数理構造特論 II・幾何学特論 III

陰関数定理と曲線曲面

— 島根大学総合理工学部集中講義 —

田崎博之

2006 年度

(2006 年 7 月 18 日 – 21 日)

はしがき

この集中講義では陰関数定理と曲線曲面の関連について解説します。まず陰関数定理を復習します。陰関数定理は存在定理の一つです。存在定理の存在意義はなんですかというのは、しばしば学生から受ける質問です。特に陰関数定理の場合は陰関数の存在が何を意味しているのかわかりにくいかもしれません。陰関数定理が何を主張しているのかわかりやすい解説を試みます。陰関数定理の仮定は偏微分に関するものなので、その前に二変数と三変数の微分も復習しておきます。次に陰関数定理が曲線や曲面の定義において基本的な考え方を与えることを示します。曲線や曲面には関数が一定値をとる点の集まりとして表示する方法と、パラメータを使って表示する方法があります。関数が一定値をとる点の集まりとして表示されている曲線や曲面が、パラメータを使った表示も持つということを示すときに、陰関数定理が重要になります。陰関数定理は陰関数の存在を保証していますが、陰関数がどのような関数であるかについては明らかにしていません。そのため、陰関数を利用して具体的な計算をしようとする場合に問題が生じます。陰関数そのものが必要ではなく、陰関数の微分が必要な場合は陰関数定理を利用して具体的な計算をすることが可能になります。陰関数定理の主張には陰関数の微分が元の関数の微分を使って表現できることも含まれています。このことを利用して、関数が一定値をとる点の集まりとして定義された曲線や曲面の曲率が計算できることも解説します。この曲率の計算では、公式を導く計算の途中で陰関数を利用しますが、最終的な曲率の公式には陰関数は姿を現わさないので、陰関数は名前のとおりの働きをしていることになります。

目 次

第1章　陰関数定理

1.1　二変数関数の微分

この節では一変数関数の微分を復習し、二変数関数の微分の意味を考える。一変数関数の微分の定義は微分係数として最初は与えられるが、局所的な一次関数による最良近似とみることもできる。いずれにしても、一変数関数の微分は関数の局所的な増加減少の度合を表現している。これに対して二変数関数の場合は一変数の場合と異なり定義域に色々な方向があるので、単純に増加減少を考えることはできない。しかし、一次関数による近似を考えることはできる。この一次関数の定数項を除いた線形な部分が二変数関数の微分であり、全微分とも呼ばれている。この微分を線形写像とみなすということで、多変数の場合の微分を曖昧な言い方をしないで表現できる。

一変数関数の微分の復習から始めよう。実数の開区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して、$x_0 \in I$ において極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在するときに、f は x_0 において**微分可能**といい、上の極限を f の x_0 における**微分係数**と呼ぶ。この極限は関数の変化率の極限になっているので、関数の局所的な増減を表わしているとみることもできる。f の x_0 における微分係数は次のような記号で表わされる。

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=x_0} f(x).$$

この値が上の極限の極限値になっているということは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

が成り立つということである。最後の不等式は

$$\varepsilon \geq \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)}{h} \right|$$

となる。二変数の場合を扱うときには h で割るという操作はできないので、上の不等式を

$$|f(x_0+h)-(f(x_0)+f'(x_0)h)| \leq \varepsilon|h|$$

という形に変形する。後で示すようにこの不等式の形は二変数のときにも考えることができる。h が $0<|h|<\delta$ の範囲を動くとき、h の一次関数 $f(x_0)+f'(x_0)h$ は h の関数 $f(x_0+h)$ の近似になっている。変数を $x=x_0+h$ と表わすと、x が $0<|x-x_0|<\delta$ の範囲を動くとき、x の一次関数 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ は x の関数 $f(x)$ の近似になっている。

x_0 の近傍で f が増加の状態にあることと $f'(x_0)$ が正であることは同値であり、x_0 の近傍で f が減少の状態にあることと $f'(x_0)$ が負であることは同値である。つまり、$f'(x_0)\neq 0$ ならば、x_0 の近傍での f の増加・減少の状態は傾き $f'(x_0)$ の一次関数の増加・減少の状態で決定されていることになる。$f'(x_0)=0$ の場合は、後で関数の二階微分を考察する際に扱う。

以上の一変数関数の微分をふまえて二変数関数の微分について考えよう。平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 D で定義された関数 $f(x,y)$ に対して、この関数の $(x_0,y_0)\in D$ における変化を知るために、まず一変数に制限して微分する。平面ベクトル (u,v) をとると

$$t \mapsto f((x_0,y_0)+t(u,v)) = f(x_0+tu, y_0+tv)$$

は一変数関数になる。この一変数関数の微分係数

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv)$$

がすべての平面ベクトル (u,v) について存在する場合に、それらをすべて集めたものは関数 $f(x,y)$ の (x_0,y_0) におけるすべての方向に関する変化を表わしていると考えることができる。そこで、平面ベクトルに対してその方向の関数の微分係数を対応させる写像

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\ ;\ (u,v) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv)$$

を f の (x_0,y_0) における微分として扱うことを考える。この写像を $df_{(x_0,y_0)}$ と表わすことにすると、

$$df_{(x_0,y_0)}(u,v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv)$$

となる。この $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への写像 $df_{(x_0,y_0)}$ の性質を調べてみよう。実数 s に対して、一変数関数の合成関数の微分の公式を使うと

$$\begin{aligned} df_{(x_0,y_0)}(s(u,v)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tsu, y_0+tsv) = s\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv) \\ &= s\,df_{(x_0,y_0)}(u,v) \end{aligned}$$

となるので、

$$df_{(x_0,y_0)}(s(u,v)) = sdf_{(x_0,y_0)}(u,v)$$

が成り立つ。これはスカラー倍と写像 $df_{(x_0,y_0)}$ の作用が可換になることを示している。この性質は線形写像の条件の一つである。そこで、一変数関数の場合と比較して同等になるように、一次関数すなわち定数項と線形写像の和によって関数を近似し、この線形写像を関数の微分と定義する。その定義をするために

$$\|(u,v)\| = (u^2+v^2)^{1/2} \qquad ((u,v) \in \mathbf{R}^2)$$

によって $\mathbf{R}^2$ における**ノルム** $\|\cdot\|$ を定める。

定義 1.1.1 $f(x,y)$ を平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 D で定義された関数とする。$(x_0,y_0) \in D$ をとる。ある線形写像 $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が存在し、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し $h \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow |f((x_0,y_0)+h) - (f(x_0,y_0)+\phi(h))| \le \varepsilon\|h\|$$

が成り立つときに、f は (x_0,y_0) において**微分可能**といい、線形写像 ϕ を f の (x_0,y_0) における**微分**と呼ぶ。[1]

注意 1.1.2 上の定義の線形写像 ϕ は存在すれば一意的であることがわかる。それを示すために、線形写像 ϕ が先に定めた

$$df_{(x_0,y_0)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\ ;\ (u,v) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv)$$

と一致することを示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し $h \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow |f((x_0,y_0)+h) - (f(x_0,y_0)+\phi(h))| \le \varepsilon\|h\|$$

が成り立つ。$(u,v) \in \mathbf{R}^2$ に対して $\|t(u,v)\| < \delta$ となる $t \in \mathbf{R}$ をとり、上の不等式に $h = t(u,v)$ を代入すると、

$$|f((x_0,y_0)+t(u,v)) - (f(x_0,y_0)+\phi(t(u,v)))| \le \varepsilon\|t(u,v)\|$$

が成り立つ。この不等式は

$$|f(x_0+tu, y_0+tv) - f(x_0,y_0) - t\phi(u,v)| \le \varepsilon\|t(u,v)\| = \varepsilon|t| \cdot \|(u,v)\|$$

となり、$t \ne 0$ のとき

$$\left|\frac{f(x_0+tu, y_0+tv) - f(x_0,y_0)}{t} - \phi(u,v)\right| \le \varepsilon\|(u,v)\|$$

[1] 偏微分と区別するために、f は (x_0,y_0) において**全微分可能**といい、線形写像 ϕ を f の (x_0,y_0) における**全微分**と呼ぶこともあるが、ここでは単に微分可能と微分という言葉を使うことにする。

となる。したがって、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu, y_0+tv)-f(x_0,y_0)}{t} = \phi(u,v)$$

を得る。つまり、先に考察した各ベクトルの方向に f を微分して得られる写像は線形写像 ϕ に一致する。上の考察は、どの (u,v) に対しても t の関数 $f(x_0+tu, y_0+tv)$ は $t=0$ で微分可能になることも示している。

変数を $(x,y)=(x_0,y_0)+(u,v)$ と表わすと、(x,y) が $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ の範囲を動くとき、(x,y) の一次関数 $f(x_0,y_0)+\phi(x-x_0, y-y_0)$ は (x,y) の関数 $f(x,y)$ の近似になっている。

この線形写像 $df_{(x_0,y_0)}$ の表現行列を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
df_{(x_0,y_0)}(1,0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\\
df_{(x_0,y_0)}(0,1) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0, y_0+t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

となるので、線形写像 $df_{(x_0,y_0)}$ の基底 $(1,0),(0,1)$ に関する表現行列は

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

になる。上の考察は、f は (x_0,y_0) で偏微分可能であることも示している。

$\mathbf{R}^2$ の x 成分を対応させる関数を x と書くことにすると、x は $\mathbf{R}^2$ 全体で定義された関数になる。$x:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 自身が線形写像なので、微分はどの点でも $dx=x$ になる。この等式の左辺は関数 x の微分であり、右辺は線形写像 x である。上の関数の微分の表現行列を使うと

$$\begin{aligned}
df_{(x_0,y_0)}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx_{(x_0,y_0)}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy_{(x_0,y_0)}(u,v)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy_{(x_0,y_0)}\right)(u,v)
\end{aligned}$$

となるので、

$$df_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy_{(x_0,y_0)}$$

が成り立つ。この等式は f が微分可能な点 (x_0,y_0) で成立するので、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

と書くこともできる。つまりこの等式は f の定義域の各点で df という $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への線形写像を x 成分と y 成分に分解した等式とみなせる。分解したときの係数に偏微分係数 $\partial f/\partial x$ と $\partial f/\partial y$ が現われるわけである。

一般に線形写像 $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \langle A, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2)$$

によって $\mathbf{R}^2$ の元 A を定めることができる。関数 f の微分 df は定義域の各点 (x, y) に対して、線形写像 $df_{(x,y)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を対応させている。$df_{(x,y)}$ に対して

$$df_{(x,y)}(\boldsymbol{v}) = \langle A, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2)$$

によって定まる $\mathbf{R}^2$ の元 A を $\mathrm{grad} f_{(x,y)}$ と表わし、$\mathrm{grad} f$ を**勾配ベクトル場**と呼ぶ。上で見た

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

という等式より

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

となることがわかる。

二変数関数の合成関数の微分の公式を振り返ってみよう。実数の開区間 I で定義された $\mathbf{R}^2$ に値を持つ関数 $c = (c_1, c_2)$ と、c の像を定義域に含む関数 f の合成関数 $f \circ c$ を考える。c と f は共に微分可能であると仮定する。合成関数の微分の公式とは次の等式である。

$$\frac{d}{dt}(f \circ c) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dc_2}{dt}.$$

この等式は、$dc/dt = (dc_1/dt, dc_2/dt)$ より

$$\frac{d}{dt}(f \circ c) = df\left(\frac{dc}{dt}\right) = \left\langle \mathrm{grad} f, \frac{dc}{dt} \right\rangle$$

となることがわかる。真中は線形写像 df にベクトル dc/dt を代入したものであり、右辺は $\mathrm{grad} f$ と dc/dt との内積である。これが f の微分 df を線形写像とみたときの合成関数の微分の公式である。上の等式と Cauchy-Schwarz の不等式より、$\mathrm{grad} f$ は f の値が最も大きくなる方向であることがわかる。

上記の合成関数の微分の公式より、二変数関数の定義域の曲線上での関数の増減は、曲線の速度ベクトルを関数の微分に代入することでわかる。関数 f の微分 df_p が線形写像として 0 ではない点 p では、微分の線形写像としての性質が関数の一点の近傍での増減を決定していることになる。

$$\{X \in \mathbf{R}^2 \mid df_p(X) = 0\}$$

に接する方向についてはこれだけではわからないが、次に述べる陰関数定理を利用することで、この方向に接する曲線として関数の値が一定になる点の集合が現われることが明らかになる。$df_p = 0$ の場合は、後で関数の二階微分を考察する際に扱う。

1.2 三変数関数の微分

この節では三変数関数の微分について考える。二変数関数と同様に扱える部分は簡単に済ませることにする。

二変数の場合と同様に

$$\|(u, v, w)\| = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} \qquad ((u, v, w) \in \mathbf{R}^3)$$

によって $\mathbf{R}^3$ における**ノルム** $\|\cdot\|$ を定める。

定義 1.2.1 $f(x, y, z)$ を空間 $\mathbf{R}^3$ の開集合 D で定義された関数とする。$(x_0, y_0, z_0) \in D$ をとる。ある線形写像 $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ が存在し、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し $h \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow |f((x_0, y_0, z_0) + h) - (f(x_0, y_0, z_0) + \phi(h))| \leq \varepsilon\|h\|$$

