数理物質科学研究科

微分幾何学 II

Lie 群入門

田崎博之

2010 年度 1 学期

数理物質科学研究科

微分幾何学 II

授業概要

Lie 群と Lie 環の基本的事項を初歩から解説する。それをもとに個々の線形 Lie 群 (行列の群) について代数的、位相的、解析的性質を調べる。

1. Lie 群と Lie 環　2. 一径数部分群　3. 指数写像　4. 線形 Lie 群

目 次

1 多様体 **1**

2 Lie 群と Lie 環 **4**

3 連結 Lie 群 **8**

4 一般線形群 **9**

5 一径数部分群 **11**

6 行列の指数関数 **14**

7 指数写像 **16**

8 準同型写像 **19**

9 閉 Lie 部分群 **23**

10 線形 Lie 群 **26**

11 Lie 部分群と Lie 部分環 **31**

12 線形 Lie 群の連結性 **35**

1　多様体

正確な定義は後で述べるが、群構造と多様体構造の両方を持っていて、群演算から定まる写像が C^∞ 級写像になるものを Lie 群という。Lie 群を理解するためには、群構造と多様体構造の知識が前提になる。この節では多様体について簡単に復習しておく。

定義 1.1 Hausdorff 位相空間 M と M の開集合族 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が

(1) $M = \displaystyle\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$,

(2) 各 $\alpha \in A$ に対して ϕ_α は U_α から $\mathbb{R}^n$ への写像であり、$\phi_\alpha(U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合になり ϕ_α は U_α から $\phi_\alpha(U_\alpha)$ への位相同型写像、

(3) 各 $\alpha, \beta \in A$ に対して、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき、$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同型写像

を満たすとき、$(M, \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ を n **次元多様体**と呼び、$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を M の**多様体構造**と呼ぶ。M の次元を $\dim M$ で表すことにする。$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ がわかっている場合や特に記述する必要のない場合には単に M と書く。

例 1.2 $(M, \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}), (N, \{(V_i, \psi_i)\}_{i\in I})$ を多様体とする。$M \times N$ に積位相を入れると、$(M \times N, \{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \psi_i)\}_{(\alpha,i)\in A\times I})$ も多様体になる。この多様体を M と N の**積多様体**と呼ぶ。

定義 1.3 $(M, \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ を n 次元多様体とする。M の開集合 V と写像 $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ が

(1) $\psi(V)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$\psi : V \to \psi(V)$ は位相同型写像、

(2) 各 $\alpha \in A$ について $\psi \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap V) \to \psi(U_\alpha \cap V)$ は微分同型写像

を満たすとき、(V, ψ) を M の座標近傍と呼ぶ。ψ を $\mathbb{R}^n$ の成分を使って表わした $\psi_1, \ldots, \psi_n$ を V における局所座標系といい、$(V; \psi_1, \ldots, \psi_n)$ を局所座標近傍という。

定義 1.4 m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への写像 f が

(1) f は連続写像、

(2) $f(U) \subset V$ を満たす M の任意の座標近傍 (U, ϕ) と N の任意の座標近傍 (V, ψ) に対して、$\mathbb{R}^m$ の開集合 $\phi(U)$ から $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\psi(V)$ への写像 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ は C^∞ 級写像

を満たすとき、f を C^∞ 級写像と呼ぶ。M から N への C^∞ 級写像 f が逆写像 $f^{-1}:N \to M$ を持ち、f^{-1} もまた C^∞ 級写像になるとき、f を微分同型写像と呼び、M と N は微分同型であるという。

定義 1.5 多様体 M の点 x の近傍で定義された C^∞ 級関数の全体 F_x から実数 $\mathbb{R}$ への写像 v が、$f, g \in F_x$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v(f)+v(g), \\ v(rf) &= rv(f), \\ v(fg) &= v(f)g(x)+f(x)v(g) \end{aligned}$$

を満たすとき、v を多様体 M の点 x における接ベクトルと呼ぶ。それら全体を $T_x(M)$ で表し、M の x における接ベクトル空間と呼ぶ。

例 1.6 n 次元多様体 M の点 x を含む座標近傍 (U, ϕ) を一つとる。U は x の開近傍だから、F_x の各元 f に対して $f \circ \phi^{-1}$ は $\phi(V)$ 上の C^∞ 級関数になる。$(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の座標とし、

$$v_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})\bigg|_{\phi(x)}$$

とおく。積の微分の公式を使うと $v_i \in T_x(M)$ となることがわかる。この接ベクトル v_i を $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ と書くことにする。

定理 1.7 n 次元多様体 M の各点 x における接ベクトル空間 $T_x(M)$ は n 次元ベクトル空間になる。さらに、$(U; x_1, \ldots, x_n)$ を M の x における局所座標近傍とすると $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ $(1 \leq i \leq n)$ は $T_x(M)$ の基底になる。

命題 1.8 F を多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像とする。$x \in M,\ y = F(x) \in N$ とする。このとき、$v \in T_x(M)$ に対して、

$$v'(f) = v(f \circ F) \quad (f \in F_{F(x)})$$

によって $v' : F_{F(x)} \to \mathbb{R}$ を定めると、v' は N の点 $F(x)$ における接ベクトルになる。$v' = dF_x(v)$ と書くことにすると、

$$dF_x : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$$

は線形写像になる。

定義 1.9 多様体 M の開集合 O の各点 x に対して、M の x における接ベクトル X_x を対応させる対応 X が次の条件を満たすとき、X を O 上のベクトル場と呼ぶ。M の任意の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ に対して、$x \mapsto X_x(x_i)$ がすべての i について $U \cap O$ 上の C^∞ 級関数になる。

注意 1.10 X を多様体 M 上のベクトル場とする。$x \in M$ を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。定理 1.7 より、$X_x \in T_x(M)$ は

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x$$

と表すことができるので、上の条件は基底 $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ $(1 \leq i \leq n)$ の線形結合で X_x を表したときの係数がすべて C^∞ 級関数になることと同値である。これは

$$X_x(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x x_j = a_j(x)$$

よりわかる。上のようにベクトル場を U において $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ $(1 \leq i \leq n)$ の線形結合で表示したものをベクトル場の局所表示という。この局所表示の形からわかるように、ベクトル場は多様体上定義された C^∞ 級関数に作用する一階線形偏微分作用素とみることができる。

命題 1.11 M を多様体とする。M 上の C^∞ 級関数全体を $C^\infty(M)$ で表し、M 上のベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す。

(1) M 上のベクトル場 X, Y と各 $f \in C^\infty(M)$ に対して、

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

とおくと、Z は M 上のベクトル場になる。$Z = [X, Y]$ と書くことにする。$[X, Y]$ を X と Y の **Lie ブラケット**と呼ぶ。

(2) (1) で定めた写像

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

は双線形写像になり $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$[X, Y] + [Y, X] = 0, \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たす。上の右の等式を **Jacobi 恒等式**と呼ぶ。

(1) の Z がベクトル場になることのみ確認しておこう。X と Y の局所表示を

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする。

$$\begin{aligned}
Z(f) &= \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_{i,j} b_j \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

となるので、Z は一階線形偏微分作用素になりベクトル場を定める。上の計算よりベクトル場の Lie ブラケットの局所表示は

$$\left[\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j}\left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

2 Lie 群と Lie 環

定義 2.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

例 2.2 V を有限次元実ベクトル空間とすると、V の正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。$GL(\mathbf{R}^n)$ は $GL(n, \mathbf{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。

証明 $GL(V)$ は合成に関して群になる。$\dim V = n$ とする。$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V \mid f$ は線形写像$\}$ とおく。V の基底をとり、$\mathrm{End}(V)$ の元にこの基底に関する表現行列を対応させれば、$\mathrm{End}(V)$ と n 次実正方行列の全体 $M_n(\mathbb{R})$ は一対一に対応する。さらに $M_n(\mathbb{R})$ は自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と線形同型になるので、$\mathrm{End}(V)$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ と一対一に対応する。この対応によって $\mathrm{End}(V)$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ を同一視すると表現行列の成分が $\mathrm{End}(V)$ の座標になる。この同一視によって $\mathrm{End}(V)$ に位相を導入しておく。行列式 $\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ は $\mathrm{End}(V)$ の座標の多項式で表わされるので連続であり、

$$GL(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \det f \neq 0\}$$

だから、$GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合である。特に、$GL(V)$ は n^2 次元多様体になる。群演算

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V); (x, y) \mapsto xy$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の二次式で表わされるので C^∞ 級写像であり、

$$GL(V) \to GL(V); x \mapsto x^{-1}$$

は、$\mathrm{End}(V)$ の座標の分数式で表わされるので C^∞ 級写像である (Cramer の公式)。

定義 2.3 Lie 群 G の元 g に対して微分同型写像 L_g, R_g を

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ g による**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G 上のベクトル場 X は、G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

注意 2.4 Lie 群 G の単位元 e を含む局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとっておけば、各 $g \in G$ に対して $(L_g(U); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は g を含む局所座標近傍になる。右移動を使っても同様にできる。

定義 2.5 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ のベクトル部分空間 $\mathfrak{h}$ が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ のブラケットを制限することで Lie 環になる。

例 2.6 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 2.7 V を実ベクトル空間とする。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表わす。$\mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

証明 定め方より $[\ ,\ ] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ は双線形写像である。$\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}
& [X, Y] = XY - YX = -[Y, X], \\
& [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
= \ & [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
= \ & XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY \\
& + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{End}(V)$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

定理 2.8 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表わす。すると、$\mathfrak{g}$ は G 上のベクトル場全体の成す Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G); X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

この定理の証明のために次の補題を準備しておく。

補題 2.9 M, N を多様体とし、$f : M \to N$ を微分同型写像とする。M 上のベクトル場 X, Y と N 上のベクトル場 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ が

$$df_x(X_x) = \tilde{X}_{f(x)}, \quad df_x(Y_x) = \tilde{Y}_{f(x)} \qquad (x \in M)$$

を満たすならば、次の等式が成り立つ。

$$df_x([X,Y]_x) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(x)} \qquad (x \in M).$$

