, v_1 \rangle^2$  を得る。

系 1.3.10 補題 1.3.8 の設定において  $m = n$  とし、さらに  $F_0 : V_0 \rightarrow V$  を内積を持つベクトル空間  $V_0$  から  $V$  への線形同型写像とする。このとき、 $J(F \circ F_0) = JF \cdot JF_0$  が成り立つ。

証明  $F$  が全射でなければ  $F \circ F_0$  も全射ではなく、補題 1.3.8 より  $J(F \circ F_0) = 0 = JF \cdot JF_0$  が成り立つ。 $F$  が全射のときは線形同型写像になり、補題 1.3.8 より  $V_0$  の基底  $v_1, \dots, v_n$  をとると

$$\begin{aligned} J(F \circ F_0) &= \frac{|F \circ F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F \circ F_0(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \\ &= \frac{|F \circ F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F \circ F_0(v_n)|}{|F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F_0(v_n)|} \cdot \frac{|F_0(v_1) \wedge \cdots \wedge F_0(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|} \\ &= JF \cdot JF_0. \end{aligned}$$

定義 1.3.11  $V$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と向きを持つ  $n$  次元実ベクトル空間とする。 $V$  の正の向きの正規直交基底  $e_1, \dots, e_n$  をとり、 $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \wedge^n V$  を考えると、これは命題 1.2.4 より正規直交基底  $e_1, \dots, e_n$  のとり方に依存しないことがわかる。すなわち、 $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  は  $V$  の内積と向きにのみ依存して定まる。命題 1.2.5 より  $\wedge^n V = \mathbf{R}e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  が成り立つ。 $0 \leq k \leq n$  をとる。 $\xi \in \wedge^k V$  と  $\eta \in \wedge^{n-k} V$  に対して  $\xi \wedge \eta \in \wedge^n V$  となるので、 $\xi$  と  $\eta$  によって定まる  $B(\xi, \eta) \in \mathbf{R}$  が存在し

$$\xi \wedge \eta = B(\xi, \eta)e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

と表わすことができる。これによって双線形写像

$$B : \wedge^k V \times \wedge^{n-k} V \rightarrow \mathbf{R}$$

が定まる。命題 1.2.5 より

$$\dim \wedge^k V = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim \wedge^{n-k} V$$

であることに注意する。 $\{1, \dots, n\}$  の元の個数が  $k$  個の部分集合

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$$

に対して  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \wedge^k V$  と表わす。 $\{1, \dots, n\}$  内の  $I$  の補集合を  $I^c$  で表わすと  $e_{I^c} \in \wedge^{n-k} V$  となる。さらに命題 1.2.4 より  $e_I \wedge e_{I^c} = \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  となるので、

$$B(e_I, e_{I^c}) = \pm 1 \quad (I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k)$$

が成り立つ。特に  $B : \wedge^k V \times \wedge^{n-k} V \rightarrow \mathbf{R}$  は非退化になり、

$$\langle \xi, \xi' \rangle = B(\xi, * \xi') \quad (\xi, \xi' \in \wedge^k V)$$

を満たす線形同型写像  $* : \wedge^k V \rightarrow \wedge^{n-k} V$  が定まる。これを  $*$  作用素と呼ぶ。定め方より  $\xi, \xi' \in \wedge^k V$  に対して

$$\langle \xi, \xi' \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n = B(\xi, * \xi') e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \xi \wedge * \xi'$$

が成り立つ。

命題 1.3.12  $V$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と向きを持つ  $n$  次元実ベクトル空間とし、 $e_1, \dots, e_n$  を  $V$  の正の向きの正規直交基底とする。 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  に対して  $\{1, \dots, i_k\}^c = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$  を満たすように  $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$  をとる。このとき

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}}$$

が成り立つ。特に  $* : \wedge^k V \rightarrow \wedge^{n-k} V$  は等長的線形同型写像になる。さらに  $\xi, \eta \in \wedge^k V$  に対して次の等式が成り立つ。

$$(1) \quad \xi \wedge * \eta = \langle \xi, \eta \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (2) \quad *( * \xi) = (-1)^{k(n-k)} \xi.$$

証明 定義 1.3.11 で述べたことより (1) が成り立つ。命題 1.2.4 より

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

となり、他の  $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$  については

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_{n-k}} = 0$$

が成り立つ。したがって、系 1.3.4 と (1) より

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}$$

が成り立つ。さらにこれより

$$\begin{aligned} & *((e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} *(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}) \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ j_1 \cdots j_{n-k} i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ j_1 \cdots j_{n-k} i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \\ 1 \cdots \cdots \cdots n \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \cdots \cdots \cdots n \\ j_1 \cdots j_{n-k} i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_{n-k} \\ j_1 \cdots j_{n-k} i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} = (-1)^{k(n-k)} \end{aligned}$$

となるので、

$$*((e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) = (-1)^{k(n-k)} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

を得る。よって一般の  $\xi \in \wedge^k V$  に対しても  $((*\xi)) = (-1)^{k(n-k)} \xi$  が成り立つ。

例 1.3.13  $V$  を内積  $\langle, \rangle$  と向きを持つ 2 次元実ベクトル空間とする。  $e_1, e_2$  を  $V$  の正の向きの正規直交基底とする。

$$*e_1 = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} e_2 = e_2, \quad *e_2 = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} e_1 = -e_1$$

となるので、  $* : V \rightarrow V$  は反時計回りの  $\pi/2$  の回転になる。

例 1.3.14  $V$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と向きを持つ 3次元実ベクトル空間とする。 $e_1, e_2, e_3$  を  $V$  の正の向きの正規直交基底とする。

$$\begin{aligned} *(e_1 \wedge e_2) &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} e_3 = e_3, \\ *(e_2 \wedge e_3) &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} e_1 = e_1, \\ *(e_3 \wedge e_1) &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} e_2 = e_2 \end{aligned}$$

となるので、

$$V \times V \rightarrow V; (u, v) \mapsto *(u \wedge v)$$

は 3次元実ベクトル空間のベクトル積に一致する。

## 1.4 Riemann 測度

Riesz の表現定理 (定理 1.4.7) を使って、定義 1.4.15 で Riemann 多様体上の Riemann 測度を定義する。

定義 1.4.1 集合  $X$  の部分集合全体  $2^X$  上で定義された  $[0, \infty]$  に値を持つ関数  $\mu$  が次の条件を満たすとき、 $\mu$  を  $X$  上の測度と呼ぶ。

(1)  $\mu(\emptyset) = 0$

(2)  $X$  の部分集合の可算族  $\{A_i\}$  と  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  を満たす  $A \in 2^X$  に対して

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定義 1.4.2  $\mu$  を集合  $X$  上の測度とする。 $X$  の部分集合  $A$  に対して、

$$\mu(T) = \mu(T - A) + \mu(T \cap A)$$

が任意の  $T \in 2^X$  について成り立つとき、 $A$  を  $X$  の  $\mu$  可測部分集合という。

定義 1.4.3  $f$  を測度  $\mu$  を持つ集合  $X$  の部分集合  $S$  上で定義された  $[-\infty, \infty]$  に値を持つ関数とする。さらに  $\mu(X - S) = 0$  を仮定する。 $[-\infty, \infty]$  の任意の開集合  $O$  に対して  $f^{-1}(O)$  が  $X$  の  $\mu$  可測部分集合になるとき、 $f$  を  $\mu$  可測関数と呼ぶ。

注意 1.4.4 以上の概念を使って集合上の測度に関する積分論を  $\mathbb{R}^n$  における Lebesgue 積分論と同様に展開することができ、Lebesgue の収束定理や Fubini の定理等が成り立つ。

定義 1.4.5 位相空間  $X$  の開集合全体が生成する  $\sigma$  集合族の元を Borel 集合と呼ぶ。 $\mu$  を  $X$  上の測度とする。 $X$  の Borel 集合がすべて  $\mu$  可測になり、任意の  $A \subset X$  に対して Borel 集合  $B$  が存在し、 $A \subset B$  と  $\mu(A) = \mu(B)$  を満たすとき、 $\mu$  を Borel 正則測度と呼ぶ。

定義 1.4.6  $X$  を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。 $X$  上の Borel 正則測度  $\mu$  が、任意のコンパクト集合  $K \subset X$  に対して  $\mu(K) < \infty$  を満たすとき、 $\mu$  を Radon 測度と呼ぶ。

定理 1.4.7 (Riesz の表現定理)  $X$  を局所コンパクト可分 Hausdorff 空間とする。 $X$  上定義された関数  $f$  の台  $\text{supp} f$  を

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

によって定める。 $X$  上の台がコンパクトになる実数値連続関数の全体を  $\mathcal{K}(X)$  で表わす。 $\mathcal{K}(X)$  上の実数値線形汎関数  $L : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbf{R}$  が、

- (1)  $f \geq 0$  となる  $f \in \mathcal{K}(X)$  に対して  $L(f) \geq 0$
- (2) コンパクト集合  $K \subset X$  に対して

$$\sup\{L(f) \mid f \in \mathcal{K}(X), |f| \leq 1, \text{supp} f \subset K\} < \infty$$

を満たすとき、Radon 測度  $\mu$  が  $X$  上に存在し、

$$L(f) = \int_X f d\mu \quad (f \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。

注意 1.4.8 この講義では多様体は可算開基を持つ  $C^\infty$  級多様体のみ考えることにする。可算開基を持つ多様体は可分になるので、ここでの多様体は定理 1.4.7 の仮定を満たしている。

Riesz の表現定理を利用して Riemann 多様体に測度を定めるために、いくつかの準備をしておく。

命題 1.4.9 (積分の変数変換公式)  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  の開集合とする。 $x_1, \dots, x_n$  と  $y_1, \dots, y_n$  を  $U$  上の座標とする。これらは  $\mathbf{R}^n$  の標準的な座標である必要はない。 $U$  で定義された連続関数  $f$  に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_U f(y) \left| \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \right| dy_1 \cdots dy_n.$$



定義 1.4.10 位相空間  $X$  の開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  が局所有限とは、 $X$  の任意の点がこの開被覆の有限個の開集合としか交わらない近傍を持つこととする。 $X$  の開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  と  $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$  に対して、 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$  が  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  の細分であるとは、どの  $V_\beta$  もある  $U_\alpha$  に含まれていることとする。 $X$  がパラコンパクトであるとは、 $X$  の任意の開被覆に対してその細分であり局所有限な開被覆が存在することとする。

定義 1.4.11 多様体  $M$  の局所有限な開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に対して、 $M$  上の  $C^\infty$  級関数の族  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  であって次の条件を満たすものを開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に従属する単位の分割と呼ぶ。

- (1) 各  $\alpha \in A$  に対して  $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1 (x \in M)$ .
- (2) 各  $\alpha \in A$  について  $\text{supp } f_\alpha$  は  $U_\alpha$  に含まれる。
- (3) 各点  $x \in M$  に対して  $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$ .

定理 1.4.12 パラコンパクトな多様体  $M$  の局所有限な開被覆  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に対して、各  $\alpha \in A$  について  $\bar{U}_\alpha$  がコンパクトならば  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に従属する単位の分割が存在する。

注意 1.4.13 可算開基を持つ多様体はパラコンパクトになることが知られているので、この講義で対象にしている多様体に上の定理を適用できる。

定義 1.4.14 多様体  $M$  の各点  $x$  における接ベクトル空間  $T_x(M)$  に内積  $g_x$  が定まっていて次の条件を満たすとき、 $g = \{g_x\}_{x \in M}$  を  $M$  の Riemann 計量という。 $M$  の任意の局所座標系  $(U; x_1, \dots, x_n)$  に対して定まる  $U$  の各点  $x$  における  $T_x(M)$  の基底  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x$  の間の内積

$$g_{ij}(x) = g_x \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x, \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x \right) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

がすべて  $x$  の関数として  $U$  上の  $C^\infty$  級関数になる。 $g_{ij}$  を  $g$  の  $(U; x_1, \dots, x_n)$  における成分という。これは定義 1.1.5 の成分と同じである。 $(U; x_1, \dots, x_n)$  において

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

が成り立つ。Riemann 計量  $g$  の与えられた多様体  $M$  を Riemann 多様体といい、 $(M, g)$  と書く。Riemann 計量が決まっている場合は単に  $M$  を Riemann 多様体ということもある。

多様体  $N$  から多様体  $M$  への  $C^\infty$  級写像  $\iota: N \rightarrow M$  があり、微分  $d\iota_x: T_x(N) \rightarrow T_x(M)$  が  $M$  の各点で単射になるとき、 $N$  を  $M$  の部分多様体という。さらに、 $M$  が Riemann 計量  $g$  を持つ Riemann 多様体のとき、 $g$  の  $\iota$  による引き戻し  $\iota^*g$  を

$$(\iota^*g)_x(X, Y) = g_{\iota(x)}(d\iota_x X, d\iota_x Y) \quad (x \in N, X, Y \in T_x(N))$$

によって定める。 $d\iota_x$  が単射であることから、 $\iota^*g$  は  $N$  の Riemann 計量になる。 $(N, \iota^*g)$  を  $(M, g)$  の Riemann 部分多様体という。

**定義 1.4.15**  $(M, g)$  を Riemann 多様体とする。 $M$  の局所座標系  $(U; x_1, \dots, x_n)$  をとる。各  $x \in U$  に対して  $\wedge^n T_x(M)$  に Riemann 計量から自然に定まる内積を入れておく。 $\text{supp} f \subset U$  となる  $f \in \mathcal{K}(M)$  に対して

$$L(f) = \int_U f(x_1, \dots, x_n) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