が成り立つときに、f は (x_0, y_0, z_0) において**微分可能**といい、線形写像 ϕ を f の (x_0, y_0, z_0) における**微分**と呼ぶ。

注意 1.2.2 二変数関数の場合と同様に、上の定義の線形写像 ϕ は存在すれば一意的であることがわかる。それを示すために、線形写像 ϕ が

$$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}\ ;\ (u, v, w) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + tu, y_0 + tv, z_0 + tw)$$

と一致することを示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し $h \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow |f((x_0, y_0, z_0) + h) - (f(x_0, y_0, z_0) + \phi(h))| \leq \varepsilon\|h\|$$

が成り立つ。$(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ に対して $\|t(u, v, w)\| < \delta$ となる $t \in \mathbf{R}$ をとり、上の不等式に $h = t(u, v, w)$ を代入すると、

$$|f((x_0, y_0, z_0) + t(u, v, w)) - (f(x_0, y_0, z_0) + \phi(t(u, v, w)))| \leq \varepsilon\|t(u, v, w)\|$$

が成り立つ。この不等式は

$$\begin{aligned} |f(x_0 + tu, y_0 + tv, z_0 + tw) - f(x_0, y_0, z_0) - t\phi(u, v, w)| &\leq \varepsilon\|t(u, v, w)\| \\ &= \varepsilon|t| \cdot \|(u, v, w)\| \end{aligned}$$

となり、$t \neq 0$ のとき

$$\left| \frac{f(x_0+tu, y_0+tv, z_0+tw) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} - \phi(u, v, w) \right| \leq \varepsilon \|(u, v, w)\|$$

となる。したがって、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tu, y_0+tv) - f(x_0, y_0)}{t} = \phi(u, v)$$

を得る。つまり、先に考察した各ベクトルの方向に f を微分して得られる写像は線形写像 ϕ に一致する。上の考察は、どの (u, v) に対しても t の関数 $f(x_0+tu, y_0+tv)$ は $t = 0$ で微分可能になることも示している。

変数を $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (u, v, w)$ と表わすと、(x, y, z) が $0 < \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < \delta$ の範囲を動くとき、(x, y, z) の一次関数 $f(x_0, y_0, z_0) + \phi(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ は (x, y, z) の関数 $f(x, y, z)$ の近似になっている。

この線形写像 $df_{(x_0, y_0, z_0)}$ の表現行列を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
df_{(x_0,y_0,z_0)}(1,0,0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \\
df_{(x_0,y_0,z_0)}(0,1,0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0, y_0+t, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \\
df_{(x_0,y_0,z_0)}(0,0,1) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0, y_0, z_0+t) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)
\end{aligned}$$

となるので、線形写像 $df_{(x_0, y_0, z_0)}$ の基底 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ に関する表現行列は

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right]$$

になる。上の考察は、f は (x_0, y_0, z_0) で偏微分可能であることも示している。

$\mathbf{R}^3$ の x, y, z 成分を対応させる関数をそれぞれ x, y, z と書くことにすると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

を得る。この等式は f の定義域の各点で df という $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}$ への線形写像を x 成分、y 成分と z 成分に分解した等式とみなせる。分解したときの係数に偏微分係数 $\partial f/\partial x$、$\partial f/\partial y$ と $\partial f/\partial z$ が現われるわけである。

一般に線形写像 $\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \langle A, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3)$$

によって $\mathbf{R}^3$ の元 A を定めることができる。関数 f の微分 df は定義域の各点 (x, y, z) に対して、線形写像 $df_{(x,y,z)} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を対応させている。$df_{(x,y,z)}$ に対して

$$df_{(x,y,z)}(\boldsymbol{v}) = \langle A, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3)$$

によって定まる $\mathbf{R}^3$ の元 A を $\mathrm{grad} f_{(x,y,z)}$ と表わし、$\mathrm{grad} f$ を**勾配ベクトル場**と呼ぶ。上で見た

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

という等式より

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

となることがわかる。

三変数関数の合成関数の微分の公式を振り返ってみよう。実数の開区間 I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値を持つ関数 $c = (c_1, c_2, c_3)$ と、c の像を定義域に含む関数 f の合成関数 $f \circ c$ を考える。c と f は共に微分可能であると仮定する。合成関数の微分の公式とは次の等式である。

$$\frac{d}{dt}(f \circ c) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dc_3}{dt}.$$

この等式は、$dc/dt = (dc_1/dt, dc_2/dt, dc_3/dt)$ より

$$\frac{d}{dt}(f \circ c) = df\left(\frac{dc}{dt}\right) = \left\langle \mathrm{grad} f, \frac{dc}{dt}\right\rangle$$

となることがわかる。右辺は線形写像 df にベクトル dc/dt を代入したものである。これが f の微分 df を線形写像とみたときの合成関数の微分の公式である。この形で合成関数の微分の公式を書くと、二変数のときと三変数のときの公式の形が全く同じになる。上記の合成関数の微分の公式より、三変数関数の定義域の曲線上での関数の増減は、曲線の速度ベクトルを関数の微分に代入することでわかる。関数 f の微分 df_p が線形写像として 0 ではない点 p では、微分の線形写像としての性質が関数の一点の近傍での増減を決定していることになる。

$$\{X \in \mathbf{R}^3 \mid df_p(X) = 0\}$$

に接する方向についてはこれだけではわからないが、次に述べる陰関数定理を利用することで、この方向に接する曲面として関数の値が一定になる点の集合が現われることが明らかになる。

1.3　陰関数定理

一変数関数と二変数関数の大きな違いの一つは、関数が一定の値をとる点の集まりが離散的なものになるかつながったものになるかである。実数の開区間 I で定義された一変数関数 $f(x)$ が一定の値 a をとる点の全体

$$\{x \in I \mid f(x) = a\}$$

は通常 I の離散的な部分集合になる。たとえば

$$I = \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sin x, \qquad a = 0$$

とすると

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = 0\} = \pi\mathbf{Z}.$$

これに対して平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 O で定義された二変数関数 $f(x,y)$ が一定の値 a をとる点の全体

$$\{(x,y) \in O \mid f(x,y) = a\}$$

は通常 O 内の曲線になる。たとえば

$$O = \mathbf{R}^2, \qquad f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad a > 0$$

とすると

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a\}$$

は原点中心半径 $\sqrt{a}$ の円になる。このような二変数関数の一定の値をとる点の集まりを平面曲線の節で考察の対象にしたい。このような点の集まりが曲線と呼ぶに相応しいかどうか判断する際に、陰関数定理が重要になる。二変数関数の偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y)$$

とも書くことにする。

定理 1.3.1 (陰関数定理) 平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 O で定義された二変数関数 $f(x,y)$ は O において微分可能であり、df を O から $\mathbf{R}^2$ の双対空間 $(\mathbf{R}^2)^*$ への写像とみなして連続になっていると仮定する。$(x_0, y_0) \in O$ において

$$f(x_0, y_0) = a, \qquad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

ならば、x_0 を含む開区間 I と I 上定義された可微分関数 $g(x)$ が存在し

$$y_0 = g(x_0), \qquad x \in I \Rightarrow (x, g(x)) \in O, f(x, g(x)) = a$$

が成り立つ。さらに、次の等式が成り立つ。

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad (x \in I).$$

$g(x)$ を $f(x,y) = a$ から定まる**陰関数**と呼ぶ。

注意 1.3.2 上の陰関数定理の前半の主張を認めれば、後半の陰関数の微分を表わす等式は簡単に求められる。まず、それを確かめておこう。$x \in I$ に対して等式 $f(x, g(x)) = a$ が成り立つので、これを x で微分すると 0 になる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = df_{(x,g(x))} \left(\frac{d}{dx}(x, g(x)) \right) = df_{(x,g(x))}(1, g'(x)) \\ &= f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x). \end{aligned}$$

これより次の等式を得る。

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad (x \in I).$$

上の陰関数定理は $f(x, y) = a$ という二変数 x, y の方程式を (x_0, y_0) の近傍で解こうとしている。さらに、解の集りを関数 $g(x)$ を使って $(x, g(x))$ という形の点で表現している。これは、x_0 の近傍の元 x を固定すると $f(x, y) = a$ は y を未知数とする方程式とみなすことができ、y について解いた解を x に対応させ $y = g(x)$ と表していることになる。この主張は次のように考えるとわかりやすくなる。$f_y(x_0, y_0) \neq 0$ という仮定より $f_y(x_0, y_0) > 0$ または $f_y(x_0, y_0) < 0$ が成り立つ。$f_y(x_0, y_0) > 0$ の場合を考えてみよう。$f_y(x, y)$ の連続性より (x_0, y_0) の近傍でも $f_y(x, y) > 0$ が成り立つ。よって、(x_0, y_0) の近傍で $f(x, y)$ の x を固定して y だけ動かしたとき単調増加になる。これより $f(x, y) = a = f(x_0, y_0)$ を満たす y_0 の近くの y が x に対応してただ一つ存在することはわかりやすい。このことが陰関数の存在である。$f_y(x_0, y_0) < 0$ の場合も y に関して単調減少になり、単調増加の場合と同様である。

y に関する偏微分係数が正または負になることから、$f(x, y)$ は y に関して単調増加または単調減少になることがわかり、このことから陰関数の存在を説明 (証明ではない) した。微分という概念は関数を局所的に一次関数とみなす見方なので、関数が最初から一次式の場合は話が簡単になる。この観点から陰関数定理を見てみよう。

関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = Ax + By + C$$

という一次式になっているとする。x を固定したときに

$$Ax + By + C = a$$

という y を未知数とする方程式は $B \neq 0$ のときにただ一つの解を持ち、その解は

$$y = \frac{1}{B}(a - Ax - C)$$

となる。$B = f_y(x, y)$ だから、これは陰関数定理の特別の場合になっている。

二変数関数の場合、関数が一定の値をとる点の集まりは通常曲線になる。これに対して空間 $\mathbf{R}^3$ の開集合 O で定義された三変数関数 $f(x,y,z)$ が一定の値 a をとる点の全体

$$\{(x,y,z) \in O \mid f(x,y,z) = a\}$$

は通常 O 内の曲面になる。たとえば

$$O = \mathbf{R}^3, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad a > 0$$

とすると

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a\}$$

は原点中心半径 $\sqrt{a}$ の球面になる。このような三変数関数の一定の値をとる点の集まりを空間内の曲面の節で考察の対象にしたい。このような点の集まりが曲面と呼ぶに相応しいかどうか判断する際に、陰関数定理が重要になる。二変数関数の場合と同様に、三変数関数の偏微分も

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_x(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f_y(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_z(x,y,z)$$

とも書くことにする。

定理 1.3.3 (陰関数定理) 空間 $\mathbf{R}^3$ の開集合 O で定義された三変数関数 $f(x,y,z)$ は O において微分可能であり、df を O から $\mathbf{R}^3$ の双対空間 $(\mathbf{R}^3)^*$ への写像とみなして連続になっていると仮定する。$(x_0,y_0,z_0) \in O$ において

$$f(x_0,y_0,z_0) = a, \qquad f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

ならば、(x_0,y_0) を含む $\mathbf{R}^2$ 内の開集合 U と U 上定義された可微分関数 $g(x,y)$ が存在し

$$z_0 = g(x_0,y_0), \qquad (x,y) \in U \Rightarrow (x,y,g(x,y)) \in O, f(x,y,g(x,y)) = a$$

が成り立つ。さらに、次の等式が成り立つ。

$$g_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}, \quad g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}, \quad ((x,y) \in U)$$

$g(x,y)$ を $f(x,y,z) = a$ から定まる**陰関数**と呼ぶ。

注意 1.3.4 上の陰関数定理の前半の主張を認めれば、後半の陰関数の微分を表わす等式は簡単に求められる。まず、それを確かめておこう。$(x,y) \in U$ に対して等式 $f(x,y,g(x,y)) = a$ が成り立つので、これを x で微分すると 0 になる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} f(x,y,g(x,y)) = df_{(x,y,g(x,y))}\left(\frac{d}{dx}(x,y,g(x,y))\right) \\ &= df_{(x,y,g(x,y))}(1,0,g_x(x,y)) = f_x(x,y,g(x,y)) + f_z(x,y,g(x,y))g_x(x,y). \end{aligned}$$

これより次の等式を得る。

$$g_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} \qquad ((x,y)\in U).$$

等式 $f(x,y,g(x,y)) = a$ を y で微分しても 0 になる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dy}f(x,y,g(x,y)) = df_{(x,y,g(x,y))}\left(\frac{d}{dy}(x,y,g(x,y))\right) \\ &= df_{(x,y,g(x,y))}(0,1,g_y(x,y)) = f_y(x,y,g(x,y)) + f_z(x,y,g(x,y))g_y(x,y). \end{aligned}$$