証明 $(V; y_1, \ldots, y_n)$ を N の局所座標近傍とする。$U = f^{-1}(V)$ とし、$x_i = y_i \circ f \, (1 \leq i \leq n)$ とおくと、$(U; x_1, \ldots, x_n)$ は M の局所座標近傍になる。X, Y の U における局所表示を

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とすると、仮定より V において

$$\tilde{X} = df(X) = df\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n (a_i \circ f^{-1}) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n (a_i \circ f^{-1}) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

同様に

$$\tilde{Y} = \sum_{j=1}^n (b_j \circ f^{-1}) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

命題 1.11 の後のベクトル場の Lie ブラケットの局所表示を使うと

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \sum_{i,j} \left((a_j \circ f^{-1}) \frac{\partial (b_i \circ f^{-1})}{\partial y_j} - (b_j \circ f^{-1}) \frac{\partial (a_i \circ f^{-1})}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

他方、

$$\begin{aligned} df([X,Y]) &= df\left(\sum_{i,j} \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left((a_i \circ f^{-1}) \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \circ f^{-1} - (b_j \circ f^{-1}) \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \circ f^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \end{aligned}$$

となり
$$\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \circ f^{-1} = \frac{\partial b_i \circ f^{-1}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \circ f^{-1} = \frac{\partial a_i \circ f^{-1}}{\partial x_j}$$
より、$df([X,Y]) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ を得る。

定理 2.8 の証明　$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{X}(G)$ の部分ベクトル空間になることは定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (dL_g)_x(Y_x) = Y_{gx} \quad (x \in G)$$

が成り立ち、$L_g : G \to G$ は微分同型写像だから、補題 2.9 より

$$(dL_g)_x([X,Y]_x) = [X,Y]_{gx} \quad (x \in G)$$

となり、$[X,Y] \in \mathfrak{g}$ を得る。よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環である。

α が線形写像になることは定義からわかる。$X \in \mathfrak{g}, \alpha(X) = 0$ とすると、任意の $g \in G$ に対し
$$X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$$
だから、$X = 0$。よって $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ となり、α は単射。他方 $X \in T_e(G)$ に対して $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ とおき、$\tilde{X}$ が左不変ベクトル場になることを示せば、α が全射になることがわかる。$(U; x_1, \ldots, x_n)$ を G の単位元 e を含む局所座標近傍とする。$G \times G \to G; (x,y) \mapsto xy$ は連続だから、e を含む開近傍 V で $VV = \{xy | x, y \in V\} \subset U$ を満たすものをとることができる。

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_e$$

とおく。注意 2.4 より任意の $g \in G$ に対して、$(L_g(V); x_1 \circ L_g^{-1}, \ldots, x_n \circ L_g^{-1})$ は g を含む局所座標近傍になる。そこで $y_i = x_i \circ L_g^{-1}$ とおくと $gx \in L_g(V)$ $(x \in V)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{gx} &= (dL_{gx})_e(X) = d(L_g \circ L_x)_e(X) = (dL_g)_x(dL_x)_e(X) \\
&= (dL_g)_x \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial (x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial (x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) (dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x .
\end{aligned}$$

ここで
$$\left((dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right)(y_k) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right)(y_k \circ L_g) = \delta_{jk}$$

だから

$$(dL_g)_x \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx}$$

となり

$$\tilde{X}_{gx} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{gx}.$$

$G \times G \to G; (x,y) \mapsto xy = L_x(y)$ は C^∞ 級写像だから、各 i, j に対して

$$V \to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞ 級写像になる。よって、各 j について

$$L_g(V) \to \mathbf{R}; gx \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial(x_j \circ L_x)}{\partial x_i}(e)$$

は C^∞ 級写像である。したがって $\tilde{X}$ は G 上のベクトル場である。$\tilde{X}$ は定め方より左不変。したがって α は線形同型写像である。

定義 2.10 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

定義 2.11 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f : G \to H$ が群の準同型写像でもあるとき、f を **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、f を **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と H は**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X,Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、f を **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、f を **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

3 連結 Lie 群

定理 3.1 G を連結 Lie 群とし、U を G の単位元 e の近傍とする。このとき $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ が成り立つ。ただし、$U^n = \{g_1 \ldots g_n | g_i \in U\}$ とする。

証明 $U^{-1} = \{g^{-1} | g \in U\}$ も e の近傍になるので、$V = U \cap U^{-1}$ は e の近傍である。$H = \cup\{V^n | n \in \mathbf{N}\}$ とおく。$V \subset U$ だから、$G = H$ を示せばよい。$g, h \in H$ に対してある自然数 m, n があって $g \in V^m, h \in V^n$ となる。よって $gh \in V^{m+n} \subset H$ を得る。$g = g_1 \ldots g_m,\ g_i \in V$ とすると、$g^{-1} = g_m^{-1} \ldots g_1^{-1}$ で $g_i^{-1} \in V$ だから

$g^{-1} \in V^m \subset H$ を得る。したがって H は G の部分群である。V は e の近傍で $V \subset H$ だから、任意の $h \in H$ に対して $L_h(V)$ は h の近傍になり $L_h(V) \subset H$ を得る。したがって H は G の開集合である。G を H の剰余類によって分解すると、

$$G = H \cup (\cup\{L_g(H) | g \in G, g \notin H\})$$

となり各 $L_g(H)$ は G の開集合だから、H は G の閉集合である。G は連結だから $G = H$ が成り立つ。

定理 3.1 は連結位相群に対して成り立つことが証明からわかる。

命題 3.2 G を Lie 群とし G の単位元を含む連結成分を G_0 とすると、G_0 は G の正規部分群であり、さらに Lie 部分群である。

証明 $\tau : G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh^{-1}$ とすると、τ は連続写像になる。$G_0 \times G_0$ は $G \times G$ の (e,e) を含む連結成分になるので、$\tau(G_0 \times G_0)$ は連結になる。$e = \tau(e,e) \in \tau(G_0 \times G_0)$ より $\tau(G_0 \times G_0) \subset G_0$ が成り立つ。したがって、G_0 は G の部分群になる。任意の $g \in G$ に対して $L_g \circ R_{g^{-1}}$ は連続写像だから $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ は連結になり、$e = L_g \circ R_{g^{-1}}(e) \in L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0)$ より $L_g \circ R_{g^{-1}}(G_0) \subset G_0$ が成り立つ。したがって、G_0 は G の正規部分群になる。また単位元を含む連結成分 G_0 は G の開集合になるので、特に部分多様体になっている。$\tau : G \times G \longrightarrow G$ は C^∞ 級写像だから G_0 への制限 $\tau_{G_0} : G_0 \times G_0 \longrightarrow G_0$ も C^∞ 級写像になり G_0 は Lie 群である。よって G_0 は G の Lie 部分群である。

今後、Lie 群 G の単位元を含む連結成分 G_0 を**単位連結成分**と呼ぶことにする。

4 一般線形群

命題 4.1 V を n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n,\mathbf{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ は同型になる。

証明 $v_1,\dots,v_n$ を V の基底とし、$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して f の $v_1,\dots,v_n$ に関する表現行列を $R(f)$ で表す。つまり、

$$f[v_1,\dots,v_n] = [v_1,\dots,v_n]R(f)$$

となる。このとき、

$$R : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$$

は代数の同型写像になる。R は線形同型写像だから特に微分同型写像である。

以上のことから、R は Lie 環の同型写像

$$R : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$$

を与え、R の $GL(V)$ への制限は Lie 群の同型写像

$$R|_{GL(V)} : GL(V) \to GL(n, \mathbf{R})$$

を与える。

定理 4.2 $GL(n, \mathbf{R})$ は例 2.2 の証明より $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{} : \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g} \; ; \; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

証明 定理 2.8 を $GL(n, \mathbf{R})$ に適用すると $\tilde{} = \alpha^{-1}$ となるので、$\tilde{}$ は線形同型写像である。あとは $\tilde{}$ が Lie 環の準同型写像になることを示せばよい。(i,j)-成分のみが 1 で他の成分は 0 になる n 次正方行列を E_{ij} で表すと、$\{E_{ij} | 1 \leq i,j \leq n\}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の基底になる。その双対基底を $\{x_{ij} | 1 \leq i,j \leq n\}$ で表すと、x_{ij} は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の座標になる。$GL(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の開集合で $e \in GL(n, \mathbf{R})$ だから、$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と十分小さい $t \in \mathbf{R}$ に対して $e + tX \in GL(n, \mathbf{R})$ となることに注意しておく。$g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_g &= (dL_g)_e(X) = (dL_g)_e \left(\frac{d}{dt}(e+tX)\bigg|_{t=0} \right) \\
&= \frac{d}{dt} L_g(e+tX)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g+tgX)\bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gX) \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g .
\end{aligned}$$

命題 1.11 の後のベクトル場の Lie ブラケットの局所表示を使うと $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), g \in GL(n, \mathbf{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{Y}]_g = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} &\left\{ \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(X) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(Y) \right)}{\partial x_{pq}} \right. \\
&\left. - \sum_{r=1}^{n} x_{pr}(g) x_{rq}(Y) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(X) \right)}{\partial x_{pq}} \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g \\
= \sum_{i,j=1}^{n} &\left\{ \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(X) x_{kj}(Y) - \sum_{k,r=1}^{n} x_{ir}(g) x_{rk}(Y) x_{kj}(X) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(gXY - gYX) \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(g[X,Y]) \left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right|_g$$
$$= \widetilde{[X,Y]}_g.$$

よって、

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}$$

となり、$\tilde{}$ は Lie 環の準同型である。

注意 4.3 定理 4.2 の Lie 環の同型写像 $\tilde{}: \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と Lie 群 $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ を $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 環とみなすことにする。命題 4.1 の同型より、有限次元ベクトル空間 V に対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

5 一径数部分群

定義 5.1 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。I を実数の開区間とし、M 上の曲線 $c : I \to M$ が

