数理物質科学研究科

幾何学概論 II

教育研究科

幾何学概論

凸体の幾何学入門

田崎博之

2009 年度 1 学期

数理物質科学研究科

幾何学概論 II

教育研究科

幾何学概論

開講授業科目概要

Euclid 空間の距離や位相の基本的事項を復習した後、Euclid 空間の凸体の幾何学の基礎について解説する。

目 次

1　線形代数からの準備

定義 1.1 $\mathbb{E}^n$ で n **次元 Euclid 空間**を表す。$\mathbb{E}^n$ は n 次元線形空間

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}\}$$

であり、

$$\langle x, y\rangle = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n \qquad (x, y \in \mathbb{E}^n)$$

によって定まる**内積** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持っているものである。**ノルム** $|\cdot|$ は

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left\{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2\right\}^{1/2} \qquad (x \in \mathbb{E}^n)$$

によって内積から定める。$|\cdot|$ は**長さ**ともいう。

定義 1.2 $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{E}^n$ と $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_kx_k$ を $x_1, \dots, x_k$ の**線形結合**と呼ぶ。部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して、A の元の線形結合の全体を $\mathrm{lin}A$ で表し A の**線形包**と呼ぶ。

普通の線形代数の教科書では、$\mathrm{lin}A$ を A が張る線形部分空間と呼ぶが、ここでは後で定める他の概念の名前と合せるため線形包と呼ぶことにする。

$\mathrm{lin}A$ の定義を数式で表すと次のようになる。

$$\mathrm{lin}A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R},\, x_i \in A \right\}$$

このように記述すると、右辺の k は自然数を動くものと考える。これをより明示的に書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathrm{lin}A =& \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R},\, x \in A\} \\ &\cup \{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\, x_1, x_2 \in A\} \\ &\cup \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R},\, x_i \in A \right\} \cup \cdots \\ =& \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R},\, x_i \in A \right\}.\end{aligned}$$

これを

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R},\, x_i \in A \right\}$$

と記述することもあるが、k は自然数全体を動くのであって

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$$

という元も含まれるということを意味するわけではない。A の有限個の元の線形結合をすべて集めた集合が $\mathrm{lin}A$ である。

定義 1.3 $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ が次の条件を満たすとき、**線形独立**という。

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

が成り立つならば、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ が成り立つ。$x_1, \ldots, x_k$ が線形独立ではないとき、**線形従属**という。

定義 1.4 $\mathbb{E}^n$ の部分集合 V が次の条件を満たすとき、**線形部分空間**と呼ぶ。

$$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V,$$
$$\alpha \in \mathbb{R},\, x \in V \Rightarrow \alpha x \in V$$

$\mathbb{E}^n$ の線形部分空間 V の元 $x_1, \ldots, x_k$ が線形独立であり、

$$\mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = V$$

を満たすとき、$x_1, \ldots, x_k$ を V の**基底**と呼ぶ。基底を構成する元の個数 k を V の**次元**といい、

$$\dim V = k$$

と書く。

線形部分空間 V の基底のとり方は一意的に定まるわけではないが、基底を構成する元の個数は一意的に定まる。これは大学一年で学ぶ線形代数の基本的だが重要なことである。これによって、次元の概念が矛盾なく定まっていることがわかる。

定義 1.5 $V \subset \mathbb{E}^m$ と $W \subset \mathbb{E}^n$ を線形部分空間とする。写像 $f : V \to W$ が次の条件を満たすとき、**線形写像**と呼ぶ。

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{E}^m),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}).$$

定義 1.6 $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ と $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ を $x_1, \ldots, x_k$ の**アフィン結合**と呼ぶ。部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して、A の元のアフィン結合の全体を $\mathrm{aff} A$ で表し A の**アフィン包**と呼ぶ。

0 の線形結合は 0 のみだから、$\mathrm{lin}\{0\} = \{0\}$ である。0 ではない $x \in \mathbb{E}^n$ の線形包 $\mathrm{llin}\{x\}$ は 1 次元線形部分空間になる。これに対して $x \in \mathbb{E}^n$ のアフィン包 $\mathrm{aff}\{x\}$ は $1 \cdot x$ のみになるので、$\{x\}$ 自身になる。これは x が 0 であるかどうかに関係しない。

次に線形独立な $x_1, x_2 \in \mathbb{E}^n$ に対して、$\mathrm{lin}\{x_1, x_2\}$ は 2 次元線形部分空間になる。アフィン包を考えるために、$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ を満たす $\lambda_1, \lambda \in \mathbb{R}$ をとると、$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ となり、

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 = \lambda_1 (x_1 - x_2) + x_2.$$

ここで、λ_1 は $\mathbb{R}$ を自由に動くので、$\mathrm{aff}\{x_1, x_2\}$ は x_1 と x_2 を結ぶ直線になる。x_1, x_2 を結ぶ直線を考えるためには、x_1, x_2 が一致しなければいいので、x_1, x_2 が線形独立であるという条件は強過ぎることがわかる。アフィン包を扱うために適切な概念が、定義 1.8 で定めるアフィン独立である。その準備として線形独立の定義を振り返っておく。次の命題は線形独立の定義からわかる。

命題 1.7 $k \geq 2$ とする。$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ が線形独立であるための必要十分条件は、$x_1, \ldots, x_k$ のどの元も他の元の線形結合にならないことである。

この命題の「線形結合」を「アフィン結合」に置き換えることで、「アフィン独立」を定義する。

定義 1.8 $\mathbb{E}^n$ の一点は**アフィン独立**であるという。$k \geq 2$ の場合は、$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ のどの元も他の元のアフィン結合にならないとき、$x_1, \ldots, x_k$ は**アフィン独立**であるという。$x_1, \ldots, x_k$ がアフィン独立ではないとき、**アフィン従属**という。

x_1, x_2 がアフィン独立ならば、x_1 は x_2 のアフィン結合ではない。これは x_1, x_2 は異なる 2 点であることを意味する。逆に x_1, x_2 が異なる 2 点であれば、アフィン独立になる。

x_1, x_2, x_3 がアフィン独立ならば、x_1 は x_2 のアフィン結合ではなく、x_3 のアフィン結合ではない。よって、x_1, x_2 は異なる 2 点であり、x_1, x_3 は異なる 2 点である。さらに、x_1, x_2, x_3 のどの 2 点も異なることがわかる。また x_1 は x_2, x_3 のアフィン結合ではない。これは x_1 は x_2, x_3 を結ぶ直線上にないことを意味する。同様に x_1, x_2, x_3 のどの点も他の 2 点を結ぶ直線上にないことがわかる。結局、x_1, x_2, x_3 は同一直線上にない 3 点になる。逆に x_1, x_2, x_3 が同一直線上にない 3 点ならば、アフィン独立になる。

同様に x_1, x_2, x_3, x_4 がアフィン独立になることと x_1, x_2, x_3, x_4 が同一平面上にない 4 点になることは同値になる。

すなわち、アフィン独立性は初等幾何学で使われる異なる 2 点、同一直線上にない 3 点、同一平面上にない 4 点という概念を一般化したものである。

命題 1.9 $k \geq 2$ とする。$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ に対して次の条件はすべて同値になる。

(1) $x_1, \ldots, x_k$ はアフィン独立になる。

(2) $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ ならば、$\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$ が成り立つ。

(3) $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ は線形独立になる。

(4) 写像 $\tau : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}$ を $\tau(x) = (x, 1)$ によって定めると、$\tau(x_1), \ldots, \tau(x_k)$ は線形独立になる。

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $x_1, \dots, x_k$ はアフィン独立ではないと仮定する。必要なら順序を入れ換えて、x_k は $x_1, \dots, x_{k-1}$ のアフィン結合になる。すなわち、

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i = 1$$

を満たす $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ が存在する。これらの和が 1 であることから、すべてが 0 になることはない。上の等式を

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i x_i - x_k = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i - 1 = 0$$

と変形して $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k = -1$ とおけば、条件 (2) が成り立たないことがわかる。

逆に

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

が少なくとも一つは 0 ではない $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して成り立つと仮定する。必要なら順序を入れ換えて $\lambda_k \neq 0$ とする。上の等式を

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_k} x_i, \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_k} = 1$$

と変形すると、x_k は $x_1, \dots, x_{k-1}$ のアフィン結合になることがわかる。よって、$x_1, \dots, x_k$ はアフィン独立ではない。

以上で (1) と (2) が同値になることがわかった。

(2) $\Rightarrow$ (4) $\tau(x_1), \dots, \tau(x_k)$ が線形独立になることを示すために、

$$\lambda_1 \tau(x_1) + \cdots + \lambda_k \tau(x_k) = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

とする。τ の定義に従って書き換えると

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k) = (0, 0) \in \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}$$

となり、(2) より $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. よって、$\tau(x_1), \dots, \tau(x_k)$ は線形独立になる。

(4) $\Rightarrow$ (3) $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ が線形独立になることを示すため、

$$\lambda_2(x_2 - x_1) + \cdots + \lambda_k(x_k - x_1) = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

とする。これを $x_1, \dots, x_k$ の線形結合で表すと

$$(-\lambda_2 - \cdots - \lambda_k)x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

となるので、$\lambda_1 = -\lambda_2 - \cdots - \lambda_k$ とおくと、

$$\begin{aligned}&\lambda_1\tau(x_1) + \cdots + \lambda_k\tau(x_k)\\ =&(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k) = (0, 0).\end{aligned}$$

よって、(4) より $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ となり、$x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ は線形独立になる。
(3) ⇒ (2)　(2) を示すために、

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$$

とする。2 番目の等式より、$\lambda_1 = -\lambda_2 - \cdots - \lambda_k$ となり、

$$(-\lambda_2 - \cdots - \lambda_k)x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

を得る。これより、

$$\lambda_2(x_2 - x_1) + \cdots + \lambda_k(x_k - x_1) = 0$$

となり、(3) より $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ が成り立つ。したがて、$\lambda_1 - 0$ も成り立つ。

線形部分空間の定義は、和とスカラー倍について閉じていることで定めている。アフィンの場合に線形部分空間に対応する概念を定めるために、線形部分空間になるための条件を線形結合で表現し、線形結合をアフィン結合に置き換える。

命題 1.10 $V \subset \mathbb{E}^n$ が線形部分空間になるための必要十分条件は、$x_i \in V$ と $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \in V$$

が成り立つことである。

定義 1.11 $\mathbb{E}^n$ の部分集合 A が次の条件を満たすとき、**アフィン部分空間**と呼ぶ。$x_i \in V$ と $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \in A$$

が成り立つ。

命題 1.12 $A \subset \mathbb{E}^n$ をアフィン部分空間とする。$x_0 \in A$ に対して、

$$A - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in A\}$$

は $\mathbb{E}^n$ の線形部分空間になる。線形部分空間 $A - x_0$ は $x_0 \in A$ のとり方に依存しない。そこで、$\dim A = \dim(A - x_0)$ によってアフィン部分空間の**次元**を定めることができる。

証明 $u, v \in A - x_0$ をとると、ある $x, y \in A$ が存在して

$$u = x - x_0, \qquad v = y - x_0$$

が成り立つ。

$$u + v = x - x_0 + y - x_0 = (x + y - x_0) - x_0$$

となり、$x + y - x_0$ は $x, y, x_0 \in A$ のアフィン結合だから、A がアフィン部分空間であることから A に含まれる。したがって、$u + v \in A - x_0$ を得る。次に $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda u = \lambda(x - x_0) = \lambda x + (1 - \lambda)x_0 - x_0$$

となり、$\lambda x + (1 - \lambda)x_0$ は $x, x_0 \in A$ のアフィン結合だから A に含まれる。したがって、$\lambda u \in A - x_0$ を得る。以上で $A - x_0$ は線形部分空間になる。

もう一つ $y_0 \in A$ をとる。任意の $u \in A - x_0$ に対して、ある $x \in A$ が存在し $u = x - x_0$ となる。

$$u = x - x_0 + y_0 - y_0$$

となり、$x - x_0 + y_0$ は $x, x_0, y_0 \in A$ のアフィン結合だから A に含まれる。よって、$u \in A - y_0$ を得る。したがって、$A - x_0 \subset A - y_0$ が成り立つ。同様に $A - y_0 \subset A - x_0$ が成り立ち、$A - x_0 = A - y_0$ を得る。これより、線形部分空間 $A - x_0$ は $x_0 \in A$ のとり方に依存しないことがわかる。