これより次の等式を得る。

$$g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} \qquad ((x,y)\in U).$$

上の陰関数定理は $f(x,y,z) = a$ という三変数 x,y,z の方程式を (x_0,y_0,z_0) の近傍で解こうとしている。さらに、解の集りを関数 $g(x,y)$ を使って $(x,y,g(x,y))$ という形の点で表現している。これは、(x_0,y_0) の近傍の元 (x,y) を固定すると $f(x,y,z)=a$ は z を未知数とする方程式とみなすことができ、z について解いた解を (x,y) に対応させ $z=g(x,y)$ と表していることになる。この主張は次のように考えるとわかりやすくなる。$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ という仮定より $f_z(x_0,y_0,z_0)>0$ または $f_z(x_0,y_0,z_0)<0$ が成り立つ。$f_z(x_0,y_0,z_0)>0$ の場合を考えてみよう。$f_z(x,y,z)$ の連続性より (x_0,y_0,z_0) の近傍でも $f_z(x,y,z)>0$ が成り立つ。よって、(x_0,y_0,z_0) の近傍で $f(x,y,z)$ の (x,y) を固定して z だけ動かしたとき単調増加になる。これより $f(x,y,z)=a=f(x_0,y_0,z_0)$ を満たす z_0 の近くの z が (x,y) に対応してただ一つ存在することはわかりやすい。このことが陰関数の存在である。$f_z(x_0,y_0,z_0)<0$ の場合も z に関して単調減少になり、単調増加の場合と同様である。

z に関する偏微分係数が正または負になることから、$f(x,y,z)$ は z に関して単調増加または単調減少になることがわかり、このことから陰関数の存在を説明 (証明ではない) した。微分という概念は関数を局所的に一次関数とみなす見方なので、関数が最初から一次式の場合は話が簡単になる。この観点から陰関数定理を見てみよう。

関数 $f(x,y,z)$ が

$$f(x,y,z) = Ax+By+Cz+D$$

という一次式になっているとする。(x,y) を固定したときに

$$Ax+By+Cz+D = a$$

という z を未知数とする方程式は $C\neq 0$ のときにただ一つの解を持ち、その解は

$$z = \frac{1}{C}(a-Ax-By-D)$$

となる。$C = f_z(x,y,z)$ だから、これは陰関数定理の特別の場合になっている。

1.4　二階微分

一変数関数の微分を扱う目的の一つは関数の変化を調べることである。微分が正のところで関数は増加の状態にあり、微分が負のところで関数は減少の状態である。微分が 0 になるところでは、さらに二階微分を調べることによってそこで関数が極大になっているのか極小になっているのか判断できる。一階微分が 0 で二階微分が正のときは関数は極小になっていて、一階微分が 0 で二階微分が負のときは関数は極大になっている。以上の一階微分と二階微分の考察から、関数の変化の概略は把握できる。関数の極大や極小を判別できるということは、関数のグラフの曲り方を判別できるということにつながる。一変数関数の二階微分を利用して、曲線の曲り方を表現する幾何学的量：曲率を後で扱う。

二変数関数の場合に色々な方向に対してその方向の関数の微分係数を対応させることで線形写像を定めた。二変数関数の二階微分についても同様のことを考えてみよう。$f(x,y)$ を平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 O で定義された関数とする。平面ベクトル (u,v) と (u_1,v_1) をとり、

$$f((x_0,y_0)+s(u,v)+t(u_1,v_1)) = f(x_0+su+tu_1, y_0+sv+tv_1)$$

を s と t に関して微分した微分係数が存在する場合に、それらをすべて集めたものは関数 $f(x,y)$ の (x_0,y_0) における二階微分の情報を持っていると考えることができる。そこで、二つの平面ベクトルに対してその方向の関数の微分係数を続けてとった値を対応させる写像

$$(\mathbf{R}^2)^2 \to \mathbf{R}\ ;\ ((u,v),(u_1,v_1)) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(x_0+su+tu_1, y_0+sv+tv_1)$$

を f の (x_0,y_0) における二階微分として扱うことを考える。

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(x_0+su+tu_1, y_0+sv+tv_1) \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f_x(x_0+tu_1, y_0+tv_1)u + f_y(x_0+tu_1, y_0+tv_1)v) \\
= \ & f_{xx}(x_0,y_0)uu_1 + f_{xy}(x_0,y_0)uv_1 + f_{yx}(x_0,y_0)vu_1 + f_{yy}(x_0,y_0)vv_1 \\
= \ & [u\ v] \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり、これは $(u,v),(u_1,v_1)$ の双線形形式になっている。f が C^2 級であるときは

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

が成り立ち、上の双線形形式は対称になる。この対称双線形形式を $\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}$ と書き、f の **Hessian** と呼ぶ。つまり、

$$\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}((u,v),(u_1,v_1)) = [u\ v] \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}.$$

関数の同じ方向の二階微分を考えると次のようになる。

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(x_0+tu, y_0+tv) = [u\ v]\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

これは u, v に関する二次形式になっている。$df_{(x_0,y_0)} = 0$ の場合、この二次形式の値によってその方向に沿って関数が極大になるか極小になるかが判別できる。特に二次形式の値の符号が重要になる。関数の二階偏微分係数を並べた対称行列を対角化すれば符号の判定が容易になる。

定理 1.4.1 (対称行列の対角化) 二次の実対称行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

に対してある二次の直交行列 P が存在し

$$P^*AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。ただし、P^* は P の転置行列であり、λ_1, λ_2 は A の固有値である。

証明　これは線形代数の定理だが、次のように微分を使って証明することもできる。二次対称行列 A が対角化可能であることを、二次形式 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}$ の単位円における最大値最小値を求めることによって証明する。単位円はコンパクトだから、上の二次形式は単位円上最大値 α をとる。最大値をとる単位円上の点を $\boldsymbol{x}_1$ としておく。$\boldsymbol{x}_1$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とすると、単位円は $\cos t\boldsymbol{x}_1 + \sin t\boldsymbol{x}_2$ によってパラメータ表示される。上の二次形式は単位円上 $\boldsymbol{x}_1$ で最大値をとるので、

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\cos t\boldsymbol{x}_1 + \sin t\boldsymbol{x}_2)^*A(\cos t\boldsymbol{x}_1 + \sin t\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_2^*A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1^*A\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_2^*A\boldsymbol{x}_1.$$

最後の式変形は A が対称行列であることによる。したがって、

$$\boldsymbol{x}_2^*A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^*A\boldsymbol{x}_2 = 0,$$

つまり、$A\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交し、$A\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_1$ も直交する。これより、$A\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{x}_1$ に比例し、$A\boldsymbol{x}_2$ も $\boldsymbol{x}_2$ に比例する。よって、$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ となり、$\boldsymbol{x}_2^*A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2$ とおくと、$A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ となる。これらより λ_1, λ_2 は A の固有値になる。そこで、$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)$ とおくと、P は回転行列 (特に、直交行列) になり、

$$AP = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

したがって

$$P^*AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

さらに、任意の実数 p, q に対して

$$\begin{aligned}(p\boldsymbol{x}_1 + q\boldsymbol{x}_2)^*A(p\boldsymbol{x}_1 + q\boldsymbol{x}_2) &= [p\ q]P^*AP\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = [p\ q]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2\end{aligned}$$

となり、二次形式の対角化にも対応している。高次の対称行列の場合も、以上の方法を次元に関して帰納的に使うことによって示される。

系 1.4.2 二次の実対称行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とする。二次の列ベクトルであってノルムが 1 のもの全体を C で表わす。関数

$$C \to \mathbf{R}\ ;\ \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}^*A\boldsymbol{u}$$

の最大値は $\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ になり、最小値は $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ になる。

証明 行列 A に定理 1.4.1 を適用すると、ある二次の直交行列 P が存在し、

$$P^*AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

$$C \to C\ ;\ \boldsymbol{u} \mapsto P\boldsymbol{u}$$

は C から C への全単射になり、

$$\boldsymbol{u}^*\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*P^*AP\boldsymbol{u} = (P\boldsymbol{u})^*AP\boldsymbol{u}.$$

したがって、関数

$$C \to \mathbf{R}\ ;\ \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}^*\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

の最大値と最小値を求めればよい。$\boldsymbol{u}$ の第 1 成分と第 2 成分を u_1, u_2 とすると、$u_1^2 + u_2^2 = 1$ が成り立ち、問題の関数は $\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2$ になる。さらに、$v_1 = u_1^2,\ v_2 = u_2^2$ とおくと、v_1, v_2 は $0 \leq v_1, 0 \leq v_2, v_1 + v_2 = 1$ を満たし、問題の関数は $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ になる。この関数の最大値は $\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ になり、最小値は $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ になる。

対称行列の対角化を関数の二階微分 $\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}$ に適用する。$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)$ を

$$P^*\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

を満たす回転行列とする。$\mathbf{R}^2$ の任意の元を $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{x}_1 + u_2\boldsymbol{x}_2$ と表わすと、

$$\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2$$

が成り立つ。この等式より $\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ の正負を判定できる。$df_{(x_0,y_0)} = 0$ のとき、$\lambda_i > 0$ ならば f は (x_0, y_0) で極小値をとり、$\lambda_i < 0$ ならば f は (x_0, y_0) で極大値をとり、$\lambda_1\lambda_2 < 0$ ならば f は (x_0, y_0) の近傍で鞍型になり極小でも極大でもない。$\mathrm{Hess}(f)_{(x_0,y_0)}$ が退化している場合には、これだけの情報では f の (x_0, y_0) の近傍の挙動はわからない。

第2章　曲線

2.1　平面曲線の概念

この講義で扱う曲線の定義を述べる前に、曲線として扱いたいものについて考察する。平面曲線として扱いたいものは、平面の部分集合であって 1 次元的な広がりを持つものである。平面内の曲線は、座標に関する一つの等式を満たす点の集まりとして定める方法と、一つのパラメータによって平面の点の移動の軌跡として定める方法がある。

まず平面内の座標に関する一つの等式を満たす点の集まりについて考えてみよう。つまり、$\mathbf{R}^2$ の開集合 O 上で定義された関数 $f(x, y)$ と定数 a に対して

$$C = \{(x, y) \in O \mid f(x, y) = a\}$$

について考える。この部分集合を曲線とみて曲り方をとらえるのは、接線が引けると接線の変化を調べることで可能になる。陰関数定理 (定理 1.3.1) の観点から、C の各点で df が 0 にならなければ C はその点の近傍で一変数関数のグラフになり接線を持つ。そこで、任意の $(x, y) \in C$ に対して $df_{(x,y)} \neq 0$ となるときに、C を平面曲線として定義したい。

例 2.1.1 正の実数 r に対して、平面の原点からの距離が r になる点の全体は平面曲線になる。

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

とおく。問題の点の全体は

$$S^1(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = r^2\}$$

になる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y} = 2xdx + 2ydy$$

となり $S^1(r)$ の点では $df \neq 0$ となることがわかる。これより $S^1(r)$ は平面曲線になる。よく知られているようにこれは**円**である。

例 2.1.2 $g(x)$ を $\mathbf{R}$ の開集合 O で定義された関数とし、

$$C = \{(x, g(x)) \mid x \in O\}$$

によって $g(x)$ の**グラフ**を定める。

$$f(x,y) = g(x) - y \qquad ((x,y) \in O \times \mathbf{R})$$

とおくと、

$$C = \{(x,y) \in O \times \mathbf{R} \mid f(x,y) = 0\}$$

が成り立つ。

$$df = g' dx - dy$$

となり、$O \times \mathbf{R}$ のすべての点で $df \neq 0$ となることがわかる。これより C は曲線になる。

例 2.1.3 平面上の二定点 $(-a,0)$, $(a,0)$ $(a>0)$ からの距離の和が一定の点の軌跡は平面曲線になる。これを示すために、この軌跡を定める方程式を求めよう。二定点からの距離の和を $K>0$ とする。軌跡が空でない曲線になるためには $2a<K$ である必要がある。条件は

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} = K$$

と書き表わされる。両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
&(x+a)^2+y^2+2\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x-a)^2+y^2 = K^2,\\
&2x^2+2a^2+2y^2+2\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} = K^2,\\
&x^2+a^2+y^2+\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} = \frac{K^2}{2},\\
&x^2+y^2+a^2-\frac{K^2}{2} = -\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

再び両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2+a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2 = ((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2),\\
&(x^2+y^2)^2+2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2)+\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2\\
= \;&(x+a)^2(x-a)^2+((x+a)^2+(x-a)^2)y^2+y^4,\\
&x^4+2x^2y^2+y^4+2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2)+\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2\\
= \;&(x^2-a^2)^2+2(x^2+a^2)y^2+y^4,\\
&x^4+2x^2y^2+y^4+2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2)+a^4-a^2K^2+\frac{K^4}{4}\\
= \;&x^4-2a^2x^2+a^4+2(x^2+a^2)y^2+y^4,\\
&(2a^2-K^2)(x^2+y^2)-a^2K^2+\frac{K^4}{4} = -2a^2x^2+2a^2y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(K^2-4a^2)\frac{K^2}{4} = (K^2-4a^2)x^2 + K^2y^2, \\
&\frac{4x^2}{K^2} + \frac{4y^2}{K^2-4a^2} = 1.
\end{aligned}$$