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

を満たすとき、c を X の**積分曲線**と呼ぶ。

補題 5.2 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。実数 t_0 と M の各点 $x \in M$ に対して、X の積分曲線 $c : I \to M$ で $t_0 \in I,\ c(t_0) = x$ を満たすものが存在する。また $c_1, c_2 : I \to M$ が $c_1(t_0) = c_2(t_0) = x$ を満たす X の積分曲線ならば $c_1 = c_2$ が成り立つ。

証明 x を含む M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。X の U における局所表示を

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad (x \in U)$$

とする。U において問題になっている等式

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$$

の局所表示は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}$$

となる。したがって c は

$$\frac{d(x_i \circ c(t))}{dt} = a_i(c(t)), \quad x_i \circ c(t_0) = x_i(x) \quad (1 \le i \le n)$$

を満たせばよい。これは Euclid 空間の開集合における常微分方程式であり a_i は C^∞ 級関数だから t_0 を含む開区間 I と $c : I \to U$ が存在し上の常微分方程式を満たす。この曲線 c が求めるものである。

次に積分曲線の一意性を示そう。M の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $c_1(I), c_2(I) \subset U$ を満たすものが存在する場合は、局所座標 $x_1, \ldots, x_n$ を使うと

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_{c_1(t)}, \quad \frac{dc_2}{dt}(t) = X_{c_2(t)} \quad (t \in I)$$

は Euclid 空間の開集合における常微分方程式になり、常微分方程式の解の一意性から $c_1 = c_2$ となる。$c_1(I), c_2(I)$ が M の 1 つの局所座標近傍に含まれない場合を考えよう。$t_0 < s, s \in I$ に対して $0 < \varepsilon$ と $t_0 < t_1 < \cdots < t_k = s$ を次の条件を満たすようにとる。$I_i = (t_{i-1} - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ $(1 \le i \le k)$ とおくと各 i について $c_1(I_i), c_2(I_i)$ は M の 1 つの局所座標近傍に含まれる。先に示したことを使うと $c_1(t_1) = c_2(t_1), \ldots, c_1(t_k) = c_2(t_k)$ を帰納的に示すことができる。特に $c_1(s) = c_2(s)$。$t_0 > s, s \in I$ に対しても同様にして $c_1(s) = c_2(s)$ となり、$c_1 = c_2$ が成り立つ。

定義 5.3 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbf{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 5.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 2.8 によって $\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X を c に対応させる。

証明 次の (1),(2) のステップにわけて定理を証明する。

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbf{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものが存在し、c は G の一径数部分群である。

(2) 定理で定めた 2 つの対応はお互いの逆対応になる。

(1) 補題 5.2 より、$\delta > 0$ と X の積分曲線 $a : (-\delta, \delta) \to G$ で $a(0) = e$ を満たすものが存在する。$|s| < \delta/2$ となる s を 1 つ固定して

$$b_1(t) = a(s+t),\ b_2(t) = a(s)a(t) \quad (|t| < \delta/2)$$

とおく。すると、$t \mapsto b_1(t)$ は X の積分曲線になる。$a(t)$ は X の積分曲線だから、その左移動 $L_g a(t)$ も X の積分曲線になる。なぜならば、

$$\frac{d}{dt}L_g a(t) = (dL_g)_{a(t)}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right) = (dL_g)_{a(t)}(X_{a(t)}) = X_{L_g a(t)}.$$

よって、$b_2(t)$ も X の積分曲線になる。さらに、

$$b_1(0) = a(s) = a(s)e = a(s)a(0) = b_2(0)$$

だから補題 5.2 の一意性より、

$$b_1(t) = b_2(t) \quad (|t| < \delta/2).$$

結局

$$a(s+t) = a(s)a(t) = a(t)a(s) \quad (|s|, |t| < \delta/2)$$

が成り立つ。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となるように自然数 k をとり

$$c(t) = a\left(\frac{t}{k}\right)^k$$

として写像 $c : \mathbf{R} \to G$ を定める。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$|t/k| < \delta/2, |t/l| < \delta/2$ となる自然数 k, l をとったとき、

$$a\left(\frac{t}{k}\right)^k = a\left(\frac{t}{kl}\right)^{kl} = a\left(\frac{t}{l}\right)^l$$

が成り立つので、上の c は k のとり方によらずに定まっている。$c(0) = a(0) = e$ は明らか。以下で、c が G の一径数部分群であることを示そう。$t \in \mathbf{R}$ に対して $|t/k| < \delta/2$ となる自然数 k をとる。t を含む開集合 I で $s \in I$ ならば $|s/k| < \delta/2$ となるものをとる。すると $s \in I$ に対して $c(s) = a(s/k)^k$ となるので、c は I において C^∞ 級写像である。よって $c : \mathbf{R} \to G$ は C^∞ 級写像になる。任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $|s/k|, |t/k| < \delta/4$ となる自然数 k をとると、$|s/k|, |t/k|, |(s+t)/k| < \delta/2$ となり、

$$\begin{aligned} c(s)c(t) &= a\left(\frac{s}{k}\right)^k a\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(a\left(\frac{s}{k}\right)a\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \\ &= a\left(\frac{s+t}{k}\right)^k = c(s+t). \end{aligned}$$

したがって $c : \mathbf{R} \to G$ は G の一径数部分群になる。

次に c が X の積分曲線であることを示そう。$s \in \mathbf{R}$ に対して、$t \in (s-\delta, s+\delta)$ とすると、$c(t) = c(s)c(t-s) = L_{c(s)}(c(t-s))$ だから、

$$\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=s} = (dL_{c(s)})_e\left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) = (dL_{c(s)})_e(X_e) = X_{c(s)}.$$

したがって c は X の積分曲線である。

(2) $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群 c は $\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たすので、c に対応する $\mathfrak{g}$ の元は X になる。逆に G の一径数部分群 c に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X は $X_e = \frac{dc}{dt}(0)$ を満たす。(1) の最後で示したことは $\mathfrak{g}$ の元 X と G の一径数部分群 c が $\frac{dc}{dt}(0) = X_e$ を満たせば c は X の積分曲線になることである。したがって X に対応する G の一径数部分群は c になる。

6 行列の指数関数

定義 6.1 n 次複素正方行列全体を $M_n(\mathbf{C})$ で表す。$X \in M_n(\mathbf{C})$ に対して

$$\|X\| = \max\{|Xv| \mid v \in \mathbf{C}^n,\ |v| \leq 1\}$$

とおくと、$\|\cdot\|$ は $M_n(\mathbf{C})$ のノルムになる。

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

によって e^X を定めると、この無限級数は絶対収束することが知られている。これを**行列の指数関数**と呼ぶ。

命題 6.2 $X, Y \in M_n(\mathbf{C})$ と正則行列 $P \in M_n(\mathbf{C})$ に対して以下が成り立つ。

(1) $e^{PXP^{-1}} = Pe^X P^{-1}$.

(2) $XY = YX$ ならば $e^{X+Y} = e^X e^Y$ が成り立つ。

(3) e^X は正則行列になり、$(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

(4) $\dfrac{d}{dt} e^{tX} = e^{tX} X = X e^{tX}$.

証明 (1) $M_n(\mathbf{C})$ のノルム $\|\cdot\|$ に関して行列の演算は連続になり、

$$\begin{aligned} e^{PXP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PXP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PX^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k\right) P^{-1} \\ &= Pe^X P^{-1}. \end{aligned}$$

(2) 仮定 $XY = YX$ より二項定理

$$(X+Y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i Y^{k-i} = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} X^i Y^j = k! \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!} X^i \frac{1}{j!} Y^j$$

が成り立つ。指数関数の定義無限級数が絶対収束することから

$$e^{X+Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(X+Y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!}X^i \frac{1}{j!}Y^j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}Y^j \right)$$
$$= e^X e^Y.$$

(3) $X(-X) = -X^2 = (-X)X$ だから (2) より

$$e = e^0 = e^{X-X} = e^X e^{-X}$$

となり、$(e^X)^{-1} = e^{-X}$ が成り立つ。

(4) e^{tX} の定義無限級数は項別微分可能になり

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{d}{dt}t^k X^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k X^{k+1}$$
$$= e^{tX}X = Xe^{tX}.$$

例 6.3 $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群を求めてみよう。$GL(n, \mathbf{R})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の元と同一視する。$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cong T_e(GL(n, \mathbf{R}))$ に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$ で表すと、定理 2.8 の証明中の計算より $\tilde{X}_g = gX$ $(g \in GL(n, \mathbf{R}))$ となる。したがって、X に対応する $GL(n, \mathbf{R})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbf{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。したがって、$c(t) = e^{tX}$ となる。

例 6.4 行列の指数関数の射影分解による計算法について述べる。n 次複素正方行列 A の固有多項式を $\gamma_A(t)$ で表す。$\gamma_A(t)$ を因数分解し $\gamma_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \dots (t - \lambda_k)^{p_k}$ とする。次に部分分数展開:

$$\frac{1}{\gamma_A(t)} = \frac{h_1(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{h_k(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

を行う。ここで各 $h_i(t)$ の次数は $p_i - 1$ 以下である。

$$1 = h_1(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_1)^{p_1}} + \cdots + h_k(t)\frac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_k)^{p_k}}$$

となり、$\gamma_A(t)$ は $(t-\lambda_i)^{p_i}$ を因子に持っているので $\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ は t の多項式である。実際に部分分数展開に現われる $h_i(t)$ を求めるには、この形にして $h_i(t)$ の係数が未知数の方程式とみなして解けばよい。その際に、右辺を展開して次数をそろえようとすると計算が大変になるので、$h_i(t)$ の係数を求めるために $t = \lambda_i$ を代入し

一階微分して $t=\lambda_i$ を代入するという操作を p_i-1 階微分まで続けた方が計算が簡単になる。$\pi_i(t)=h_i(t)\dfrac{\gamma_A(t)}{(t-\lambda_i)^{p_i}}$ とおくと $\pi_i(t)$ も t の多項式になり

$$1=\pi_1(t)+\cdots+\pi_k(t),\quad (t-\lambda_i)^{p_i}\pi_i(t)=h_i(t)\gamma_A(t)$$