線形写像の定義は、和とスカラー倍を保つことで定めている。アフィンの場合に線形写像に対応する概念を定めるために、線形写像になるための条件を線形結合で表現し、線形結合をアフィン結合に置き換える。

命題 1.13 $V \subset \mathbb{E}^m$ と $W \subset E^n$ を線形部分空間とする。写像 $f : V \to W$ が線形写像になるための必要十分条件は、$x_i \in V$ と $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$$

が成り立つことである。

定義 1.14 $A \subset \mathbb{E}^m$ と $S \subset E^n$ をアフィン部分空間とする。写像 $f : A \to B$ が次の条件を見たすとき、**アフィン写像**と呼ぶ。$x_i \in A$ と $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$$

が成り立つ。

命題 1.15 アフィン部分空間 $A \subset \mathbb{E}^m$ と $S \subset E^n$ の間のアフィン写像 $f : A \to B$ と $x_0 \in A$ に対して

$$f_l(u) = f(u + x_0) - f(x_0) \qquad (u \in A - x_0)$$

とおくと、$f_l : A - x_0 \to B - f(x_0)$ は線形写像になる。さらに、f_l は $x_0 \in A$ のとり方に依存しない。そこで、線形写像に関する種々の概念をアフィン写像に定めることができる。

証明 $u, v \in A - x_0$ をとると、ある $x, y \in A$ が存在して

$$u = x - x_0, \qquad v = y - x_0$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} f_l(u+v) =& f(u+v+x_0) - f(x_0) = f(x+y-x_0) - f(x_0) \\ & (x+y-x_0 \text{ は } x, y, x_0 \text{ のアフィン結合だから}) \\ =& f(x) + f(y) - f(x_0) - f(x_0) \\ =& f_l(u) + f_l(v). \end{aligned}$$

次に $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f_l(\lambda u) =& f(\lambda u + x_0) - f(x_0) = f(\lambda(x - x_0) + x_0) - f(x_0) \\ =& f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) - f(x_0) \\ & (\lambda x + (1-\lambda)x_0 \text{ は } x, x_0 \in A \text{ のアフィン結合だから}) \\ =& \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0) - f(x_0) = \lambda(f(x) - f(x_0)) \\ =& \lambda f_l(u). \end{aligned}$$

したがって、$f_l : A - x_0 \to B - f(x_0)$ は線形写像になる。

もう一つ $x_0 \in A$ をとる。任意の $u \in A - x_0$ に対して、ある $x \in A$ が存在し $u = x - x_0$ となる。

$$\begin{aligned} f(u+y_0) - f(y_0) =& f(x - x_0 + y_0) - f(y_0) \\ & (x - x_0 + y_0 \text{ は } x, x_0, y_0 \in A \text{ のアフィン結合だから}) \\ =& f(x) - f(x_0) + f(y_0) - f(y_0) = f(u + x_0) - f(x_0). \end{aligned}$$

したがって、f_l は $x_0 \in A$ のとり方に依存しない。

2 位相からの準備

$\mathbb{E}^n$ のノルム $|\cdot|$ から $\mathbb{E}^n$ 上の二変数関数 d を次のように定める。

$$d(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{E}^n).$$

この関数 d は次の性質を持つ。

(1) $x, y \in \mathbb{E}^n$ に対して $d(x, y) \geq 0$ が成り立ち、$d(x, y) = 0$ の必要十分条件は $x = y$ である。

(2) $x, y \in \mathbb{E}^n$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$ が成り立つ。

(3) $x, y, z \in \mathbb{E}^n$ に対して次の等式が成り立つ。

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

これらの性質によって $d(x, y)$ を二点 x, y 間の距離とみなすことができ、$\mathbb{E}^n$ の開集合、閉集合や、部分集合の内部や閉包、関数や写像の連続性を扱うことができるようになる。これらに関する多くの議論は、d が上の (1) から (3) を満たすことから導くことができるので、逆に上の (1) から (3) を満たす d を距離として定義するのが、次に述べる距離空間の定義である。

定義 2.1 集合 X 上の二変数関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき、d を X の**距離**と呼び、(X, d) を**距離空間**と呼ぶ。

(1) $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \geq 0$ が成り立ち、$d(x, y) = 0$ の必要十分条件は $x = y$ である。

(2) $x, y \in X$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$ が成り立つ。

(3) $x, y, z \in X$ に対して次の等式が成り立つ。

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

この不等式を**三角不等式**と呼ぶ。$z \in X$ と $\rho > 0$ に対して

$$B(z, \rho) = \{x \in X \mid d(z, x) \leq \rho\}, \quad B_0(z, \rho) = \{x \in X \mid d(z, x) < \rho\}$$

によって、中心 z、半径 ρ の**閉球体** $B(z, \rho)$ と**開球体** $B_0(z, \rho)$ を定める。

この節の最初に定めた d により $\mathbb{E}^n$ は距離空間になる。以後、$(\mathbb{E}^n, d)$ を距離空間として扱うときも、簡単に $\mathbb{E}^n$ と書くことにする。

定義 2.2 (X, d) を距離空間とする。部分集合 $O \subset X$ が次の条件を満たすとき、O を X の**開集合**と呼ぶ。任意の $z \in O$ に対してある $\rho > 0$ が存在し、$B(z, \rho) \subset O$ が成り立つ。空集合は元がないので、この条件は満たしているとみなし空集合も開集合とする。$C \subset X$ の補集合が開集合になるとき、C を**閉集合**と呼ぶ。

命題 2.3 距離空間 (X, d) の開集合全体を $\mathcal{O}$ で表し、閉集合全体を $\mathcal{C}$ で表す。このとき、$\mathcal{O}$ は次の性質を持つ。

(1) $X \in \mathcal{O}$ と $\emptyset \in \mathcal{O}$ が成り立つ。

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{O}$ に属する部分集合族 $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ が成り立つ。

$\mathcal{C}$ は次の性質を持つ。

(1) $X \in \mathcal{C}$ と $\emptyset \in \mathcal{C}$ が成り立つ。

(2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ならば $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{C}$ に属する部分集合族 $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}$ が成り立つ。

定義 2.4 距離空間 (X, d) の部分集合 A に対して、A に含まれる包含関係について最大の開集合を A の**内部**と呼び $\mathrm{int}A$ で表す。A を含む包含関係について最小の閉集合を A の**閉包**と呼び $\mathrm{cl}A$ で表す。これらの定め方より $\mathrm{int}A \subset A \subset \mathrm{cl}A$ が成り立つ。$\mathrm{cl}A$ 内の $\mathrm{int}A$ の補集合を A の**境界**と呼び $\mathrm{bd}A$ で表す。

部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ のアフィン包内での内部、境界を**相対内部、相対境界**と呼び、$\mathrm{relint}A, \mathrm{relbd}A$ で表す。

距離空間 (X, d) の部分集合 A に対して、命題 2.2 より次の等式が成り立つことがわかる。

$$\mathrm{int}A = \bigcup_{O \subset A, O \in \mathcal{O}} O, \qquad \mathrm{cl}A = \bigcap_{A \subset C, C \in \mathcal{C}} C.$$

定義 2.5 距離空間 (X, d) 上定義されている実数値関数 f が次の条件を満たすとき、f は $x_0 \in X$ で**連続**であるいう。任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$x \in X,\ d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

が成り立つ。f が X の任意の点で連続になるとき、f を**連続関数**と呼ぶ。

実数全体 $\mathbb{R}$ は $|x - y|$ を x, y の間の距離にすることによって距離空間になるので、上の距離空間における連続関数の概念は、次のように距離空間から距離空間への連続写像の概念に拡張できる。

距離空間 (X, d) から距離空間 (X', d') への写像 F が次の条件を満たすとき、F は $x_0 \in X$ で**連続**であるいう。任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$x \in X,\ d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon$$

が成り立つ。F が X の任意の点で連続になるとき、F を**連続写像**と呼ぶ。

命題 2.6 距離空間 (X,d) から距離空間 (X',d') への写像 F が連続写像になるための必要十分条件は、X' の任意の開集合 O' に対して $F^{-1}(O')$ が X の開集合になることである。

上の命題では連続写像の条件を開集合だけを使って述べている。このように連続写像の概念は距離がなくても開集合さえ定まっていれば考えることができる。さらに連続写像の基本的性質の多くは命題 2.2 の開集合の性質を使えば証明できるので、命題 2.2 の開集合の性質を満たす部分集合系を備えた集合である**位相空間**で連続写像を定義し、その性質を調べることができる。

これに対して次に述べる連続写像よりも強い条件を満たす写像は、開集合系だけで扱うことはできない。

定義 2.7 距離空間 (X,d) から距離空間 (X',d') への写像 F が次の条件を満たすとき、F は**一様連続**であるいう。任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in X,\ d(x,y) \le \delta \Rightarrow d'(F(x), F(y)) \le \epsilon$$

が成り立つ。ϵ に対する δ の選び方が X の点に依存していないところが、連続写像との違いである。

$L \ge 0$ に対して、F が次の条件を満たすとき、F は **L-Lipschitz 連続**であるいう。

$$x, y \in X \Rightarrow d'(F(x), F(y)) \le Ld(x,y).$$

ある $L \ge 0$ について L-Lipschitz 連続のとき、単に **Lipschitz 連続**という。

距離空間の間の写像が Lipschitz 連続ならば一様連続になり、一様連続ならば連続になることがわかる。しかし、逆は成り立たない。

実数から実数への写像 $x \mapsto x^2$ は連続にはなるが、一様連続ではない。実数の区間 $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への写像 $x \mapsto x^{1/2}$ は一様連続にはなるが、Lipschitz 連続ではない。

定義 2.8 距離空間 (X,d) の部分集合 A が次の条件を満たすとき、A を**コンパクト集合**と呼ぶ。X の部分集合族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

を満たすならば、Λ から有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ を選らんで

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i}$$

とすることができる。

定理 2.9 (Heine-Borel) $\mathbb{E}^n$ の部分集合 A に対して、A がコンパクトであることと A が有界閉集合であることは同値である。

3　凸集合と凸結合

$x, y \in \mathbb{E}^n$ に対して

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

によって**閉線分**を定め、

$$[x, y) = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda < 1\}$$

によって**半開線分**を定める。部分集合 $A, B \subset \mathbb{E}^n$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

によって $A + B$ と λA を定める。$(-1)A$ を $-A$ で表し、$A + (-B)$ を $A - B$ で表す。さらに $x \in \mathbb{E}^n$ に対して $A + \{x\}$ を $A + x$ で表す。

定義 3.1 部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ が**凸**であるとは、任意の $x, y \in A$ に対して $[x, y] \subset A$ が成り立つことである。

補題 3.2 二点を結ぶ線分のアフィン写像による像は、その二点の像を結ぶ線分に一致する。

証明　$f : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ をアフィン写像とし、$x, y \in \mathbb{E}^m$ をとる。$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = f((1-\lambda)x + \lambda y)$$

となるので、$[f(x), f(y)] = f([x, y])$ が成り立つ。

命題 3.3 凸集合の共通部分は凸になり、凸集合のアフィン写像による像や逆像も凸になる。A, B が凸ならば $A + B$ も凸になり、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λA も凸になる。

証明　$A_\lambda \subset \mathbb{E}^n$ $(\lambda \in \Lambda)$ を凸とする。任意の $x, y \in \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ に対して、各 $\lambda \in \Lambda$ について $x, y \in A_\lambda$ より $[x, y] \subset A_\lambda$ が成り立つ。よって、$[x, y] \subset \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ となり、$\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も凸になる。

$f : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ をアフィン写像とし、$A \subset \mathbb{E}^m$ を凸集合とする。任意の $u, v \in f(A) \subset \mathbb{E}^n$ をとる。ある $x, y \in A$ が存在して $u = f(x), v = f(y)$ が成り立つ。補題 3.2 より $[u, v] = [f(x), f(y)] = f([x, y]) \subset f(A)$ となって、$f(A)$ は凸集合になる。