そこで

$$f(x,y) = \frac{4x^2}{K^2} + \frac{4y^2}{K^2-4a^2}$$

とおくと、問題の軌跡は

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$$

になる。

$$df = \frac{8x}{K^2}dx + \frac{8y}{K^2-4a^2}dy$$

より E の点では $df \neq 0$ となることがわかる。これより E は平面曲線になる。この曲線は**楕円**である。

例 2.1.4 平面上の二定点 $(-a,0)$, $(a,0)$ $(a>0)$ からの距離の差が一定の点の軌跡は平面曲線になる。これを示すために、この軌跡を定める方程式を求めよう。二定点からの距離の差を $K>0$ とする。軌跡が空でない曲線になるためには $2a>K$ である必要がある。条件は

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} - \sqrt{(x-a)^2+y^2} = K$$

と書き表わされる。両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
&(x+a)^2+y^2 - 2\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} + (x-a)^2+y^2 = K^2, \\
&2x^2+2a^2+2y^2 - 2\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} = K^2, \\
&x^2+a^2+y^2 - \sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2} = \frac{K^2}{2}, \\
&x^2+y^2+a^2-\frac{K^2}{2} = \sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

再び両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2+a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2 = ((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2), \\
&(x^2+y^2)^2 + 2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2) + \left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2 \\
= \ &(x+a)^2(x-a)^2 + ((x+a)^2+(x-a)^2)y^2 + y^4, \\
&x^4+2x^2y^2+y^4+2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2) + \left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^2-a^2)^2+2(x^2+a^2)y^2+y^4, \\
& x^4+2x^2y^2+y^4+2\left(a^2-\frac{K^2}{2}\right)(x^2+y^2)+a^4-a^2K^2+\frac{K^4}{4} \\
&= x^4-2a^2x^2+a^4+2(x^2+a^2)y^2+y^4, \\
& (2a^2-K^2)(x^2+y^2)-a^2K^2+\frac{K^4}{4}=-2a^2x^2+2a^2y^2, \\
& (K^2-4a^2)\frac{K^2}{4}=(K^2-4a^2)x^2+K^2y^2, \\
& \frac{4x^2}{K^2}-\frac{4y^2}{4a^2-K^2}=1.
\end{aligned}
$$

そこで

$$
f(x,y)=\frac{4x^2}{K^2}-\frac{4y^2}{4a^2-K^2}
$$

とおくと、問題の軌跡は

$$
H=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid f(x,y)=1\}
$$

になる。

$$
df=\frac{8x}{K^2}dx-\frac{8y}{4a^2-K^2}dy
$$

より H の点では $df\neq 0$ となることがわかる。この曲線は**双曲線**である。

例 2.1.5 平面上の二定点 $(-a,0)$, $(a,0)$ $(a>0)$ からの距離の商が一定の点の軌跡は平面曲線になる。これを示すために、この軌跡を定める方程式を求めよう。二定点からの距離の商を $K>0$ とする。条件は

$$
\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=K
$$

と書き表わされる。両辺を二乗すると

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=K^2, \\
& (x+a)^2+y^2=K^2((x-a)^2+y^2), \\
& x^2+2ax+a^2+y^2=K^2(x^2-2ax+a^2+y^2), \\
& (1-K^2)x^2+2(1+K^2)ax+(1-K^2)a^2+(1-K^2)y^2=0.
\end{aligned}
$$

ここで $K=1$ と $K\neq 1$ の場合分けをして考える。$K=1$ のときは、方程式は $x=0$ となり y 軸を表わす。$K\neq 1$ のときを考える。上の等式を $1-K^2$ で割ると

$$
\begin{aligned}
& x^2+2\frac{1+K^2}{1-K^2}ax+a^2+y^2=0, \\
& \left(x+\frac{1+K^2}{1-K^2}a\right)^2+y^2=\left(\frac{(1+K^2)^2}{(1-K^2)^2}-1\right)a^2, \\
& \left(x+\frac{1+K^2}{1-K^2}a\right)^2+y^2=\frac{4a^2K^2}{(1-K^2)^2}.
\end{aligned}
$$

そこで

$$f(x,y)=\left(x+\frac{1+K^2}{1-K^2}a\right)^2+y^2$$

とおくと、問題の軌跡は

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; f(x,y)=\frac{4a^2K^2}{(1-K^2)^2}\right\}$$

になる。

$$df=2\left(x+\frac{1+K^2}{1-K^2}a\right)dx+2ydy$$

より C の点では $df\neq 0$ となることがわかる。この曲線は円である。

注意 2.1.6 二定点からの距離の和・差・商が一定の点の軌跡は上の例でみたように二次曲線になるが、二定点からの距離の積が一定の点の軌跡は四次曲線になり、レムニスケートと呼ばれている曲線になる。ただし、定義する関数の微分が退化する点があるので、この講義での平面曲線の定義にはあてはまらない。レムニスケートには楕円積分や楕円関数と深い関係があるが、ここでは詳細には触れないことにする。

次に一つのパラメータによって平面の点の移動の軌跡として曲線を定める方法について考えてみよう。つまり、$\mathbf{R}$ の開区間 I 上で定義され $\mathbf{R}^2$ に値を持つ写像 $c:I\to\mathbf{R}^2$ について考える。この場合も曲り方をとらえるには、接線が引けると接線の変化を調べることで可能になる。I の元 t に対して $c'(t)$ が 0 でなければ、$c(t)$ における c の接線を引くことができる。そこで、任意の $t\in I$ に対して $c'(t)\neq 0$ となるときに、$c:I\to\mathbf{R}^2$ を平面曲線のパラメータ表示として定義したい。先に考察した平面曲線の概念は $\mathbf{R}^2$ の開集合 O 上で定義された関数 $f(x,y)$ と定数 a によって

$$C=\{(x,y)\in O \mid f(x,y)=a\}$$

と記述され、任意の $(x,y)\in C$ に対して $df_{(x,y)}\neq 0$ となるものである。

$$0\neq df=f_xdx+f_ydy$$

だから $f_x\neq 0$ または $f_y\neq 0$ となる。$f_y\neq 0$ の場合は陰関数定理 (定理 1.3.1) より局所的に関数 $g(x)$ が存在し、$f(x,g(x))=a$ が成り立つ。つまり、$x\mapsto(x,g(x))$ は C の一部を像にするパラメータ表示になる。$f_x\neq 0$ の場合は x と y の立場を入れ換えて上と同様に陰関数定理を適用すればよい。ただし、陰関数定理は存在定理であって陰関数の具体的な表示を示すわけではないので、平面曲線のパラメータ表示を具体的に得られるかどうかは、個々の場合に依存する。先に挙げた平面曲線のパラメータ表示を求めておこう。

例 2.1.7 例 2.1.1 の円

$$S^1(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

のパラメータ表示は

$$(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$

によって得られることが、

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2,$$
$$(r\cos\theta, r\sin\theta)' = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \neq 0$$

からわかる。

例 2.1.8 例 2.1.3 の楕円

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

のパラメータ表示は

$$(a\cos\theta, b\sin\theta) \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$

によって得られることが、

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta)^2}{b^2} = 1,$$
$$(a\cos\theta, b\sin\theta)' = (-a\sin\theta, b\cos\theta) \neq 0$$

からわかる。

例 2.1.9 例 2.1.4 の双曲線

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

のパラメータ表示は

$$(a\cosh t, b\sinh t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

によって得られることが、

$$\frac{(a\cosh t)^2}{a^2} - \frac{(b\sinh t)^2}{b^2} = 1,$$
$$(a\cosh t, b\sinh t)' = (a\sinh t, b\cosh t) \neq 0$$

からわかる。

平面曲線には上で述べたように二つの見方がある。幾何学的条件を満たす点の集まりとして曲線をとらえるときは、方程式によって曲線を定義する方が扱いやすいが、曲線の曲り方を表わす曲率に関する考察をするときは、パラメータ表示による曲線の記述から始めた方がやりやすい。次の節ではパラメータ表示による曲線の曲率を定義しその基本的性質を調べる。

2.2　平面曲線の曲率

曲線のパラメータには曲線固有の弧長パラメータを呼ばれる標準的なパラメータが存在する。この弧長パラメータを利用して曲線の曲率を定義しその基本的性質を調べる。

平面曲線のパラメータ表示が

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

によって与えられているとする。$c'(t) \neq 0$ と仮定する。

$$c'(t) = (x'(t), y'(t))$$

を速度ベクトルとも呼ぶことにする。運動する点の時刻 t のときの位置が $c(t)$ であると考えると、$c(t)$ は平面の点の移動の軌跡を表わし、$c'(t)$ はその移動の速度ベクトルとみなせる。速度ベクトルの長さは

$$\|c'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

で与えられる。パラメータが a から b $(a \leq b)$ まで動くときの曲線の長さは

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt$$

で与えられる。始点を $t = a$ としてここからパラメータ t までの曲線の長さを s で表わすことにすると、

$$s = \int_a^t \|c'(t)\| dt, \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \|c'(t)\| dt = \|c'(t)\| > 0$$

が成り立つ。最後の不等式は $c'(t) \neq 0$ という仮定からわかる。s は t に関して単調増加になり、逆関数が存在する。つまり、t を s の関数として $t = t(s)$ を考えることもできる。これを元の曲線に代入し $(x(t(s)), y(t(s)))$ とすると、s は曲線のパラメータになる。このパラメータ s を曲線の**弧長パラメータ**と呼ぶ。幾何学的な意味を考えると弧長パラメータ s に関する速度ベクトルは単位ベクトルになることがわかるが、次のように計算して速度の長さが 1 になることを確かめることもできる。

$$\frac{d}{ds}(x(t(s)), y(t(s))) = (x'(t), y'(t))\frac{dt}{ds} = c'(t)\frac{dt}{ds}$$

となり、逆関数の関係から

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\|c'(t)\|}.$$

したがって、

$$\frac{d}{ds}(x(t(s)), y(t(s))) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

となり、弧長パラメータ s に関する速度ベクトルは単位ベクトルになることがわかる。曲線に対して弧長パラメータは平行移動と向きを逆にすることを除けば一意的に定まる。そのため曲線の一般論を展開する際には、弧長パラメータは使い易いパラメータである。そこで、曲線の弧長パラメータ s を使って曲線の曲率を定義し、その基本的性質を調べることにする。曲線の弧長パラメータ s による微分 $\boldsymbol{e}_1 = dc/ds$ の変化を見ることで曲線の曲り方を調べる。$\boldsymbol{e}_1$ は単位ベクトルだから $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 1$ となっている。これを s で微分すると

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{e}_1, \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 \right\rangle = 2\left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle.$$

これより $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交する。$\boldsymbol{e}_1$ と直交するベクトルの変化を調べるには、$\boldsymbol{e}_1$ と直交する単位ベクトルとの内積を考えればよい。$\boldsymbol{e}_1$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位法ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ とする。つまり、

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$

と書くことにすれば

$$\boldsymbol{e}_2 = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right)$$

となる。$\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1$ の大きさを向きを付けて考えることにし、

$$\kappa = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle$$

を曲線の**曲率**と呼ぶ。曲率の定め方から曲線のパラメータの向きを逆にすると、曲率の符号は逆になる。$\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交するので、

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 = \kappa \boldsymbol{e}_2$$

が成り立つ。$\boldsymbol{e}_2$ は単位ベクトルだから $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 1$ となっている。これを s で微分すると

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{e}_2, \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle = 2\left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle.$$

これより $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{e}_2$ に直交する。他方、$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は直交しているので、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0$ が成り立つ。これを s で微分すると

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{e}_1, \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \kappa + \left\langle \boldsymbol{e}_1, \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle.$$

これより

$$\left\langle \boldsymbol{e}_1, \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle = -\kappa$$

となり、$\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{e}_2$ に直交するので、

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 = -\kappa\boldsymbol{e}_1$$

が成り立つ。以上をまとめると次の定理になる。

定理 2.2.1 平面曲線の単位速度ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$ で表わし、$\boldsymbol{e}_1$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位法ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ で表わす。曲率を κ で表わす。$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の弧長パラメータ s に関する微分は次の等式を満たす。

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 = \kappa\boldsymbol{e}_2, \qquad \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 = -\kappa\boldsymbol{e}_1.$$

注意 2.2.2 上の定理の等式を **Frenet の公式**という。3 次元の場合と一緒に Frenet-Serret の公式と呼んでいる本もある。

例 2.2.3 平面曲線のもっとも簡単な例は直線である。直線は定ベクトル $\boldsymbol{p}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ によって

$$c(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}$$

と表わすことができる。

$$\frac{dc(s)}{ds} = \boldsymbol{e}$$

は単位ベクトルなので、s はこの直線の弧長パラメータであることがわかる。さらにこれは一定のベクトルになっているので、s で微分すると 0 になり、曲率も 0 になる。

例 2.2.4 例 2.1.1 と 2.1.7 で扱った円の曲率を求める。円 $S^1(r)$ のパラメータ表示は

$$(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$

によって得られる。

$$\frac{d}{d\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

となるので、弧長パラメータ s は

$$s = \int_0^\theta \|(-r\sin\theta, r\cos\theta)\| d\theta = r\theta.$$

よって、$\theta = s/r$ となり、

$$\left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

が円の弧長パラメータによる表示になる。これを s で微分すると

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right).$$

これを反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位法ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ は

$$\boldsymbol{e}_2 = \left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\right).$$