によって  $L(f)$  を定める。右辺は Euclid 空間における Lebesgue 積分である。被積分関数はコンパクトな台を持つ連続関数だから、Riemann 積分に一致している。この値  $L(f)$  は積分の変数変換の公式から、局所座標系のとり方に依存しないことがわかる。さらに一つの局所座標近傍に台が含まれない  $\mathcal{K}(M)$  の元に対しては、単位の分割を使うことによって  $L: \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  を定義することができる。これも単位の分割のとり方に依存しないことがわかる。さらに  $L$  は定理 1.4.7 の仮定を満たすので、Radon 測度  $\mu$  が  $M$  上に存在し、

$$L(f) = \int_M f d\mu \quad (f \in \mathcal{K}(M))$$

が成り立つ。この測度  $\mu$  を  $M$  の Riemann 測度と呼ぶ。今後 Riemann 多様体上の測度は Riemann 測度のみを考えることにする。 $\mu$  を  $\mu_{(M, g)}$  と記したり、Riemann 計量がわかっているときは  $\mu_M$  と記したりする。 $\text{vol}(M) = \mu_M(M)$  と表わし、 $\text{vol}(M)$  を  $M$  の体積と呼ぶ。通常  $M$  の次元が 1 のときは、長さと呼び  $L(M)$  と表わす。 $M$  の次元が 2 のときは、面積と呼び  $A(M)$  と表わす。 $M$  の次元が 3 のときは、 $V(M)$  と表わす。

**証明** まず  $\text{supp} f \subset U$  となる  $f \in \mathcal{K}(M)$  に対して  $L(f)$  の定義が局所座標系のとり方に依存しないことを示そう。 $U$  にもう一つの局所座標系  $y_1, \dots, y_n$  があるとす。局所座標系から定まる接ベクトル空間の基底は

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と変換されるので、命題 1.2.4 より

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
 & \int_U f(x) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_U f(y) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| \left| \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \right| dy_1 \cdots dy_n \\
 &= \int_U f(y) \left| \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dy_1 \cdots dy_n \\
 &= \int_U f(y) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right| dy_1 \cdots dy_n
 \end{aligned}$$

となり、この場合の  $L(f)$  の定め方は局所座標系のとり方に依存しないことがわかった。

一つの局所座標近傍に台が含まれない  $\mathcal{K}(M)$  の元に対する  $L$  の定義を単位の分割によって定める。まず各点  $x \in M$  に対して  $\bar{U}_x$  がコンパクトになるような  $x$  の局所座標近傍  $U_x$  をとる。  $\{U_x\}_{x \in M}$  は  $M$  の開被覆であり、  $M$  はパラコンパクトなので、  $\{U_x\}_{x \in M}$  の細分であり局所有限な開被覆  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  が存在する。各  $\bar{U}_x$  はコンパクトだから各  $\bar{V}_\alpha$  もコンパクトになる。定理 1.4.12 より  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に従属する単位の分割  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  が存在する。任意に  $f \in \mathcal{K}(M)$  と一つとる。  $f$  の台はコンパクトだから有限個の  $V_\alpha$  としか交わらない。各  $f_\alpha f$  は  $V_\alpha$  の外では 0 になるので、有限個の  $\alpha$  を除いて  $f_\alpha f$  は 0 になる。よって

$$f = 1 \cdot f = \left( \sum_{\alpha} f_\alpha \right) f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha f$$

が成り立ち、右辺は有限個の和になる。各  $f_\alpha f$  の台は  $V_\alpha$  に含まれ、さらにこれはある  $U_x$  に含まれるので  $L(f_\alpha f)$  はすでに定義されている。これを使って

$$L(f) = \sum_{\alpha \in A} L(f_\alpha f)$$

によって  $L(f)$  を定める。

上で定めた  $L$  が局所有限な開被覆とそれに従属する単位の分割のとり方にも依存しないことを示そう。  $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$  を  $M$  の局所有限な開被覆であって、各  $W_\beta$  は  $M$  の閉包がコンパクトになる局所座標近傍に含まれるものとする。さらに、  $\{g_\beta\}_{\beta \in B}$  を  $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$  に従属する単位の分割とする。各  $\alpha \in A$  について

$$f_\alpha f = \sum_{\beta \in B} g_\beta f_\alpha f$$

が成り立ち、右辺の和は有限和になる。よって、  $L$  の定義にある Euclid 空間の積分の線形性より

$$L(f_\alpha f) = \sum_{\beta \in B} L(g_\beta f_\alpha f)$$

が成り立ち、

$$\sum_{\alpha \in A} L(f_\alpha f) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} L(g_\beta f_\alpha f).$$

両辺の和はどちらも有限和である。同様にして

$$\sum_{\beta \in B} L(g_\beta f) = \sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A} L(f_\alpha g_\beta f).$$

したがって、

$$\sum_{\alpha \in A} L(f_\alpha f) = \sum_{\beta \in B} L(g_\beta f)$$

が成り立ち、 $L$  の定め方は開被覆や単位の分割のとり方に依存しない。

$L$  が Riesz の表現定理の仮定を満たすことは、Euclid 空間における積分の性質からわかる。

注意 1.4.16  $n$  次元多様体上のコンパクトな台を持つ  $n$  次連続微分形式の積分の定義をするためには、多様体に向きがついていることが必要になるが、Riemann 多様体上のコンパクトな台を持つ連続関数の積分を定義するためには、多様体の向きは必要ない。

命題 1.4.17  $M$  を Riemann 多様体とし、 $(U; x_1, \dots, x_n)$  を  $M$  の局所座標近傍とする。 $U$  上で定義された  $\mu_M$  可測関数  $\phi$  が、 $\mu_M$  可積分であるかまたは  $\phi \geq 0$  であるとき、

$$\int_U \phi d\mu_M = \int_U \phi(x_1, \dots, x_n) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

が成り立つ。

## 1.5 余面積公式

積分幾何学の種々の公式を証明するうえで基本的な役割を果たす余面積公式を示し、その簡単な応用として、Archimedes が発見した球から接する円柱への面積を保つ写像とその高次元球面への拡張を示す。Fenchel の定理も余面積公式を利用して証明する。

定義 1.5.1  $f : M \rightarrow N$  を多様体  $M$  から多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする。 $x \in M$  に対して、 $df_x : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(N)$  が全射になるとき、 $x$  を  $f$  の正則点と呼ぶ。 $M$  の正則点ではない点を臨界点と呼ぶ。 $y \in N$  に対して、 $f(x) = y$  となる  $f$  の臨界点  $x$  が存在するとき、 $y$  を  $f$  の臨界値と呼ぶ。 $N$  の臨界値ではない点を正則値と呼ぶ。

定理 1.5.2 (Sard の定理)  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  内の開集合とし、 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$  を  $C^\infty$  級写像とする。 $f$  の臨界点の全体を  $C$  で表わし、 $\mathbf{R}^p$  の Lebesgue 測度を  $\mu$  で表わすと、 $\mu(f(C)) = 0$  が成り立つ。

定理 1.5.3  $f : M \rightarrow N$  を Riemann 多様体  $M$  から Riemann 多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする。 $f$  の臨界点の全体を  $C$  で表わすと、 $\mu_N(f(C)) = 0$  が成り立つ。

証明  $M$  と  $N$  は可算開基を持っているので、 $M$  と  $N$  の可算開被覆  $\{U_i\}$  と  $\{V_i\}$  を、各  $i$  について

- (1)  $U_i$  は  $M$  の局所座標近傍に含まれる、
- (2)  $\bar{V}_i$  はコンパクトで、 $N$  の局所座標近傍に含まれる、
- (3)  $f(U_i) \subset V_i$  を満たす

が成り立つようにとることができる。 $C_i = C \cap U_i$  において、 $\bar{V}_i$  を含む  $N$  の局所座標近傍を  $(V'_i; x_1, \dots, x_p)$  で表わす。 $V'_i \subset \mathbf{R}^p$  とみなし、 $\mathbf{R}^p$  の Lebesgue 測度を  $\mu$  と書くことにすると、定理 1.5.2 より、 $\mu(f(C_i)) = 0$  が成り立つ。

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

は  $V'_i$  上の連続関数になり、 $\bar{V}_i \subset V'_i$  はコンパクトだから

$$A = \sup_{\bar{V}_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right|$$

が存在する。したがって、命題 1.4.17 より、

$$0 \leq \mu_N(f(C_i)) \leq A\mu(f(C_i)) = 0$$

となり、 $\mu_N(f(C_i)) = 0$ 。これより、

$$0 \leq \mu_N(f(C)) \leq \sum_i \mu_N(f(C_i)) = 0,$$

つまり、 $\mu_N(f(C)) = 0$  が成り立つ。

定義 1.5.4  $m \geq n$  とし、 $f : M \rightarrow N$  を  $m$  次元 Riemann 多様体  $M$  から  $n$  次元 Riemann 多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする。 $x \in M$  に対して補題 1.3.8 の  $J$  を使って、 $Jf(x) = Jdf_x$  とおく。

定理 1.5.5 (余面積公式)  $f : M \rightarrow N$  を  $m$  次元 Riemann 多様体  $M$  から  $n$  次元 Riemann 多様体  $N$  への  $C^\infty$  級写像とし、 $\phi$  を  $M$  上の  $\mu_M$  可測関数とする。このとき、 $N$  の元  $y$  に対して  $\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$  を対応させる関数は  $N$  上の  $\mu_N$  可測関数になる。さらに、 $\phi Jf$  が  $M$  上  $\mu_M$  可積分であるか、または  $\phi \geq 0$  のとき、

$$\int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

証明 各  $x \in M$  について、 $V_x^n(M)$  で  $T_x(M)$  内の  $n$  個の正規直交系全体の成す Stiefel 多様体とし、

$$V^n(M) = \bigcup_{x \in M} V_x^n(M)$$

とおくと、 $V^n(M)$  は  $V^n(M) \rightarrow M$  を射影とし Stiefel 多様体をファイバーとするファイバー束の全空間になり、特に  $V^n(M)$  は多様体になる。

$$V^n(M) \rightarrow \mathbf{R}; (u_1, \dots, u_n) \mapsto |df(u_1) \wedge \dots \wedge df(u_n)|$$

は連続関数になり、

$$Jf(x) = \sup\{|df(u_1) \wedge \dots \wedge df(u_n)| \mid (u_1, \dots, u_n) \in V_x^n(M)\}$$

は  $M$  から  $\mathbf{R}$  への連続関数になる。したがって、

$$O = \{x \in M \mid Jf(x) \neq 0\}$$

は  $M$  の開集合になる。特に、 $O$  は  $\mu_M$  可測集合になり、

$$\int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x) = \int_O \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。各  $x \in O$  に対して、陰関数定理より  $x$  の局所座標近傍  $U_x$  が存在し、 $f(U_x)$  は  $f(x)$  の開近傍になり、 $f : U_x \rightarrow f(U_x)$  は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、 $f$  自身が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、まず定理の公式を証明する。

$N$  が  $\mathbf{R}^n$  の開集合になっていて、 $F$  が  $\mathbf{R}^{m-n}$  の開集合で  $M = N \times F$  となり、

$$f : M = N \times F \rightarrow N; (y, t) \mapsto y$$

である場合を考える。 $y_1, \dots, y_n$  を  $N \subset \mathbf{R}^n$  の座標とし、 $x_1, \dots, x_m$  を  $M = N \times F \subset \mathbf{R}^m$  の座標とする。ただし、 $y_i \circ f = x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) となるようにしておく。このとき、 $x_{n+1}, \dots, x_m$  は  $F$  の座標になる。 $\phi$  は  $M$  上の可測関数だから、

$$\phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f$$

も  $M$  上の可測になる。したがって、Fubini の定理より

$$\begin{aligned} y \mapsto & \int_F \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_{n+1} \cdots dx_m(t) \\ &= \left( \int_F \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M dx_{n+1} \cdots dx_m(t) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\ &= \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \end{aligned}$$

は  $N$  上の可測関数になり、

$$\begin{aligned} & \int_M \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_1 \cdots dx_m \\ &= \int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N dy_1 \cdots dy_n(y) \\ &= \int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \end{aligned}$$

が成り立つ。各  $1 \leq i \leq n$  について、 $M = N \times F$  の接ベクトル  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  を  $F$  に接する成分と直交する成分に分解する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_F + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp}.$$

すると

$$df \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = df \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{F^\perp} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \\ &= \left| df \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \wedge \cdots \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right|_N \\ &= \left| df \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \right) \wedge \cdots \wedge df \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right) \right|_N. \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$  は  $F$  に接しているので、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \\ &= \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \\ &= \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M. \end{aligned}$$

以上の計算と補題 1.3.8 より、

$$\begin{aligned}
& \int_M \phi(y, t) \left| \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_M \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_N \circ f dx_1 \cdots dx_m \\
&= \int_M \phi(x) \frac{\left| df \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \right) \wedge \cdots \wedge df \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right) \right|_N}{\left| \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{F^\perp} \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{F^\perp} \right|_M} d\mu_M(x) \\
&= \int_M \phi Jf d\mu_M
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi Jf d\mu_M$$

を得る。これで  $f$  が Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影になっている場合に、定理の証明ができた。

一般の場合にもどる。各  $x \in O$  に対して、 $x$  の局所座標近傍  $U_x$  が存在し、 $f(U_x)$  は  $f(x)$  の開近傍になり、 $f : U_x \rightarrow f(U_x)$  は Euclid 空間の開集合の積からの自然な射影とみなすことができる。そこで、このような開集合を  $O$  の各点でとると、 $\{U_x\}_{x \in O}$  は  $O$  の開被覆になる。 $M$  は可算開基を持つので、 $O$  も可算開基を持つ。したがって  $O$  の開被覆  $\{U_x\}_{x \in O}$  から可算個  $\{U_k\}$  をとり、 $\{U_k\}$  が  $O$  の開被覆になるようにできる。 $\{U_k\}$  に付随する単位の分割  $\{\psi_k\}$  をとる。 $f$  の  $U_k$  への制限を

$$f_k : U_k \rightarrow V_k = f(U_k)$$

で表わすことにして、すでに示したことを  $\psi_k \phi$  に適用すると、

$$y \mapsto \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は  $V_k$  上の  $\mu_N$  可測関数になり、

$$\int_{V_k} \left( \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) = \int_{U_k} \psi_k \phi Jf d\mu_{U_k}.$$