$B \subset \mathbb{E}^n$ を凸集合とする。任意の $x, y \in f^{-1}(B)$ に対して $f(x), f(y) \in B$ が成り立つ。補題 3.2 より $f([x, y]) = [f(x), f(y)] \subset B$ となって、$[x, y] \subset f^{-1}(B)$、すなわち、$f^{-1}(B)$ は凸集合になる。

$A \times B \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{2n}$ の任意の二元 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ と $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(a_1, b_1) + \lambda(a_2, b_2) &= ((1-\lambda)a_1 + \lambda a_2, (1-\lambda)b_1 + \lambda b_2)\\ &\in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]\end{aligned}$$

となるので、$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \subset [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset A \times B$ となって、$A \times B$ は凸になる。

$$f : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \ ; \ (x, y) \mapsto x + y$$

によって写像 f を定めると、f は線形写像になる。特に、f はアフィン写像になる。$A + B = f(A \times B)$ だから、$A + B$ も凸になる。

命題 3.4 $A \subset \mathbb{E}^n$ と $\lambda, \mu > 0$ に対して、$(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ が成り立つ。A が凸ならば、$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ が成り立つ。

証明 $x \in (\lambda + \mu)A$ に対して $x = (\lambda + \mu)a$ を満たす $a \in A$ をとることができる。

$$x = (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \in \lambda A + \mu A$$

となるので、$(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ を得る。

A が凸であるとする。$x \in \lambda A + \mu A$ は $a, b \in A$ によって $x = \lambda a + \mu b$ と表すことができる。$\lambda, \mu > 0$ だから

$$x = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}a + \frac{\mu}{\lambda + \mu}b\right) \in (\lambda + \mu)A$$

が成り立つ。したがって $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ が成り立つ。

定義 3.5 $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ と $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad (\lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, k)), \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

を $x_1, \ldots, x_k$ の**凸結合**と呼ぶ。部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して、A の元の凸結合の全体を $\mathrm{conv}A$ で表し A の**凸包**と呼ぶ。

定理 3.6 $A \subset \mathbb{E}^n$ が凸ならば、$\mathrm{conv}A = A$ が成り立つ。任意の部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して

$$\mathrm{conv}A = \cap\{K \mid K \text{ は凸}, A \subset K\}$$

が成り立つ。任意の部分集合 $A, B \subset \mathbb{E}^n$ に対して

$$\mathrm{conv}(A + B) = \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

が成り立つ。

証明　A が凸と仮定する。凸包の定義より $A \subset \mathrm{conv}A$ が成り立つ。逆の包含関係を示すために、A の k 個の元の凸結合が A に含まれることを k に関する帰納法で示す。$k=1$ の場合は A の元が A に含まれることをであり成り立つ。$k-1$ 以下の個数の A の元の凸結合が A に含まれると仮定して、k 個の A の元の凸結合も A に含まれることを示そう。$x_1,\dots,x_k \in A$ と $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$ を満たす $\lambda_1,\dots,\lambda_k \geq 0$ に関する凸結合 $x=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k$ について考える。$\lambda_k=1$ のときは $x=x_k \in A$ となるので、$\lambda_k<1$ と仮定しても一般性は失われない。

$$x=(1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i+\lambda_k x_k$$

となり、

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}=1, \quad \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}\geq 0$$

だから帰納法の仮定より

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i \in A.$$

したがって、上の x の表示より $x \in A$ が成り立つ。以上より A の元の凸結合は A に含まれることになり $\mathrm{conv}A \subset A$ を得る。したがって、$\mathrm{conv}A=A$ が成り立つ。

任意の部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して、$\mathrm{conv}A$ が凸になることをまず示しておく。任意の $x,y \in \mathrm{conv}A$ は A の元の凸結合

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i, \quad y=\sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j \qquad \left(a_i,b_j \in A,\ \lambda_i,\mu_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=\sum_{j=1}^{l}\mu_j=1\right)$$

で表され、$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$(1-\lambda)x+\lambda y=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i+\lambda\sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j=\sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)\lambda_i a_i+\sum_{j=1}^{l}\lambda\mu_j b_j$$

となり、係数は

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\lambda_i \geq 0, \quad \lambda\mu_j \geq 0,\\ &\sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)\lambda_i+\sum_{j=1}^{l}\lambda\mu_j=(1-\lambda)+\lambda=1\end{aligned}$$

を満たすので、$(1-\lambda)x+\lambda y$ は A の元の凸結合で表され、$(1-\lambda)x+\lambda y \in \mathrm{conv}A$ が成り立つ。したがって、$\mathrm{conv}A$ は凸になる。

$$D(A)=\cap\{K \mid K\text{ は凸}, A \subset K\}$$

とおく。$A \subset \mathrm{conv}A$ であり、$\mathrm{conv}A$ は凸だから、$D(A) \subset \mathrm{conv}A$ が成り立つ。次に $A \subset K$ を満たす任意の凸集合 K に対して $\mathrm{conv}A \subset \mathrm{conv}K = K$ となるので、$\mathrm{conv}A \subset D(A)$ を得る。したがって、

$$\mathrm{conv}A = D(A) = \cap\{K \mid K \text{は凸}, A \subset K\}$$

が成り立つ。

　$A, B \subset \mathbb{E}^n$ とする。任意の $x \in \mathrm{conv}(A+B)$ は

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(a_i + b_i) \quad \left(a_i \in A,\ b_i \in B,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\right)$$

と表現できる。よって

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \in \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

となり $\mathrm{conv}(A+B) \subset \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ を得る。逆に任意の $x \in \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ は

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j b_j \quad \left(a_i \in A,\ b_j \in B,\ \lambda_i, \mu_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_j = 1\right)$$

と表現できる。このとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i\mu_j(a_i + b_j) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i\mu_j a_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i\mu_j b_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j b_j = x\end{aligned}$$

となり

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i\mu_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{l} \mu_j = 1$$

かつ $\lambda_i\mu_j \geq 0$ だから、x は $A+B$ の元 a_i+b_j の凸結合になる。よって $x \in \mathrm{conv}(A+B)$ となり $\mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B \subset \mathrm{conv}(A+B)$ を得る。以上より

$$\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

が成り立つ。

定義 3.7 有限集合の凸包を**多面体**と呼ぶ。$k+1$ 個のアフィン独立な点の集合の凸包を k **単体**と呼び、これら $k+1$ 個の点をその単体の**頂点**と呼ぶ。

補題 3.8 $A \subset \mathbb{E}^n$ を凸集合とする。$x \in \mathrm{int}A$ と $y \in \mathrm{cl}A$ に対して $[x, y) \subset \mathrm{int}A$ が成り立つ。

証明　$0 < \lambda < 1$ に対して $z = (1-\lambda)y + \lambda x$ とおく。$x \in \mathrm{int}A$ よりある $\rho > 0$ が存在し $B(x, \rho) \subset A$ が成り立つ。

まず $y \in A$ の場合を考える。$B(z, \lambda\rho) \subset A$ が成り立つことを以下で示す。$w \in B(z, \lambda\rho)$ とすると

$$\begin{aligned} w &= (w-z) + z = (w-z) + (1-\lambda)y + \lambda x \\ &= (1-\lambda)y + \lambda\left(x + \frac{1}{\lambda}(w-z)\right) \end{aligned}$$

となり、

$$\left|\frac{1}{\lambda}(w-z)\right| = \frac{1}{\lambda}|w-z| \leq \rho$$

だから、

$$x + \frac{1}{\lambda}(w-z) \in B(z, \lambda\rho) \subset A.$$

さらに A は凸だから、$w \in A$ が成り立ち $B(z, \lambda\rho) \subset A$ を得る。したがって、$z \in \mathrm{int}A$ が成り立ち、$[x, y) \subset \mathrm{int}A$ を得る。

次に $y \in \mathrm{cl}A$ の場合を考える。$V = B(y, \lambda\rho/(1-\lambda))$ とおく。$y \in \mathrm{cl}A$ だから、$A \cap V$ は空ではない。そこで $a \in A \cap V$ をとる。

$$\begin{aligned} z &= (1-\lambda)y + \lambda x = (1-\lambda)(y + (a-y)) + \lambda x - (1-\lambda)(a-y) \\ &= (1-\lambda)a + \lambda\left(x - \frac{1-\lambda}{\lambda}(a-y)\right) \end{aligned}$$

となり、

$$\left|\frac{1-\lambda}{\lambda}(a-y)\right| = \frac{1-\lambda}{\lambda}|a-y| \leq \rho$$

だから、

$$x - \frac{1-\lambda}{\lambda}(a-y) \in B(x, \rho) \subset A.$$

A は凸だから、$z \in A$ が成り立ち $[x, y) \subset A$ を得る。さらに $[x, y) \subset \mathrm{int}A$ が成り立つことを以下で示す。任意の $y_1 \in [x, y)$ に対して、y_1 と y の間に $y_2 \in [x, y)$ をとることができ、$[x, y_1) \subset [x, y_2) \subset [x, y) \subset A$ となる。$y_2 \in A$ だから前半で示したことより $[x, y_2) \subset \mathrm{int}A$ が成り立ち、$y_1 \in \mathrm{int}A$ を得る。よって、$[x, y) \subset \mathrm{int}A$ が成り立つことがわかる。

補題 3.9 実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ と閉球体 $B(x_1, \rho_1), \ldots, B(x_k, \rho_k)$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(x_i, \rho_i) = B\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \rho_i\right).$$

証明 $x \in \mathbb{E}^n$ と $\rho \geq 0$ に対して

$$B(x, \rho) = B(0, \rho) + x.$$

さらに $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda B(x, \rho) = \lambda(B(0, \rho) + x) = B(0, |\lambda|\rho) + \lambda x.$$

これらより、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(x_i, \rho_i) &= \sum_{i=1}^{k}(B(0, |\lambda_i|\rho_i) + \lambda_i x_i) = B\left(0, \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\rho_i\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \\ &= B\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\rho_i\right).\end{aligned}$$

補題 3.10 部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{cl}A = \bigcap_{\epsilon > 0}(A + B(0, \epsilon))$$

証明 任意に $x \in \mathrm{cl}A$ をとる。すると任意の $\epsilon > 0$ に対して $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ となる。そこで $y \in B(x, \epsilon) \cap A$ をとると、$x \in B(y, \epsilon)$ かつ $y \in A$ が成り立つ。これより

$$x \in B(y, \epsilon) = y + B(0, \epsilon) \subset A + B(0, \epsilon).$$

すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対して $x \in A + B(0, \epsilon)$ が成り立ち、

$$\mathrm{cl}A \subset \bigcap_{\epsilon > 0}(A + B(0, \epsilon))$$

を得る。

逆に任意に $x \in \bigcap_{\epsilon > 0}(A + B(0, \epsilon))$ をとる。任意の $\epsilon > 0$ に対して、$x \in A + B(0, \epsilon)$ が成り立つ。これよりある $y \in A$ が存在して $x \in y + B(0, \epsilon) = B(y, \epsilon)$ が成り立つ。よって、$y \in B(x, \epsilon) \cap A$ となり、$B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ を得る。したがって、$x \in \mathrm{cl}A$ となり

$$\bigcap_{\epsilon > 0}(A + B(0, \epsilon)) \subset \mathrm{cl}A$$

が成り立つ。以上より、補題の等式を得る。

定理 3.11 部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ が凸ならば、$\mathrm{int}A$ と $\mathrm{cl}A$ も凸になる。A が開集合ならば、$\mathrm{conv}A$ も開集合になる。

証明　補題 3.8 より $x, y \in \mathrm{int}A$ に対して $[x, y] \subset \mathrm{int}A$ となり、$\mathrm{int}A$ は凸になる。補題閉 3.10 より

$$\mathrm{cl}A = \bigcap_{\epsilon > 0}(A + B(0, \epsilon))$$

が成り立つ。命題 3.3 と定理 3.6 よりこれは凸になることがわかる。

A が開集合の場合を考える。任意の $x \in \mathrm{conv}A$ をとり、

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \left(\lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ x_i \in A\right)$$

と表す。A は開集合だから、各 x_i に対して $\rho_i > 0$ が存在して $B(x_i, \rho_i) \subset A$ を満たす。補題 3.9 より、

$$B\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \rho_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(x_i, \rho_i) \subset \mathrm{conv}A$$

が成り立つ。したがって、$\mathrm{conv}A$ は開集合になる。

定理 3.12 $A \subset \mathbb{E}^n$ を凸集合とすると、次が成り立つ。

(1) $\mathrm{relint}A = \mathrm{relint}\,\mathrm{cl}A$,

(2) $\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}\,\mathrm{relint}A$,

(3) $\mathrm{relbd}A = \mathrm{relbd}\,\mathrm{cl}A = \mathrm{relbd}\,\mathrm{relint}A$.