$\boldsymbol{e}_1$ を s で微分すると

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_2.$$

したがって、曲率は $1/r$ になる。

弧長パラメータは理論的には便利であるが、具体的な曲線の弧長パラメータは求めやすいとは限らない。これは弧長パラメータの定義

$$s = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

は積分で表示されていて被積分関数にルートがあるので、一般には不定積分を初等関数で表現できるとは限らない。そこで、一般のパラメータで表示されている場合の曲率の計算方法も示す。

命題 2.2.5 曲線の弧長パラメータとは限らない一般のパラメータ表示 $(x(t), y(t))$ に対する曲率は次の式で与えられる。

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

特に曲線が関数 $g(x)$ のグラフ $(x, g(x))$ になっている場合、曲率は次の式で与えられる。

$$\kappa(x) = \frac{g''(x)}{(1 + g'(x)^2)^{3/2}}.$$

証明　曲線 $(x(t), y(t))$ の弧長パラメータを s で表わすと、s は t の関数になる。単位速度ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ は

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{d}{ds}(x(t(s)), y(t(s))) = (x'(t), y'(t))\frac{dt}{ds}$$

となる。これをさらに s で微分すると

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 = (x''(t), y''(t))\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + (x'(t), y'(t))\frac{d^2t}{ds^2}.$$

$\boldsymbol{e}_1$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位法ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ は

$$\boldsymbol{e}_2 = (-y'(t), x'(t))\frac{dt}{ds}$$

となるので、曲線の曲率 $\kappa(t)$ は次のように表わすことができる。

$$\kappa(t) = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = (x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))\left(\frac{dt}{ds}\right)^3$$

となり、

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{-3/2}$$

だから、

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

を得る。

曲線が関数 $g(x)$ のグラフ $(x, g(x))$ になっている場合は、$(x, g(x))$ が x をパラメータにした表示になっているので、上の結果より曲率は次の式で与えられる。

$$\kappa(x) = \frac{g''(x)}{(1 + g'(x)^2)^{3/2}}.$$

さらに、パラメータによる表示ではなく、関数によって定められた平面曲線の曲率を求める方法も示す。

定理 2.2.6 反時計回りに $\pi/2$ 回転する線形変換を J で表わす。$\mathbf{R}^2$ の開集合上で定義された関数 $f(x, y)$ と定数 a に対して

$$C = \{(x, y) \mid f(x, y) = a\}$$

上で $df \neq 0$ と仮定する。このとき、曲線 C の曲率は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\kappa &= \pm\frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}[-f_y\ f_x]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -f_y \\ f_x \end{bmatrix} \\ &= \pm\frac{1}{\|\mathrm{grad} f\|^3}\mathrm{Hess}(f)(J\mathrm{grad} f, J\mathrm{grad} f).\end{aligned}$$

符号は曲線の向きのとり方に依存して定まる。

証明 C 上で $df \neq 0$ となっていることから、C 上の各点で $f_x \neq 0$ または $f_y \neq 0$ が成り立つ。$f_y \neq 0$ の場合を考えよう。二変数関数の陰関数定理 (定理 1.3.1) より、

陰関数 $g(x)$ が局所的に存在する。$f(x,g(x))=a$ を満たすので、$(x,g(x))$ は C の局所的なパラメータ表示になる。さらに定理 1.3.1 より

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$$

が成り立つ。これをさらに x で微分すると

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{f_y(x,g(x))^2}[\{f_{xx}(x,g(x)) + f_{xy}(x,g(x))g'(x)\}f_y(x,g(x)) \\ &\quad -f_x(x,g(x))\{f_{yx}(x,g(x)) + f_{yy}(x,g(x))g'(x)\}]. \end{aligned}$$

関数 f とその偏微分の値をとる点はすべて $(x,g(x))$ なので、$(x,g(x))$ を省略して計算する。

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{f_y^2}\{(f_{xx} + f_{xy}g'(x))f_y - f_x(f_{yx} + f_{yy}g'(x))\} \\ &= -\frac{1}{f_y^2}\left\{\left(f_{xx} - f_{xy}\frac{f_x}{f_y}\right)f_y - f_x\left(f_{yx} - f_{yy}\frac{f_x}{f_y}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{f_y^3}\left\{\left(f_{xx}f_y - f_{xy}f_x\right)f_y - f_x\left(f_{yx}f_y - f_{yy}f_x\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{f_y^3}\left(f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{xx}f_y^2\right) \\ &= -\frac{1}{f_y^3}[f_x\ f_y]\begin{bmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & f_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

したがって、命題 2.2.5 より曲率は

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{\left(1+\left(\frac{f_x}{f_y}\right)^2\right)^{3/2} f_y^3}[f_x\ f_y]\begin{bmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & f_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\mathrm{sgn}(f_y)}{(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}[-f_y\ f_x]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -f_y \\ f_x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{sgn}(f_y)$ は f_y の符号であり、$f_y = \mathrm{sgn}(f_y)(f_y^2)^{1/2}$ を上の最後の等式に利用した。したがって、

$$\begin{aligned} \kappa &= \pm\frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}[-f_y\ f_x]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -f_y \\ f_x \end{bmatrix} \\ &= \pm\frac{1}{\|\mathrm{grad} f\|^3}\mathrm{Hess}(f)(J\mathrm{grad} f, J\mathrm{grad} f). \end{aligned}$$

$f_x \neq 0$ の場合も同様に計算できる。

例 2.2.7 例 2.2.4 では円のパラメータ表示を利用して円の曲率を計算した。ここでは例 2.1.1 で扱った

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

による表示

$$S^1(r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = r^2\}$$

から定理 2.2.6 を使って円の曲率を求める。

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2y, \qquad f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = 2$$

より曲率は

$$\kappa = \frac{1}{(4x^2+4y^2)^{3/2}}[-2y\ 2x]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2y \\ 2x \end{bmatrix} = \frac{8x^2+8y^2}{(4x^2+4y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

したがって、$S^1(r)$ の曲率は $1/r$ になる。

例 2.2.8 正の実数 a, b をとり、$\mathbf{R}^2$ 上の関数を

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

によって定める。この関数 $f(x,y)$ によって

$$E = \{(x,y) \mid f(x,y) = 1\}$$

により楕円が定まる。定理 2.2.6 を使って楕円の曲率を求める。

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \qquad f_y = \frac{2y}{b^2}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{a^2}, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

より曲率は

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}}\left[-\frac{2y}{b^2}\ \frac{2x}{a^2}\right]\begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} \end{bmatrix} = \frac{\frac{8x^2}{a^4b^2} + \frac{8y^2}{a^2b^4}}{\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3b^3\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2}\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

例 2.2.9 正の実数 a, b をとり、$\mathbf{R}^2$ 上の関数を

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

によって定める。この関数 $f(x,y)$ によって

$$H = \{(x,y) \mid f(x,y) = 1\}$$

により双曲線が定まる。定理 2.2.6 を使って双曲線の曲率を求める。

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \qquad f_y = -\frac{2y}{b^2}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{a^2}, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = -\frac{2}{b^2}$$

より曲率は

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} \frac{2y}{b^2} & \frac{2x}{a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} \end{bmatrix} = \frac{-\frac{8x^2}{a^4b^2} + \frac{8y^2}{a^2b^4}}{\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = -\frac{ab}{a^3b^3\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = -\frac{ab}{\left(\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2}\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

曲率は曲線の曲り方を表わしている。さらに曲率は曲線の形を決定していることが、次の定理からわかる。

定理 2.2.10 c と $\bar{c}$ を平面曲線とする。これら二曲線の曲率が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動によって c は $\bar{c}$ に重なることである。

証明　c と $\bar{c}$ の曲率を κ と $\bar{\kappa}$ で表わすことにする。

回転と平行移動によって c は $\bar{c}$ に重なると仮定する。回転を回転行列 A で表わし平行移動をベクトル $\boldsymbol{a}$ で表わす。$\mathbf{R}^2$ のベクトルは縦ベクトルで表わし、回転行列は縦ベクトルに左からかけて回転させるものとする。s を c の弧長パラメータとする。$Ac(s) + \boldsymbol{a}$ は $\bar{c}$ に重なり、

$$\frac{d}{ds}(Ac(s) + \boldsymbol{a}) = A\frac{dc(s)}{ds}$$

は単位ベクトルになるので、s は $\bar{c}$ の弧長パラメータにもなる。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{dc(s)}{ds}, \qquad \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{d\bar{c}(s)}{ds}$$

とおくと、上の計算より $\bar{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{e}_1$ が成り立つ。反時計回りに $\pi/2$ 回転する回転行列は

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。回転行列同士は可換になるので、$JA = AJ$ が成り立つ。$\boldsymbol{e}_2 = J\boldsymbol{e}_1$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2 = J\bar{\boldsymbol{e}}_1$ とおくと、

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = J\bar{\boldsymbol{e}}_1 = JA\boldsymbol{e}_1 = AJ\boldsymbol{e}_1 = A\boldsymbol{e}_2.$$

これより

$$\bar{\kappa} = \left\langle \frac{d\bar{\boldsymbol{e}}_1}{ds}, \bar{\boldsymbol{e}}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{dA\boldsymbol{e}_1}{ds}, A\boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle A\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}, A\boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \kappa$$

となり、$\bar{c}$ の曲率 $\bar{\kappa}$ は c の曲率 κ に一致する。

逆に $\bar{\kappa}$ が κ に一致すると仮定する。c と $\bar{c}$ の弧長パラメータの始点はともに 0 になるようにしておく。証明の前半と同様に

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{dc}{ds}, \quad \boldsymbol{e}_2 = J\boldsymbol{e}_1, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{d\bar{c}}{ds}, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_2 = J\bar{\boldsymbol{e}}_1$$

とおく。Frenet の公式 (定理 2.2.1) より

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1 = \kappa\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2 = -\kappa\boldsymbol{e}_1.$$

これを行列でまとめて表現すると次のようになる。

$$\frac{d}{ds}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2] = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}.$$

$[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]$ は回転行列になる。同様に次の等式が成り立つ。

$$\frac{d}{ds}[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2] = [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}.$$

$[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]$ も回転行列になる。行列 X の転置行列を X^* で表わすと、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}([\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2][\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^*) \\
= & \left(\frac{d}{ds}[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\right)[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* + [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\frac{d}{ds}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* \\
= & \left(\frac{d}{ds}[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\right)[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* + [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\left(\frac{d}{ds}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]\right)^* \\
= & [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* + [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\left([\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}\right)^* \\
= & [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* + [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* \\
= & [\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]\left(\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix}\right)[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^* \\
= & 0.
\end{aligned}$$

$[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]$ と $[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2]$ は回転行列だから、$[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2][\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]^*$ も回転行列になり、上の計算より一定の回転行列になる。その一定の回転行列を A で表わすと、$[\bar{\boldsymbol{e}}_1\ \bar{\boldsymbol{e}}_2] = A[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]$ が成り立つ。特に $\bar{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{e}_1$ となり、

$$\bar{c}(s) - \bar{c}(0) = \int_0^s \bar{\boldsymbol{e}}_1 ds = \int_0^s A\boldsymbol{e}_1 ds = A\int_0^s \boldsymbol{e}_1 ds = A(c(s) - c(0)).$$

よって

$$\bar{c}(s) = Ac(s) + \bar{c}(0) - Ac(0)$$

となり、回転と平行移動によって c は $\bar{c}$ に重なることがわかった。

系 2.2.11 平面曲線の曲率が 0 であるための必要十分条件は、直線の一部になることである。平面曲線の曲率が 0 ではない一定値であるための必要十分条件は、円の一部になることである。

証明　例 2.2.3 より直線の曲率は 0 である。曲率が 0 の曲線は定理 2.2.10 より回転と平行移動によって直線の一部に重なるので、この曲線自身が直線の一部になる。

例 2.2.4 より円の曲率は 0 ではない一定値になる。曲率が 0 ではない一定値の曲線は定理 2.2.10 より回転と平行移動によって円の一部に重なるので、この曲線自身が円の一部になる。

定理 2.2.10 は平面曲線は曲率でその形が決まってしまうということを主張している。これをさらに進めて、与えられた関数を曲率として持つ平面曲線がただ一つ存在することもわかる。

定理 2.2.12 (平面曲線の基本定理) 実数の区間で定義された滑らかな関数 κ に対して、s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$ を曲率として持つ平面曲線 $c(s)$ が存在する。さらにこのような平面曲線は回転と平衡移動で重なり合うものを除いて一意的である。

証明　関数 κ の定義域にある a を一つとる。

$$c(s) = \int_a^s \left(\cos\left(\int_a^t \kappa(u)du\right), \sin\left(\int_a^t \kappa(u)du\right)\right) dt$$

によって $c(s)$ を定める。

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \frac{d}{ds}c(s) = \left(\cos\left(\int_a^s \kappa(u)du\right), \sin\left(\int_a^s \kappa(u)du\right)\right)$$

は単位ベクトルになる。$\boldsymbol{e}_1(s)$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転した単位法ベクトル $\boldsymbol{e}_2(s)$ は

$$\boldsymbol{e}_2(s) = \left(-\sin\left(\int_a^s \kappa(u)du\right), \cos\left(\int_a^s \kappa(u)du\right)\right)$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1(s) &= \left(-\sin\left(\int_a^s \kappa(u)du\right), \cos\left(\int_a^s \kappa(u)du\right)\right)\frac{d}{ds}\int_a^s \kappa(u)du \\ &= \kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s). \end{aligned}$$