よって

$$y \mapsto \sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x)$$

は  $N$  上の  $\mu_N$  可測関数になる。各  $y$  について  $\{\psi_k|_{f^{-1}(y)}\}$  は  $f^{-1}(y)$  の単位の分割になるので、

$$\sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) = \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$



となる。これより

$$y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$$

は  $N$  上の  $\mu_N$  可測関数になる。 $\phi Jf$  が  $M$  上  $\mu_M$  可積分のときは Lebesgue の有界収束定理を使い、 $\phi \geq 0$  のときは Lebesgue の単調収束定理を使うと、

$$\begin{aligned} \int_M \phi Jf d\mu_M &= \sum_k \int_{U_k} \psi_k \phi Jf d\mu_{U_k} \\ &= \sum_k \int_{V_k} \left( \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_{V_k}(y) \\ &= \int_N \left( \sum_k \int_{f_k^{-1}(y)} (\psi_k \phi)(x) d\mu_{f_k^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \\ &= \int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) \end{aligned}$$

となり、

$$\int_M \phi Jf d\mu_M = \int_N \left( \int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y)$$

を得る。

系 1.5.6 定理 1.5.5 において  $m = n$  の場合、 $N$  の元  $y$  に対して  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x)$  を対応させる関数は  $N$  上の  $\mu_N$  可測関数になる。さらに、

$$\int_N \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x)$$

が成り立つ。

注意 1.5.7 系 1.5.6 を適用する際に、次のことに注意しておく、右辺の  $\int_M \phi Jf d\mu_M$  の計算が簡単になる。系 1.3.10 より、 $M$  の局所座標近傍  $(U; x_1, \dots, x_n)$  において

$$\int_U \phi Jf d\mu_M = \int_U \phi \left| df \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \wedge \cdots \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right| dx_1 \cdots dx_n.$$

したがって  $M$  の接ベクトル空間の正規直交基底をとる必要はない。他方、 $N$  の接ベクトル空間の正規直交基底  $e_1, \dots, e_n$  をとって、 $x \in U$  に対して  $f(x)$  での変換行列  $F(x)$  を

$$\left[ df \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdots df \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right] = [e_1 \cdots e_n] F(x)$$

で定めると、

$$\left| df \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \wedge \cdots \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right| = |\det F(x)|$$

となり、

$$\int_U \phi Jf d\mu_M = \int \phi(x) |\det F(x)| dx_1 \cdots dx_n.$$

命題 1.5.8 (Archimedes)  $r > 0$  に対して、

$$S^k(r) = \{x \in \mathbf{R}^{k+1} \mid |x| = r\}$$

とおくと、写像

$$\begin{aligned} f: S^1(r) \times (-r, r) &\mapsto S^2(r) \\ ; (r \cos \theta, r \sin \theta, t) &\mapsto (\sqrt{r^2 - t^2} \cos \theta, \sqrt{r^2 - t^2} \sin \theta, t) \end{aligned}$$

は面積保存写像になる。

注意 1.5.9 命題 1.5.8 の 2 次元球面の面積保存写像は  $n$  次元球面の場合に拡張できる (命題 1.5.11)。

証明  $\mathbf{R}^3$  の標準的正規直交基底を  $e_1, e_2, e_3$  とする。  $f$  の微分写像を計算するために定義域の接ベクトル空間の基底を求めておこう。  $S^1(r)$  の接ベクトル  $\partial/\partial\theta$  と  $(-r, r)$  の接ベクトル  $\partial/\partial t$  を合わせたものが  $S^1(r) \times (-r, r)$  の接ベクトル空間の基底になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r \cos \theta, r \sin \theta, t) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(r \cos \theta, r \sin \theta, t) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\left| \frac{\partial}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| = r$$

が成り立つ。これらの接ベクトルの微分写像  $df$  による像は次のようになる。

$$\begin{aligned} df \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \right) &= \frac{\partial f}{\partial\theta} = (-\sqrt{r^2 - t^2} \sin \theta, \sqrt{r^2 - t^2} \cos \theta, 0), \\ df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) &= \frac{\partial f}{\partial t} = (-(r^2 - t^2)^{-1/2} t \cos \theta, -(r^2 - t^2)^{-1/2} t \sin \theta, 1). \end{aligned}$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned} \left| df \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right|^2 &= \left| df \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right|^2 \cdot \left| df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right|^2 \\ &= (r^2 - t^2) \left( \frac{t^2}{r^2 - t^2} + 1 \right) = r^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$Jf = \frac{\left| df \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right|} = \frac{r}{r} = 1$$

となり  $f$  は面積を保つ。

例 1.5.10 命題 1.5.8 の面積保存写像  $f$  を使うと

$$A(S^2(r)) = \int_{S^2(r)} 1 d\mu = \int_{S^1(r) \times (-r, r)} 1 d\mu = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

によって 2 次元球面  $S^2(r)$  の面積を求めることができる。

命題 1.5.11  $r > 0$  に対して、

$$D^k(r) = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |x| < r\}$$

とおくと、写像

$$\begin{aligned} f: S^1(r) \times D^{n-1}(r) &\mapsto S^n(r) \\ ; (r \cos \theta, r \sin \theta, x) &\mapsto (\sqrt{r^2 - |x|^2} \cos \theta, \sqrt{r^2 - |x|^2} \sin \theta, x) \end{aligned}$$

は  $n$  次元体積保存写像になる。

注意 1.5.12 命題 1.5.11 の  $n$  次元球面の体積保存写像は、積分幾何学に関するセミナー中に井川治・酒井高司両氏と共同で発見した。すでに知られていることのようにも思えるが、この体積保存写像について書かれた文献を知らない。

証明  $S^1(r) \times D^{n-1}(r)$  と  $S^n(r)$  はどちらも  $\mathbf{R}^{n+1}$  に含まれているとみなせる。 $\mathbf{R}^{n+1}$  の最初の二つの成分に  $SO(2)$  が作用し残りの成分に  $SO(n-1)$  が作用することで、 $SO(2) \times SO(n-1)$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  に作用する。この作用に関して  $S^1(r) \times D^{n-1}(r)$  と  $S^n(r)$  はどちらも不変になる。さらにこれらの作用は等長的になる。 $SO(2) \times SO(n-1)$  の作用で移り合う点における  $Jf$  の値は等しい。 $S^1(r) \times D^{n-1}(r)$  の任意の点は  $SO(2) \times SO(n-1)$  の作用で  $(r, 0, s, 0, \dots, 0)$  ( $0 \leq s < r$ ) という形の点に移るので、この点における  $Jf$  を計算すればよい。

$\mathbf{R}^{n+1}$  の標準的正規直交基底を  $e_1, \dots, e_{n+1}$  とする。 $f$  の微分写像を計算するために定義域の接ベクトル空間の基底を求めておこう。 $S^1(r)$  の接ベクトル  $\frac{\partial}{\partial \theta}|_{\theta=0}$  と  $D^{n-1}(r)$  の接ベクトル  $e_3, \dots, e_{n+1}$  を合わせたものが  $S^1(r) \times D^{n-1}(r)$  の接ベクトル空間の基底になる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} (r \cos \theta, r \sin \theta, s, 0, \dots, 0) = (0, r, 0, \dots, 0)$$

と  $e_3, \dots, e_{n+1}$  は互いに直交するので、命題 1.3.7 より

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_{n+1} \right| = r \cdot |e_3| \cdots |e_{n+1}| = r$$

が成り立つ。これらの接ベクトルの微分写像  $df$  による像は次のようになる。

$$\begin{aligned} df \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right) &= \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = (0, \sqrt{r^2 - s^2}, 0, \dots, 0) = \sqrt{r^2 - s^2} e_2, \\ df(e_3) &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} (\sqrt{r^2 - (s+t)^2}, 0, s+t, 0, \dots, 0) \\ &= -(r^2 - s^2)^{-1/2} s, 0, 1, 0, \dots, 0 \\ &= -(r^2 - s^2)^{-1/2} s e_1 + e_3 \end{aligned}$$

となり  $4 \leq i \leq n+1$  のときは

$$df(e_i) = \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} (\sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}, 0, s, 0, \dots, \overset{i}{t}, \dots, 0) = e_i.$$

これらは直交するので、命題 1.3.7 より

$$\begin{aligned} &\left| df \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right) \wedge df(e_3) \wedge \dots \wedge df(e_{n+1}) \right|^2 \\ &= \left| df \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right) \right|^2 \cdot |df(e_3)|^2 \cdots |df(e_{n+1})|^2 \\ &= (r^2 - s^2) \left( \frac{s^2}{r^2 - s^2} + 1 \right) = r^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$Jf = \frac{\left| df \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right) \wedge df(e_3) \wedge \dots \wedge df(e_{n+1}) \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_{n+1} \right|} = \frac{r}{r} = 1$$

となり  $f$  は体積を保つ。

例 1.5.13  $\omega_n = \text{vol}(S^{n-1}(1))$ ,  $\kappa_n = \text{vol}(D^n(1))$  とおくと

$$\text{vol}(S^{n-1}(r)) = \omega_n r^{n-1}, \quad \text{vol}(D^n(r)) = \kappa_n r^n$$

が成り立つ。 $n \geq 2$  のとき、写像  $f: D^n(1) \rightarrow [0, 1]; x \mapsto |x|$  に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用する。 $Jf = 1$  となるので、

$$\text{vol}(D^n(1)) = \int_0^1 \text{vol}(S^{n-1}(r)) dr$$

を得る。したがって、

$$\kappa_n = \text{vol}(D^n(1)) = \int_0^1 \text{vol}(S^{n-1}(r))dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \left[ \frac{\omega_n r^n}{n} \right]_0^1 = \frac{\omega_n}{n}.$$

さらに命題 1.5.11 より

$$\omega_{n+1} = \text{vol}(S^n(1)) = \text{vol}(S^1(1))\text{vol}(D^{n-1}(1)) = 2\pi\kappa_{n-1}.$$

これらの関係式と

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \text{vol}(S^0(1)) = 2, & \kappa_1 &= \text{vol}(D^1(1)) = 2, \\ \omega_2 &= \text{vol}(S^1(1)) = 2\pi, & \kappa_2 &= \text{vol}(D^2(1)) = \pi \end{aligned}$$

より帰納的に  $\omega_n$  と  $\kappa_n$  を計算することができる。

例 1.5.14

$$S_+^{n-1} = \{u \in S^{n-1}(1) \mid 0 \leq u_1\}$$

とおくと次の等式が成り立つ。

$$\int_{S_+^{n-1}} u_1 d\mu(u) = \text{vol}(D^{n-1}(1)) = \kappa_{n-1}.$$

証明 写像  $f: S_+^{n-1} \rightarrow D^{n-1}(1)$  を  $\mathbb{R}^n$  から  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1}$  への直交射影  $P$  の  $S_+^{n-1}$  への制限とする。すると  $f$  は全単射になりさらに微分同型写像になる。 $f$  は線形写像  $P$  の制限だから、 $f$  の微分写像も  $P$  の接ベクトル空間への制限になる。 $S_+^{n-1}$  の単位法ベクトルを  $e$  で表わし  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  の単位法ベクトルを  $e_1$  で表わすと例 1.3.9 より  $Jf = |\langle e, e_1 \rangle| = u_1$  が成り立つ。 $f: S_+^{n-1} \rightarrow D^{n-1}(1)$  と  $S_+^{n-1}$  上恒等的に 1 に等しい関数に余面積公式 (系 1.5.6) を適用すると次の等式を得る。

$$\int_{S_+^{n-1}} u_1 d\mu(u) = \int_{S_+^{n-1}} Jf d\mu(u) = \text{vol}(D^{n-1}(1)).$$

定義 1.5.15 平面曲線とは区間上定義された平面  $\mathbb{R}^2$  への微分が消えない  $C^\infty$  級写像である。平面曲線は  $\mathbb{R}^2$  の部分多様体とみなすことができる。 $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を平面曲線とする。 $t_0 \in I$  を一つとり固定する。

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dc}{dt} \right| dt$$

によって  $I$  上の関数  $s(t)$  を定める。 $s(t)$  は曲線  $c$  の  $c(t_0)$  から  $c(t)$  までの向きを付けた長さになる。これをパラメータ  $t$  で微分すると

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dc}{dt} \right| > 0$$

が成り立つ。これより  $s(t)$  は単調増加関数になり、逆関数  $t = t(s)$  が存在する。 $t(s)$  も  $C^\infty$  級になる。これにより、

$$\bar{c}(s) = c(t(s))$$

とにおいて、曲線のパラメータを  $s$  にとりかえることができる。 $s$  を曲線の弧長パラメータという。

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt} \left/ \frac{ds}{dt} \right. = \frac{dc}{dt} \left/ \left| \frac{dc}{dt} \right| \right.$$

となるので、長さは1になる。すなわち、曲線の弧長パラメータによる速度ベクトルは単位ベクトルになる。曲線のパラメータは通常弧長パラメータ  $s$  を使うことにして、最初から  $c(s)$  と表わすことにする。 $c(s) = (x(s), y(s))$  と表わすと

$$e(s) = c'(s) = (x'(s), y'(s))$$

は単位ベクトルになる。 $e(s)$  を反時計回りに  $\pi/2$  回転させた単位ベクトルを

$$n(s) = (-y'(s), x'(s))$$

で表わす。 $c'(s)$  は長さ1なので、

$$\langle c'(s), c'(s) \rangle = 1$$

となる。両辺を  $s$  で微分すると、

$$2\langle c''(s), c'(s) \rangle = 0$$

を得る。すなわち、 $c''(s)$  は  $c'(s) = e(s)$  に直交する。したがって、 $c''(s)$  は  $n(s)$  に比例することになり、ある  $\kappa(s)$  が存在し  $c''(s) = \kappa(s)n(s)$  が成り立つ。 $\kappa(s)$  を曲線  $c(s)$  の曲率という。

$$(x''(s), y''(s)) = c''(s) = \kappa(s)n(s) = \kappa(s)(-y'(s), x'(s))$$

となるので、

$$n'(s) = (-y''(s), x''(s)) = (-\kappa(s)x'(s), -\kappa(s)y'(s)) = -\kappa(s)e(s).$$