証明　定理の主張に現れる作用の結果はすべて $\mathrm{aff}A$ に含まれるため、A のアフィン包が $\mathbb{E}^n$ に一致する場合を考えれば十分である。このとき $\mathrm{int}A$ は空ではなく、$\mathrm{relint}A = \mathrm{int}A$, $\mathrm{relbd}A = \mathrm{bd}A$ が成り立つ。

(1) $A \subset \mathrm{cl}A$ だから $\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}\,\mathrm{cl}A$ が成り立つ。逆の包含関係を示すために任意に $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{cl}A$ をとる。x とは異なる $y \in \mathrm{int}A$ を一つとっておく。y から x への半直線は x を越えても $\mathrm{int}\,\mathrm{cl}A$ の元 z を持つ。$z \in \mathrm{cl}A$ となるので補題 3.8 より $[y, z) \subset \mathrm{int}A$ が成り立つ。$x \in [y, z)$ だから $x \in \mathrm{int}A$ となり $\mathrm{int}\,\mathrm{cl}A \subset \mathrm{int}A$ を得る。以上より $\mathrm{int}A = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}A$ が成り立つ。

(2) $\mathrm{int}A \subset A$ だから $\mathrm{cl}\,\mathrm{int}A \subset \mathrm{cl}A$ が成り立つ。逆の包含関係を示すために任意に $x \in \mathrm{cl}A$ をとる。x とは異なる $y \in \mathrm{int}A$ を一つとっておく。補題 3.8 より $[y, x) \subset \mathrm{int}A$ となるので、$x \in \mathrm{cl}\,\mathrm{int}A$ を得る。これより、$\mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{int}A$ となり $\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}A$ が成り立つ。

(3) 境界の定義と (1) より

$$\mathrm{bd}\,\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}\,\mathrm{cl}A \setminus \mathrm{int}\,\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}A \setminus \mathrm{int}A = \mathrm{bd}A.$$

境界の定義と (2) より

$$\mathrm{bd}\,\mathrm{int}A = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}A \setminus \mathrm{int}\,\mathrm{int}A = \mathrm{cl}A \setminus \mathrm{int}A = \mathrm{bd}A.$$

定義 3.13 $\mathbb{E}^n$ 内の空ではないコンパクト凸集合を**凸体**という。$\mathbb{E}^n$ 内の凸体全体の集合を $\mathcal{K}^n$ で表わす。

4 射影

この節では $A \subset \mathbb{E}^n$ を閉凸集合とする。

補題 4.1 $x \in \mathbb{E}^n$ に対して $|x-z| \leq |x-y|$ $(y \in A)$ を満たす $z \in A$ がただ一つ存在する。

証明 $\rho > 0$ を十分大きくとれば $B(x,\rho) \cap A$ は空ではないコンパクト集合になる。連続関数 $B(x,\rho) \cap A \ni y \mapsto |x-y|$ を考えると、最小値をある点 $y_0 \in B(x,\rho) \cap A$ でとる。このとき、任意の $y \in A$ に対して $|x-y_0| \leq |x-y|$ が成り立つ。$y_1 \in A$ も任意の $y \in A$ に対して $|x-y_1| \leq |x-y|$ を満たすと仮定する。すると y_0 と y_1 はどちらも連続関数 $A \ni y \mapsto |x-y|$ の最小値をとる点になり、$|x-y_0| = |x-y_1|$ が成り立つ。$z = (y_0+y_1)/2$ とおくと、A は凸だから $z \in A$ が成り立つ。$y_0 \neq y_1$ ならば、z は二等辺三角形 xy_0y_1 の底辺の中点になり、$|x-z| < |x-y_0|$ を得る。これは y_0 の最小性に反する。したがって、上の性質を持つ A の点はただ一つに限る。

定義 4.2 補題 4.1 の z を x の A への**射影**と呼び、$z = p(A,x)$ で表す。$x \in \mathbb{E}^n \setminus A$ に対して $|x - p(A,x)| = d(A,x)$ となるので、

$$u(A,x) = \frac{x - p(A,x)}{d(A,x)}$$

は単位ベクトルになり $p(A,x)$ から x を向く方向になっている。

$$R(A,x) = \{p(A,x) + \lambda u(A,x) \mid \lambda \geq 0\}$$

によって $p(A,x)$ を始点にする $u(A,x)$ の方向の半直線を表す。

補題 4.3 $x \in \mathbb{E}^n \setminus A$ と $y \in R(A,x)$ に対して $p(A,x) = p(A,y)$ が成り立つ。

証明 $p(A,y) \neq p(A,x)$ と仮定して矛盾を導く。$y = p(A,x)$ ならば $y \in A$ となり $p(A,y) = y = p(A,x)$。したがって、$y \in R(A,x) \setminus \{p(A,x)\}$ である。まず $y \in [x, p(A,x))$ の場合を考える。$p(A,y) \neq p(A,x) \in A$ だから補題 4.1 より

$$|y - p(A,y)| < |y - p(A,x)|$$

が成り立つ。これより

$$|x - p(A,y)| \leq |x-y| + |y - p(A,y)| < |x-y| + |y - p(A,x)| = |x - p(A,x)|$$

となり、$p(A,x)$ の定め方に反する。

次に $x \in [y, p(A,x))$ の場合を考える。線分 $[p(A,x), p(A,y)]$ の点 q を $[x,q]$ が $[y, p(A,y)]$ と平行になるようにとる。すると

$$\frac{|x-q|}{|x-p(A,x)|} = \frac{|y-p(A,y)|}{|y-p(A,x)|} < 1$$

となり $|x-q| < |x - p(A,x)|$ が成り立ち、$p(A,x)$ の定め方に反する。したがって、いずれの場合も矛盾になり $p(A,y) = p(A,x)$ が成り立つ。

定理 4.4 射影は 1-Lipschitz 連続写像になる。すなわち次の不等式が成り立つ。

$$|p(A,x)-p(A,y)| \leq |x-y| \quad (x,y \in \mathbb{E}^n).$$

証明 $v = p(A,x)-p(A,y)$ とおく。$v \neq 0$ の場合を考えればよい。

$$(*) \qquad \langle x-p(A,x), v\rangle \geq 0$$

が成り立つことを示す。もし $\langle x-p(A,x), v\rangle < 0$ とすると、$x \notin A$ となる。よって $R(A,x)$ を考えることができる。$\langle x-p(A,x), v\rangle < 0$ という仮定より、$p(A,y)$ を通り v に直交する超平面と $R(A,x)$ は交わる。その交点を z で表すと $z-p(A,y)$ は v と直交するので、

$$|z-p(A,y)| = \sqrt{|z-p(A,x)|^2-|v|^2} < |z-p(A,x)|.$$

他方 $z \in R(A,x)$ だから補題 4.3 より $p(A,x)=p(A,z)$ となり、上の不等式より

$$|z-p(A,y)| < |z-p(A,z)|$$

が成り立つ。これは $p(A,z)$ の定め方に反する。以上より不等式 $(*)$ が成り立つ。

$(*)$ の x と y を入れ換えると

$$\langle y-p(A,y), p(A,y)-p(A,x)\rangle \geq 0$$

が成り立つ。よって $\langle y-p(A,y), v\rangle \leq 0$ が成り立つ。先に示した不等式 $(*)$ とこの不等式より、二点 $p(A,x), p(A,y)$ を通る直線へ線分 $[x,y]$ を直交射影すると $p(A,x), p(A,y)$ を含む。したがって

$$|p(A,x)-p(A,y)| \leq |x-y|$$

が成り立つ。

補題 4.5 球面 S の内部に A は含まれていると仮定する。このとき、$p(A,S) = \mathrm{bd}A$ が成り立つ。

証明 球面 S の内部に A が含まれていることから $p(A,S) \subset \mathrm{bd}A$ が成り立つ。そこで以下では $\mathrm{bd}A \subset p(A,S)$ を示す。$x \in \mathrm{bd}A$ をとる。各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $|x-x_i| < 1/i$ を満たす A に含まれていない S の内部の点 x_i をとることができる。定理 4.4 より次の不等式が成り立つ。

$$|x-p(A,x_i)| = |p(A,x)-p(A,x_i)| \leq |x-x_i| < 1/i.$$

半直線 $R(A,x_i)$ は S と交わるのでその交点を y_i で表すと、補題 4.3 より $p(A,y_i) = p(A,x_i)$ が成り立つ。よって、$|x-p(A,y_i)| < 1/i$ が成り立つ。$(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合 S の点列なので、ある点 $y \in S$ に収束する部分列 $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ が存在する。定理 4.4 より $p(A,\cdot)$ は連続になることから

$$x = \lim_{j\to\infty} p(A,y_{i_j}) = p(A, \lim_{j\to\infty} y_{i_j}) = p(A,y) \in p(A,S).$$

したがって、$\mathrm{bd}A \subset p(A,S)$ となり $p(A,S) = \mathrm{bd}A$ が成り立つ。

5 支持と分離

$\mathbb{E}^n$ の**超平面**は $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$$

と表される。$H_{u,\alpha}$ が定める二つの閉半空間を次のように表す。

$$H^-_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle \le \alpha\}, \quad H^+_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle \ge \alpha\}.$$

定義 5.1 超平面 $H \subset \mathbb{E}^n$ を境界とする二つの閉半空間を H^+, H^- で表す。部分集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ とする。$x \in A$ について $x \in A \cap H$ が成り立ちかつ $A \subset H^+$ または $A \subset H^-$ が成り立つとき、H は x において A を**支持する**という。H が A のある点 x において A を支持するとき、H は A を**支持する**という。このとき H を A の**支持平面**と呼ぶ。$H = H_{u,\alpha}$ が A を支持し $A \subset H^-_{u,\alpha}$ となるとき、$H^-_{u,\alpha}$ を A の**支持半空間**と呼び、u を $H_{u,\alpha}$ と $H^-_{u,\alpha}$ の**外向き法ベクトル**と呼ぶ。さらに H が x において A を支持するとき、u を A の x における**外向き法ベクトル**と呼ぶ。

補題 5.2 $A \subset \mathbb{E}^n$ を空ではない凸閉集合とし、$x \in \mathbb{E}^n \setminus A$ をとる。このとき、$p(A, x)$ を通り $u(A, x)$ に直交する超平面は A を支持する。

証明 $p(A, x)$ を通り $u(A, x)$ に直交する超平面を H とする。$p(A, x) \in H \cap A$ となる。H を境界にする閉半空間であって x を含まない方を H^- とする。以下で $A \subset H^-$ を示す。もしそうではないとすると、ある $y \in A$ が $y \notin H^-$ を満たす。線分 $[p(A, x), y]$ の点で x に最も近い点を z とする。$y \notin H^-$ より $\langle y, u(A, x)\rangle > \langle p(A, x), u(A, x)\rangle$ が成り立つので $\langle y - p(A, x), u(A, x)\rangle > 0$ を得る。よって $z \neq p(A, x)$ となり $|x - z| < |x - p(A, x)|$ が成り立つ。ところが $[p(A, x), y] \subset A$ だから $z \in A$ となり、これは $p(A, x)$ の定め方に反する。したがって $y \in A$ となり $A \subset H^-$ が成り立ち、H は A を支持する。

定理 5.3 $A \subset \mathbb{E}^n$ を閉凸集合とする。A の各境界点において A を支持する超平面が存在する。$A \neq \emptyset$ であり有界ならば各 $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ に対して u を外向き法ベクトルに持ち A を支持する超平面が存在する。