が成り立つ。$P_i=\pi_i(A)$ とおくと

$$I_n=P_1+\cdots+P_k.$$

これを射影分解と呼ぶ。Cayley-Hamilton の定理より

$$(A-\lambda_i I_n)^{p_i}P_i=h_i(A)\gamma_A(A)=0.$$

以上の結果を使うと

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{i=1}^k e^{tA}P_i=\sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i I_n+t(A-\lambda_i I_n)}P_i\\
&= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t I_n}e^{t(A-\lambda_i I_n)}P_i=\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i\\
&= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{p_i-1}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j P_i.
\end{aligned}$$

7 指数写像

定義 7.1 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X\in\mathfrak{g}$ に対して定理 5.4 で存在を示した X の積分曲線 $c:\mathbf{R}\to G$ で $c(0)=e$ となるものをとり、$\exp X=c(1)$ とおくことによって写像 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

例 7.2 例 6.3 で示したように $GL(n,\mathbf{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、$GL(n,\mathbf{R})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 7.3 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X\in\mathfrak{g}$ に対して定理 5.4 の対応で対応する G の一径数部分群は $t\mapsto\exp tX$ になる。

証明 $X\in\mathfrak{g}$ に対して定理 5.4 の対応で対応する G の一径数部分群を $t\mapsto c(t,X)$ と書くことにする。$s\in\mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{d}{dt}c(st,X)=sX_{c(st,X)}\quad(t\in\mathbf{R})$$

となるので、$t \mapsto c(st, X)$ は $sX \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群になる。よって $c(st, X) = c(t, sX)$ となり $t = 1$ とおくと

$$c(s, X) = c(1, sX) = \exp sX.$$

これより $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ に一致する。

命題 7.4 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

証明 $X_1, \ldots, X_n$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし $u_1, \ldots, u_n$ をその双対基底とすると、$u_1, \ldots, u_n$ は $\mathfrak{g}$ の座標になる。G の局所座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で $e \in U,\ x_1(e) = \cdots = x_n(e) = 0$ を満たすものをとっておく。$\sum_{i=1}^n u_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群を $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ と書くことにする。

$$\frac{d}{dt} c(t; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i (X_i)_{c(t; u_1, \ldots, u_n)}$$

だから、各 X_i の U における局所表示を

$$(X_i)_x = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x$$

とすると $c(t; u_1, \ldots, u_n)$ は

$$\frac{d}{dt} x_j(c(t; u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^n u_i a_{ji}(c(t; u_1, \ldots, u_n))$$

を満たす。常微分方程式の解はパラメーターに関して滑らかだから、写像

$$(t, u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1(c(t; u_1, \ldots, u_n)), \ldots, x_n(c(t; u_1, \ldots, u_n)))$$

は 0 の近傍で C^∞ 級写像になる。

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right) = c(1; u_1, \ldots, u_n)$$

だから、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は 0 のある開近傍 N で C^∞ 級写像である。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対してある自然数 p が存在し $\frac{1}{p} X \in N$ となる。そこで X の開近傍 O を $\frac{1}{p} O \subset N$ となるようにとると

$$\exp(Z) = \exp\left(\frac{1}{p} Z \right)^p \quad (Z \in O)$$

だから $\exp$ は O において C^∞ 級写像である。したがって、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像になる。

定理 7.5 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 $\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明 $X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d\exp_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)\bigg|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d\exp_e = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$。定理 2.8 より $d\exp_e$ は線形同型写像になる。逆関数定理より、$\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

定義 7.6 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。定理 7.5 より $\exp$ は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍 U の間の微分同型写像になるので、$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ をとると $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$ は U における局所座標系になり $u_1(e) = \cdots = u_n(e) = 0$ を満たす。$(u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ に関する G の**標準座標系**と呼び、$(U; u_1, \ldots, u_n)$ を G の**標準座標近傍**と呼ぶ。

命題 7.7 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
(Xf)(g) &= \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0} \\
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX \exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 接ベクトル X_g は曲線 $t \mapsto g\exp tX$ の $t=0$ における速度ベクトルになっているので

$$(Xf)(g) = X_g(f) = \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0}$$

が成り立つ。これを 2 回使うと

$$\begin{aligned}
(XYf)(g) &= \frac{d}{ds}(Yf)(g\exp sX)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY)\bigg|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1}\exp sX)\bigg|_{s=0}\right)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=0}\right. \\
&\quad + \left.\frac{\partial}{\partial s}f(g\exp tY\exp sX)\bigg|_{s=0}\right)\bigg|_{t=0} \qquad (\text{Leibniz の法則より}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0} + (YXf)(g).
\end{aligned}$$

したがって

$$([X,Y]f)(g) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0}.$$

系 7.8 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y]=0$ となる。

証明 $f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\Big|_{s=t=0} = 0.\end{aligned}$$

したがって $[X,Y]=0$ となる。

定義 7.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y]=0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 7.8 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

8 準同型写像

命題 8.1 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 8.2 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 2.8 の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

証明 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、$df_e(X_e) \in T_e(H)$ を H 上の左不変ベクトル場に拡張したものが $df(X)$ になる。任意の $g \in G$ に対して、

$$df_g(X_g) = df_g \circ (dL_g)_e(X_e) = d(f \circ L_g)_e(X_e).$$

ここで $x \in G$ に対して

$$(f \circ L_g)(x) = f(gx) = f(g)f(x) = (L_{f(g)} \circ f)(x)$$

だから、

$$\begin{aligned}df_g(X_g) &= d(f \circ L_g)_e(X_e) = d(L_{f(g)} \circ f)(X_e) \\ &= (dL_{f(g)})_e \circ df_e(X_e) = df(X)_{f(g)}.\end{aligned}$$

よって $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$df_g(X_g) = df(X)_{f(g)}, \quad df_g(Y_g) = df(Y)_{f(g)} \quad (g \in G)$$

が成り立つので Lie ブラケット積と微分写像の関係 (補題 2.9 の一般化) を使うと

$$df_g([X, Y]_g) = [df(X), df(Y)]_{f(g)} \quad (g \in G)$$

となる。特に

$$df_e([X, Y]_e) = [df(X), df(Y)]_e$$

が成立し、定理 2.8 より $[df(X), df(Y)]$ は H 上の左不変ベクトル場だから、

$$df([X, Y]) = [df(X), df(Y)].$$

したがって $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型になる。

定義 8.3 Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$ に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を f の**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 8.2 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 8.4 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} d(id_A) &= \alpha_A^{-1} \circ d(id_A)_e \circ \alpha_A = \alpha_A^{-1} \circ id_{T_e(A)} \circ \alpha_A = id \\ d(g \circ f) &= \alpha_C^{-1} \circ d(g \circ f)_e \circ \alpha_A = \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ df_e \circ \alpha_A \\ &= \alpha_C^{-1} \circ dg_e \circ \alpha_B \circ \alpha_B^{-1} \circ df_e \circ \alpha_A = dg \circ df \end{aligned}$$

系 8.5 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$ を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

証明

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) = d(id_B) = id$$

同様にして $d(f^{-1}) \circ df = id$ となり $d(f^{-1}) = df^{-1}$。したがって df は Lie 環の同型写像になる。

命題 8.6 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。ただし、左辺の exp は G の指数写像で右辺の exp は H の指数写像である。

証明 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になるので (命題 8.1)、$t \mapsto f(\exp tX)$ は H の一径数部分群になる。定理 5.4 よりある $Y \in \mathfrak{h}$ が存在して、

$$f(\exp tX) = \exp tY \quad (t \in \mathbf{R})$$

となる。$t = 0$ で両辺を微分すると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{d}{dt} f(\exp tX)\bigg|_{t=0} = df_e(X_e) \\ (\text{右辺}) &= \frac{d}{dt} \exp tY\bigg|_{t=0} = Y_e.\end{aligned}$$

したがって、$df_e(X_e) = Y_e$ となり $df(X) = Y$。これより、$f(\exp tX) = \exp(tdf(X))$ が成り立つ。特に $t = 1$ とすると、$f(\exp X) = \exp(df(X))$。

定義 8.7 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 8.8 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

証明 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}&[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) \\ =\ & \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ =\ & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] \quad (\text{Jacobi 律}) \\ =\ & \mathrm{ad}([X, Y])(Z)\end{aligned}$$

となるので $[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}([X, Y])$ が成り立ち、ad は Lie 環の表現になる。

定義 8.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 8.10 Lie 群 G の元 g に対して $\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致する。

証明 $L_g \circ R_{g^{-1}}$ は G の自己同型写像だから、系 8.5 より $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像になる。特に $\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となる。命題 8.6 より

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。命題 8.4 を使うと $g, h \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(gh) &= d(L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}}) = d(L_g \circ L_h \circ R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}}) \\
&= d(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}}) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) \circ d(L_h \circ R_{h^{-1}}) \\
&= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h)
\end{aligned}
$$

となるので $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。

次に Ad が C^∞ 級写像になることを示そう。$GL(\mathfrak{g})$ における座標は $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ とその双対基底 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を使って $GL(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R};\ u \mapsto \theta_i(u(X_j))$ と表すことができる。したがって $G \to \mathbf{R};\ g \mapsto \theta_i(\mathrm{ad}(g)(X_j))$ が C^∞ 級関数になることを示せばよい。定理 2.8 の証明と同様、

$$
\theta_i(\mathrm{Ad}(g)(X_j)) = \theta_i(\alpha_G^{-1} \circ dL_g \circ dR_{g^{-1}} \circ \alpha_G(X_j))
$$

は g に関する C^∞ 級関数になる。

最後に Ad の微分が $\mathfrak{g}$ の随伴表現に一致することを示そう。命題 7.7 より、$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)tY))\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)f(g)\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left((\mathrm{Ad}(\exp sX)Y)\right)\Big|_{s=0} f(g)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\Big|_{s=0} = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)
$$

となり

$$
\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)\Big|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)
$$

が成り立つので、Ad の微分は ad になる。

定義 8.11 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(V)$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