以上より、

$$e'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = -\kappa(s)e(s)$$

を得る。

**定理 1.5.16 (Fenchel)**  $c$  を平面閉曲線とする。 $c$  の弧長パラメータを  $s$  で表わし、曲率を  $\kappa(s)$  で表わす。このとき、

$$2\pi \leq \int_c |\kappa(s)| ds$$

が成り立つ。

証明  $\mathbf{R}^2$  内の1次元部分ベクトル空間全体が成す1次元実射影空間を  $P^1(\mathbf{R})$  で表わす。 $P^1(\mathbf{R})$  の元

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \cos \theta + y \sin \theta = 0\}$$

に  $\theta$  を対応させると、 $\theta$  は  $P^1(\mathbf{R})$  の局所座標系になる。 $d\theta \otimes d\theta$  は  $P^1(\mathbf{R})$  全体で定義される Riemann 計量になる。このとき、長さは  $L(P^1(\mathbf{R})) = \pi$  となることに注意しておく。

曲線  $c$  の点  $c(s)$  に対して、 $c(s)$  での接線を  $\mathbf{R}^2$  の原点を通るように平行移動したものを対応させる写像を  $g$  で表わすと、 $g: c \rightarrow P^1(\mathbf{R})$  は  $C^\infty$  級写像になる。 $c$  上恒等的に1に等しい関数と  $g$  に余面積公式 (系 1.5.6) を適用すると、

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} \#(g^{-1}(l)) d\mu_{P^1(\mathbf{R})}(l) = \int_c Jg d\mu_c = \int_c |\kappa(s)| ds$$

を得る。ただし、 $\#X$  は集合  $X$  の元の個数を表わす。各  $l \in P^1(\mathbf{R})$  に対して  $c$  を  $l$  に平行な直線ではさむことにより、 $\#(g^{-1}(l)) \geq 2$  となることがわかる。したがって

$$\int_c |\kappa(s)| ds \geq 2 \text{vol}(P^1(\mathbf{R})) = 2\pi.$$

注意 1.5.17 定理 1.5.16 の証明方法を Euclid 空間内のコンパクト部分多様体に適用すると、被積分関数は高さの関数の臨界点の個数になるので、Morse 理論より位相不変量で下から評価することができる。これが Chern-Lashof の定理の証明の概略である。

## 第2章 平面における交叉積分公式

この章では、 $\mathbf{R}^2$  の直線の全体  $L(\mathbf{R}^2)$  の元を使って、平面図形に関する幾何学を展開をする。そのために、この節では  $L(\mathbf{R}^2)$  に Riemann 計量を定める。この Riemann 計量を使って、平面単純閉曲線の囲む領域の面積を  $L(\mathbf{R}^2)$  上の積分で表す。その応用として、平面凸閉曲線の等周不等式を証明する。

### 2.1 平面直線の全体

例 2.1.1  $\mathbf{R}^2$  の直線の全体を  $L(\mathbf{R}^2)$  で表す。実数の組  $(r, \theta)$  に対して  $L(\mathbf{R}^2)$  の元  $l(r, \theta)$  を

$$l(r, \theta) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \cos \theta + y \sin \theta = r\}$$

とにおいて、写像

$$l : \mathbf{R}^2 \rightarrow L(\mathbf{R}^2); \quad (r, \theta) \mapsto l(r, \theta)$$

を定義する。このとき次の (1) ~ (3) が成り立つ。

- (1)  $l$  は全射になる。
- (2)  $L(\mathbf{R}^2)$  は写像  $l$  に関する商位相について Hausdorff 位相空間になる。
- (3)  $t \in \mathbf{R}$  に対して、

$$O_t = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r \in \mathbf{R}, t < \theta < t + \pi\}$$

$$U_t = l(O_t)$$

$$\phi_t : U_t \rightarrow \mathbf{R}^2; \quad l(r, \theta) \mapsto (r, \theta) \quad ((r, \theta) \in O_t)$$

とおく。すると  $(L(\mathbf{R}^2), \{(U_0, \phi_0), (U_{\pi/2}, \phi_{\pi/2})\})$  は 2 次元多様体になる。

証明 (1)  $\mathbf{R}^2$  の任意の直線の定義方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r$$

と Hesse の標準形にすることができるので、 $l$  は全射になる。

(2)  $l$  の定め方から、 $l(r, \theta) = l(r', \theta')$  となるための必要十分条件は、 $r' = r, \theta' \in \theta + 2\pi\mathbf{Z}$  または  $r' = -r, \theta' \in \theta + \pi + 2\pi\mathbf{Z}$  である。 $L(\mathbf{R}^2)$  の相異なる  $l_1$  と  $l_2$  をとる。



$l_1 = l(r_1, \theta_1)$ ,  $l_2 = l(r_2, \theta_2)$  となるように  $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$  を選ぶ。さらに  $\theta_0 < \theta_1$ ,  $\theta_2 < \theta_0 + \pi$  を満たす  $\theta_0$  をとることができる。このとき

$$O = \mathbf{R} \times (\theta_0, \theta_0 + \pi)$$

とおくと、 $O$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合になる。 $O$  は Hausdorff 位相空間だから  $(r_1, \theta_1)$  の開近傍  $V_1$  と  $(r_2, \theta_2)$  の開近傍  $V_2$  で  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  となるものが存在する。 $l(V_1)$  と  $l(V_2)$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  において  $l_1$  と  $l_2$  の開近傍になり、しかも  $l(V_1) \cap l(V_2) = \emptyset$  が成り立つ。したがって  $L(\mathbf{R}^2)$  は Hausdorff 位相空間になる。

(3) 今までの議論から  $U_t$  が  $L(\mathbf{R}^2)$  の開集合になること、 $L(\mathbf{R}^2)$  が  $\{U_t\}$  の合併になること、 $\phi_t : U_t \rightarrow \phi_t(U_t)$  が位相同型になることはすぐにわかる。あとは  $\phi_{\pi/2} \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) \rightarrow \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2})$  が微分同型写像になることを示せばよい。

$$U_0 \cap U_{\pi/2} = \{(r, \theta) \mid 0 < \theta < \pi/2 \text{ または } \pi/2 < \theta < \pi\}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) &= \{(r, \theta) \mid 0 < \theta < \pi/2 \text{ または } \pi/2 < \theta < \pi\} \\ \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2}) &= \{(r, \theta) \mid \pi/2 < \theta < \pi \text{ または } \pi < \theta < 3\pi/2\}. \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi/2$  のとき

$$\phi_{\pi/2} \phi_0^{-1}(r, \theta) = \phi_{\pi/2}(l(r, \theta)) = \phi_{\pi/2}(l(-r, \theta + \pi)) = (-r, \theta + \pi).$$

$\pi/2 < \theta < \pi$  のとき

$$\phi_{\pi/2} \phi_0^{-1}(r, \theta) = \phi_{\pi/2}(l(r, \theta)) = (r, \theta).$$

したがって  $\phi_{\pi/2} \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_{\pi/2}) \rightarrow \phi_{\pi/2}(U_0 \cap U_{\pi/2})$  は微分同型写像になる。

$(U_t, \phi_t)$  はすべての  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $L(\mathbf{R}^2)$  の局所座標近傍になる。これを  $(U_t; r_t, \theta_t)$  と表して、局所座標系  $r_t, \theta_t$  を使う。特に  $t$  を明記する必要がないときは、単に  $r, \theta$  で表す。 $L(\mathbf{R}^2)$  は向きづけ不可能であることに注意しておく。

各  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $U_t$  上

$$g_t = dr_t \otimes dr_t + d\theta_t \otimes d\theta_t$$

によって Riemann 計量を定める。 $L(\mathbf{R}^2)$  における局所座標系の変換は、

$$r_{t'} = (-1)^m r_t, \quad \theta_{t'} = \theta_t + n\pi \quad (m, n \text{ は整数})$$

となるので、 $U_t \cap U_{t'}$  上  $g_t = g_{t'}$  となる。したがって、 $\{(U_t, g_t)\}$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  上の Riemann 計量を定める。

$\mathbf{R}^2$  の向きを保つ等長変換の全体を  $M(\mathbf{R}^2)$  で表す。 $M(\mathbf{R}^2)$  の任意の元は

$$T(\phi, u_1, u_2) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

と表すことができ、 $\phi, u_1, u_2$  は  $M(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系になる。したがって、 $M(\mathbf{R}^2)$  は  $\mathbf{R}^2$  の Lie 変換群になる。

$$T(\phi, u_1, u_2)l(r, \theta) = l(r + u_1 \cos(\theta - \phi) + u_2 \sin(\theta - \phi), \theta - \phi)$$

となるので、 $M(\mathbf{R}^2)$  の元は  $\mathbf{R}^2$  の直線を直線に写し、さらに、 $M(\mathbf{R}^2)$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  の Lie 変換群になる。上の等式から変換  $T(\phi, u_1, u_2)$  の  $L(\mathbf{R}^2)$  への作用の微分写像を求めることができる。

$$\begin{aligned} d(T(\phi, u_1, u_2)) \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r}, \\ d(T(\phi, u_1, u_2)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= (-u_1 \sin(\theta - \phi) + u_2 \cos(\theta - \phi)) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

これより  $d(T(\phi, u_1, u_2))$  は等長線形写像にならない。ところが、

$$d(T(\phi, u_1, u_2)) \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \wedge d(T(\phi, u_1, u_2)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta}$$

は成り立ち、 $d(T(\phi, u_1, u_2))$  は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、 $T(\phi, u_1, u_2)$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  の面積保存変換になる。

**定義 2.1.2**  $\mathbf{R}^2$  の有界開集合  $B$  に対して

$$D(B) = \{l \in L(\mathbf{R}^2) \mid B \cap l \neq \emptyset\}$$

とおく。 $D(B)$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  の開集合になる。したがって、Fubini の定理より、各整数  $k$  について  $D(B)$  上の関数

$$D(B) \rightarrow [0, \infty] ; l \mapsto L(B \cap l)^k$$

は可測関数になる。そこで

$$I_k(B) = \int_{D(B)} L(B \cap l)^k d\mu(l)$$

によって積分  $I_k(B)$  を定義する。

次の  $I_1(B)$  を表す等式は後で等周不等式 (定理 2.1.4) の証明をする際に必要になる。

命題 2.1.3  $\mathbf{R}^2$  の有界開集合  $B$  に対して

$$I_1(B) = \pi A(B)$$

が成り立つ。

証明  $L(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系  $r, \theta$  の内で、 $\theta$  を固定して関数  $L(B \cap l)$  の  $r$  による積分を考えると、

$$\int L(B \cap l(r, \theta)) dr = A(B)$$

となる。したがって

$$I_1(B) = \int_{D(B)} L(B \cap l) d\mu(l) = \int_0^\pi \int L(B \cap l(r, \theta)) dr d\theta = \pi A(B).$$

定理 2.1.4 (等周不等式)  $\mathbf{R}^2$  内の凸閉曲線  $c$  が囲む領域を  $B$  で表すと、

$$4\pi A(B) \leq L(c)^2$$

が成り立つ。さらに等号が成立するのは、 $c$  が円の場合に限る。

証明  $c$  に  $\mathbf{R}^2$  から定まる誘導 Riemann 計量を入れ、開区間  $(0, \pi)$  に  $\mathbf{R}$  から定まる誘導 Riemann 計量を入れておく。 $M = c \times (0, \pi)$  に積 Riemann 計量を入れ、2次元 Riemann 多様体とみる。写像  $p: M \rightarrow L(\mathbf{R}^2)$  を  $p(c(s), \phi)$  が点  $c(s)$  を通り  $\frac{dc}{ds}$  と  $B$  の内部に向かって角度  $\phi$  で交わる直線になるように定める。このとき

$$M \rightarrow \mathbf{R}; (c(s), \phi) \mapsto L(B \cap p(c(s), \phi))$$

は連続関数になる。そこで、 $M^2 = M \times M$  の局所座標系を  $(s_1, \phi_1, s_2, \phi_2)$  で表し、積分

$$I = \int_{M^2} (L(B \cap p(c(s_1), \phi_1)) \sin \phi_2 - L(B \cap p(c(s_2), \phi_2)) \sin \phi_1)^2 d\mu_{M^2} \geq 0$$

について考える。

$$\begin{aligned} I &= \int_{M^2} L(B \cap p(c(s_1), \phi_1))^2 \sin^2 \phi_2 d\mu_{M^2} \\ &\quad - 2 \int_{M^2} L(B \cap p(c(s_1), \phi_1)) \sin \phi_1 L(B \cap p(c(s_2), \phi_2)) \sin \phi_2 d\mu_{M^2} \\ &\quad + \int_{M^2} L(B \cap p(c(s_2), \phi_2))^2 \sin^2 \phi_1 d\mu_{M^2} \\ &= \int_M L(B \cap p(c(s_1), \phi_1))^2 d\mu_M \int_M \sin^2 \phi_2 d\mu_M \\ &\quad - 2 \int_M L(B \cap p(c(s_1), \phi_1)) \sin \phi_1 d\mu_M \int_M L(B \cap p(c(s_2), \phi_2)) \sin \phi_2 d\mu_M \\ &\quad + \int_M L(B \cap p(c(s_2), \phi_2))^2 d\mu_M \int_M \sin^2 \phi_1 d\mu_M. \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi))^2 d\mu_M = \int_0^{L(c)} \int_0^\pi L(B \cap p(c(s), \phi))^2 d\phi ds$$