証明 任意に $x \in \mathrm{bd}A$ をとる。まず A が有界の場合を考える。この場合には補題 4.5 を適用することができ、$x = p(A, y)$ を満たす $y \in \mathbb{E}^n \setminus A$ をとることができる。補題 5.2 より x を通り $y - x$ に直交する超平面は x において A を支持する。

次に A が非有界の場合を考える。$A \cap B(x, 1)$ は有界閉凸集合になり、x はその境界点になる。よって上で示したことから x における $A \cap B(x, 1)$ の支持平面 H が存在する。H^- を x における $A \cap B(x, 1)$ の支持半空間とする。以下で $A \subset H^-$ を示す。もしそうではないとすると、$z \in A \setminus H^-$ が存在する。$z, x \in A$ だから

$[z,x] \subset A$ が成り立つ。$z \notin H^-$ であり $x \in H = \mathrm{bd}H^-$ だから、$[z,x)$ は H^- の補集合に含まれる。これは

$$[z,x) \cap B(x,1) \subset A \cap B(x,1) \subset H^-$$

に矛盾する。したがって、$A \subset H^-$ となり H は x において A を支持する。

定理の後半の主張を示す。A は有界で $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ とする。A はコンパクトだからある $x \in A$ が存在し

$$\langle x,u\rangle = \sup\{\langle y,u\rangle \mid y \in A\}$$

が成り立つ。この等式より $\{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y,u\rangle = \langle x,u\rangle\}$ は u を外向き法ベクトルに持ち A を支持する超平面になる。

定義 5.4 $A, B \subset \mathbb{E}^n$ を部分集合とし、$H_{u,\alpha} \subset \mathbb{E}^n$ を超平面とする。$A \subset H^-_{u,\alpha}$ かつ $B \subset H^+_{u,\alpha}$ が成り立つかまたは $A \subset H^+_{u,\alpha}$ かつ $B \subset H^-_{u,\alpha}$ が成り立つとき、H は A と B を**分離する**という。$A \subset \mathrm{int}H^-_{u,\alpha}$ かつ $B \subset \mathrm{int}H^+_{u,\alpha}$ が成り立つかまたは $A \subset \mathrm{int}H^+_{u,\alpha}$ かつ $B \subset \mathrm{int}H^-_{u,\alpha}$ が成り立つとき、H は A と B を**真に分離する**という。ある $\epsilon > 0$ が存在し、$H_{u,\alpha-\epsilon}$ と $H_{u,\alpha+\epsilon}$ がともに A と B を分離するとき、H は A と B を**強く分離する**という。さらに部分集合 A と点 x に対する分離に関する用語は、A と $\{x\}$ に対する分離に関する用語を意味する。

定理 5.5 $A \subset \mathbb{E}^n$ を凸集合とし、$x \in \mathbb{E}^n \setminus A$ とする。このとき、A と x はある超平面によって分離される。さらに A が閉集合ならば、A と x はある超平面によって強く分離される。

証明 A が閉集合のとき、補題 5.2 より $p(A,x)$ を通り $u(A,x)$ に直交する超平面は A を支持することになり、この超平面は A と x を分離する。この超平面と平行であり線分 $[p(A,x),x]$ の中点 $(p(A,x)+x)/2$ を通る超平面は A と x を強く分離する。

A が閉集合ではなく $x \notin \mathrm{cl}A$ が成り立つならば、上で示したことからある超平面が $\mathrm{cl}A$ と x を分離するので、この超平面が A と x も分離する。そこで最後に $x \in \mathrm{cl}A$ の場合を考える。$x \notin A$ だから $x \in \mathrm{bd}A$ となる。他方、定理 3.12 より $\mathrm{bd}A = \mathrm{bd}\,\mathrm{cl}A$ が成り立つので、$x \in \mathrm{bd}\,\mathrm{cl}A$ となる。定理 3.11 より $\mathrm{cl}A$ は凸になり、定理 5.3 より x を通る $\mathrm{cl}A$ の支持平面が存在する。この支持平面は $\mathrm{cl}A$ と x を分離するので、A と x も分離することになる。

系 5.6 $\mathbb{E}^n$ 内の空ではない閉凸集合はその支持半空間全体の共通部分に一致する。

証明 $A \subset \mathbb{E}^n$ を空ではない閉凸集合とし、A の支持半空間全体の共通部分を $S(A)$ で表す。A の支持半空間は A を含むので $A \subset S(A)$ が成り立つ。A に含まれない点 x は定理 5.5 より A と強く分離されるので、x を含まない A の支持半空間が存在する。よって $x \notin S(A)$ となり $A = S(A)$ を得る。

6 凸関数

凸関数を考えるときには、値域は拡張した実数 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ にした方が便利である。$\pm\infty$ を含む演算は次のように約束しておく。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty, \\
&-\infty - \infty = -\lambda + (-\infty) = \lambda - \infty = -\infty + \lambda = -\infty, \\
&\lambda\infty = \infty\lambda = \begin{cases} \infty & (\lambda > 0), \\ 0 & (\lambda = 0), \\ -\infty & (\lambda < 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

定義 6.1 関数 $f : \mathbb{E}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ が $f^{-1}(-\infty) = \emptyset$ と $f^{-1}(\infty) \neq \mathbb{E}^n$ を満たし、

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (x, y \in \mathbb{E}^n,\ 0 \leq \lambda \leq 1)$$

となるとき、f を**凸関数**と呼ぶ。$D \subset \mathbb{E}^n$ で定義された関数 $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ は

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in D) \\ \infty & (x \in \mathbb{E}^n \setminus D) \end{cases}$$

によって拡張した関数 $\tilde{f}$ が凸関数になるとき、f を**凸関数**と呼ぶ。$-f$ が凸関数のとき、f を**凹関数**と呼ぶ。

注意 6.2 上の凸関数と凹関数の定義は、漢字の形と関数のグラフの形が逆になっている。ちょっと紛らわしいが、この用語は定着しているようなので、変更するわけにもいかないだろう。

高校の数学 III でも区間で定義された関数の凹凸を扱うが、ここでの用語と若干異なるので比較しておく。この講義での凸関数を数学 III では**下に凸**という。この講義での凹関数を数学 III では**上に凸**という。数学 III の教科書では曲線の凹凸に関する節で扱っているが、数学 III に凹という言葉はでてこないようだ。

例 6.3 $u \in \mathbb{E}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対するアフィン関数 $f(x) = \langle u, x \rangle + \alpha$ は

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \langle u, (1-\lambda)x + \lambda y \rangle + \alpha \\
&= (1-\lambda)(\langle u, x \rangle + \alpha) + \lambda(\langle u, y \rangle + \alpha) \\
&= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)
\end{aligned}$$

を満たすので、凸関数になる。さらに、アフィン関数は凹関数にもなる。

命題 6.4 (Jensen の不等式) $f : \mathbb{E}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ を凸関数とすると、$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ と $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0, 1]$ に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$$

が成り立つ。この不等式は **Jensen の不等式**と呼ばれている。

証明　k に関する帰納法で証明する。$k=1$ の場合は $\lambda_1=1$ となり、問題の不等式は自明。$k=2$ の場合は凸関数の定義不等式に一致しているので成立する。$k-1$ 以下の個数の場合に不等式が成り立っていると仮定して、k 個の場合も成り立つことを証明する。$\lambda_k=1$ のとき、和は一項だけになり等号が成り立つので、$\lambda_k<1$ と仮定しても一般性は失われない。

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k) &= f\left((1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i+\lambda_k x_k\right)\\
&\le (1-\lambda_k)f\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i\right)+\lambda_k f(x_k)\\
&\le (1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}f(x_i)+\lambda_k f(x_k)\\
&= \lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_k f(x_k).
\end{aligned}$$

定義 6.5 $f:\mathbb{E}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ を凸関数とする。

$$\mathrm{dom}f=f^{-1}((-\infty,\infty))$$

によって f の**有効定義域** $\mathrm{dom}f$ を定める。

$$\mathrm{epi}f=\{(x,\zeta)\in\mathbb{E}^n\times\mathbb{R}\mid f(x)\le\zeta\}$$

によって f の**エピグラフ** $\mathrm{epi}f$ を定める。空ではない凸集合 $A\subset\mathbb{E}^n$ に対して、

$$I_A(x)=\begin{cases}0 & (x\in A)\\ \infty & (x\in\mathbb{E}^n\setminus A)\end{cases}$$

によって A の**表示関数** I_A を定める。

命題 6.6 $f:\mathbb{E}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ を凸関数とすると、f の有効定義域 $\mathrm{dom}f$、$\alpha\in\mathbb{R}$ に対する $f^{-1}((-\infty,\alpha))$、$f^{-1}((-\infty,\alpha])$、エピグラフ $\mathrm{epi}f$ は凸集合になる。さらに空ではない凸集合 $A\subset\mathbb{E}^n$ の表示関数 I_A は凸関数になる。

証明　$x,y\in\mathrm{dom}f$ と $0\le\lambda\le1$ に対して

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)<\infty$$

となり $(1-\lambda)x+\lambda y\in\mathrm{dom}f$ が成り立つ。よって、$\mathrm{dom}f$ は凸集合になる。
$x,y\in f^{-1}((-\infty,\alpha))$ と $0\le\lambda\le1$ に対して

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)<(1-\lambda)\alpha+\lambda\alpha=\alpha$$

となり $(1-\lambda)x+\lambda y \in f^{-1}((-\infty,\alpha))$ が成り立つ。よって、$f^{-1}((-\infty,\alpha))$ は凸集合になる。$f^{-1}((-\infty,\alpha])$ の場合も同様に凸集合になることがわかる。

$(x,\zeta),(y,\eta) \in \mathrm{epi}f$ と $0 \le \lambda \le 1$ に対して

$$(1-\lambda)(x,\zeta)+\lambda(y,\eta) = ((1-\lambda)x+\lambda y, (1-\lambda)\zeta+\lambda\eta)$$

であり、

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \le (1-\lambda)\zeta+\lambda\eta$$

となるので、$(1-\lambda)(x,\zeta)+\lambda(y,\eta) \in \mathrm{epi}f$ が成り立つ。よって、$\mathrm{epi}f$ は凸集合になる。

凸集合 $A \subset \mathbb{E}^n$ の表示関数 I_A が凸関数になることを示す。$0 \le \lambda \le 1$ とする。$x, y \in A$ のとき $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$ となるので、

$$I_A((1-\lambda)x+\lambda y) = 0 = (1-\lambda)I_A(x)+\lambda I_A(y).$$

$x \in A$ と $y \in \mathbb{E}^n \setminus A$ に対して $0 < \lambda$ のとき

$$(1-\lambda)I_A(x)+\lambda I_A(y) = \infty \ge I_A((1-\lambda)x+\lambda y).$$

$\lambda = 0$ のとき

$$(1-\lambda)I_A(x)+\lambda I_A(y) = I_A(x) = I_A((1-\lambda)x+\lambda y).$$

$x, y \in \mathbb{E}^n \setminus A$ に対して

$$(1-\lambda)I_A(x)+\lambda I_A(y) = \infty \ge I_A((1-\lambda)x+\lambda y).$$

したがって、I_A は凸関数になる。

定理 6.7 凸関数 $f : \mathbb{E}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ は $\mathrm{int\,dom}f$ において連続になる。さらに、$\mathrm{int\,dom}f$ 内の任意のコンパクト部分集合において f は Lipschitz 連続になる。

証明 $x_0 \in \mathrm{int\,dom}f$ において f が連続になることを示す。$x_0 \in \mathrm{int}S \subset S \subset \mathrm{int\,dom}f$ を満たす単体 S をとる。$x_0 \in \mathrm{int}S$ だから $B(x_0,\rho) \subset S$ を満たす $\rho > 0$ が存在する。S の頂点を $x_1, \dots, x_{n+1}$ とすると、任意の $x \in S$ は

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \quad \left(\lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right)$$