例 8.12 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 7.2 より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$
\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\Big|_{t=0} = gXg^{-1}.
$$

9 閉 Lie 部分群

定義 9.1 Lie 群 H が Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

補題 9.2 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の Lie 部分群 H の包含写像を $\iota : H \to G$ とすると $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

証明 ι の微分 $d\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は定理 8.2 より Lie 環の準同型写像になり、H が G の部分多様体であることから単射になる。したがって $d\iota : \mathfrak{h} \to d\iota(\mathfrak{h})$ は Lie 環の同型写像になる。

定義 9.3 補題 9.2 において、$d\iota(\mathfrak{h})$ を **Lie 部分群** H **に対応する Lie 部分環** と呼ぶ。今後、$d\iota$ によって $\mathfrak{h}$ と $d\iota(\mathfrak{h})$ を同一視する。

命題 9.4 G を Lie 群とし、H を G の Lie 部分群とする。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし、指数写像を $\exp_G, \exp_H$ とする。このとき $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\exp_G(X) = \exp_H(X)$ が成り立つ。

証明 包含写像を $\iota : H \to G$ とすると ι は Lie 群の準同型写像になる。命題 8.6 より $X \in \mathfrak{h}$ に対して $\iota(\exp_H(X)) = \exp_G(d\iota(X))$ が成り立つ。ι と $d\iota$ による同一視をすると $\exp_G(X) = \exp_H(X)$。

補題 9.5 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の直和分解とする。$\varphi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y)$ によって C^∞ 級写像 $\varphi : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to G$ を定めると $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, V と G における e の開近傍 W が存在し φ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与える。

証明 $d\varphi_0$ は線形写像だから、$(X, Y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ に対して

$$
\begin{aligned}
d\varphi_0(X, Y) &= d\varphi_0((X, 0) + (0, Y)) = d\varphi_0(X, 0) + d\varphi_0(0, Y) \\
&= \frac{d}{dt}\exp(tX))\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}\exp(tY)\bigg|_{t=0} \\
&= X_e + Y_e = \alpha(X + Y)
\end{aligned}
$$

となるので $d\varphi_0 = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ が成り立ち定理 2.8 より $d\varphi_0$ は線形同型写像である。逆関数定理を使うと、$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ における 0 の開近傍 U, V と G における e の開近傍 W が存在し φ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与えることがわかる。

定理 9.6 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。H が G の閉集合ならば、H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

証明 $\mathfrak{g}$ 上のノルム $|\ |$ を 1 つとっておく。

$$S=\left\{X\in\mathfrak{g}\,\middle|\,X_n\in\mathfrak{g}-\{0\},\ \exp X_n\in H,\ \lim_{n\to\infty}X_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{|X_n|}=X\right\}$$

とおく。まず $X\in S$ に対して $\exp tX\in H\ (t\in\mathbf{R})$ が成り立つことを示そう。$X_n\in\mathfrak{g}-\{0\},\ \exp X_n\in H,\ \lim_{n\to\infty}X_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{|X_n|}=X$ としておく。$t\in\mathbf{R}$ に対して $t=m_n|X_n|+r_n,\ 0\leq r_n<|X_n|$ となる整数 m_n と実数 r_n をとる。すると $\lim_{n\to\infty}X_n=0$ だから $\lim_{n\to\infty}r_n=0$ となって $\lim_{n\to\infty}m_n|X_n|=t$。したがって

$$tX=\lim_{n\to\infty}m_n|X_n|\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{|X_n|}=\lim_{n\to\infty}m_nX_n.$$

exp は連続だから

$$\exp tX=\lim_{n\to\infty}\exp m_nX_n=\lim_{n\to\infty}(\exp X_n)^{m_n}\in H\quad(H\text{ は閉集合}).$$

次に $\mathfrak{h}=\{tX|t\in\mathbf{R},\ X\in S\}$ とおいて $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間になることを示す。そのためには $\mathfrak{h}$ が加法について閉じていることを示せば十分。$X,Y\in\mathfrak{h}-\{0\}$ とすると $\exp tX,\exp tY\in H\ (t\in\mathbf{R})$。曲線 $t\mapsto\exp tX\exp tY$ は $t=0$ で e を通り像は H に含まれている。定理 7.5 より、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えるので、0 を含むある開区間 I で定義された $\mathfrak{g}$ の曲線 $c:I\to\mathfrak{g}$ が存在し $c(0)=0,\ \exp(c(t))=\exp tX\exp tY\ (t\in I)$ となる。この両辺を $t=0$ で微分すると

$$\alpha\left(\frac{dc}{dt}(0)\right)=X_e+Y_e=\alpha(X+Y)$$

となる。定理 2.8 より $\frac{dc}{dt}(0)=X+Y$。したがって $\lim_{t\to0}\frac{c(t)}{t}=X+Y$。十分大きい n に対しては $\frac{1}{n}\in I$ となるので $Z_n=c(\frac{1}{n})$ とおくと $Z_n\neq0$ で

$$\begin{aligned}&\exp Z_n=\exp\left(c\left(\frac{1}{n}\right)\right)\in H,\\&\lim_{n\to\infty}Z_n=\lim_{n\to\infty}c\left(\frac{1}{n}\right)=c(0)=0,\\&\lim_{n\to\infty}\frac{Z_n}{|Z_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\left|c\left(\frac{1}{n}\right)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{c\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\left|\frac{\frac{1}{n}}{c\left(\frac{1}{n}\right)}\right|=\frac{X+Y}{|X+Y|}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって $\frac{X+Y}{|X+Y|}\in S$ となり $X+Y\in\mathfrak{h}$。これで $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間であることがわかった。

H の位相は相対位相を考えることにし、H に G の部分多様体になるような多様体構造が存在することを示そう。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{h}'$ を 1 つとり直和分解: $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'$ をつくると、補題 9.5 より、$\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}'$ における 0 の開近傍 $U,\ V$ と G におけ

る e の開近傍 W が存在し $\varphi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}' \to G; (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ は $U \times V$ と W の間の微分同型を与える。$\mathfrak{h}$ における 0 の近傍 N をとると $\exp(N)$ は H における e の近傍になることを示す。$\exp(N)$ が H における e の近傍にならないと仮定して矛盾を導こう。Euclid 空間の開集合は可算開基を持つので、特に e は可算基本近傍系を持つ。したがって、e に収束する点列 g_n が存在し $g_n \in H,\ g_n \notin \exp(N)$ を満たす。$U \subset N,\ g_n \in W$ となるように U と g_n をとりなおすと、$X_n \in U,\ Y_n \in V$ が存在し $g_n = \exp X_n \exp Y_n$ を満たす。$g_n \notin \exp(N)$ だから $Y_n \neq 0$。$\frac{Y_n}{|Y_n|}$ のノルムは 1 だから部分列をとりなおすことにより $\frac{Y_n}{|Y_n|}$ は収束列になる。$X = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{|Y_n|} \in \mathfrak{h}'$ とおく。$\exp Y_n = (\exp X_n)^{-1} g_n \in H,\ \lim_{n\to\infty} Y_n = 0$ が成り立つので $X \in S \subset \mathfrak{h}$ となり矛盾。特に $\exp(U)$ は H における e の開近傍になる。$\mathfrak{h}$ の基底 $X_1, \ldots, X_k$ をとり $x \in \exp(U)$ に対して $\exp^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i(x) X_i$ とおく。H は G の部分群だから各 $h \in H$ に対して $L_h(\exp(U)) \subset H$ となり $\{(L_h(\exp(U)); x_1 \circ L_h^{-1}, \ldots, x_k \circ L_h^{-1})\}_{h\in H}$ は H に多様体の構造を与える。さらにこの多様体構造に関して H は G の部分多様体になっている。

上で定めた多様体構造に関して H が Lie 群であることを示す。$\tau : G \times G \to G; (g, h) \mapsto gh^{-1}$ とすると、τ は連続写像で H の位相は相対位相だから τ の H への制限 $\tau_H : H \times H \to H$ も連続になる。$(h_1, h_2) \in H \times H$ に対して、逆関数定理を使うと、$\tau_H(h_1, h_2) = h_1 h_2^{-1}$ を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は H における $h_1 h_2^{-1}$ の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$ のそこへの制限は H の局所座標系になることがわかる。τ_H は H の位相に関して連続だから (h_1, h_2) の $H \times H$ における開近傍 U が存在し $\tau_H(U) \subset V$ となる。$U \to W; (x, y) \mapsto xy^{-1}$ は C^∞ 級写像になるので $(x, y) \mapsto x_i(xy^{-1})$ は U 上の C^∞ 級関数になる。したがって $\tau_H : U \to V$ は C^∞ 級写像である。これで τ_H が C^∞ 級写像になることがわかり、H は Lie 群である。以上より H は G の Lie 部分群である。

定義 9.7 定理 9.6 より、Lie 群の閉部分群は相対位相に関して Lie 部分群になるので、この Lie 部分群の構造を持っている閉部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶことにする。

命題 9.8 Lie 群 G とその Lie 部分群 H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続}\}$$

が成り立つ。H が閉 Lie 部分群の場合は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$$

が成り立つ。

証明

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続 }\}$$

とおいておく。$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$ は補題 9.2 と定義 9.3 よりわかる。$X \in \mathfrak{h}',\ s \in \mathbf{R}$ に対して、$\exp sX$ を含む G の局所座標近傍 $(W; x_1, \ldots, x_n)$ が存在し

$$V = \{z \in W | x_i(z) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)\}$$

は H における $\exp sX$ の開近傍になり、$x_1, \ldots, x_k$ のそこへの制限は H の局所座標系になる。$t \mapsto \exp tX$ は H の位相に関して連続だから s を含む開区間 I が存在し $\exp tX \in V\ (t \in I)$ となる。$I \to W; t \mapsto \exp tX$ は C^∞ 級写像になるので $t \mapsto x_i(\exp tX)$ は I 上の C^∞ 級関数になる。したがって $t \mapsto \exp tX$ は H の多様体構造に関して C^∞ 級写像である。これで $X \in \mathfrak{h}$ がわかり、$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ である。以上より $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ である。さらに H が閉 Lie 部分群の場合は H の位相は相対位相だから $X \in \mathfrak{g}$ が $\exp tX \in H(t \in \mathbf{R})$ を満たせば $t \mapsto \exp tX$ は H の位相に関して連続になり $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H(t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