したがって、$\kappa(s)$ はこの曲線 $c(s)$ の曲率になる。このような曲線の一意性は定理 2.2.10 からわかる。

第3章　曲面

曲線の場合と異なり曲面には弧長パラメータのような曲面固有の標準的なパラメータが存在するかどうか、簡単にはわからない。実は等温座標と呼ばれるパラメータが存在することが知られているが、この結果は幾何学と解析学にかかわる深い結果であるとこの講義の目的とは異なる方向にあるため、等温座標については触れないことにする。

3.1　空間内の曲面の概念

この講義で扱う曲面の定義を述べる前に、曲面として扱いたいものについて考察する。空間内の曲面として扱いたいものは、空間の部分集合であって 2 次元的な広がりを持つものである。空間内の曲面は、座標に関する一つの等式を満たす点の集まりとして定める方法と、二つのパラメータによって曲面を定める方法がある。

まず空間内の座標に関する一つの等式を満たす点の集まりについて考えてみよう。つまり、$\mathbf{R}^3$ の開集合 O 上で定義された関数 $f(x,y,z)$ と定数 a に対して

$$S = \{(x,y,z) \in O \mid f(x,y,z) = a\}$$

について考える。この部分集合を曲面とみて曲り方をとらえるのは、接平面が存在し接平面のベクトルを速度ベクトルに持つ曲線の曲り方を調べることで可能になる。陰関数定理 (定理 1.3.3) の観点から、S の各点で df が 0 にならなければ S はその点の近傍で二変数関数のグラフになり接平面を持つ。そこで、任意の $(x,y,z) \in S$ に対して $df_{(x,y,z)} \neq 0$ となるときに、S を曲面として定義したい。接平面については次のように求めることができる。$df_{(x,y,z)} \neq 0$ ならば、f のある偏微分係数は 0 にならない。たとえば $f_z \neq 0$ とすると、定理 1.3.3 よりある二変数関数 $g(x,y)$ が存在し、S は局所的には

$$\{(x,y,g(x,y)) \mid (x,y) \in D\} \qquad (D \text{ は } g(x,y) \text{ の定義域})$$

と表現できる。つまり、これは $g(x,y)$ のグラフである。さらに、線形写像

$$dg_{(x,y)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

のグラフを $(x,y,g(x,y))$ を通るように平行移動した平面が接平面になる。

例 3.1.1 正の実数 r に対して、空間の原点からの距離が r になる点の全体は曲面になる。

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$$

とおく。問題の点の全体は

$$S^2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = r^2\}$$

になる。

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

となり $S^2(r)$ の点では $df \neq 0$ となることがわかる。これより $S^2(r)$ は曲面になる。よく知られているようにこれは**球面**である。

例 3.1.2 $g(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の開集合 O で定義された関数とし、

$$S = \{(x,y,g(x,y)) \mid (x,y) \in O\}$$

によって $g(x,y)$ の**グラフ**を定める。

$$f(x,y,z) = g(x,y) - z \qquad ((x,y,z) \in O \times \mathbf{R})$$

とおくと、

$$S = \{(x,y,z) \in O \times \mathbf{R} \mid f(x,y,z) = 0\}$$

が成り立つ。

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = g_x dx + g_y dy - dz$$

となり、$O \times \mathbf{R}$ のすべての点で $df \neq 0$ となることがわかる。これより S は曲面になる。

例 3.1.3 正の定数 a, b に対して、二変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

によって定める。$g(x,y)$ のグラフ

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

は曲面になる。この曲面を**楕円放物面**と呼ぶ。xy 平面と平行な平面による切り口は楕円になり、z 軸と平行な直線を含む平面による切り口は放物線になる。

例 3.1.4 正の定数 a, b に対して、二変数関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

によって定める。$g(x, y)$ のグラフ

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

は曲面になる。この曲面を**双曲放物面**と呼ぶ。xy 平面と平行な平面による切り口は双曲線になり、z 軸と平行な直線を含む平面による切り口は放物線になる。

例 3.1.1 の球面は全体を一つの関数のグラフで表わすことができない。次の例も全体を一つの関数のグラフで表わすことができない例である。

例 3.1.5 正の定数 a, b, c に対して

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

とおく。

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = 1\}$$

とする。

$$df = \frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz$$

となり、E の点では $df \neq 0$ となることがわかる。これより E は曲面になる。これを**楕円面**と呼ぶ。

例 3.1.6 正の定数 a, b, c に対して

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

とおく。

$$\begin{aligned} HI &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = 1\}, \\ HII &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = -1\} \end{aligned}$$

とする。

$$df = \frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy - \frac{2z}{c^2}dz$$

となり、HI と HII の点では $df \neq 0$ となることがわかる。これより HI と HII は曲面になる。HI を**一葉双曲面**と呼び、HII を**二葉双曲面**と呼ぶ。一葉双曲面は連結になっていることがわかる。二葉双曲面は定義式より

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

となるので、$z \leq -c$ または $c \leq z$ が成り立つ。さらに、これによって二つの連結成分に分れることがわかる。

　次に二つのパラメータによって曲面を定める方法について考えてみよう。つまり、$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上で定義され $\mathbf{R}^3$ に値を持つ写像 $p : U \to \mathbf{R}^3$ について考える。この場合も曲り方をとらえるには、接平面があり接平面の各ベクトルに接する曲線の曲率を調べることで可能になる。U の元 (u, v) に対して

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u}(u, v), \qquad p_v = \frac{\partial p}{\partial v}(u, v)$$

が線形独立ならば、p_u, p_v の張る平面によって接平面を定めることができる。そこで、任意の $(u, v) \in U$ に対して p_u, p_v が線形独立になるときに、$p : U \to \mathbf{R}^3$ を曲面のパラメータ表示として定義したい。先に考察した曲面の概念は $\mathbf{R}^3$ の開集合 O 上で定義された関数 $f(x, y, z)$ と定数 a によって

$$S = \{(x, y, z) \in O \mid f(x, y, z) = a\}$$

と記述され、任意の $(x, y, z) \in S$ に対して $df_{(x,y,z)} \neq 0$ となるものである。陰関数定理より S を像にするパラメータ表示が存在する。これは次のようにわかる。$df_{(x,y,z)} \neq 0$ より、$f_x(x, y, z) \neq 0$, $f_y(x, y, z) \neq 0$ または $f_z(x, y, z) \neq 0$ である。どれも座標をとりかえれば同じことになるので、$f_z(x, y, z) \neq 0$ の場合を考えることにする。陰関数定理より局所的にある関数 $g(x, y)$ が存在し、

$$f(x, y, g(x, y)) = a$$

が成り立つ。つまり、S は局所的には $g(xy)$ のグラフになっている。

$$p(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

とおくと、

$$p_u(u, v) = (1, 0, g_u(u, v)), \qquad p_v(u, v) = (0, 1, g_v(u, v))$$

となるので、$p_u(u, v), p_v(u, v)$ は線形独立になる。したがって、$p(u, v)$ は S のパラメータ表示になる。

　ただし、陰関数定理は存在定理であって陰関数の具体的な表示を示すわけではないので、曲面のパラメータ表示を具体的に得られるかどうかは、個々の場合に依存する。先に例で挙げた曲面のパラメータ表示を求めておこう。

例 3.1.7 例 3.1.2 のグラフ

$$S = \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in O\}$$

に対して

$$p(x, y) = (x, y, g(x, y)) \qquad ((x, y) \in O)$$

とおくと、$p : O \to \mathbf{R}^3$ は S のパラメータ表示になる。これは上で陰関数定理を適用したところで示した。

例 3.1.8 例 3.1.5 の楕円面

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

のパラメータ表示は

$$p(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right)$$

によって得られることが以下の計算からわかる。

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 \cos^2 u \cos^2 v}{a^2} + \frac{b^2 \cos^2 u \sin^2 v}{b^2} + \frac{c^2 \sin^2 u}{c^2} \\ = \;& \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u = 1 \end{aligned}$$

より、p の像は E に含まれる。さらに、p の像は $(0, 0, \pm c)$ 以外の E の点を覆っていることもわかる。$p(u, v)$ を u, v で偏微分すると

$$\begin{aligned} p_u &= (-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u), \\ p_v &= (-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

となる。これらが線形独立になることを示す。第1列と第2列に注目して行列式を計算すると

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -a \sin u \cos v & -b \sin u \sin v \\ -a \cos u \sin v & b \cos u \cos v \end{vmatrix} \\ = \;& -ab \cos u \sin u \cos^2 v - ab \cos u \sin u \sin^2 v \\ = \;& -ab \cos u \sin u. \end{aligned}$$

これは $u \neq 0$ ならば 0 ではないので、$u \neq 0$ のとき p_u, p_v は線形独立になる。$u = 0$ のときは、

$$p_u = (0, 0, c), \qquad p_v = (-a \sin v, b \cos v, 0)$$

となり、この場合も p_u, p_v は線形独立になる。いずれにしても p_u, p_v は線形独立になり、$p(u, v)$ はパラメータ表示になる。

例 3.1.9 例 3.1.6 の一葉双曲面

$$HI = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

のパラメータ表示は

$$p(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$$

によって得られることが以下の計算からわかる。

$$\begin{aligned}&\frac{a^2\cosh^2 u\cos^2 v}{a^2}+\frac{b^2\cosh^2 u\sin^2 v}{b^2}-\frac{c^2\sinh^2 u}{c^2}\\ =\ &\cosh^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)-\sinh^2 u=1\end{aligned}$$

より、p の像は HI に含まれる。さらに、p の像は HI 全体を覆っていることもわかる。$p(u,v)$ を u,v で偏微分すると

$$\begin{aligned}p_u &= (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u),\\ p_v &= (-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, 0)\end{aligned}$$

となる。これらが線形独立になることを示す。第1列と第2列に注目して行列式を計算すると

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a\sinh u\cos v & b\sinh u\sin v\\ -a\cosh u\sin v & b\cosh u\cos v\end{vmatrix}\\ =\ &ab\cosh u\sinh u\cos^2 v+ab\cosh u\sinh u\sin^2 v\\ =\ &ab\cosh u\sinh u.\end{aligned}$$

これは $u\neq 0$ ならば 0 ではないので、$u\neq 0$ のとき p_u,p_v は線形独立になる。$u=0$ のときは、

$$p_u=(0,0,c),\qquad p_v=(-a\sin v, b\cos v, 0)$$

となり、この場合も p_u,p_v は線形独立になる。いずれにしても p_u,p_v は線形独立になり、$p(u,v)$ はパラメータ表示になる。

例 3.1.6 の二葉双曲面

$$HII=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$$

のパラメータ表示は

$$p_\pm(u,v)=(a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, \pm c\cosh u)\qquad (u\neq 0)$$

によって得られることが以下の計算からわかる。

$$\begin{aligned}&\frac{a^2\sinh^2 u\cos^2 v}{a^2}+\frac{b^2\sinh^2 u\sin^2 v}{b^2}-\frac{c^2\cosh^2 u}{c^2}\\ =\ &\sinh^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)-\cosh^2 u=-1\end{aligned}$$

より、$p_\pm$ の像は HII に含まれる。さらに、p_+ の像は HII の上半分の $(0,0,c)$ 以外の全体を覆い、p_- の像は HII の下半分の $(0,0,-c)$ 以外の全体を覆うこともわかる。$p_\pm(u,v)$ を u,v で偏微分すると

$$\begin{aligned}(p_\pm)_u &= (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, \pm c\sinh u),\\ (p_\pm)_v &= (-a\sinh u\sin v, b\sinh u\cos v, 0)\end{aligned}$$

となる。これらが線形独立になることを示す。第1列と第2列に注目して行列式を計算すると

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a\cosh u\cos v & b\cosh u\sin v \\ -a\sinh u\sin v & b\sinh u\cos v \end{vmatrix} \\
= \;& ab\cosh u\sinh u\cos^2 v + ab\cosh u\sinh u\sin^2 v \\
= \;& ab\cosh u\sinh u.
\end{aligned}$$

これは $u \neq 0$ だから 0 ではないので、$(p_\pm)_u, (p_\pm)_v$ は線形独立になり、$p_\pm(u,v)$ はパラメータ表示になる。

上の二葉双曲面のパラメータ表示は上半分の $(0,0,c)$ と下半分の $(0,0,-c)$ を除外している。次のように考えれば除外点はなくなる。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

より

$$z = \pm\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 + c^2}$$

となる。そこで、

$$g_\pm(x,y) = \pm\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 + c^2}$$

によって二変数関数 $g_\pm(x,y)$ を定める。すると、$g_+(x,y)$ のグラフが二葉双曲面の上半分になり、$g_-(x,y)$ のグラフが二葉双曲面の上下半分になる。

3.2　曲面の曲率

曲面のパラメータによる表示を利用して曲面の種々の曲率を定義しその基本的性質を調べる。

空間内の曲面のパラメータ表示が

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

によって与えられているとする。すると各点で

$$\begin{aligned}
p_u(u,v) &= (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)), \\
p_v(u,v) &= (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))
\end{aligned}$$

は線形独立になる。p_u, p_v の張る平面がこの曲面の接平面になる。さらにこれらのベクトル積 $p_u \times p_v$ は p_u と p_v に直交するので、接平面に直交することになる。す