と表示できる。$c = \max\{f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\}$ とおくと、この表示と Jensen の不等式 (命題 6.4) より

$$f(x) \le \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \le c.$$

$B(x_0,\rho)$ の任意の元 y は $\alpha \in [0,1]$ と $|u|=\rho$ を満たす u によって $y=x_0+\alpha u$ と表わすことができる。y を x_0 と x_0+u の凸結合で表わすと $y=(1-\alpha)x_0+\alpha(x_0+u)$ となり、

$$f(y) \leq (1-\alpha)f(x_0)+\alpha f(x_0+u)$$

が成り立つ。$x_0+u \in S$ であり $0 \leq \alpha$ だから

$$f(y)-f(x_0) \leq \alpha(f(x_0+u)-f(x_0)) \leq \alpha(c-f(x_0)).$$

次に x_0 を y と x_0-u の凸結合で表わすために、$x_0=(1-\lambda)y+\lambda(x_0-u)$ とおく。

$$\begin{aligned} x_0 &= (1-\lambda)(x_0+\alpha u)+\lambda(x_0-u) \\ &= (1-\lambda)x_0+(1-\lambda)\alpha u+\lambda x_0-\lambda u \\ &= x_0+(\alpha-\lambda\alpha-\lambda)u \\ &= x_0+(\alpha-\lambda(1+\alpha))u \end{aligned}$$

となるので、$\lambda=\alpha/(1+\alpha)$ となる。したがって、

$$x_0=\frac{1}{1+\alpha}y+\frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0-u)$$

が成り立つ。これより

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha}f(y)+\frac{\alpha}{1+\alpha}f(x_0-u)$$

となり $1+\alpha$ を両辺にかけると

$$(1+\alpha)f(x_0) \leq f(y)+\alpha f(x_0-u).$$

これより

$$f(x_0)-f(y) \leq \alpha(f(x_0-u)-f(x_0)) \leq \alpha(c-f(x_0)).$$

先に得た不等式とあわせると

$$|f(y)-f(x_0)| \leq \alpha(c-f(x_0)).$$

さらに $|y-x_0|=|\alpha u|=\alpha\rho$ だから $\alpha=|y-x_0|/\rho$ となり、

$$|f(y)-f(x_0)| \leq \frac{1}{\rho}(c-f(x_0))|y-x_0| \quad (y \in B(x_0,\rho))$$

を得る。これより、f は x_0 において連続になり、f は $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$ において連続になることがわかる。

コンパクト部分集合 $C \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ において f が Lipschitz 連続になることを示す。C がコンパクトであることから、ある $\rho > 0$ が存在し $C_\rho = C + B(0,\rho) \subset$

$\mathrm{int\,dom} f$ が成り立つ。C_ρ もコンパクトになるので、f は C_ρ 上で最大値 a をとる。$x, y \in C$ $(x \neq y)$ に対して

$$z = y + \frac{\rho}{|y-x|}(y-x)$$

とおくと $z \in C_\rho$ が成り立つ。y を x と z の凸結合 $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ で表わすと、

$$\begin{aligned}
y &= (1-\lambda)x + \lambda\left(y + \frac{\rho}{|y-x|}(y-x)\right)\\
&= (1-\lambda)x + \lambda\left(\frac{|y-x|+\rho}{|y-x|}y - \frac{\rho}{|y-x|}x\right)\\
&= \frac{(1-\lambda)|y-x| - \lambda}{|y-x|}x + \lambda\frac{|y-x|+\rho}{|y-x|}y\\
&= \frac{|y-x| - \lambda(|y-x|+\rho)}{|y-x|}x + \lambda\frac{|y-x|+\rho}{|y-x|}y.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\lambda = \frac{|y-x|}{|y-x|+\rho}$$

が成り立つ。$y = (1-\lambda)x + \lambda z$ より

$$f(y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$$

となり

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) \leq \lambda(f(z) - f(x)) &= \frac{|y-x|}{|y-x|+\rho}(f(z) - f(x))\\
&\leq \frac{|y-x|}{|y-x|+\rho}2a \leq \frac{2a}{\rho}|y-x|
\end{aligned}$$

を得る。これは $x = y$ の場合も成り立つ。よって任意の $x, y \in C$ について上の不等式が成り立つことになり、

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{2a}{\rho}|y-x|$$

を得る。したがって、C において f は Lipschitz 連続になる。

7 支持関数

定義 7.1 空ではない閉凸集合 $K \subset \mathbb{E}^n$ に対して、K の**支持関数** $h(K,\cdot) = h_K$ を

$$h(K,u) = \sup\{\langle x,u\rangle \mid x \in K\} \quad (u \in \mathbb{E}^n)$$

によって定める。$u \in \mathrm{dom} h(K,\cdot) \setminus \{0\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
H(K,u) &= \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x,u \rangle = h(K,u)\}, \\
H^-(K,u) &= \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x,u \rangle \leq h(K,u)\}
\end{aligned}
$$

とおくと、$H(K,u)$ は K の支持平面になり $H^-(K,u)$ は K の支持半空間になる。

命題 7.2 $K \subset \mathbb{E}^n$ を空ではない閉凸集合とする。

$$
\begin{aligned}
&h(K+t,u) = h(K,u) + \langle t,u \rangle && (t,u \in \mathbb{E}^n), \\
&h(K,\lambda u) = h(\lambda K,u) = \lambda h(K,u) && (\lambda \geq 0,\ u \in \mathbb{E}^n), \\
&h(K,u+v) \leq h(K,u) + h(K,v) && (u,v \in \mathbb{E}^n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。特に $K \neq \mathbb{E}^n$ ならば $h(K,\cdot)$ は凸関数になり、$\mathrm{int}\,\mathrm{dom} h_K$ において連続になる。$L \subset \mathbb{E}^n$ も空ではない凸集合とする。$h_K \leq h_L$ となるための必要十分条件は $K \subset L$ である。

証明　支持関数の定義より、

$$
\begin{aligned}
h(K+t,u) &= \sup\{\langle x+t,u \rangle \mid x \in K\} \\
&= \sup\{\langle x,u \rangle + \langle t,u \rangle \mid x \in K\} \\
&= h(K,u) + \langle t,u \rangle, \\
h(K,\lambda u) &= \sup\{\langle x,\lambda u \rangle \mid x \in K\} \\
&= \sup\{\lambda \langle x,u \rangle \mid x \in K\} \\
&= \lambda h(K,u), \\
h(\lambda K,u) &= \sup\{\langle \lambda x,u \rangle \mid x \in K\} \\
&= \sup\{\lambda \langle x,u \rangle \mid x \in K\} \\
&= \lambda h(K,u), \\
h(K,u+v) &= \sup\{\langle x,u+v \rangle \mid x \in K\} \\
&= \sup\{\langle x,u \rangle + \langle x,v \rangle \mid x \in K\} \\
&\leq \sup\{\langle x,u \rangle \mid x \in K\} + \sup\{\langle x,v \rangle \mid x \in K\} \\
&= h(K,u) + h(K,v).
\end{aligned}
$$

これらより $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$
h(K,(1-\lambda)u+\lambda v) \leq h(K,(1-\lambda)u) + h(K,\lambda v) = (1-\lambda)h(K,u) + \lambda h(K,v)
$$

となるので、$h(K,\cdot)$ は凸関数になる。定理 6.7 より $h(K,\cdot)$ は $\mathrm{int}\,\mathrm{dom} h_K$ において連続になる。

$K \subset L$ とすると

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u\rangle \mid x \in K\} \le \sup\{\langle x, u\rangle \mid x \in L\} = h_L(u)$$

が成り立つ。逆に任意の $u \in \mathbb{E}^n$ について $h_K(u) \le h_L(u)$ が成り立つと仮定する。すると K の任意の支持半空間は L の同じ外向き法ベクトルを持つ支持半空間に含まれることになり、系 5.6 より凸閉集合は支持半空間全体の共通部分に一致するので、$K \subset L$ が成り立つ。

定義 7.3 $K, L \in \mathcal{K}^n$ に対して、命題 3.3 とコンパクト性の性質より、$K + L \in \mathcal{K}^n$ が成り立つ。これを **Minkowski 和**と呼ぶ。$\mathcal{K}^n$ 上定義された可換半群に値を持つ関数 f が

$$f(K + L) = f(K) + f(L) \quad (K, L \in \mathcal{K}^n)$$

を満たすとき、f を **Minkowski 加法的**という。

定理 7.4 $K, L \in \mathcal{K}^n$ に対して次の等式が成り立つ。

$$h(K + L, \cdot) = h(K, \cdot) + h(L, \cdot).$$

証明 原点 0 での値は両辺とも 0 になるので、$\mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ で考えればよい。K, L はコンパクトだから、$u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ に対して、ある $x \in K$ が存在して $h(K, u) = \langle x, u\rangle$ となり、ある $y \in L$ が存在して $h(L, u) = \langle y, u\rangle$ となる。よって

$$h(K, u) + h(L, u) = \langle x + y, u\rangle \le h(K + L, u)$$

を得る。次に $z \in K + L$ をとると $z = x' + y'$ となる $x' \in K$ と $y' \in L$ が存在する。

$$\langle z, u\rangle = \langle x', u\rangle + \langle y', u\rangle \le h(K, u) + h(L, u)$$

となるので $h(K + L, u) \le h(K, u) + h(L, u)$ を得る。以上より次の等式を得る。

$$h(K + L, u) = h(K, u) + h(L, u) \quad (u \in \mathbb{E}^n).$$

系 7.5 $(\mathcal{K}^n, +)$ は $\{0\}$ を単位元とする可換半群になり、$K, L, M \in \mathcal{K}^n$ と $\lambda, \mu \ge 0$ に対して次の性質を持つ。

(1) $K + M = L + M$ ならば、$K = L$,

(2) $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$,

(3) $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$,

(4) $\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$,

(5) $1K = K$.

証明　(1) $K+M=L+M$ より

$$h(K,\cdot)+h(M,\cdot)=h(K+M,\cdot)=h(L+M,\cdot)=h(L,\cdot)+h(M,\cdot)$$

となり $h(K,\cdot)=h(L,\cdot)$ が成り立つ。これより K と L の支持半空間はすべての方向で一致することになり、系 5.6 より $K=L$ を得る。

(2)、(4)、(5) 定義より直接わかる。

(3) 命題 7.2 と (1) より

$$\begin{aligned} h((\lambda+\mu)K,\cdot) &= (\lambda+\mu)h(K,\cdot)=\lambda h(K,\cdot)+\mu h(K,\cdot)=h(\lambda K,\cdot)+h(\mu K,\cdot) \\ &= h(\lambda K+\mu K,\cdot) \end{aligned}$$

となり $(\lambda+\mu)K=\lambda K+\mu K$ を得る。

8 Hausdorff 距離

定義 8.1 $\mathbb{E}^n$ 内の空ではないコンパクト部分集合の全体を $\mathcal{C}^n$ で表わす。$K,L\in\mathcal{C}^n$ に対して

$$\delta(K,L)=\max\{\sup\{d(x,L)\mid x\in K\},\sup\{d(x,K)\mid x\in L\}\}$$

によって **Hausdorff 距離**を定める。

命題 8.2 $K,L\in\mathcal{C}^n$ に対して

$$\delta(K,L)=\min\{\lambda\geq 0\mid K\subset L+\lambda B^n, L\subset K+\lambda B^n\}$$

が成り立つ。さらに、δ は $\mathcal{C}^n$ の距離になる。

証明　$\alpha=\min\{\lambda\geq 0\mid K\subset L+\lambda B^n, L\subset K+\lambda B^n\}$ とおく。すると任意の $x\in K$ に対して $x\in L+\alpha B^n$ となり、ある $y\in L$ と $b\in B^n$ によって $x=y+\alpha b$ と表わすことができる。$|x-y|=|\alpha b|\leq\alpha$ となり、$d(x,L)\leq\alpha$ が成り立つ。$x\in K$ は任意なので

$$\sup\{d(x,L)\mid x\in K\}\leq\alpha.$$

L と K を入れ換えることにより $\sup\{d(x,K)\mid x\in L\}\leq\alpha$. したがって、$\delta(K,L)\leq\alpha$ が成り立つ。次に $0<\lambda<\alpha$ となる λ を任意にとる。すると $K\not\subset L+\lambda B^n$ または $L\not\subset K+\lambda B^n$ が成り立つ。そこで $K\not\subset L+\lambda B^n$ とすると、ある $x\in K$ は $x\notin L+\lambda B^n$ を満たす。これより任意の $y\in L$ に対して $|x-y|>\lambda$ が成り立つ。よって $d(x,L)\geq\lambda$ となり $\delta(K,L)\geq\lambda$ を得る。$L\not\subset K+\lambda B^n$ の場合も同様にして $\delta(K,L)\geq\lambda$ を得る。$0<\lambda<\alpha$ となる λ に対して $\delta(K,L)\geq\lambda$ が成り立つことになり、$\delta(K,L)\geq\alpha$ が成り立つ。以上より $\delta(K,L)=\alpha$ を得る。