系 9.9 Lie 群 G の閉 Lie 部分群 H, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とおくと $H \cap K$ は G の閉 Lie 部分群になりその Lie 環は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ である。

定義 9.10 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

例 9.11 G を一般線形群 $GL(V)$ の閉 Lie 部分群とし、G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおく。例 7.2 より $GL(V)$ の指数写像は指数関数になるので、$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp_G(X) = e^X$ が成り立つ。さらに $g \in G,\ X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{Ad}_G(g)X = \left.\frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\right|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

10 線形 Lie 群

補題 10.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ と $v \in V$ に対して $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X)v = 0\}$ とおくと $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環になる。

証明 $a, b \in \mathbf{R},\ X, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(aX + bY)v &= a\rho(X)v + b\rho(Y)v = 0, \\ \rho([X, Y])v &= \rho(X)\rho(Y)v - \rho(Y)\rho(X)v = 0 \end{aligned}$$

だから $aX + bY, [X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。

補題 10.2 Lie 群 G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ と $v \in V$ に対して

$$H = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$$

とおくと H は G の閉 Lie 部分群になる。$\mathfrak{h}$ を H の Lie 環とすると

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\rho(X)v = 0\}$$

が成り立つ。

証明 $g, h \in H$ に対して $\rho(gh^{-1})v = \rho(g)\rho(h^{-1})v = v$ だから $gh^{-1} \in H$ となり H は G の部分群である。次に $\rho : G \to GL(V)$ は C^∞ 級写像だから $\rho_v : G \to V; g \mapsto \rho(g)v$ とおくと ρ_v も C^∞ 級写像になる。よって $H = \rho_v^{-1}(v)$ は G の閉集合である。したがって H は G の閉 Lie 部分群である (定理 9.6 と定義 9.7)。

命題 9.8 より、$X \in \mathfrak{h}$ をとると、任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\exp tX \in H$ となるので $\rho(\exp tX)v = v$ が成り立つ。両辺を $t = 0$ で微分し命題 8.6 を使うと

$$0 = \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)v\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{td\rho(X)}v\bigg|_{t=0} = d\rho(X)v.$$

逆に $d\rho(X)v = 0$ となる $X \in \mathfrak{g}$ をとると任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho(\exp tX)v = \exp(td\rho(X))v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(td\rho(X))^n v = v$$

だから $\exp tX \in H$ となり命題 9.8 より $X \in \mathfrak{h}$ を得る。

補題 10.3 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になり、$\det$ の微分は $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ である。

証明 行列式の性質より $\det : GL(V) \to GL(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$ は $GL(V)$ の表現になる。$X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $X : V \to V$ の固有値を λ_i $(1 \le i \le k)$ とし、各固有値の重複度を p_i とすると、例 6.4 より、

$$\det(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{k}(e^{\lambda_i t})^{p_i} = \prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}.$$

したがって、

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k}e^{p_i\lambda_i t}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k}p_i\lambda_i = \mathrm{tr}(X)$$

となり、$\det$ の微分は tr になる。

定義 10.4 V を有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det g = 1\}$ と表すと、補題 10.2 と補題 10.3 より $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、補題 10.2 と補題 10.3 より

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ とも書く。

命題 10.5 V を有限次元ベクトル空間とし $A : V \times V \to \mathbf{R}$ を双線形写像とする。

$$G = \{g \in GL(V) \mid A(gu, gv) = A(u, v)\ (u, v \in V)\}$$

とおくと G は線形 Lie 群になる。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

が成り立つ。

証明 $V \times V$ から $\mathbf{R}$ への双線形写像の全体を $M^2(V, \mathbf{R})$ で表す。$b, c \in \mathbf{R},\ B, C \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して $(bB + cC)(u, v) = bB(u, v) + cC(u, v)\ \ (u, v \in V)$ によって $bB + cC \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めるとこの演算によって $M^2(V, \mathbf{R})$ はベクトル空間になる。$g \in GL(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ に対して

$$(\rho(g)B)(u, v) = B(g^{-1}u, g^{-1}v) \qquad (u, v \in V)$$

として $\rho(g)B \in M^2(V, \mathbf{R})$ を定めると $\rho(g) \in GL(M^2(V, \mathbf{R}))$。$g, h \in GL(V),\ u, v \in V$ について

$$\begin{aligned}(\rho(gh)B)(u, v) &= B((gh)^{-1}u, (gh)^{-1}v) = B(h^{-1}g^{-1}u, h^{-1}g^{-1}v) \\ &= (\rho(h)B)(g^{-1}u, g^{-1}v) = (\rho(g)(\rho(h)B))(u, v)\end{aligned}$$

だから $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ となり $\rho : GL(V) \to GL(M^2(V, \mathbf{R}))$ は群の準同型写像である。各 $u, v \in V,\ B \in M^2(V, \mathbf{R})$ について $g \mapsto (\rho(g)B)(u, v)$ は C^∞ 級関数だから ρ は C^∞ 級写像になる。したがって ρ は Lie 群の準同型写像である。ρ の定義より $G = \{g \in GL(V) | \rho(g)A = A\}$。補題 10.2 を適用すると G は線形 Lie 群になる。

G の Lie 環を求めるために ρ の微分を計算する。$X \in \mathfrak{gl}(V),\ B \in M^2(V, \mathbf{R}),\ u, v \in V$ について

$$\begin{aligned}(d\rho(X)B)(u, v) &= \frac{d}{dt}(\rho(e^{tX})B)(u, v)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}B(e^{-tX}u, e^{-tX}v)\bigg|_{t=0} \\ &= -B(Xu, v) - B(u, Xv)\end{aligned}$$

だから補題 10.2 より

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid d\rho(X)A = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}.\end{aligned}$$

定義 10.6 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。V の A に関する直交変換の全体を $O(V) = O(V; A)$ で表すと命題 10.5 より $O(V)$ は線形 Lie 群になる。$O(V)$ を**直交群**と呼ぶ。$O(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V; A)$ で表すと命題 10.5 より

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0\ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する直交群とその Lie 環を $O(n), \mathfrak{o}(n)$ とも書く。

注意 10.7 $O(n)$ は n 次直交行列の全体であり $\mathfrak{o}(n)$ は n 次交代行列の全体である。

定義 10.8 V を有限次元ベクトル空間とし A を V 上の正定値内積とする。

$$SO(V) = SO(V; A) = SL(V) \cap O(V; A)$$

と表すと、系 9.9 より $SO(V)$ は線形 Lie 群になる。$SO(V)$ を**回転群**または**特殊直交群**と呼ぶ。$SO(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(V; A)$ で表すと系 9.9 より $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)$ となる。$\mathbf{R}^n$ の標準内積に関する回転群とその Lie 環を $SO(n), \mathfrak{so}(n)$ とも書く。

定義 10.9 V を有限次元複素ベクトル空間とし、$I : V \to V; v \mapsto \sqrt{-1}v$ とする。V の実正則線形変換の全体を $GL_{\mathbf{R}}(V)$、その Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ で表す。例 8.12 より $g \in GL_{\mathbf{R}}(V)$ に対して $\mathrm{Ad}(g)I = gIg^{-1}$ だから V の複素正則線形変換の全体 $GL_{\mathbf{C}}(V)$ は

$$\{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) \mid \mathrm{Ad}(g)I = I\}$$

に一致し、系 9.9 より線形 Lie 群になる。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素一般線形群**と呼ぶ。$GL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表す。定理 8.10 より

$$d\mathrm{Ad}(X)T = \mathrm{ad}(X)(T) = XT - TX \qquad (X, T \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V))$$

だから、

$$\begin{aligned} GL_{\mathbf{C}}(V) &= \{g \in GL_{\mathbf{R}}(V) \mid gI = Ig\}, \\ \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V) \mid XI = IX\} \end{aligned}$$

となっている。$\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は V の複素線形変換の全体である。$GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$, $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$ は $GL(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 10.10 Lie 群 G と複素有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**複素表現** と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**複素表現**と呼ぶ。

命題 10.11 Lie 群 G の複素表現の微分は、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

証明 $\rho : G \to GL_{\mathbf{C}}(V)$ を G の複素表現とし、I を V の複素構造とする。命題 8.6 より、$X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$I \exp(td\rho(X))I^{-1} = I\rho(\exp tX)I^{-1} = \rho(\exp tX) = \exp(td\rho(X))$$

が成り立つ。両辺を $t = 0$ で微分すると

$$Id\rho(X)I^{-1} = d\rho(X)$$

となり、$d\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$。したがって、$d\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ は $\mathfrak{g}$ の複素表現になる。

補題 10.12 複素有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(V) \to GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{0\}$ は $GL_{\mathbf{C}}(V)$ の複素表現になり、$\det_{\mathbf{C}}$ の微分は $\mathrm{tr}_{\mathbf{C}} : \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \to \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ である。

証明 補題 10.3 と同様に証明することができる。

定義 10.13 V を有限次元複素ベクトル空間とし $\det_{\mathbf{C}}$ で複素行列式を表す。

$$SL_{\mathbf{C}}(V) = \{g \in GL_{\mathbf{C}}(V) \mid \det_{\mathbf{C}} g = 1\}$$

と表すと補題 10.2 と補題 10.3 より、$SL_{\mathbf{C}}(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ を**複素特殊線形群**と呼ぶ。$SL_{\mathbf{C}}(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V)$ で表すと補題 10.2 と補題 10.3 より、

$$\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \mid \mathrm{tr}_{\mathbf{C}} X = 0\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$ における複素特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbf{C}), \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ とも書く。