なわち、$p_u \times p_v$ は曲面の法ベクトルになる。これを自分自身の長さで割れば、単位法ベクトル

$$\boldsymbol{e} = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$$

を定めることができる。パラメータ (u_0, v_0) に対応する曲面の点 $p(u_0, v_0)$ における曲面の形状を調べるために関数

$$f(u, v) = \langle \boldsymbol{e}(u_0, v_0), p(u, v) \rangle$$

について考える。$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}(u_0, v_0)$ と表わすと、

$$f(u, v) = \langle \boldsymbol{e}_0, p(u, v) \rangle$$

となる。これを u, v で偏微分すると

$$f_u = \langle \boldsymbol{e}_0, p_u \rangle, \qquad f_v = \langle \boldsymbol{e}_0, p_v \rangle.$$

特に

$$\begin{aligned} f_u(u_0, v_0) &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_u(u_0, v_0) \rangle, \\ f_v(u_0, v_0) &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_v(u_0, v_0) \rangle. \end{aligned}$$

したがって、

$$df_{(u_0,v_0)} = f_u(u_0, v_0)du + f_v(u_0, v_0)dv = 0.$$

さらに $\mathrm{Hess}(f)_{(u_0,v_0)}$ を求めることで $p(u_0, v_0)$ における曲面の形状をおおよそ知ることできる。

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uu} \rangle, & f_{uv} &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uv} \rangle, \\ f_{vu} &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_{vu} \rangle, & f_{vv} &= \langle \boldsymbol{e}_0, p_{vv} \rangle \end{aligned}$$

より

$$\mathrm{Hess}(f)_{(u_0,v_0)} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uu} \rangle & \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uv} \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_0, p_{vu} \rangle & \langle \boldsymbol{e}_0, p_{vv} \rangle \end{bmatrix}.$$

曲面の接ベクトルの内積は

$$\begin{aligned} & \langle \xi p_u + \eta p_v, \xi_1 p_u + \eta_1 p_v \rangle \\ = \ & \xi\xi_1 \langle p_u, p_u \rangle + \xi\eta_1 \langle p_u, p_v \rangle + \eta\xi_1 \langle p_v, p_u \rangle + \eta\eta_1 \langle p_v, p_v \rangle \\ = \ & [\xi \ \eta] \begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。上の内積の係数行列を

$$P = \begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix}$$

とおくと、P は正定値対称行列になる。定理 1.4.1 を利用するとある正定値対称行列 R が存在し

$$P = R^2, \qquad PR = RP$$

が成り立つことがわかる。二次の列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、

$$(R^{-1}\boldsymbol{x})^* PR^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*(R^{-1})^* PR^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^* R^{-1} PR^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^* PR^{-2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$$

が成り立つので、線形写像 $\boldsymbol{x} \mapsto R^{-1}\boldsymbol{x}$ は標準的な内積を持つ $\mathbf{R}^2$ から、曲面の接平面の基底 p_u, p_v の係数を対応させると内積を保つことになる。したがって、

$$(R^{-1})^* \mathrm{Hess}(f) R^{-1} = R^{-1} \mathrm{Hess}(f) R^{-1}$$

が曲面の形状を表わしていることになる。系 1.4.2 とその後に書いたことから、上の行列の固有値から曲面のおおよその形がわかる。$R^{-1}\mathrm{Hess}(f)R^{-1}$ の固有値を κ_1, κ_2 で表わし、曲面の**主曲率**と呼ぶ。さらに、

$$K = \kappa_1\kappa_2, \qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

とおいて、K と H を曲面の **Gauss 曲率**と**平均曲率**と呼ぶ。これらの曲率の定義の元になっているのは行列 $R^{-1}\mathrm{Hess}(f)R^{-1}$ である。R の成分は明らかにしていないので、これらの曲率を求めるのは一見すると困難なように思われるが、K と H は以下に示すようにパラメータ表示 p を利用して計算できる。

命題 3.2.1 パラメータ表示 p を持つ曲面の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\langle \boldsymbol{e}_0, p_{uu}\rangle\langle \boldsymbol{e}_0, p_{vv}\rangle - \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uv}\rangle^2}{\langle p_u, p_u\rangle\langle p_v, p_v\rangle - \langle p_u, p_v\rangle^2}, \\
H &= \frac{\langle p_u, p_u\rangle\langle \boldsymbol{e}_0, p_{vv}\rangle - 2\langle p_u, p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0, p_{uv}\rangle + \langle p_v, p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0, p_{uu}\rangle}{2(\langle p_u, p_u\rangle\langle p_v, p_v\rangle - \langle p_u, p_v\rangle^2)}.
\end{aligned}$$

証明　Gauss 曲率 K と平均曲率 H の定義より

$$\begin{aligned}
K &= \kappa_1\kappa_2 = \det(R^{-1}\mathrm{Hess}(f)R^{-1}) = \det(R^{-1})\det(\mathrm{Hess}(f))\det(R^{-1}) \\
&= \det(R^{-2})\det(\mathrm{Hess}(f)) = \det(P)^{-1}\det(\mathrm{Hess}(f)) \\
&= \frac{\langle \boldsymbol{e}_0, p_{uu}\rangle\langle \boldsymbol{e}_0, p_{vv}\rangle - \langle \boldsymbol{e}_0, p_{uv}\rangle^2}{\langle p_u, p_u\rangle\langle p_v, p_v\rangle - \langle p_u, p_v\rangle^2}, \\
H &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(R^{-1}\mathrm{Hess}(f)R^{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(R^{-2}\mathrm{Hess}(f)) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P^{-1}\mathrm{Hess}(f)).
\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& P^{-1}\mathrm{Hess}(f) \\
= \ & \frac{1}{\langle p_u,p_u\rangle\langle p_v,p_v\rangle-\langle p_u,p_v\rangle^2}\begin{bmatrix} \langle p_v,p_v\rangle & -\langle p_u,p_v\rangle \\ -\langle p_v,p_u\rangle & \langle p_u,p_u\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_0,p_{uu}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_0,p_{uv}\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_0,p_{vu}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_0,p_{vv}\rangle \end{bmatrix} \\
= \ & \frac{1}{\langle p_u,p_u\rangle\langle p_v,p_v\rangle-\langle p_u,p_v\rangle^2}\cdot \\
& \begin{bmatrix} \langle p_v,p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{uu}\rangle-\langle p_u,p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{vu}\rangle & * \\ * & -\langle p_v,p_u\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{uv}\rangle+\langle p_u,p_u\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{vv}\rangle \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$H=\frac{\langle p_u,p_u\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{vv}\rangle-2\langle p_u,p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{uv}\rangle+\langle p_v,p_v\rangle\langle \boldsymbol{e}_0,p_{uu}\rangle}{2(\langle p_u,p_u\rangle\langle p_v,p_v\rangle-\langle p_u,p_v\rangle^2)}.$$

命題 3.2.2 曲面が関数 $g(x,y)$ のグラフ $(x,y,g(x,y))$ になっている場合の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は次の式で与えられる。

$$K=\frac{g_{xx}g_{yy}-g_{xy}^2}{(1+g_x^2+g_y^2)^2},\qquad H=\frac{g_{xx}(1+g_y^2)-2g_xg_yg_{xy}+g_{yy}(1+g_x^2)}{2(1+g_x^2+g_y^2)^{3/2}}$$

証明 関数 $g(x,y)$ のグラフ $(x,y,g(x,y))$ のパラメータ表示は

$$p(x,y)=(x,y,g(x,y))$$

となる。

$$p_x=(1,0,g_x),\qquad p_y=(0,1,g_y)$$

より

$$p_x\times p_y=(-g_x,-g_y,1)$$

が成り立つ。これより

$$\|p_x\times p_y\|=\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}$$

となり

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}(-g_x,-g_y,1)$$

は単位法ベクトルになる。

$$
\begin{aligned}
&\langle g_x,g_x\rangle=1+g_x^2, && \langle g_y,g_y\rangle=1+g_y^2, && \langle g_x,g_y\rangle=g_xg_y, \\
&p_{xx}=(0,0,g_{xx}), && p_{yy}=(0,0,g_{yy}), && p_{xy}=(0,0,g_{xy}), \\
&\langle \boldsymbol{e}_0,p_{xx}\rangle=\tfrac{g_{xx}}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}, && \langle \boldsymbol{e}_0,p_{yy}\rangle=\tfrac{g_{yy}}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}, && \langle \boldsymbol{e}_0,p_{xy}\rangle=\tfrac{g_{xy}}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}
\end{aligned}
$$

を命題3.2.1で得た等式に代入する。

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{g_{xx}g_{yy}-g_{xy}^2}{1+g_x^2+g_y^2}\cdot\frac{1}{(1+g_x^2)(1+g_y^2)-g_x^2g_y^2}=\frac{g_{xx}g_{yy}-g_{xy}^2}{(1+g_x^2+g_y^2)^2},\\
H &= \frac{g_{xx}(1+g_y^2)-2g_xg_yg_{xy}+g_{yy}(1+g_x^2)}{2(1+g_x^2+g_y^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1+g_x^2)(1+g_y^2)-g_x^2g_y^2}\\
&= \frac{g_{xx}(1+g_y^2)-2g_xg_yg_{xy}+g_{yy}(1+g_x^2)}{2(1+g_x^2+g_y^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

定理 3.2.3 $\mathbf{R}^3$ の開集合上で定義された関数 $f(x,y,z)$ と定数 a に対して

$$
S=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=a\}
$$

上で $df\neq 0$ と仮定する。このとき、曲面 S の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は次の式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^2}\times\\
&\quad\{(f_{yy}f_{zz}-f_{yz}^2)f_x^2+(f_{xx}f_{zz}-f_{xz}^2)f_y^2+(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)f_z^2\\
&\quad+2(f_{xz}f_{yz}-f_{xy}f_{zz})f_xf_y+2(f_{xy}f_{xz}-f_{yz}f_{xx})f_yf_z\\
&\quad+2(f_{xy}f_{yz}-f_{xz}f_{yy})f_zf_x\},\\
H &= \pm\frac{1}{2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}}\times\\
&\quad\{(f_{xx}+f_{yy})f_z^2+(f_{yy}+f_{zz})f_x^2+(f_{zz}+f_{xx})f_y^2\\
&\quad-2(f_{xy}f_xf_y+f_{yz}f_yf_z+f_{zx}f_zf_x)\}
\end{aligned}
$$

符号は曲面の単位法ベクトルのとり方に依存して定まる。

証明　S 上で $df\neq 0$ となっていることから、S 上の各点で $f_x\neq 0$ または $f_y\neq 0$ または $f_z\neq 0$ が成り立つ。$f_z\neq 0$ の場合を考えよう。三変数関数の陰関数定理 (定理 1.3.3) より、陰関数 $g(x,y)$ が局所的に存在する。$f(x,y,g(x,y))=a$ を満たすので、$(x,y,g(x,y))$ は S の局所的なパラメータ表示になる。さらに定理 1.3.3 より

$$
g_x(x,y)=-\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))},\quad g_y(x,y)=-\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}
$$

が成り立つ。$g_x(x,y)$ をさらに x で偏微分する。

$$
\begin{aligned}
&g_{xx}(x,y)\\
=&-\frac{1}{f_z(x,y,g(x,y))^2}\times\\
&[\{f_{xx}(x,y,g(x,y))+f_{xz}(x,y,g(x,y))g_x(x,y)\}f_z(x,y,g(x,y))\\
&-f_x(x,y,g(x,y))\{f_{zx}(x,y,g(x,y))+f_{zz}(x,y,g(x,y))g_x(x,y)\}].
\end{aligned}
$$

関数 f とその偏微分の値をとる点はすべて $(x,y,g(x,y))$ なので、$(x,y,g(x,y))$ を省略して計算する。

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= -\frac{1}{f_z^2}(f_{xx}f_z + f_{xz}f_z g_x - f_x f_{zx} - f_x f_{zz} g_x) \\
&= -\frac{1}{f_z^2}\left(f_{xx}f_z - f_{xz}f_z \cdot \frac{f_x}{f_z} - f_x f_{zx} + f_x f_{zz} \cdot \frac{f_x}{f_z}\right) \\
&= -\frac{1}{f_z^3}(f_{xx}f_z^2 - 2f_{xz}f_x f_z + f_{zz}f_x^2).
\end{aligned}$$

$g_x(x,y)$ をさらに y で偏微分する。

$$\begin{aligned}
&g_{xy}(x,y) \\
= \ &-\frac{1}{f_z(x,y,g(x,y))^2} \times \\
&[\{f_{xy}(x,y,g(x,y)) + f_{xz}(x,y,g(x,y))g_y(x,y)\}f_z(x,y,g(x,y)) \\
&-f_x(x,y,g(x,y))\{f_{zy}(x,y,g(x,y)) + f_{zz}(x,y,g(x,y))g_y(x,y)\}].
\end{aligned}$$