次に δ が距離になることを示す。任意の $K, L \in \mathcal{C}^n$ に対して

$$\delta(K, L) = \delta(L, K) \geq 0$$

が成り立つことは定義より直接わかる。

$x \in K$ に対して $d(x, K) = 0$ が成り立つので $\delta(K, K) = 0$ となる。逆に $\delta(K, L) = 0$ が成り立つと仮定する。任意の $x \in K$ に対して $d(x, L) = 0$ となるので $x \in L$ が成り立つ。同様に $x \in L$ に対して $d(x, K) = 0$ となるので $x \in K$ が成り立つ。したがって、$K = L$ を得る。

最後に三角不等式を示す。$K, L, M \in \mathcal{C}^n$ をとる。$\delta(K, L) = \alpha,\ \delta(L, M) = \beta$ とおく。このとき、$K \subset L + \alpha B^n$ と $L \subset M + \beta B^n$ が成り立つ。さらに

$$K \subset M + \alpha B^n + \beta B^n = M + (\alpha + \beta) B^n$$

となるので、

$$\delta(K, M) \leq \alpha + \beta = \delta(K, L) + \delta(L, M).$$

補題 8.3 $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{C}^n$ の単調減少列とする。すなわち任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $K_{i+1} \subset K_i$ が成り立つと仮定する。このとき、$\mathcal{C}^n$ の Hausdorff 距離に関する極限は $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の共通部分に一致する。

証明 $K = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ とおく。コンパクト集合の性質より K はコンパクトになり、空ではない。$\displaystyle\lim_{i \to \infty} K_i \neq K$ と仮定すると、ある $\epsilon > 0$ が存在して任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\delta(K_m, K) > \epsilon$ が成り立つ。よって $K_m \not\subset K + \epsilon B^n$ となる。そこで、$A_m = K_m \setminus \mathrm{int}(K + \epsilon B^n)$ とおくと、A_m は単調減少になり空ではないコンパクト集合になる。よって $A = \displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ は空ではないコンパクト集合になる。任意の $m \in \mathbb{N}$ について $A_m \cap \mathrm{int}(K + \epsilon B^n) = \emptyset$ となり $A \cap \mathrm{int}(K + \epsilon B^n) = \emptyset$、さらに $A \cap K = \emptyset$ が成り立つ。他方、$A_m \subset K_m$ だから $A \subset K$ となり $A \neq \emptyset$ だから矛盾する。以上より $\displaystyle\lim_{i \to \infty} K_i = K$ が成り立つ。

定理 8.4 距離空間 $(\mathcal{C}^n, \delta)$ は完備になる。

証明 $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{C}^n$ の Cauchy 列とする。$(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は有界列になる。したがって、ある $R > 0$ が存在し $\delta(K_1, K_i) \leq R$ が成り立つ。これより $K_i \subset K_1 + RB^n$ がすべての $i \in \mathbb{N}$ について成り立つ。特に $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ は有界集合になる。よって $A_m = \mathrm{cl}\left(\displaystyle\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i\right)$ は $\mathcal{C}^n$ の単調減少列になる。補題 8.3 より $\displaystyle\lim_{m \to \infty} A_m = A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ が成り立つ。つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し $m \geq n_0$ ならば $\delta(A, A_m) \leq \epsilon$ が

成り立つ。これより、$A_m \subset A + \epsilon B^n$ となる。よって $i \geq n_0$ ならば $K_i \subset A + \epsilon B^n$ となる。$(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることからある $n_1 \geq n_0$ が存在し $i, j \geq n_1$ ならば $K_j \subset K_i + \epsilon B^n$ が成り立つ。これより $i, m \geq n_1$ ならば $\displaystyle\bigcup_{j=m}^{\infty} K_j \subset K_i + \epsilon B^n$ となる。$K_i + \epsilon B^n$ は閉集合だから左辺の閉包をとると、$A_m \subset K_i + \epsilon B^n$ も成り立つ。A の定め方より、$i \geq n_1$ ならば $A \subset K_i + \epsilon B^n$ となる。以上より $i \geq n_1$ ならば $\delta(K_i, A) \leq \epsilon$ が成り立つ。したがって、K_i は A に収束し $(\mathcal{C}^n, \delta)$ は完備になる。

定理 8.5 $\mathcal{C}^n$ の有界列は収束部分列を含む。

証明 $(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{C}^n$ の有界列とする。$\cup_i K_i^0$ は有界になるので、$\mathbb{E}^n$ 内のある立方体 C に含まれる。この立方体の一辺の長さを γ とする。各 $m \in \mathbb{N}$ について C の一辺を 2^m 等分し C を辺の長さが $2^{-m}\gamma$ の部分立方体 2^{mn} 個に分割する。$K \in \mathcal{C}^n$ に対して K と共通部分を持つ部分立方体の合併を $A_m(K)$ で表わす。部分立方体の個数は有限個なので、部分立方体の部分集合の個数も有限個になる。したがって、$(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(K_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ が存在し $A_1(K_i^1) = T_1$ は $i \in \mathbb{N}$ に依存せず一定になる。同様に $(K_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(K_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ が存在し $A_2(K_i^2) = T_2$ は $i \in \mathbb{N}$ に依存せず一定になる。この操作を続けることにより、各 $m \in \mathbb{N}$ に対して列 $(K_i^m)_{i\in\mathbb{N}}$ が存在し

$$(*) \qquad A_m(K_i^m) = T_m \qquad (i \in \mathbb{N})$$

と

$$(**) \qquad k < m \text{ に対して } (K_i^m)_{i\in\mathbb{N}} \text{ は } (K_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}$$

を満たす。$(*)$ より任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について $A_m(K_i^m) = A_m(K_j^m) = T_m$ が成り立つので、T_m を構成する各部分立方体には K_i^m の元と K_j^m の元がともに存在し、$K_i^m \subset K_j^m + 2^{-m}\sqrt{n}\gamma B^n$ が成り立つ。よって任意の $i, j, m \in \mathbb{N}$ について $\delta(K_i^m, K_j^m) \leq 2^{-m}\sqrt{n}\gamma$ となる。さらに $(**)$ より任意の $i, j \in \mathbb{N}$ と $k \geq m$ について $\delta(K_i^m, K_j^k) \leq 2^{-m}\sqrt{n}\gamma$ が成り立つ。そこで、$K_m = K_m^m$ とおくと $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は $(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列になり、

$$\delta(K_m, K_k) \leq 2^{-m}\sqrt{n}\gamma \qquad (k \geq m).$$

したがって、$(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列になり、定理 8.4 より収束列になる。

定理 8.6 $\mathcal{K}^n$ は $\mathcal{C}^n$ の閉部分集合になる。特に $(\mathcal{K}^n, \delta)$ も完備距離空間になる。

証明 $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ が開集合になることを示す。$K \in \mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ をとる。K は凸ではないのである $x, y \in K$ と $0 < \lambda < 1$ が存在し $z = (1-\lambda)x + \lambda y \notin K$ となる。さらに K はコンパクトだからある $\epsilon > 0$ が存在し $B(z, \epsilon) \cap K = \emptyset$ が成り立つ。そこで $\mathcal{C}^n$ 内の K の $\epsilon/2$ 近傍の元 K' を任意にとる。つまり、$K' \in \mathcal{C}^n$ かつ $\delta(K, K') < \epsilon/2$ とする。$x, y \in K$ だから $d(x, K') < \epsilon/2,\ d(y, K') < \epsilon/2$ となり、$|x' - x| < \epsilon/2,\ |y' - y| < \epsilon/2$ を満たす $x', y' \in K'$ が存在する。$z' = (1-\lambda)x' + \lambda y'$ とおくと

$$|z' - z| = |(1-\lambda)(x' - x) + \lambda(y' - y)| \leq (1-\lambda)|x' - x| + \lambda|y' - y| < \epsilon/2.$$

もし $z' \in K'$ ならば $\delta(K, K') < \epsilon/2$ より $|w - z'| < \epsilon/2$ を満たす $w \in K$ が存在する。ところが、これより $|w-z| \leq |w-z'| + |z'-w| < \epsilon$ となり $B(z,\epsilon) \cap K = \emptyset$ に矛盾する。よって、$z' \notin K'$ となり K' も凸ではない。以上より K の $\epsilon/2$ 近傍は $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ に含まれることになり、$\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ は開集合になる。したがって、$\mathcal{K}^n$ は $\mathcal{C}^n$ の閉部分集合になる。定理 8.4 より $\mathcal{C}^n$ は完備なので、$\mathcal{K}^n$ も完備になる。

系 8.7 $\mathbb{E}^n$ 内の凸体の有界列は凸体に収束する部分列を持つ。

証明 定理 8.5 より凸体の有界列は収束部分列を持つ。定理 8.6 より $\mathcal{K}^n$ は $\mathcal{C}^n$ 内で閉部分集合なので、この収束列の極限は $\mathcal{K}^n$ の元になり凸体になる。

定理 8.8 $K_i, K \in \mathcal{K}^n$ とする。$\lim_{i\to\infty} K_i = K$ が成り立つための必要十分条件は次の (1) と (2) が成り立つことである。

(1) K の各点は任意の $i \in \mathbb{N}$ について $x_i \in K_i$ となる点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の極限になる。

(2) 各 $j \in \mathbb{N}$ について $x_{i_j} \in K_{i_j}$ を満たす狭義単調増加自然数列 $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ と収束列 $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ に対して $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ の極限は K に含まれる。

証明 まず $\lim_{i\to\infty} K_i = K$ が成り立つと仮定する。$\lim_{i\to\infty} \delta(K, K_i) = 0$ となることに注意しておく。K の任意の元 x をとる。$x_i = p(K_i, x)$ とおくと、$x_i \in K_i$ となり $|x - x_i| = d(x, K_i) \leq \delta(K, K_i)$ だから、x_i は $i \to \infty$ のとき x に収束する。よって (1) が成り立つ。次に各 $j \in \mathbb{N}$ について $x_{i_j} \in K_{i_j}$ を満たす狭義単調増加自然数列 $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ と収束列 $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ に対して、$x = \lim_{j\to\infty} x_{i_j} \notin K$ と仮定する。K はコンパクトだからある $\rho > 0$ が存在し $B(x,\rho) \cap (K + \rho B^n) = \emptyset$ が成り立つ。$x = \lim_{j\to\infty} x_{i_j}$ より十分大きな j に対して $|x_{i_j} - x| < \rho$ となる。また $\lim_{i\to\infty} \delta(K, K_i) = 0$ より十分大きな j に対して $\delta(K_{i_j}, K) < \rho$ となる。これより $x_{i_j} \in K_{i_j} \subset K + \rho B^n$ となり $x_{i_j} \in B(x,\rho) \cap (K + \rho B^n)$ が成り立つ。これは上の結論と矛盾するので、$x \in K$ が成り立つ。よって (2) が成り立つ。

逆に (1) と (2) が成り立つと仮定する。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$(*) \qquad \text{十分大きな } i \text{ について } K \subset K_i + \epsilon B^n$$
$$(**) \qquad \text{十分大きな } i \text{ について } K_i \subset K + \epsilon B^n$$

が成り立つことを示せば $\lim_{i\to\infty} K_i = K$ を証明できる。もし $(*)$ が成り立たないとすると、狭義単調増加自然数列 (k_j) が存在し $K \not\subset K_{k_j} + \epsilon B^n$ が成り立つ。これより $y_{k_j} \in K$ と $y_{k_j} \notin (K_{k_j} + \epsilon B^n)$ を満たす点列 y_{k_j} をとることができる。この y_{k_j} は $d(y_{k_j}, K_{k_j}) \geq \epsilon$ を満たす。K はコンパクトだから (y_{k_j}) は収束部分列 y_{i_j} を持つ。y_{i_j} の $i \to \infty$ のときの極限を y とすると $y \in K$ が成り立つ。この y に (1) を適用すると点列 $x_i \in K_i$ が存在し x_i の $i \to \infty$ のときの極限は y になる。点列 y_{i_j} と x_{i_j} は