となり、 $x^2 = \int_0^x 2r dr$  と極座標表示による積分の変数変換を使うと

$$\int_0^\pi L(B \cap p(c(s), \phi))^2 d\phi = \int_0^\pi \int_0^{L(B \cap p(c(s), \phi))} 2r dr d\phi = 2A(B)$$

を得る。したがって

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi))^2 d\mu_M = 2L(c)A(B)$$

が成り立つ。次に

$$\int_M \sin^2 \phi d\mu_M = \int_0^{L(c)} \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi ds$$

となり、

$$\int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\phi) d\phi = \frac{\pi}{2}$$

を得る。したがって

$$\int_M \sin^2 \phi d\mu_M = \frac{\pi}{2} L(c)$$

が成り立つ。もう一つの積分

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) \sin \phi d\mu_M$$

を考えるために、 $M$  上の連続関数  $L(B \cap p(c(s), \phi))$  と写像  $p: M \rightarrow L(\mathbf{R}^2)$  に定理 1.5.5 を適用する。

$$\begin{aligned} \int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) Jp d\mu_M &= \int_{L(\mathbf{R}^2)} \sum_{x \in p^{-1}(l)} L(B \cap p(x)) d\mu_{L(\mathbf{R}^2)}(l) \\ &= \int_{D(B)} \#(p^{-1}(l)) L(B \cap l) d\mu_{L(\mathbf{R}^2)}(l). \end{aligned}$$

ここで、各  $l \in D(B)$  に対して  $\#(p^{-1}(l)) = 2$  となるので、命題 2.1.3 の結果より、

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) Jp d\mu_M = 2\pi A(B).$$

次に  $Jp$  を計算する。

$$\frac{dc}{ds} = (\cos \psi(s), \sin \psi(s))$$

と表すことにすると

$$\begin{aligned}
 & p(c(s), \phi) \\
 &= l\left(0, \psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right) + c(s) \\
 &= T(0, c_1(s), c_2(s))l\left(0, \psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= l\left(c_1(s) \cos\left(\psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right) + c_2(s) \sin\left(\psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right), \psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\xi = \psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 dp\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \left\{ \frac{dc_1}{ds} \cos \xi + \frac{dc_2}{ds} \sin \xi - c_1(s) \sin \xi \frac{d\psi}{ds} + c_2(s) \cos \xi \frac{d\psi}{ds} \right\} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\psi}{ds} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 dp\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) &= \{-c_1(s) \sin \xi + c_2(s) \cos \xi\} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  の接ベクトル空間の正規直交基底だから、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$\begin{aligned}
 & \left| dp\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge dp\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \right| \\
 &= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{dc_1}{ds} \cos \xi + \frac{dc_2}{ds} \sin \xi - c_1 \sin \xi \frac{d\psi}{ds} + c_2 \cos \xi \frac{d\psi}{ds} & -c_1 \sin \xi + c_2 \cos \xi \\ \frac{d\psi}{ds} & 1 \end{bmatrix} \right| \\
 &= \left| \frac{dc_1}{ds} \cos \xi + \frac{dc_2}{ds} \sin \xi \right| \\
 &= \left| \cos \psi(s) \cos\left(\psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \psi(s) \sin\left(\psi(s) + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \right| \\
 &= \left| \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \right| \\
 &= |\sin \phi| \\
 &= \sin \phi.
 \end{aligned}$$

となり、

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) Jp d\mu_M = \int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) \sin \phi d\mu_M.$$

以上で

$$\int_M L(B \cap p(c(s), \phi)) \sin \phi d\mu_M = 2\pi A(B)$$

となることがわかった。したがって

$$I = 2 \cdot 2L(c)A(B) \frac{\pi}{2} L(c) - 2(2\pi A(B))^2 = 2\pi A(B) \{L(c)^2 - 4\pi A(B)\}$$

が成り立ち、

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq 0.$$

等号が成り立つための必要十分条件は、 $I = 0$  だから、 $M^2$  上で

$$L(B \cap p(c(s_1), \phi_1)) \sin \phi_2 - L(B \cap p(c(s_2), \phi_2)) \sin \phi_1 = 0$$

が成り立つことである。これは関数  $L(B \cap p(c(s), \phi)) / \sin \phi$  が  $M$  上一定値をとることになる。このような曲線が円に限られることを証明するためには、曲線の極座標による表示  $r(\phi)$  が

$$\frac{r(\phi)}{\sin \phi} = C \quad (C : \text{定数})$$

を満たすとき、円になることを示せば十分である。 $r(\phi) = C \sin \phi$  となるので、曲線の直交座標系による表示は

$$\begin{aligned} (C \sin \phi \cos \phi, C \sin^2 \phi) &= \left( \frac{C}{2} \sin 2\phi, \frac{C}{2} (2 \sin^2 - 1) + \frac{C}{2} \right) \\ &= \left( \frac{C}{2} \sin 2\phi, -\frac{C}{2} \cos 2\phi + \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。これより、曲線は中心  $(0, C/2)$  で半径  $C/2$  の円になる。

## 2.2 Crofton の公式

平面曲線と直線との交点数を  $L(\mathbf{R}^2)$  上の関数とみて積分すると、その積分値はその曲線の長さの 2 倍に一致するという Crofton の公式を証明する。

定理 2.2.1

$$I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)) = \{(x, l) \in \mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2) \mid x \in l\}$$

とおくと、 $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$  は  $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  の 3 次元正規部分多様体になる。さらに

$$i : \mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R}) \rightarrow I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)); \quad (x, l) \mapsto (x, l + x)$$

によって  $i$  を定めると、 $i$  は微分同型写像になる。

証明  $\mathbf{R}^2$  の座標系  $x_1, x_2$  と  $L(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系  $r, \theta$  を合わせた  $x_1, x_2, r, \theta$  を積多様体  $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系として使う。 $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  の元が  $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$  に含まれるための必要十分条件をこの局所座標系を使って表すと、

$$x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = r$$

となる。そこで

$$F(x_1, x_2, r, \theta) = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - r$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{bmatrix} = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad -1 \quad -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta]$$

となり、この行列の階数はすべての点で1だから、 $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$  は  $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  の3次元正規部分多様体になる。

次に  $i$  が微分同型写像になることを示す。

$$\begin{aligned} i(u_1, u_2, l(0, \theta)) &= (u_1, u_2, T(0, u_1, u_2)l(0, \theta)) \\ &= (u_1, u_2, l(u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta, \theta)) \end{aligned}$$

となるので、 $i$  は  $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  への  $C^\infty$  級写像になる。したがって、 $i$  は  $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$  への  $C^\infty$  級写像にもなる。 $i$  の定め方より、 $i$  は全単射になることがわかる。上の  $i$  の表示より、

$$\begin{aligned} di_{(u_1, u_2, l(0, \theta))} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \\ di_{(u_1, u_2, l(0, \theta))} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \\ di_{(u_1, u_2, l(0, \theta))} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= (-u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R})$  の接ベクトル空間の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial \theta}$  と  $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$  の接ベクトル空間の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$  に関する  $i$  の微分写像  $di$  の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

この行列の階数はすべての点で3になることがわかる。以上より、 $i$  は微分同型写像になる。

定理 2.2.2 (Crofton の公式)  $\mathbf{R}^2$  内の曲線  $c$  に対して

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = 2L(c)$$

が成り立つ。

折れ線近似による証明 曲線を折れ線で近似すると曲線の長さも折れ線の長さで近似される。折れ線は線分の合併になり折れ線の長さは線分の長さの和になる。そこで  $c$  が線分の場合に Crofton の公式を示し、次に  $c$  が折れ線の場合を示し、最後に  $c$  が一般の曲線の場合を証明する。

$c = [0, L(c)] \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$  とする。直線が  $c$  と交わるときの交点の数は 1 になるので、 $l(r, \theta)$  が  $c$  と交わる  $r, \theta$  の条件を求めれば Crofton の公式の積分を計算することができる。 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  の範囲を  $\theta$  が動くようにすると、 $r$  の条件は  $0 \leq r \leq L(c) \cos \theta$  になる。したがって、交点数の積分は次のようになる。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{L(c) \cos \theta} 1 dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} L(c) \cos \theta d\theta = 2L(c).$$

したがって  $c$  が  $x$  軸上の線分の場合に Crofton の公式が成り立つことがわかった。平面の任意の線分は等長変換によって  $x$  軸に移すことができ、 $L(\mathbf{R}^2)$  上の測度は平面の等長変換の作用によって不変なので、平面の任意の線分に対して Crofton の公式が成り立つ。

次に  $c$  が線分  $c_1, \dots, c_k$  からなる折れ線の場合を考える。

$$\begin{aligned} \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) &= \int_{L(\mathbf{R}^2)} \# \left( \bigcup_{i=1}^k c_i \cap l \right) d\mu(l) = \int_{L(\mathbf{R}^2)} \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l) d\mu(l) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c_i \cap l) d\mu(l) = \sum_{i=1}^k L(c_i) = L(c). \end{aligned}$$

ここで、等式

$$\# \left( \bigcup_{i=1}^k c_i \cap l \right) = \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l)$$

は直線  $l$  が  $c_i$  の端点を通らないときに成り立つが、 $l$  が  $c_i$  の端点を通るときには成り立たない。 $c_i$  の端点を通る  $l$  の全体は 1 次元になり  $L(\mathbf{R}^2)$  の測度に関して測度 0 になるので、積分の等式

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \# \left( \bigcup_{i=1}^k c_i \cap l \right) d\mu(l) = \int_{L(\mathbf{R}^2)} \sum_{i=1}^k \#(c_i \cap l) d\mu(l)$$

は成り立つ。

最後に  $c$  が一般の曲線の場合を証明する。 $c$  を弧長に関して  $i$  等分した点を結んで得られる折れ線を  $d_i$  で表すと、 $\lim_{i \rightarrow \infty} L(d_i) = L(c)$  が成り立つ。直線  $l$  と二点を結ぶ曲線との交点数は同じ二点を結ぶ線分との交点数以上になるので、

$$\#(d_{2i} \cap l) \leq \#(d_{2i+1}) \leq \dots \leq \#(c \cap l)$$



となる。さらに、 $c$ と $l$ がトランスバーサルに交わるとき、 $\#(d_{2^i} \cap l)$ は $\#(c \cap l)$ に単調収束する。 $c$ とトランスバーサルに交わらない $l$ の全体は $L(\mathbf{R}^2)$ の測度に関して測度0になるので、Lebesgueの単調収束定理と上で示したことより

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(d_{2^i} \cap l) d\mu(l) = \lim_{i \rightarrow \infty} 2L(d_{2^i}) = 2L(c)$$

が成り立つ。

別証明

$$I(c) = \{(x, l) \in I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)) \mid x \in c\}$$

とおく。定理2.2.1の微分同型写像 $i$ を使うと、

$$i^{-1}(I(c)) = c \times P^1(\mathbf{R})$$

となるので、これは $\mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R})$ の2次元部分多様体になる。したがって、 $I(c)$ は $I(\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2))$ の2次元部分多様体になる。

$$\pi_L : I(c) \rightarrow L(\mathbf{R}^2); \quad (x, l) \mapsto l$$

によって写像 $\pi_L$ を定義すると、 $\pi_L$ は、包含写像 $I(c) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2)$ と第二成分への射影 $\mathbf{R}^2 \times L(\mathbf{R}^2) \rightarrow L(\mathbf{R}^2)$ との合成になるので、 $C^\infty$ 級写像になる。そこで $I(c)$ 上恒等的に1に等しい関数とこの写像 $\pi_L$ に定理1.5.5を適用すると

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(\pi_L^{-1}(l)) d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_L^{-1}(l) = \{(x, l) \mid x \in l, x \in c\} = (c \cap l) \times \{l\}$$

だから、 $\#(\pi_L^{-1}(l)) = \#(c \cap l)$ となり、

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = \int_{I(c)} J\pi_L d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず $\pi_L$ の微分写像 $d\pi_L$ を求める。曲線 $c$ の弧長パラメーター $s$ と $P^1(\mathbf{R})$ の元 $l(0, \theta)$ のパラメーター $\theta$ を使うと、 $s, \theta$ は $c \times P^1(\mathbf{R})$ の局所座標系になる。定理2.2.1の証明中に示した $i$ の微分写像の公式を使うと、 $c \times P^1(\mathbf{R})$ において

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{dc_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dc_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

だから、

$$\begin{aligned} di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{dc_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dc_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta\right) \frac{\partial}{\partial r} \\ di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-c_1(s) \sin \theta + c_2(s) \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり、これらは  $I(c)$  の接ベクトル空間の基底になる。

$$\begin{aligned} d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \left(\frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta\right) \frac{\partial}{\partial r} \\ d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (-c_1(s) \sin \theta + c_2(s) \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$  は  $L(\mathbb{R}^2)$  の接ベクトル空間の正規直交基底だから、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$\begin{aligned} &\left| d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \wedge d\pi_L di\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta & -c_1(s) \sin \theta + c_2(s) \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta \right| \end{aligned}$$

となり、

$$\int_{I(c)} J\pi_L d\mu = \int_c \int_0^\pi \left| \frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta \right| d\theta ds.$$

ここで  $\frac{dc}{ds}$  は単位ベクトルだから、

$$\frac{dc}{ds} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

となる  $\varphi$  をとることができ、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left| \frac{dc_1}{ds} \cos \theta + \frac{dc_2}{ds} \sin \theta \right| d\theta &= \int_0^\pi |\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta| d\theta \\ &= \int_0^\pi |\cos(\theta - \varphi)| d\theta \\ &= 2 \quad (\text{この積分はパラメーター } s \text{ に依存しない}). \end{aligned}$$