定義 10.14 V を有限次元複素ベクトル空間とし A を V 上の正定値 Hermite 内積とする。V の A に関するユニタリ変換の全体を $U(V) = U(V; A)$ で表すと命題 10.5 より $U(V)$ は線形 Lie 群になる。$U(V)$ を**ユニタリ群**と呼ぶ。$U(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{u}(V) = \mathfrak{u}(V; A)$ で表すと命題 10.5 より

$$\mathfrak{u}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V) \mid A(Xu, v) + A(u, Xv) = 0 \ (u, v \in V)\}$$

となる。$\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関するユニタリ群とその Lie 環を $U(n), \mathfrak{u}(n)$ とも書く。

注意 10.15 $U(n)$ は n 次ユニタリ行列の全体であり $\mathfrak{u}(n)$ は n 次交代 Hermite 行列の全体である。

定義 10.16 V を有限次元複素ベクトル空間とし A を V 上の正定値 Hermite 内積とする。$SU(V) = SU(V; A) = SL_{\mathbf{C}}(V) \cap U(V; A)$ と表すと系 9.9 より $SU(V)$ は線形 Lie 群になる。$SU(V)$ を**特殊ユニタリ群**と呼ぶ。$SU(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{su}(V; A)$ で表すと系 9.9 より $\mathfrak{su}(V) = \mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(V) \cap \mathfrak{u}(V)$ となる。$\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関する特殊ユニタリ群とその Lie 環を $SU(n), \mathfrak{su}(n)$ とも書く。

11 Lie 部分群と Lie 部分環

定理 11.1 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるものが一意に存在する。

証明 $\dim\mathfrak{h} = k$ としておく。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、$\mathfrak{H}_g$ は $T_g(G)$ の k 次元部分ベクトル空間になる。$g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g$ を対応させる対応 $\mathfrak{H}$ が G 上の k 次元分布になることを示す。$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$ を $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{h}$ となるようにとる。各 X_i は G 上の左不変ベクトル場だから $1 \leq i \leq k$ に対して $(X_i)_g \in \mathfrak{H}_g (g \in G)$ が成り立ち、$\mathfrak{H}$ は G 上の k 次元分布である。X, Y を $\mathfrak{H}$ に属するベクトル場とすると、$f_i, g_i \in C^\infty(G)$ が存在し $X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i,\ Y = \sum_{i=1}^{k} g_i X_i$ と書ける。$f \in C^\infty(G)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
[X,Y](f) &= \sum_{i,j=1}^{k} [f_i X_i, g_j X_j](f) = \sum_{i,j=1}^{k} \{f_i X_i(g_j X_j(f)) - g_j X_j(f_i X_i(f))\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \{f_i(X_i g_j)(X_j f) + f_i g_j X_i X_j f - g_j(X_j f_i)(X_i f) - g_j f_i X_j X_i f\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \{f_i(X_i g_j)X_j - g_j(X_j f_i)X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}(f)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{k} \{f_i(X_i g_j)X_j - g_j(X_j f_i)X_i + f_i g_j [X_i, X_j]\}.
$$

$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環だから $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ となり、$[X,Y]$ は $\mathfrak{H}$ に属する。よって $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な k 次元分布である。Frobenius の定理より G の単位元 e を含む $\mathfrak{H}$ の極大連結積分多様体 H が存在する。$g \in G$ に対して $L_g(H)$ は G の部分多様体になり各 $x \in H$ について

$$
\begin{aligned}
T_{gx}(L_g(H)) &= d(L_g)_x T_x(H) = d(L_g)_x \mathfrak{H}_x = d(L_g)_x d(L_x)_e(\alpha(\mathfrak{h})) \\
&= d(L_{gx})_e(\alpha(\mathfrak{h})) = \mathfrak{H}_{gx}
\end{aligned}
$$

が成り立つので $L_g(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体である。そこで $g \in H$ に対して $L_{g^{-1}}(H)$ を考えると $L_{g^{-1}}(H)$ は $\mathfrak{H}$ の連結積分多様体になり $L_{g^{-1}}(H) \ni L_{g^{-1}}(g) = e$。$H$ の極大性より $L_{g^{-1}}(H) \subset H$ となり、$g^{-1} \in L_{g^{-1}}(H) \subset H$、すなわち $g^{-1} \in H$。また $L_{g^{-1}}(H) \subset H$ に L_g を作用させると $H \subset L_g(H)$ となり、H の極大性より $H = L_g(H)$ が成り立ち、H は G の部分群になる。

H が G の Lie 部分群であることを証明しよう。H は連結だから G の単位元の連結成分 G_0 に含まれる。命題 3.2 より G_0 は連結 Lie 群になるので、定理 3.1 より可

算開基を持つ。H は G_0 の連結部分多様体だから可算開基を持つ。$\tau_H : H \times H \to G; (g,h) \mapsto gh^{-1}$ は C^∞ 級写像で、H は G の部分群だから $\tau_H(H \times H) \subset H$。$H$ は可算開基を持つ $\mathfrak{H}$ の積分多様体なので、$\tau_H : H \times H \to H$ は C^∞ 級写像である。したがって H は Lie 群になり G の Lie 部分群である。H の構成法より H に対応する Lie 部分環は $\mathfrak{h}$ である。

最後に一意性を証明する。H' も G の連結な Lie 部分群で対応する Lie 部分環が $\mathfrak{h}$ になるとする。命題 9.4 より H,H' の指数写像は G の指数写像の制限になる。定理 7.5 より H と H' は恒等写像によって微分同型になる単位元の開近傍 U を持つ。したがって $H = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\} = H'$ となり (定理 3.1)、H と H' は集合として一致する。恒等写像 $\iota : H \to H'$ は群の同型写像で単位元の開近傍 U において微分同型を与える。各 $h \in H$ に対して $L_{h^{-1}} \circ \iota = \iota \circ L_{h^{-1}}$ となるので ι は $L_h(U)$ において微分同型を与える。したがって $\iota : H \to H'$ は Lie 群の同型写像になる。

系 11.2 Lie 群 G とその Lie 部分群 H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする。各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g = d(L_g)_e(\alpha(\mathfrak{h}))$ とおくと、対応 $\mathfrak{H}$ は G 上の完全積分可能な分布になる。さらに H は $\mathfrak{H}$ の積分多様体になっている。

定義 11.3 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が任意の $X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{h}$ に対して $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ を満たすとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルと呼ぶ。

命題 11.4 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を Lie 環の準同型写像とすると、$\ker f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

証明　$X \in \mathfrak{g}, Y \in \ker f$ に対して、$f([X,Y]) = [f(X), f(Y)] = 0$。したがって $[X,Y] \in \ker f$ となり、$\ker f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

命題 11.5 $f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、$\ker f$ は G の正規閉 Lie 部分群 (正規部分群でかつ閉 Lie 部分群) になる。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると $\ker f$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker df$ で $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。さらに G が連結の場合は $f(G)$ は H の Lie 環の Lie 部分環 $df(\mathfrak{g})$ に対応する H の連結 Lie 部分群に一致する。

証明　f は群の準同型写像だから $\ker f$ は G の正規部分群である。$\ker f$ は 1 点の逆像だから、定理 9.6 より閉 Lie 部分群になる。$\ker f$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環を $\mathfrak{h}$ とおくと、命題 9.8 より $X \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}$ の元になるための必要十分条件は $\exp tX \in \ker f$ $(t \in \mathbf{R})$ である。命題 8.6 より $f(\exp tX) = \exp(t df(X))$ だから、$f(\exp tX) = e$ $(t \in \mathbf{R})$ の必要十分条件は $df(X) = 0$ となり $X \in \ker df$。したがって $\mathfrak{h} = \ker df$。定理 8.2 より df は Lie 環の準同型になり、命題 11.4 より $\ker df$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

G が連結の場合を考えよう。定理 7.5 より、$\exp(\mathfrak{g})$ は G における単位元の近傍になる。また定理 3.1 より $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから

$$
\begin{aligned}
f(G) &= f(\cup\{(\exp \mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}) \\
&= \cup\{(f(\exp \mathfrak{g}))^n | n \in \mathbf{N}\} \\
&= \cup\{(\exp(df(\mathfrak{g})))^n | n \in \mathbf{N}\} \quad (\text{命題 8.2 より})
\end{aligned}
$$

となり $f(G)$ は $df(\mathfrak{g})$ に対応する連結 Lie 部分群に一致する。

例 11.6 有限次元実ベクトル空間 V に対して $\det_{\mathbf{R}} : GL_{\mathbf{R}}(V) \to GL_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ は Lie 群の準同型写像だから (補題 10.3)、$SL_{\mathbf{R}}(V) = \ker(\det_{\mathbf{R}})$ は $GL_{\mathbf{R}}(V)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{R}}(V)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{R}}(V)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$ のイデアルになる。また有限次元複素ベクトル空間 W に対しても $\det_{\mathbf{C}} : GL_{\mathbf{C}}(W) \to GL_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ は Lie 群の準同型写像だから、$SL_{\mathbf{C}}(W) = \ker(\det_{\mathbf{C}})$ は $GL_{\mathbf{C}}(W)$ の正規閉 Lie 部分群になる。$SL_{\mathbf{C}}(W)$ に対応する Lie 部分環 $\mathfrak{sl}_{\mathbf{C}}(W)$ は $\mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(W)$ のイデアルになる。

命題 11.7 Lie 群 G の Lie 部分群 H が可算個の連結成分を持つとする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおくと $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R})\}$ が成り立つ。

証明 命題 9.8 より

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H (t \in \mathbf{R}),\ t \mapsto \exp tX \text{ は } H \text{ の位相に関して連続 }\}$$

が成り立つので $\exp tX \in H(t \in \mathbf{R})$ となる $X \in \mathfrak{g}$ に対して $t \mapsto \exp tX$ が H の位相に関して連続になることを示せばよい。$f : \mathbf{R} \to G;\ t \mapsto \exp tX$ は C^∞ 級写像で $f(\mathbf{R}) \subset H$。H は可算個の連結成分を持つので、定理 3.1 より H は可算開基を持つ。また系 11.2 より H は G 上の完全積分可能な分布の積分多様体になっている。したがって、f を H への写像とみなしても $f : \mathbf{R} \to H$ は C^∞ 級写像になる。特に H の位相に関して連続になる。