ともに $j \to \infty$ のとき y に収束するので $|x_{i_j} - y_{i_j}| \to 0$ となる。ところが、これは $x_{i_j} \in K_{i_j}$ かつ $d(y_{k_j}, K_{k_j}) \geq \epsilon$ に矛盾する。したがって、$(*)$ が成り立つ。

次にもし $(**)$ が成り立たないとすると、狭義単調増加自然数列 (i_j) が存在し $K_{i_j} \not\subset K + \epsilon B^n$ が成り立つ。これより $y_{i_j} \in K_{i_j}$ と $y_{i_j} \notin K + \epsilon B^n$ を満たす点列 y_{i_j} をとることができる。他方 (1) より K の元は K_i の元の極限になるので、十分大きな j について $x_{i_j} \in K_{i_j}$ かつ $x_{i_j} \in K + \epsilon B^n$ を満たす点列 x_{i_j} が存在する。

$$x_{i_j}, y_{i_j} \in K_{i_j}, \quad x_{i_j} \in K + \epsilon B^n, \quad y_{i_j} \notin K + \epsilon B^n$$

より x_{i_j} と y_{i_j} を結ぶ線分上に $z_{i_j} \in K_{i_j} \cap \mathrm{bd}(K + \epsilon B^n)$ を満たす点 z_{i_j} が存在する。$\mathrm{bd}(K + \epsilon B^n)$ はコンパクトだから、点列 z_{i_j} は収束部分列を持ちその極限は $\mathrm{bd}(K + \epsilon B^n)$ に含まれる。ところが、(2) よりこの極限は K に含まれることになり矛盾する。したがって、$(**)$ が成り立つ。

命題 8.9 $K, L \in \mathcal{C}^n$ に対して

$$\delta(\mathrm{conv}K, \mathrm{conv}L) \leq \delta(K, L)$$

が成り立つ。特に凸包をとる写像

$$\mathrm{conv} : \mathcal{C}^n \to \mathcal{K}^n \,;\, K \mapsto \mathrm{conv}K$$

は Lipschitz 連続になる。$K, K', L, L' \in \mathcal{C}^n$ に対して

$$\begin{aligned} \delta(K + K', L + L') &\leq \delta(K, L) + \delta(K', L'), \\ \delta(K \cup K', L \cup L') &\leq \max\{\delta(K, L), \delta(K', L')\} \end{aligned}$$

が成り立つ。特に和と合併をとる写像

$$\begin{aligned} + : \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n \,;\, (K, K') \mapsto K + K', \\ \cup : \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n \,;\, (K, K') \mapsto K \cup K' \end{aligned}$$

は $\mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n$ の和の距離と最大値の距離のどちらに対しても Lipschitz 連続になる。

証明 $K \subset L + \lambda B^n$ とすると、

$$K \subset L + \lambda B^n \subset \mathrm{conv}L + \lambda B^n.$$

定理 3.6 より $\mathrm{conv}L + \lambda B^n$ は凸になり $\mathrm{conv}K \subset \mathrm{conv}L + \lambda B^n$ が成り立つ。同様に $L \subset K + \lambda B^n$ ならば $\mathrm{conv}L \subset \mathrm{conv}K + \lambda B^n$ が成り立つことがわかる。これらより $\delta(\mathrm{conv}K, \mathrm{conv}L) \leq \lambda$ となり、$\delta(\mathrm{conv}K, \mathrm{conv}L) \leq \delta(K, L)$ を得る。

$K \subset L + \lambda B^n$ と $K' \subset L' + \mu B^n$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} K + K' &\subset L + L' + \lambda B^n + \mu B^n = (L + L') + (\lambda + \mu) B^n, \\ K \cup K' &\subset (L + \lambda B^n) \cup (L' + \mu B^n) \subset (L \cup L') + \max\{\lambda, \mu\} B^n \end{aligned}$$

がわかる。同様に $L \subset K + \lambda B^n$ と $L' \subset K' + \mu B^n$ が成り立つと仮定すると、

$$L + L' \subset (K + K') + (\lambda + \mu)B^n, \quad L \cup L' \subset (K \cup K') + \max\{\lambda, \mu\}B^n$$

がわかる。これらより

$$\delta(K + K', L + L') \leq \lambda + \mu, \quad \delta(K \cup K', L \cup L') \leq \max\{\lambda, \mu\}$$

となり

$$\delta(K + K', L + L') \leq \delta(K, L) + \delta(K', L'),$$
$$\delta(K \cup K', L \cup L') \leq \max\{\delta(K, L), \delta(K', L')\}$$

を得る。

定理 8.10 $K, L \in \mathcal{K}^n$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\delta(K, L) = \sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\}.$$

証明 $\delta(K, L) \leq \alpha$ とする。Hausdorff 距離の定義より $K \subset L + \alpha B^n$ が成り立つ。これと命題 7.2 より任意の $u \in S^{n-1}$ に対して

$$h(K, u) \leq h(L + \alpha B^n, u) = h(L, u) + \alpha$$

となるので、$h(K, u) - h(L, u) \leq \alpha$ を得る。$\delta(K, L) \leq \alpha$ より $L \subset K + \alpha B^n$ も成り立つので、$h(K, u) - h(L, u) \leq \alpha$ も得る。したがって、$\delta(K, L) \leq \alpha$ ならば

$$\sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\} \leq \alpha$$

となり

$$\sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\} \leq \delta(K, L)$$

が成り立つ。

逆に

$$\sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\} \leq \alpha$$

とすると、任意の $u \in S^{n-1}$ に対して $|h(K, u) - h(L, u)| \leq \alpha$ となる。$h(K, u) - h(L, u) \leq \alpha$ となるので、

$$h(K, u) \leq h(L, u) + \alpha = h(L + \alpha B^n, u).$$

よって、命題 7.2 より $K \subset L + \alpha B^n$ を得る。$h(L, u) - h(K, u) \leq \alpha$ も成り立つので $L \subset K + \alpha B^n$ も得る。したがって $\delta(K, L) \leq \alpha$ となり

$$\delta(K, L) \leq \sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\}$$

が成り立つ。以上より

$$\delta(K, L) = \sup\{|h(K, u) - h(L, u)| \mid u \in S^{n-1}\}$$

が成り立つ。

補題 8.11 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ とし、$K_2 \subset \mathrm{int}K_1$ と仮定する。このとき、ある $\eta > 0$ が存在し $\delta(K_1, K) < \eta$ を満たす任意の $K \in \mathcal{K}^n$ に対して $K_2 \subset K$ が成り立つ。

証明 K_2 はコンパクトだから $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ に対してある $x_2 \in K_2$ が存在し $h(K_2, u) = \langle x_2, u \rangle$ が成り立つ。$K_2 \subset \mathrm{int}K_1$ だから十分小さい $\rho > 0$ に対して $x_1 = x_2 + \rho u/|u|^2 \in \mathrm{int}K_1 \subset K_1$ が成り立ち

$$\langle x_1, u \rangle = \left\langle x_2 + \rho \frac{u}{|u|^2}, u \right\rangle = \langle x_2, u \rangle + \rho = h(K_2, u) + \rho$$

を得る。したがって、次の不等式を得る。

$$h(K_1, u) \geq \langle x_1, u \rangle = h(K_2, u) + \rho > h(K_2, u).$$

よって $\mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ において $h(K_1, \cdot) - h(K_2, \cdot) > 0$ となる。支持関数 $h(K_1, \cdot), h(K_2, \cdot)$ は命題 7.2 より凸関数になり、定理 6.7 より連続になる。したがって、$h(K_1, \cdot) - h(K_2, \cdot)$ は連続関数になるので、コンパクト集合 S^{n-1} 上で正の最小値 η をとる。これより

$$\eta \leq h(K_1, u) - h(K_2, u) \quad (u \in S^{n-1})$$

が成り立つ。$\delta(K_1, K) < \eta$ を満たす任意の $K \in \mathcal{K}^n$ に対して定理 8.10 より

$$|h(K_1, u) - h(K, u)| < \eta \quad (u \in S^{n-1})$$

が成り立つ。したがって、任意の $u \in S^{n-1}$ に対して

$$h(K_2, u) \leq h(K_1, u) - \eta < h(K, u)$$

となり、命題 7.2 より $K_2 \subset K$ が成り立つ。

定理 8.12 体積関数 V_n は $\mathcal{K}^n$ において連続になる。

証明 $K_0 \in \mathcal{K}^n$ をとる。まず $V_n(K_0) = 0$ の場合を考える。K_0 は $\mathbb{E}^n$ のある超平面 H に含まれる。$\delta(K_0, K) = \alpha \leq 1$ とすると、$K \subset K_0 + \alpha B^n$ が成り立つ。H の単位法ベクトル u をとり $I = [-u, u]$ とおくと

$$K_0 + \alpha B^n \subset H \cap (K_0 + \alpha B^n) + \alpha I \subset H \cap (K_0 + B^n) + \alpha I$$

となる。Fubini の定理より

$$V_n(H \cap (K_0 + B^n) + \alpha I) = V_{n-1}(H \cap (K_0 + B^n))2\alpha.$$

したがって

$$V_n(K) \leq 2V_{n-1}(H \cap (K_0 + B^n))\alpha = 2V_{n-1}(H \cap (K_0 + B^n))\delta(K_0, K)$$

が成り立ち、V_n は K_0 で連続になる。

次に $V_n(K_0) > 0$ の場合を考える。このとき K_0 の内部は空ではない。$0 \in \mathrm{int}K_0$ と仮定しても一般性は失われない。$\rho B^n \subset \mathrm{int}K_0$ を満たす $\rho > 0$ をとっておく。任意の $\epsilon > 0$ に対して $(\lambda^n - 1)\lambda^n V_n(K_0) < \epsilon$ を満たす $\lambda > 1$ をとることができる。$\rho B^n \subset \mathrm{int}K_0$ だから補題 8.11 よりある $\eta > 0$ が存在し $\delta(K_0, K) < \eta$ を満たす任意の $K \in \mathcal{K}^n$ に対して $\rho B^n \subset K$ が成り立つ。$\alpha = \min\{\eta, (\lambda - 1)\rho\}$ とおく。$\delta(K_0, K) < \alpha$ を満たす任意の $K \in \mathcal{K}^n$ に対して

$$K_0 \subset K + \alpha B^n \subset K + (\lambda - 1)\rho B^n \subset K + (\lambda - 1)K = \lambda K.$$

最後の等号は系 7.5 の (3) より成り立つ。同様に $K \subset \lambda K_0$ も成り立つ。

$$V_n(K_0) \leq V_n(\lambda K) = \lambda^n V_n(K), \quad V_n(K) \leq \lambda^n V_n(K_0)$$

より

$$V_n(K_0) - V_n(K) \leq (\lambda^n - 1)V_n(K) \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n V_n(K_0) < \epsilon.$$

さらに $\lambda > 1$ だから

$$V_n(K) - V_n(K_0) \leq (\lambda^n - 1)V_n(K_0) \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n V_n(K_0) < \epsilon.$$

以上より $|V_n(K_0) - V_n(K)| < \epsilon$ となり、V_n は K_0 においても連続になる。

参考文献

この講義ノート全体を通して

[1] Rolf Schneider, Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, Cambridge University Press, 1993

を参考にした。第 1 節「線形代数からの準備」と第 2 節「位相からの準備」は、[1] の Conventions and notation を元に基礎的事項の解説を追加した。第 3 節から第 8 節までは、[1] の

1.1 Convex sets and combinations
1.2 The metric projection
1.3 Support and separation
1.5 Convex functions
1.7 The support function
1.8 The Hausdorff metric

のそれぞれの節の内容にもとづいている。ただし、1 学期分の講義内容に収めるため、Hausdorff 距離の性質を導くために必要な事項を選択した。