以上より、Fubini の定理を使うと

$$\int_{I(c)} J\pi_L d\mu = \int_c 2ds = 2L(c)$$

を得る。先に得た等式と合わせると

$$\int_{L(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = 2L(c)$$

を得る。

**定義 2.2.3**  $c$  を  $\mathbf{R}^2$  内の凸閉曲線とする。平行な二直線で  $c$  をはさむとき、この二直線間の距離をこの直線に垂直な方向の幅と呼び、方向  $(\cos \theta, \sin \theta)$  の幅を  $d_c(\theta)$  で表す。すべての方向の幅が一定の凸閉曲線を定幅曲線と呼ぶ。

**系 2.2.4** 定理 2.2.2 の仮定のもとで、さらに  $c$  は凸閉曲線であると仮定し、 $c$  の囲む領域を  $B$  で表す。このとき、

$$I_0(B) = \int_0^\pi d_c(\theta) d\theta = L(c)$$

が成り立つ。特に、 $c$  が幅  $d$  の定幅曲線のとき、 $L(c) = \pi d$  が成り立つ。

**証明**  $c$  は凸閉曲線だから、直線との交点は高々二点になる。そこで

$$D(B) = \{l \in L(\mathbf{R}^2) \mid c \cap l \neq \emptyset\}$$

とおくと、 $D(B)$  は  $L(\mathbf{R}^2)$  の開集合になる。 $D(B)$  の元と  $c$  との交点数は 2 になり、 $c$  と交わる他の直線は  $c$  の接線のみで  $L(\mathbf{R}^2)$  の測度に関して測度 0 になる。したがって、定理 2.2.2 より

$$L(c) = \int_{D(B)} d\mu = \int_{D(B)} dr d\theta = \int_0^\pi d_c(\theta) d\theta$$

を得る。これらは  $I_0(B)$  に等しい。特に、 $c$  が幅  $d$  の定幅曲線のときは、上の等式より  $L(c) = \pi d$  が成り立つ。

## 2.3 平面の等長変換群

$\mathbf{R}^2$  の向きを保つ等長変換の全体を  $M(\mathbf{R}^2)$  で表す。 $M(\mathbf{R}^2)$  の任意の元は

$$T(\phi, u_1, u_2) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

と表すことができ、 $\phi, u_1, u_2$  は  $M(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系になる。 $M(\mathbf{R}^2)$  の  $\mathbf{R}^2$  への作用は次のように表すとわかりやすい。

$$T(\phi, u_1, u_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & u_1 \\ \sin \phi & \cos \phi & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これによって、 $M(\mathbf{R}^2)$  は  $\mathbf{R}^2$  の Lie 変換群になる。積は次のようになる。

$$\begin{aligned} & T(\psi, v_1, v_2)T(\phi, u_1, u_2) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & v_1 \\ \sin \psi & \cos \psi & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & u_1 \\ \sin \phi & \cos \phi & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\psi + \phi) & -\sin(\psi + \phi) & u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi + v_1 \\ \sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= T(\psi + \phi, u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi + v_1, u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi + v_2). \end{aligned}$$

写像

$$SO(2) \times \mathbf{R}^2 \rightarrow M(\mathbf{R}^2); \quad (T(\phi, 0), u_1, u_2) \mapsto T(\phi, u_1, u_2)$$

は微分同型写像になる。 $\phi, u_1, u_2$  は  $M(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系になる。 $\phi$  が弧長パラメータになる  $SO(2)$  の Riemann 計量と  $\mathbf{R}^2$  の計量の積 Riemann 計量を  $M(\mathbf{R}^2)$  に導入する。

命題 2.3.1 ベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}$$

は  $M(\mathbf{R}^2)$  全体で定義された正規直交系になり、 $M(\mathbf{R}^2)$  の左移動は等長変換になる。

証明  $M(\mathbf{R}^2)$  は三つの 1 次元多様体の積になっているので、それぞれのパラメータ  $\phi, u_1, u_2$  によるベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}$$

は  $M(\mathbf{R}^2)$  全体で定義される。Riemann 計量の定め方よりこれらは正規直交系になる。

$M(\mathbf{R}^2)$  の任意の点  $g$  に対して

$$L_g(x) = gx \quad (x \in M(\mathbf{R}^2))$$

によって左移動  $L_g$  を定める。 $g = T(\psi, v_1, v_2)$  とおくと、

$$\begin{aligned} & L_g(T(\phi, u_1, u_2)) \\ &= T(\psi + \phi, u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi + v_1, u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi + v_2) \end{aligned}$$

となる。この等式より、

$$\begin{aligned} (dL_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_e \right) &= \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_g \\ (dL_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_e \right) &= \cos \psi \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_g + \sin \psi \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_g \\ (dL_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_e \right) &= -\sin \psi \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_g + \cos \psi \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_g \end{aligned}$$

となる。これより  $(dL_g)_e : T_e(M(\mathbf{R}^2)) \rightarrow T_g(M(\mathbf{R}^2))$  は等長線形写像になり、 $L_g$  は等長変換になる。したがって、 $L_g$  は体積保存変換にもなる。

注意 2.3.2  $M(\mathbf{R}^2)$  の任意の点  $g$  に対して

$$R_g(x) = xg \quad (x \in M(\mathbf{R}^2))$$

によって右移動  $R_g$  を定める。  $g = T(\psi, v_1, v_2)$  とおくと、

$$R_g(T(\phi, u_1, u_2)) = T(\phi + \psi, v_1 \cos \phi - v_2 \sin \phi + u_1, v_1 \sin \phi + v_2 \cos \phi + u_2)$$

となる。この等式より、

$$\begin{aligned} (dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_e \right) &= \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_g + (-v_1 \sin \phi - v_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_g + (v_1 \cos \phi - v_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_g \\ (dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_e \right) &= \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_g \\ (dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_e \right) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_g \end{aligned}$$

となる。これより  $(dR_g)_e : T_e(M(\mathbf{R}^2)) \rightarrow T_g(M(\mathbf{R}^2))$  は左移動の場合とは異なり等長線形写像にならない。ところが、

$$(dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_e \right) \wedge (dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_e \right) \wedge (dR_g)_e \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_e \right) = \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_g \wedge \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_g \wedge \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_g$$

は成り立ち、命題 2.3.1 より、 $R_g$  は正規直交基底の外積を正規直交基底の外積に写すことがわかる。したがって、 $R_g$  は  $M(\mathbf{R}^2)$  の体積保存変換になる。

## 2.4 Poincaré の公式

二つの平面曲線  $c_0, c_1$  の一方  $c_1$  を  $M(\mathbf{R}^2)$  の元  $g$  で動かし、交点数  $\#(c_0 \cap cg_1)$  を  $M(\mathbf{R}^2)$  上の関数とみて積分すると、その積分値は  $4L(c_0)L(c_1)$  に一致するという Poincaré の公式を証明する。

補題 2.4.1

$$I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) = \{(x, y, g) \in (\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2) \mid x = g(y)\}$$

とおくと、 $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  は  $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$  の 5 次元正規部分多様体になる。さらに

$$\begin{aligned} i &: (\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2) \rightarrow I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) \\ &; (x, y, T(\phi, 0)) \mapsto (x, y, T(0, x)T(\phi, 0)T(0, -y)) \end{aligned}$$

によって  $i$  を定めると、 $i$  は微分同型写像になる。

証明  $(\mathbf{R}^2)^2$  の第一成分の座標系  $x_1, x_2$  と第二成分の座標系  $y_1, y_2$  と  $M(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系  $\phi, u_1, u_2$  を合わせた  $x_1, x_2, y_1, y_2, \phi, u_1, u_2$  を積多様体  $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$  の局所座標系として使う。 $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$  の元が  $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  に含まれるための必要十分条件

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

をこの局所座標系を使って表すと、

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos \phi - y_2 \sin \phi + u_1 \\ x_2 &= y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi + u_2 \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi, u_1, u_2) \\ &= (y_1 \cos \phi - y_2 \sin \phi + u_1 - x_1, y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi + u_2 - x_2) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} & \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} & \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi & -y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sin \phi & \cos \phi & y_1 \cos \phi - y_2 \sin \phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、この行列の階数はすべての点で2になる。陰関数定理より  $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  は  $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$  の5次元正規部分多様体になる。

次に  $i$  が微分同型写像になることを示す。

$$\begin{aligned} &T(0, x_1, x_2)T(\phi, 0, 0)T(0, -y_1, -y_2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & x_1 \\ \sin \phi & \cos \phi & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi + x_1 \\ \sin \phi & \cos \phi & -y_1 \sin \phi - y_2 \cos \phi + x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= T(\phi, -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi + x_1, -y_1 \sin \phi - y_2 \cos \phi + x_2) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} & i(x_1, x_2, y_1, y_2, T(\phi, 0)) \\ &= (x_1, x_2, y_1, y_2, T(\phi, -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi + x_1, -y_1 \sin \phi - y_2 \cos \phi + x_2)) \end{aligned}$$

となるので、 $i$  は  $(\mathbb{R}^2)^2 \times M(\mathbb{R}^2)$  への  $C^\infty$  級写像になる。したがって、 $i$  は  $I((\mathbb{R}^2)^2 \times M(\mathbb{R}^2))$  への  $C^\infty$  級写像にもなる。 $i$  の定め方より、 $i$  は全単射になることがわかる。上の  $i$  の表示より、

$$\begin{aligned} di_{(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial u_1}, \\ di_{(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi)} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ di_{(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi)} \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ di_{(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi)} \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_2} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ di_{(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi)} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \phi} + (y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} \\ &\quad + (-y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} \end{aligned}$$

となり、 $(\mathbb{R}^2)^2 \times SO(2)$  の接ベクトル空間の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial \phi}$  と  $(\mathbb{R}^2)^2 \times M(\mathbb{R}^2)$  の接ベクトル空間の基底  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}$  に関する  $i$  の微分写像  $di$  の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\cos \phi & \sin \phi & y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \phi & -\cos \phi & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

この行列の階数はすべての点で 5 になることがわかる。以上より、 $i$  は微分同型写像になる。

定理 2.4.2 (Poincaré の公式)  $\mathbb{R}^2$  内の二曲線  $c_0, c_1$  に対して

$$\int_{M(\mathbb{R}^2)} \#(c_0 \cap gc_1) d\mu(g) = 4L(c_0)L(c_1)$$

が成り立つ。

証明

$$I(c_0, c_1) = \{(x, y, g) \in I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)) \mid x \in c_0, y \in c_1\}$$

とおく。補題 2.4.1 の微分同型写像  $i$  を使うと、

$$i^{-1}(I(c_0, c_1)) = c_0 \times c_1 \times SO(2)$$

となるので、これは  $SO(2) \times (\mathbf{R}^2)^2$  の 3次元部分多様体になる。したがって、 $I(c_0, c_1)$  は  $I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  の 3次元部分多様体になる。

$$\pi_M : I(c_0, c_1) \rightarrow M(\mathbf{R}^2) ; (x, y, g) \mapsto g$$

によって写像  $\pi_M$  を定義すると、 $\pi_M$  は包含写像  $I(c_0, c_1) \rightarrow (\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2)$  と第三成分への射影  $(\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2) \rightarrow M(\mathbf{R}^2)$  との合成になるので、 $C^\infty$  級写像になる。そこでこの写像  $\pi_M$  に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(\pi_M^{-1}(g)) d\mu(g) = \int_{I(c_0, c_1)} J\pi_M d\mu$$

を得る。ここで

$$\pi_M^{-1}(g) = \{(g(y), y, g) \mid g(y) \in c_0 \cap gc_1\}$$

だから、 $\#(\pi_M^{-1}(g)) = \#(c_0 \cap gc_1)$  となり、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c_0 \cap gc_1) d\mu(g) = \int_{I(c_0, c_1)} J\pi_M d\mu.$$

以下で上の等式の右辺を計算する。そのために、まず  $\pi_M$  の微分写像  $d\pi_M$  を求める。曲線  $c_0$  の弧長パラメータ  $s$  と曲線  $c_1$  の弧長パラメータ  $t$  と  $SO(2)$  の元  $T(\phi, 0)$  のパラメータ  $\phi$  を使うと、 $s, t, \phi$  は  $c_0 \times c_1 \times SO(2)$  の局所座標系になる。上で示したことより、補題 2.4.1 の  $i$  は  $c_0 \times c_1 \times SO(2)$  と  $I(c_0, c_1)$  の間の微分同型写像を誘導し、

$$di \left( \frac{\partial}{\partial s} \right), \quad di \left( \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad di \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

は  $I(c_0, c_1)$  の接ベクトル空間の基底になる。この基底に  $d\pi_M$  を作用させ  $J\pi_M$  を計算する。補題 2.4.1 の証明中の  $di$  の計算結果を使うと

$$\begin{aligned} d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) &= d\pi_M di \left( \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) &= d\pi_M di \left( \frac{d(c_1(t))_1}{dt} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= \left( -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \cos \phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial u_1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \sin \phi - \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial u_2}, \\
d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) & = ((c_1(t))_1 \sin \phi + (c_1(t))_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} \\
& + (-(c_1(t))_1 \cos \phi + (c_1(t))_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

となり、命題 2.3.1 で得た結果を使うと

$$\begin{aligned}
& \left| d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \wedge d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \wedge d\pi_M di \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right| \\
& = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{d(c_0(s))_1}{ds} & -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \cos \phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \sin \phi & (c_1(t))_1 \sin \phi + (c_1(t))_2 \cos \phi \\ \frac{d(c_0(s))_2}{ds} & -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \sin \phi - \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \cos \phi & -(c_1(t))_1 \cos \phi + (c_1(t))_2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
& = \left| \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \left( -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \sin \phi - \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \cos \phi \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \left( -\frac{d(c_1(t))_1}{dt} \cos \phi + \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \sin \phi \right) \right|.
\end{aligned}$$