関数 f とその偏微分の値をとる点はすべて $(x,y,g(x,y))$ なので、$(x,y,g(x,y))$ を省略して計算する。

$$\begin{aligned}
g_{xy} &= -\frac{1}{f_z^2}(f_{xy}f_z + f_{xz}g_y f_z - f_x f_{zy} - f_x f_{zz} g_y) \\
&= -\frac{1}{f_z^2}\left(f_{xy}f_z - f_{xz} \cdot \frac{f_y}{f_z} \cdot f_z - f_x f_{zy} + f_x f_{zz} \cdot \frac{f_y}{f_z}\right) \\
&= -\frac{1}{f_z^3}(f_{xy}f_z^2 - f_{xz}f_y f_z - f_{yz}f_x f_z + f_{zz}f_x f_y).
\end{aligned}$$

$g_y(x,y)$ をさらに y で偏微分する。

$$\begin{aligned}
g_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{f_z(x,y,g(x,y))^2} \times \\
&\quad [f_{yy}(x,y,g(x,y)) + f_{yz}(x,y,g(x,y))g_y(x,y)\}f_z(x,y,g(x,y)) \\
&\quad -f_y(x,y,g(x,y))\{f_{zy}(x,y,g(x,y)) + f_{zz}(x,y,g(x,y))g_y(x,y)\}].
\end{aligned}$$

関数 f とその偏微分の値をとる点はすべて $(x,y,g(x,y))$ なので、$(x,y,g(x,y))$ を省略して計算する。

$$\begin{aligned}
g_{yy} &= -\frac{1}{f_z^2}(f_{yy}f_z + f_{yz}f_z g_y - f_y f_{zy} - f_y f_{zz} g_y) \\
&= -\frac{1}{f_z^2}\left(f_{yy}f_z - f_{yz}f_z \cdot \frac{f_y}{f_z} - f_y f_{zy} + f_y f_{zz} \cdot \frac{f_y}{f_z}\right) \\
&= -\frac{1}{f_z^3}(f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_y f_z + f_{zz}f_y^2).
\end{aligned}$$

以上より Gauss 曲率は

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{f_z^6\left\{1+\left(\frac{f_x}{f_z}\right)^2+\left(\frac{f_y}{f_z}\right)^2\right\}^2}\times \\
&\quad \{(f_{xx}f_z^2-2f_{xz}f_xf_z+f_{zz}f_x^2)(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2) \\
&\quad -(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{yz}f_xf_z+f_{zz}f_xf_y)^2\} \\
&= \frac{1}{f_z^2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^2}\times \\
&\quad \{(f_{xx}f_{yy}f_z^4-2f_{xz}f_{yy}f_xf_z^3-2f_{yz}f_{xx}f_yf_z^3 \\
&\quad +f_{yy}f_{zz}f_x^2f_z^2+4f_{xz}f_{yz}f_xf_yf_z^2+f_{xx}f_{zz}f_y^2f_z^2 \\
&\quad -2f_{yz}f_{zz}f_x^2f_yf_z-2f_{xz}f_{zz}f_xf_y^2f_z+f_{zz}^2f_x^2f_y^2) \\
&\quad -(f_{xy}^2f_z^4-2f_{xy}f_{xz}f_yf_z^3-2f_{xy}f_{yz}f_xf_z^3 \\
&\quad +f_{xz}^2f_y^2f_z^2+f_{yz}^2f_x^2f_z^2+2f_{xy}f_{zz}f_xf_yf_z^2+2f_{xz}f_{yz}f_xf_yf_z^2 \\
&\quad -2f_{xz}f_{zz}f_xf_y^2f_z-2f_{yz}f_{zz}f_x^2f_yf_z+f_{zz}^2f_x^2f_y^2)\} \\
&= \frac{1}{f_z^2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^2}\times \\
&\quad \{f_{xx}f_{yy}f_z^4-f_{xy}^2f_z^4 \\
&\quad -2f_{xz}f_{yy}f_xf_z^3-2f_{yz}f_{xx}f_yf_z^3+2f_{xy}f_{xz}f_yf_z^3+2f_{xy}f_{yz}f_xf_z^3 \\
&\quad +f_{yy}f_{zz}f_x^2f_z^2+2f_{xz}f_{yz}f_xf_yf_z^2+f_{xx}f_{zz}f_y^2f_z^2 \\
&\quad -f_{xz}^2f_y^2f_z^2-f_{yz}^2f_x^2f_z^2-2f_{xy}f_{zz}f_xf_yf_z^2\} \\
&= \frac{1}{(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^2}\times \\
&\quad \{f_{xx}f_{yy}f_z^2-f_{xy}^2f_z^2 \\
&\quad -2f_{xz}f_{yy}f_xf_z-2f_{yz}f_{xx}f_yf_z+2f_{xy}f_{xz}f_yf_z+2f_{xy}f_{yz}f_xf_z \\
&\quad +f_{yy}f_{zz}f_x^2+2f_{xz}f_{yz}f_xf_y+f_{xx}f_{zz}f_y^2 \\
&\quad -f_{xz}^2f_y^2-f_{yz}^2f_x^2-2f_{xy}f_{zz}f_xf_y\} \\
&= \frac{1}{(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^2}\times \\
&\quad \{(f_{yy}f_{zz}-f_{yz}^2)f_x^2+(f_{xx}f_{zz}-f_{xz}^2)f_y^2+(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)f_z^2 \\
&\quad +2(f_{xz}f_{yz}-f_{xy}f_{zz})f_xf_y+2(f_{xy}f_{xz}-f_{yz}f_{xx})f_yf_z \\
&\quad +2(f_{xy}f_{yz}-f_{xz}f_{yy})f_zf_x\}.
\end{aligned}$$

平均曲率は

$$H = \frac{1}{2f_z^5\left\{1+\left(\frac{f_x}{f_z}\right)^2+\left(\frac{f_y}{f_z}\right)^2\right\}^{3/2}}\times$$

$$
\begin{aligned}
& \{-(f_{xx}f_x^2 - 2f_{xz}f_xf_z + f_{zz}f_x^2)(f_z^2+f_y^2) \\
& +2f_xf_y(f_{xy}f_z^2 - f_{xz}f_yf_z - f_{yz}f_xf_z + f_{zz}f_xf_y) \\
& -(f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_yf_z + f_{zz}f_y^2)(f_z^2+f_x^2)\} \\
= & \frac{1}{2\mathrm{sgn}(f_z)f_z^2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}} \times \\
& \{-(f_{xx}f_z^4 - 2f_{xz}f_xf_z^3 + f_{zz}f_x^2f_z^2 + f_{xx}f_z^2f_y^2 - 2f_{xz}f_xf_zf_y^2 + f_{zz}f_x^2f_y^2) \\
& +2f_{xy}f_xf_yf_z^2 - 2f_{xz}f_xf_y^2f_z - 2f_{yz}f_x^2f_yf_z + 2f_{zz}f_x^2f_y^2 \\
& -(f_{yy}f_z^4 - 2f_{yz}f_yf_z^3 + f_{zz}f_y^2f_z^2 + f_{yy}f_z^2f_x^2 - 2f_{yz}f_yf_zf_x^2 + f_{zz}f_y^2f_x^2)\} \\
= & \frac{1}{2\mathrm{sgn}(f_z)f_z^2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}} \times \\
& \{-(f_{xx}+f_{yy})f_z^4 + 2(f_{xz}f_x + f_{yz}f_y)f_z^3 \\
& +(-f_{zz}f_x^2 - f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{zz}f_y^2 - f_{yy}f_x^2)f_z^2\} \\
= & \frac{1}{2\mathrm{sgn}(f_z)f_z^2(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}} \times \\
& \{-(f_{xx}+f_{yy})f_z^2 + 2(f_{xz}f_x + f_{yz}f_y)f_z \\
& -f_{zz}f_x^2 - f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{zz}f_y^2 - f_{yy}f_x^2\} \\
= & \frac{-1}{2\mathrm{sgn}(f_z)(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}} \times \\
& \{(f_{xx}+f_{yy})f_z^2 + (f_{yy}+f_{zz})f_x^2 + (f_{zz}+f_{xx})f_y^2 \\
& -2(f_{xy}f_xf_y + f_{yz}f_yf_z + f_{zx}f_zf_x)\}.
\end{aligned}
$$

$f_z \neq 0$ や $f_y \neq 0$ の場合も同様に計算できる。

例 3.2.4 例 3.1.1 で扱った

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$$

による表示

$$S^2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = r^2\}$$

から定理 3.2.3 を使って球面の Gauss 曲率と平均曲率を求める。

$$
\begin{aligned}
& f_x = 2x, \qquad f_y = 2y, \qquad f_z = 2z, \\
& f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = f_{yz} = f_{zy} = f_{zx} = f_{xz} = 0
\end{aligned}
$$

より Gauss 曲率 K と平均曲率 H は

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{(4x^2+4y^2+4z^2)^2}\{4(2x)^2+4(2y)^2+4(2z)^2\} = \frac{16(x^2+y^2+z^2)}{16(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2(4x^2+4y^2+4z^2)^{3/2}}\{4(2x)^2+4(2y)^2+4(2z)^2\} = \frac{16(x^2+y^2+z^2)}{16(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}.
\end{aligned}
$$

例 3.2.5 xy 平面の曲線を z 軸の方向にそのまま延ばした曲面を**柱面**と呼ぶ。xy 平面の曲線 $f(x,y)=a$ を z 軸の方向にそのまま延ばした曲面も同じ定義式 $f(x,y)=a$ で表わすことができる。定理 3.2.3 を使ってこの柱面の Gauss 曲率と平均曲率を求める。$f_z=0$ より $K=0$ が成り立つ。さらに

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}\{f_{yy}f_x^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{xx}f_y^2\} \\
&= \frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}[-f_y\ f_x]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -f_y \\ f_x\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、H は平面曲線 $f(x,y)=a$ の曲率の $1/2$ になる。

例 3.2.6 正の定数 a,b,c に対して例 3.1.5 で扱った

$$
f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \qquad ((x,y,z)\in \mathbf{R}^3)
$$

による表示

$$
E = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z)=1\}
$$

から定理 3.2.3 を使って楕円面の Gauss 曲率と平均曲率を求める。

$$
\begin{aligned}
&f_x = \frac{2x}{a^2}, \qquad f_y = \frac{2y}{b^2}, \qquad f_z = \frac{2z}{c^2}, \\
&f_{xx} = \frac{2}{a^2}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{b^2}, \qquad f_{zz} = \frac{2}{c^2}, \\
&f_{xy} = f_{yx} = f_{yz} = f_{zy} = f_{zx} = f_{xz} = 0
\end{aligned}
$$

より Gauss 曲率 K と平均曲率 H は

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}\right)^2}\left\{\frac{4}{b^2c^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4}{c^2a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4}{a^2b^2}\cdot\frac{4z^2}{c^4}\right\} \\
&= \frac{16\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}{16a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2} = \frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}, \\
H &= \frac{1}{2\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \times \\
&\quad \left\{\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)\frac{4z^2}{c^4}+\left(\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\frac{4x^2}{a^4}+\left(\frac{2}{c^2}+\frac{2}{a^2}\right)\frac{4y^2}{b^4}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8\left((a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}+(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(c^2+a^2)\frac{y^2}{b^2}\right)}{16a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

例 3.2.7 正の定数 a, b, c に対して例 3.1.6 で扱った

$$
f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \qquad ((x,y,z)\in\mathbf{R}^3)
$$

による表示

$$
\begin{aligned}
HI &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z)=1\}, \\
HII &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z)=-1\}
\end{aligned}
$$

から定理 3.2.3 を使って一葉双曲面と二葉双曲面の Gauss 曲率と平均曲率を求める。以下の計算では一葉双曲面の場合に $\epsilon = 1$ とし、二葉双曲面の場合に $\epsilon = -1$ とする。

$$
\begin{gathered}
f_x=\frac{2x}{a^2}, \qquad f_y=\frac{2y}{b^2}, \qquad f_z=-\frac{2z}{c^2}, \\
f_{xx}=\frac{2}{a^2}, \qquad f_{yy}=\frac{2}{b^2}, \qquad f_{zz}=-\frac{2}{c^2}, \\
f_{xy}=f_{yx}=f_{yz}=f_{zy}=f_{zx}=f_{xz}=0
\end{gathered}
$$

より Gauss 曲率 K と平均曲率 H は

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}\right)^2}\left\{-\frac{4}{b^2c^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}-\frac{4}{c^2a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4}{a^2b^2}\cdot\frac{4z^2}{c^4}\right\} \\
&= \frac{16\left(-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}{16a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}=\frac{-\epsilon}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}, \\
H &= \frac{1}{2\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\times \\
&\quad \left\{\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)\frac{4z^2}{c^4}+\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)\frac{4x^2}{a^4}+\left(-\frac{2}{c^2}+\frac{2}{a^2}\right)\frac{4y^2}{b^4}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8\left((a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}+(-b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(c^2-a^2)\frac{y^2}{b^2}\right)}{16a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{(-a^2-b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{-\epsilon(a^2+b^2-c^2)+(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

このように、関数の一定値をとる点の集まりとして一葉双曲面と二葉双曲面をとらえると、両方同時に Gauss 曲率と平均曲率を計算することができる。パラメータ表示を利用して Gauss 曲率と平均曲率を計算しようとすると、一葉双曲面と二葉双曲面でパラメータ表示が異なるため、似ているけど少し異なる計算を両方についてすることになる。