ここで

$$\left( \frac{d(c_0(s))_1}{ds}, \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \right) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \left( \frac{d(c_1(t))_1}{dt}, \frac{d(c_1(t))_2}{dt} \right) = (\cos \beta, \sin \beta)$$

とおくと、上の式は

$$\begin{aligned}
& |\cos \alpha (-\cos \beta \sin \phi - \sin \beta \cos \phi) - \sin \alpha (-\cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi)| \\
& = |-\cos \alpha \sin(\phi + \beta) + \sin \alpha \cos(\phi + \beta)| \\
& = |\sin(\phi + \beta - \alpha)|
\end{aligned}$$

となる。したがって、注意 1.5.7 の計算法を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_{I(c_0, c_1)} J\pi_M d\mu & = \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_0^{2\pi} |\sin(\phi + \beta - \alpha)| d\phi dt ds \\
& \quad (\text{この } \phi \text{ に関する積分は } \alpha, \beta \text{ に依存しない}) \\
& = \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_0^{2\pi} |\sin \phi| d\phi dt ds \\
& = \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} 4 dt ds \\
& = 4L(c_0)L(c_1).
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c_0 \cap gc_1) d\mu(g) = 4L(c_0)L(c_1)$$

が成り立つ。

系 2.4.3  $\mathbf{R}^2$  内の中心  $x$  で半径  $r$  の円を  $S(x; r)$  で表す。 $\mathbf{R}^2$  内の曲線  $c$  に対して

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x; r)) d\mu(x) = 4rL(c)$$

が成り立つ。

証明 定理 2.4.2 を  $c_0 = c$  と  $c_1 = S(0; r)$  に適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap gS(0; r)) d\mu(g) = 4 \cdot L(c)2\pi r$$

を得る。以下で上の等式の左辺を計算する。命題 2.3.1 で得た結果を使うと

$$\begin{aligned} \int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap gS(0; r)) d\mu(g) &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \#(c \cap S(g0; r)) d\mu(g) \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x; r)) d\mu(x). \end{aligned}$$

したがって

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x; r)) d\mu(x) = 4rL(c)$$

が成り立つ。

補題 2.4.4  $\mathbf{R}^2$  内の二曲線  $c_0, c_1$  をとる。 $g \in M(\mathbf{R}^2)$  に対して  $c_0 \cap gc_1$  の各点における  $c_0$  と  $gc_1$  の単位速度ベクトルの成す角度を  $\theta_i$  で表わし  $c_0 \cap gc_1$  におけるそれらの和を  $\sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i$  で表わす。ただし、 $0 \leq \theta_i \leq \pi$  となるように定める。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1).$$

証明 定理 2.4.2 の証明中に定めた  $I(c_0, c_1)$  の各点  $(x, y, g)$  において  $c_0$  の単位速度ベクトルと  $gc_1$  の単位速度ベクトルの成す角度を  $\theta(x, y, g)$  とおくことによって、 $I(c_0, c_1)$  上の関数  $\theta$  を定める。この関数  $\theta$  と定理 2.4.2 の証明中に定めた写像  $\pi_M : I(c_0, c_1) \rightarrow M(\mathbf{R}^2)$  に定理 1.5.5 を適用すると

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{\pi_M^{-1}(g)} \theta d\mu(g) = \int_{I(c_0, c_1)} \theta J\pi_M d\mu$$

を得る。左辺は問題の積分

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g)$$

に一致する。右辺は定理 2.4.2 の証明中の議論より

$$\begin{aligned} & \int_{I(c_0, c_1)} \theta J\pi_M d\mu \\ &= \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_{\phi+\beta-\alpha=-\pi}^{\phi+\beta-\alpha=\pi} |\phi + \beta - \alpha| \cdot |\sin(\phi + \beta - \alpha)| d\phi dt ds \\ & \quad (\text{この } \phi \text{ に関する積分は } \alpha, \beta \text{ に依存しない}) \\ &= \int_0^{L(c_0)} \int_0^{L(c_1)} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi| \cdot |\sin \phi| d\phi dt ds. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi| \cdot |\sin \phi| d\phi &= 2 \int_0^{\pi} \phi \sin \phi d\phi = 2 \int_0^{\pi} \phi (-\cos \phi)' d\phi \\ &= 2[-\phi \cos \phi]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos \phi d\phi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_{I(c_0, c_1)} \theta J\pi_M d\mu = 2\pi L(c_0)L(c_1)$$

となり、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap g c_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1)$$

を得る。

## 2.5 Steiner の公式と Hotelling の公式

補題 2.5.1 定理 1.5.16 の証明中に定めた  $\mathbf{R}^2$  内の 1 次元部分ベクトル空間全体  $P^1(\mathbf{R})$  にやはりそこで定めた Riemann 計量  $d\theta \otimes d\theta$  が備わっているとす。各  $l \in P^1(\mathbf{R})$  に対して  $\mathbf{R}^2$  から  $l$  への直交射影を  $P_l : \mathbf{R}^2 \rightarrow l$  で表す。  $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2$  とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(I)) d\mu(l) = 2.$$

証明  $0 \leq \theta \leq \pi$  に対して

$$l(\theta) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \cos \theta + y \sin \theta = 0\} \in P^1(\mathbf{R})$$

とおくと、  $L(P_{l(\theta)}(I)) = \sin \theta$  となるので

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(I)) d\mu(l) = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2.$$

定義 2.5.2  $\mathbb{R}^2$  内のコンパクト凸集合  $K$  に対して  $W_1^2(K)$  を次の等式で定める。

$$W_1^2(K) = \frac{1}{2} \int_{P^1(\mathbb{R})} L(P_l(K)) d\mu(l).$$

補題 2.5.1 より  $W_1^2(I) = 1$  となる。

注意 2.5.3 定義 2.5.2 において、 $L(P_l(K))$  は定義 2.2.3 で定めた直線  $l$  の法方向の凸閉曲線  $\partial K$  の幅になり、次の Barbier の公式は系 2.2.4 と同じである。ここでは別証明を与える。

定理 2.5.4 (Barbier の公式)  $\mathbb{R}^2$  内の境界が区分的に滑らかなコンパクト凸集合  $K$  に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{P^1(\mathbb{R})} L(P_l(K)) d\mu(l) = 2W_1^2(K) = L(\partial K).$$

証明  $l \in P^1(\mathbb{R})$  に対して  $f = (P_l)|_{\partial K} : \partial K \rightarrow l$  に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用する。 $K$  が凸であることから  $y \in \text{int}(P_l(K))$  に対して  $\#(f^{-1}(y)) = 2$  となるので、余面積公式 (定理 1.5.5) より

$$\int_{\partial K} Jf d\mu = \int_{P_l(K)} \#(f^{-1}(y)) d\mu(y) = 2L(P_l(K))$$

が成り立つ。 $df$  は  $\partial K$  の接線から  $l$  への直交射影になる。 $\partial K$  の単位法ベクトルを  $e$  で表し  $l$  の単位法ベクトルを  $u$  で表すと、例 1.3.9 より  $Jf = |\langle e, u \rangle|$  が成り立つ。よって

$$\int_{\partial K} |\langle e, u \rangle| d\mu = 2L(P_l(K)).$$

これより

$$\begin{aligned} \int_{P^1(\mathbb{R})} L(P_l(K)) d\mu(l) &= \frac{1}{2} \int_{P^1(\mathbb{R})} \left( \int_{\partial K} |\langle e, u \rangle| d\mu \right) d\mu(l) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} \left( \int_{P^1(\mathbb{R})} |\langle e, u \rangle| d\mu(l) \right) d\mu \\ &\quad \text{(補題 2.5.1 より)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} 2 d\mu = L(\partial K). \end{aligned}$$

定理 2.5.5 (Steiner の公式)  $\mathbb{R}^2$  内の境界が滑らかなコンパクト凸集合  $K$  から距離  $\rho$  以下の点の全体を  $K_\rho$  で表すと、次の等式が成り立つ。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

証明  $r \geq 0$  とする。 $l \in P^1(\mathbf{R})$  に対して  $P_l(K_r)$  は直線  $l$  内の線分  $P_l(K)$  の両端を長さ  $r$  だけ伸ばした線分になるので、 $L(P_l(K_r)) = L(P_l(K)) + 2r$  が成り立つ。この両辺を  $l \in P^1(\mathbf{R})$  について積分すると

$$\int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K_r)) d\mu(l) = \int_{P^1(\mathbf{R})} L(P_l(K)) d\mu(l) + 2\pi r.$$

Barbier の公式 (定理 2.5.4) より  $L(\partial K_r) = L(\partial K) + 2\pi r$  を得る。これより

$$\begin{aligned} A(K_\rho) &= A(K) + \int_0^\rho L(\partial K_r) dr = A(K) + \int_0^\rho (L(\partial K) + 2\pi r) dr \\ &= A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2. \end{aligned}$$

定理 2.5.6 (Steiner の公式)  $\mathbf{R}^2$  内の滑らかな単純閉曲線が囲む領域  $K$  から距離  $\rho$  以下の点の全体を  $K_\rho$  で表すと、十分小さい  $\rho$  に対して次の等式が成り立つ。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

証明  $\partial K$  の弧長パラータ  $s$  の向きは囲む領域  $K$  を左に見て進む方向にとる。 $\partial K$  における単位接ベクトルを  $u$  で表し  $K$  の内向きの単位法ベクトルを  $e$  で表す。 $\partial K$  の曲率を  $\kappa(s)$  で表すと Frenet-Serret の公式より

$$\frac{du}{ds} = \kappa e, \quad \frac{de}{ds} = -\kappa u.$$

$\rho \geq 0$  に対して

$$f : \partial K \times [0, \rho] \rightarrow K_\rho - \text{int}K ; (x, t) \mapsto x - te$$

によって写像  $f$  を定める。

$$df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\partial f}{\partial s} = u - t \frac{de}{ds} = (1 + \kappa t)u, \quad df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} = -e$$

となりこれらは直交しているので、命題 1.3.7 より

$$Jf = \left| df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right| = \left| df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \right| \cdot \left| df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right| = |1 + \kappa t|.$$

よって十分小さい  $\rho$  に対して  $f$  は微分同型写像になり、 $Jf = 1 + \kappa t$  が成り立つ。余面積公式 (定理 1.5.5) と単純閉曲線の曲率の積分は  $2\pi$  になることより

$$\begin{aligned} A(K_\rho - \text{int}K) &= \int_{\partial K \times [0, \rho]} Jf d\mu = \int_{\partial K \times [0, \rho]} (1 + \kappa t) d\mu \\ &= L(\partial K)\rho + \int_{\partial K} \kappa ds \int_0^\rho t dt = L(\partial K)\rho + 2\pi \cdot \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= L(\partial K)\rho + \pi\rho^2. \end{aligned}$$

したがって次の等式を得る。

$$A(K_\rho) = A(K) + L(\partial K)\rho + \pi\rho^2.$$

等周不等式 (定理 2.1.4) の別証明  $x \in \mathbf{R}^2$  と  $r \geq 0$  に対して

$$B(x; r) = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid |x - y| \leq r\}$$

とする。

$$M_i(r) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid B(x; r) \subset \bar{B}\}$$

$$M_e(r) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \bar{B} \subset B(x; r)\}$$

とおくと  $M_i(r)$  と  $M_e(r)$  はコンパクト凸集合になる。  $r \leq r'$  のとき

$$M_i(r) \supset M_i(r'), \quad M_e(r) \subset M_e(r')$$

が成り立つので、

$$I_i = \{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0, M_i(r) \neq \emptyset\}$$

$$I_e = \{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0, M_e(r) \neq \emptyset\}$$

とおくと、  $I_i$  と  $I_e$  は区間になる。

$$\bigcap_{r \in I_i} M_i(r), \quad \bigcap_{r \in I_e} M_e(r)$$

はどちらも空でないコンパクト凸集合になり、

$$r_i = \sup I_i, \quad r_e = \inf I_e$$

とおくと、

$$M_i(r_i) = \bigcap_{r \in I_i} M_i(r), \quad M_e(r_e) = \bigcap_{r \in I_e} M_e(r)$$

が成り立つ。特に、

$$I_i = [0, r_i], \quad I_e = [r_e, \infty)$$

となる。

以下では  $r_i \leq r \leq r_e$  と仮定する。この  $r$  と曲線  $c$  に系 2.4.3 を適用すると

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x; r)) d\mu(x) = 4rL(c)$$

を得る。  $x \mapsto \#(c \cap S(x; r))$  は  $\mu_{\mathbf{R}^2}$  可測だから

$$D_k = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \#(c \cap S(x; r)) = k\}$$

とおくと、各  $D_k$  は  $\mu_{\mathbf{R}^2}$  可測集合になる。交点数が奇数になる円は  $c$  と接することになる。また交点数が  $\infty$  になる円は局所的に  $c$  に一致する。したがって

$$A(D_{2k-1}) = A(D_\infty) = 0.$$

Lebesgue の単調収束定理より、

$$\int_{\mathbf{R}^2} \#(c \cap S(x; r)) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kA(D_{2k}).$$

上で得た結果と合わせると

$$\sum_{k=1}^{\infty} kA(D_{2k}) = 2rL(c).$$

$r$  のとり方から

$$\bar{B}_r = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid c \cap S(x; r) \neq \emptyset\}$$

となるので、

$$\sum_{k=1}^{\infty} A(D_{2k}) = A(B_r)$$

が成り立つ。よって

$$2rL(c) - A(B_r) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)A(D_{2k}).$$

補題 2.5.5 より

$$A(B_r) = A(B) + rL(c) + \pi r^2$$

となるので、

$$2rL(c) - A(B_r) = -\pi \left( \frac{L(c)}{2\pi} - r \right)^2 + \left( \frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) \right).$$

上の  $2rL(c) - A(B_r)$  の二種類の表示を使うと

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) = \pi \left( \frac{L(c)}{2\pi} - r \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)A(D_{2k}) \geq 0$$

となり、

$$4\pi A(B) \leq L(c)^2$$

が成り立つ。

等号が成り立つとすると、

$$\frac{L(c)}{2\pi} - r = 0$$

となる。ところが、 $r$  は  $r_i \leq r \leq r_e$  であれば何でもよかったので、

$$\frac{L(c)}{2\pi} = r_i = r_e$$

となる。したがって、 $c$  は円になる。

系 2.5.7 (Bonnesen の不等式)  $\mathbb{R}^2$  内の凸閉曲線  $c$  が囲む領域を  $B$  で表す。 $\bar{B}$  に含まれる最大の円の半径を  $r_i$  とし、 $\bar{B}$  を含む最小の円の半径を  $r_e$  とすると、

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq \pi^2(r_e - r_i)^2$$

が成り立つ。

証明 等周不等式の別証明中に示したことより、 $r_i \leq r \leq r_e$  となる  $r$  に対して

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) \geq \pi \left( \frac{L(c)}{2\pi} - r \right)^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) &\geq \pi \left( \frac{L(c)}{2\pi} - r_i \right)^2 \\ \frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) &\geq \pi \left( -\frac{L(c)}{2\pi} + r_e \right)^2. \end{aligned}$$

上の不等式と不等式

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \geq \left( \frac{u+v}{2} \right)^2$$

より

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(B) \geq \pi \left( \frac{r_e - r_i}{2} \right)^2.$$

以上より

$$L(c)^2 - 4\pi A(B) \geq \pi^2(r_e - r_i)^2$$

が成り立つ。

定理 2.5.8 (Hotelling の公式)  $\mathbb{R}^2$  内の滑らかな単純閉曲線  $c$  から距離  $\rho$  以下の点の全体を  $c_\rho$  で表すと、十分小さい  $\rho$  に対して  $A(c_\rho) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho$  が成り立つ。

証明  $c$  の弧長パラータを  $s$  で表す。 $c$  の単位接ベクトルを  $u$  で表し  $u$  を反時計回りに  $\pi/2$  回転させた単位法ベクトルを  $e$  で表す。 $c$  の曲率を  $\kappa(s)$  で表すと Frenet-Serret の公式より

$$\frac{du}{ds} = \kappa e, \quad \frac{de}{ds} = -\kappa u.$$



$\rho \geq 0$  に対して

$$f : c \times [-\rho, \rho] \rightarrow c_\rho ; (x, t) \mapsto x - te$$

によって写像  $f$  を定める。

$$df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\partial f}{\partial s} = u - t \frac{de}{ds} = (1 + \kappa t)u, \quad df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} = -e$$

となりこれらは直交しているので、命題 1.3.7 より

$$Jf = \left| df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right| = \left| df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \right| \cdot \left| df \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right| = |1 + \kappa t|.$$

よって十分小さい  $\rho$  に対して  $f$  は微分同型写像になり、 $Jf = 1 + \kappa t$  が成り立つ。余面積公式 (定理 1.5.5) より

$$\begin{aligned} A(c_\rho) &= \int_{c \times [-\rho, \rho]} Jf d\mu = \int_{c \times [-\rho, \rho]} (1 + \kappa t) d\mu = \int_{c \times [-\rho, \rho]} 1 d\mu + \int_c \kappa(s) ds \int_{-\rho}^{\rho} t dt \\ &= L(c)L([-\rho, \rho]) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho. \end{aligned}$$

したがって次の等式を得る。

$$A(c_\rho) = L(c)L(\bar{D}^1(\rho)) = 2L(c)\rho.$$

## 2.6 Blaschke の公式

定理 2.6.1 (Blaschke の公式)  $\mathbb{R}^2$  内の二つの単純閉曲線  $c_0, c_1$  に対して、それらの囲む領域を  $D_0, D_1$  で表す。 $\mathbb{R}^2$  内の領域  $D$  に対してその連結成分の個数を  $\chi(D)$  で表す。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_{M(\mathbb{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) = 2\pi(A(D_0) + A(D_1)) + L(c_0)L(c_1).$$

証明 単純閉曲線の囲む領域を左に見て進む方向に関してその単純閉曲線の曲率を積分すると  $2\pi$  になる。単純閉曲線が区分的に滑らかな場合は滑らかな点でない点での速度ベクトルの角度を反時計回りを正の方向としてその点で積分に加えることで  $2\pi$  になる。したがって、領域  $D_0 \cap gD_1$  の境界  $\partial(D_0 \cap gD_1)$  の曲率を  $\kappa(\partial(D_0 \cap gD_1))$  で表し、滑らかではない点での速度ベクトルの角度を  $\theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1))$  で表すと、囲む領域を左に見て進む方向を選んでいることから  $\theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) \geq 0$  となり

$$\int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds + \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) = 2\pi\chi(D_0 \cap gD_1)$$

が成り立つ。そこで以下ではこの等式の左辺の  $g \in M(\mathbb{R}^2)$  に関する積分を計算する。

上の等式の左辺の第二項

$$\sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1))$$

の  $g \in M(\mathbf{R}^2)$  に関する積分は補題 2.4.4 より

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) d\mu(g) = \int_{M(\mathbf{R}^2)} \sum_{c_0 \cap gc_1} \theta_i d\mu(g) = 2\pi L(c_0)L(c_1).$$

次に  $\partial(D_0 \cap gD_1)$  を  $c_0$  が  $gD_1$  に含まれている部分と  $gc_1$  が  $D_0$  に含まれている部分に分解することで積分

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds \right) d\mu(g)$$

を分解して計算する。まず  $c_0$  が  $gD_1$  に含まれている部分の曲率を計算するために

$$I(c_0, D_1) = \{(x, y, g) \in c_0 \times D_1 \times M(\mathbf{R}^2) \mid x = gy\}$$

について考える。定義より  $I(c_0, D_1) \subset I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  となり、微分同型写像  $i : (\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2) \rightarrow I((\mathbf{R}^2)^2 \times M(\mathbf{R}^2))$  による逆像  $i^{-1}(I(c_0, D_1)) = c_0 \times D_1 \times SO(2)$  は  $(\mathbf{R}^2)^2 \times SO(2)$  の 4次元部分多様体になる。

$$\pi_M(x, y, g) = g \quad ((x, y, g) \in I(c_0, D_1))$$

によって写像  $\pi_M : I(c_0, D_1) \rightarrow M(\mathbf{R}^2)$  を定める。 $c_0$  の曲率  $\kappa_0$  を  $c_0 \times D_1 \times SO(2)$  上の関数とみなして、この関数  $\kappa_0$  と合成写像  $f = \pi_M \circ i$  に余面積公式 (定理 1.5.5) を適用すると

$$(*) \quad \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{f^{-1}(g)} \kappa_0 d\mu \right) d\mu(g) = \int_{c_0 \times D_1 \times SO(2)} \kappa_0 Jf d\mu$$

を得る。 $g$  の  $SO(2)$  成分を  $g_0$  で表すと

$$f^{-1}(g) = \{(x, y, g_0) \mid x \in c_0, y \in D_1, x = gy\}$$

となる。これは  $c_0 \cap gD_1$  と  $\sqrt{2}$  の比で相似になり、

$$\int_{f^{-1}(g)} \kappa_0 d\mu = \sqrt{2} \int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds$$

が成り立つ。したがって、上の (\*) の左辺は

$$\sqrt{2} \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds \right) d\mu(g)$$

に一致する。次に(\*)の右辺を計算するためにまず  $Jf$  を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}$$

は  $c_0 \times D_1 \times SO(2)$  の接ベクトル空間の正規直交基底になる。この基底に  $df$  を作用させ  $Jf$  を計算する。補題 2.4.1 の証明中の  $di$  の計算結果を使うと

$$\begin{aligned} df \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) &= d\pi_M di \left( \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{d(c_0(s))_1}{ds} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d(c_0(s))_2}{ds} \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ df \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right) &= -\cos \phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ df \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right) &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial u_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ df \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= (y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

となるので、 $df$  の表現行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} &df \left[ \frac{\partial}{\partial s} \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \frac{\partial}{\partial y_2} \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \begin{bmatrix} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos \phi & \sin \phi & y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin \phi & -\cos \phi & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって、 $df$  の階数はずねに 3 になり核の次元は 1 になる。核を求めるために

$$\frac{(c_0(s))_1}{ds} = \cos \psi, \quad \frac{(c_0(s))_2}{ds} = \sin \psi$$

とおいておく。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \psi & -\cos \phi & \sin \phi \\ \sin \psi & -\sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi - \cos \phi \cos(\psi - \phi) + \sin \phi \sin(\psi - \phi) \\ \sin \psi - \sin \phi \cos(\psi - \phi) - \cos \phi \sin(\psi - \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\ker df = \mathbf{R} \left( \frac{\partial}{\partial s} + \cos(\psi - \phi) \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin(\psi - \phi) \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$$

これより

$$(\ker df)^\perp = \text{span}_{\mathbf{R}} \left\{ \cos \psi \frac{\partial}{\partial s} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_2}, \sin \psi \frac{\partial}{\partial s} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\}.$$

上で求めた  $(\ker df)^\perp$  の基底に  $df$  を作用させ、補題 1.3.8 を利用して  $Jf$  を計算する。

$$\begin{aligned} & df \left( \cos \psi \frac{\partial}{\partial s} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos \phi & \sin \phi & y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin \phi & -\cos \phi & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ -\cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \psi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ \cos \psi \sin \psi + \sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \psi + 1 \\ \cos \psi \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (\cos^2 \psi + 1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cos \psi \sin \psi \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ & df \left( \sin \psi \frac{\partial}{\partial s} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(c_0(s))_1}{ds} & -\cos \phi & \sin \phi & y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi \\ \frac{(c_0(s))_2}{ds} & -\sin \phi & -\cos \phi & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -\sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \psi + \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \psi + \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \psi \\ \sin^2 \psi + 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \cos \psi \sin \psi \frac{\partial}{\partial u_1} + (\sin^2 \psi + 1) \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ & df \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= (y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

以上の計算より、

$$\begin{aligned}
& \left| \left( \cos \psi \frac{\partial}{\partial s} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \wedge \left( \sin \psi \frac{\partial}{\partial s} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \wedge \frac{\partial}{\partial \phi} \right| \\
&= \left| \left( \cos \psi \frac{\partial}{\partial s} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \wedge \left( \sin \psi \frac{\partial}{\partial s} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right| \\
&= \left| \left( -\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \right) \frac{\partial}{\partial s} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + \left( -\cos \psi \cos \phi - \sin \phi \sin \psi \right) \frac{\partial}{\partial s} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} \right. \\
&\quad \left. + (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} \right| \\
&= \left| \sin(\psi - \phi) \frac{\partial}{\partial s} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos(\psi - \phi) \frac{\partial}{\partial s} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} \right| \\
&= \sqrt{\sin(\psi - \phi)^2 + \cos(\psi - \phi)^2 + 1} \\
&= \sqrt{2}, \\
& \left| df \left( \cos \psi \frac{\partial}{\partial s} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \wedge df \left( \sin \psi \frac{\partial}{\partial s} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right. \\
&\quad \left. \wedge df \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right| \\
&= \left| \left\{ (\cos^2 \psi + 1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cos \psi \sin \psi \frac{\partial}{\partial u_2} \right\} \wedge \left\{ \cos \psi \sin \psi \frac{\partial}{\partial u_1} + (\sin^2 \psi + 1) \frac{\partial}{\partial u_2} \right\} \right. \\
&\quad \left. \wedge \left\{ (y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi) \frac{\partial}{\partial u_1} + (-y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi) \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \right| \\
&= \left| \det \begin{bmatrix} \cos^2 \psi + 1 & \cos \psi \sin \psi & y_1 \sin \phi + y_2 \cos \phi \\ \cos \psi \sin \psi & \sin^2 \psi + 1 & -y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= |(\cos^2 \psi + 1)(\sin^2 \psi + 1) - \cos^2 \psi \sin^2 \psi| \\
&= |\cos^2 \psi + \sin^2 \psi + 1| \\
&= 2.
\end{aligned}$$

したがって、補題 1.3.8 より

$$Jf = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ。これより、積分の等式 (\*) の右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \int_{c_0 \times D_1 \times SO(2)} \kappa_0 d\mu &= \sqrt{2} \int_{c_0} \kappa_0(s) ds \cdot A(D_1) \cdot 2\pi \\
&= \sqrt{2}(2\pi)^2 \cdot A(D_1).
\end{aligned}$$

さきに得た結果と合せると次の等式を得る。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{c_0 \cap gD_1} \kappa_0(s) ds \right) d\mu(g) = (2\pi)^2 \cdot A(D_1).$$

次に  $gc_1$  が  $D_0$  に含まれている部分での曲率の積分は上の結果より次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{D_0 \cap gc_1} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{c_1 \cap g^{-1}D_0} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) \\ &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{c_1 \cap gD_0} \kappa_1(s) ds \right) d\mu(g) \\ &= (2\pi)^2 \cdot A(D_0). \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds \right) d\mu(g) = (2\pi)^2 (A(D_0) + A(D_1))$$

が成り立つ。

以上の計算より

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{M(\mathbf{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) \\ &= \int_{M(\mathbf{R}^2)} \left( \int_{\partial(D_0 \cap gD_1)} \kappa(\partial(D_0 \cap gD_1)) ds + \sum_i \theta_i(\partial(D_0 \cap gD_1)) \right) d\mu(g) \\ &= (2\pi)^2 (A(D_0) + A(D_1)) + 2\pi L(c_0)L(c_1) \end{aligned}$$

となり、次の等式を得る。

$$\int_{M(\mathbf{R}^2)} \chi(D_0 \cap gD_1) d\mu(g) = 2\pi (A(D_0) + A(D_1)) + L(c_0)L(c_1).$$