定理 11.8 G を Lie 群とし H をその Lie 部分群とする。H の連結成分の個数は可算であるか、または H は閉 Lie 部分群であると仮定する。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、H が G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

証明 $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ とすると、H は G の正規部分群だから定理 8.10 を使うと

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)(tY)) = \exp(sX)\exp(tY)\exp(sX)^{-1} \in H \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

が成り立ち、命題 9.8 または 11.7 より $\mathrm{Ad}(\exp sX)Y \in \mathfrak{h}$ となる。

$$\left.\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}(\exp sX)Y\right|_{s=0} = [X, Y] \quad (\text{定理 } 8.10)$$

だから $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となり、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。

定理 11.9 G を連結 Lie 群とし H をその連結 Lie 部分群とする。G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ としておく。このとき、H が G の正規部分群になるための必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルになることである。

証明 定理 11.8 より H が G の正規部分群ならば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。逆に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルとする。定理 7.5 より G における単位元の開近傍 U と $\mathfrak{g}$ におけ

る 0 の開近傍 V が存在し $\exp : V \to U$ は微分同型写像になる。さらに $\exp(V \cap \mathfrak{h})$ は H における単位元の開近傍になる。$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ に対して

$$(\exp X)(\exp Y)(\exp X)^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(\exp X)Y)$$

ここで命題 8.6 を Ad に適用すると定理 8.10 より

$$\mathrm{Ad}(\exp X)Y = e^{\mathrm{ad}X}Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}X)^n Y \in \mathfrak{h}$$

だから $(\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1} \subset H$。したがって定理 3.1 より

$$\begin{aligned}(\exp X)H(\exp X)^{-1} &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})^n(\exp X)^{-1} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}((\exp X)\exp(V \cap \mathfrak{h})(\exp X)^{-1})^n \subset H\end{aligned}$$

であり $G = \cup\{U^n | n \in \mathbf{N}\}$ だから任意の $g \in G$ に対して $gHg^{-1} \subset H$ が成り立つ。よって H は G の正規部分群である。

定義 11.10 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする。

$$\ker(\mathrm{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{g} \text{ に対して } [X, Y] = 0\}$$

を $\mathfrak{g}$ の中心と呼ぶ。(命題 11.4 より中心はイデアルになる。)

補題 11.11 f, g を連結 Lie 群から Lie 群への Lie 群の準同型写像とする。もし $df = dg$ ならば $f = g$ が成り立つ。

証明 f, g を連結 Lie 群 G から Lie 群 H への Lie 群の準同型写像とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して命題 8.6 より

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) = \exp(dg(X)) = g(\exp X)$$

となるので f と g は $\exp(\mathfrak{g})$ において一致する。定理 7.5 と定理 3.1 を使うと $G = \cup\{\exp(\mathfrak{g})^n | n \in \mathbf{N}\}$ となるので f と g は G 全体で一致する。

定理 11.12 連結 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G の中心は随伴表現 Ad の核に一致する。特に G の中心は正規閉 Lie 部分群になり対応する Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ の中心である。

証明 G の中心を Z で表す。随伴表現の定義 (定理 8.10, 定義 8.11) より $Z \subset \ker \mathrm{Ad}$ はすぐにわかる。$g \in \ker \mathrm{Ad}$ とすると $d(L_g \circ R_g^{-1})$ は $\mathfrak{g}$ の恒等写像になるので、補題 11.11 より $L_g \circ R_g^{-1}$ は G の恒等写像になる。したがって $g \in Z$ となり $Z = \ker \mathrm{Ad}$ がわかった。命題 11.5 より Z は G の正規閉 Lie 部分群になり Z に対応する $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\ker d\mathrm{Ad} = \ker \mathrm{ad}$ で (定理 8.10)、$\mathfrak{g}$ の中心である。

系 11.13 連結 Lie 群が可換になるための必要十分条件はその Lie 環が可換になることである。

証明 G を連結 Lie 群としその Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。G が可換ならば $\mathfrak{g}$ も可換になることは系 7.8 で示した。そこで $\mathfrak{g}$ が可換であると仮定すると $\mathfrak{g}$ の中心は $\mathfrak{g}$ に一致する。定理 11.12 より G の中心は G に一致し G は可換になる。

12 線形 Lie 群の連結性

定理 12.1 ユニタリ群 $U(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{u}(n) \to U(n)$ は全射である。特に $U(n)$ は連結である。

証明 $U(n)$ の任意の元 u は正規行列だからユニタリ行列によって対角化可能である。つまり、ある $g \in U(n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ が存在して

$$g^{-1}ug = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

となる。$g^{-1}ug \in U(n)$ だから $|a_1| = \cdots = |a_n| = 1$。よって $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して $a_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ となる。

$$u = g \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix}.$$

ここで注意 10.15 より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(n)$$

となり $U(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{u}(n)$ は連結だから $U(n)$ も連結。

定理 12.2 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{su}(n) \to SU(n)$ は全射である。特に $SU(n)$ は連結である。

証明 定理 12.1 の証明と同様に $SU(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$(*) \quad u = g \exp \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} g^{-1}.$$

ここで $\det u = 1$ だから $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$。$e^{\sqrt{-1}\theta_1} = e^{\sqrt{-1}(\theta_1 - 2\pi k)}$ より θ_1 を $\theta_1 - 2\pi k$ に置き換えても上の $(*)$ は成立し $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 0$ となる。定義 10.16 より

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n)$$

で $g \in U(n)$ だから

$$\mathrm{Ad}(g) \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}\theta_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n).$$

したがって $SU(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{su}(n)$ は連結だから $SU(n)$ も連結。

定理 12.3 回転群 $SO(n)$ の指数写像 $\exp : \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$ は全射である。特に $SO(n)$ は連結である。

証明 $SO(n) \subset U(n)$ だから定理 12.1 の証明と同様に $SO(n)$ の任意の元 u に対して、ある $g \in U(n)$ と $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$u = g \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{bmatrix} g^{-1}.$$

u の固有多項式は実係数だから u の固有値に共役な値も u の固有値になる。g の縦ベクトルの順序を適当にかえて

$$(*) \quad u = g \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & & & & & & \\ & e^{-\sqrt{-1}\theta_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{\sqrt{-1}\theta_k} & & & & \\ & & & & e^{-\sqrt{-1}\theta_k} & & & \\ & & & & & \varepsilon_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix} g^{-1}$$

とできる。ただし $\theta_i \notin \pi\mathbf{Z}$ $(1 \le i \le k)$, $\varepsilon_j = \pm 1$ $(2k+1 \le j \le n)$。$g = [g_1 \dots g_n]$ と表すと $ug_{2i-1} = e^{\sqrt{-1}\theta_i} g_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。u は実行列だから $u\bar{g}_{2i-1} = e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}$ $(1 \le i \le k)$。そこで g_{2i} を $\bar{g}_{2i-1}$ に置き換えても $g \in U(n)$ となり $(*)$ は成り立つ。また $\varepsilon_j \in \mathbf{R}$ だから $g_j \in \mathbf{R}^n$ とすることができる。さらに $\det u = 1$ だから $\varepsilon_j = -1$ となる ε_j の個数は偶数。よって g の縦ベクトルの順序を適当にかえて $\varepsilon_{2k+1} = \cdots = \varepsilon_{2l} = -1$, $\varepsilon_{2l+1} = \cdots = \varepsilon_n = 1$ とできる。$1 \le i \le k$ に対して

$$h_{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{2i-1} + \bar{g}_{2i-1}), \quad h_{2i} = \frac{1}{\sqrt{-2}}(g_{2i-1} - \bar{g}_{2i-1})$$

とおき $h_j = g_j$ $(2k+1 \le j \le n)$ とすると $h = [h_1 \dots h_n] \in U(n)$ で h は実行列になる。したがって $h \in O(n)$。$1 \le i \le k$ に対して

$$\begin{aligned} uh_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i}g_{2i-1} + e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \cos\theta_i h_{2i-1} - \sin\theta_i h_{2i} \\ uh_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{-2}}(e^{\sqrt{-1}\theta_i}g_{2i-1} - e^{-\sqrt{-1}\theta_i}\bar{g}_{2i-1}) = \sin\theta_i h_{2i-1} + \sin\theta_i h_{2i} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\theta_i = \pi \quad (k+1 \le i \le l) \\ &R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (1 \le i \le l) \end{aligned}$$

とおくと

$$u = h \begin{bmatrix} R_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_l & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} h^{-1}.$$

ところが $X_i = \begin{bmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{bmatrix}$ $(1 \le i \le l)$ とおくと $\exp X_i = R_i$ となるので

$$u = \exp \mathrm{Ad}(h) \begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで注意 10.7 と定義 10.8 より

$$\mathrm{Ad}(h)\begin{bmatrix} X_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$$

だから $SO(n)$ の指数写像は全射になる。$\mathfrak{so}(n)$ は連結だから $SO(n)$ も連結。

系 12.4 直交群 $O(n)$ は 2 つの連結成分 $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \det g = -1\}$ を持つ。

証明 $\det(O(n)) = \{\pm 1\}$ だから $SO(n)$ と $\{g \in O(n) | \det g = -1\}$ はどちらも $O(n)$ の開かつ閉集合。定理 12.3 より $SO(n)$ は連結で、$\det h = -1$ となる $h \in O(n)$ をとると

$$\{g \in O(n) | \det g = -1\} = L_h(SO(n))$$

となりこれも連結。したがって $SO(n)$ と $L_h(SO(n))$ はどちらも $O(n)$ の連結成分になり $O(n) = SO(n) \cup L_h(SO(n))$ は $O(n)$ の連結成分への分解になっている。

定理 12.5 $GL(n, \mathbf{C})$ と $SL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

証明 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の (i, j) 成分を X_{ij} で表すことにする。

$$T(n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) | X_{ii} > 0 (1 \le i \le n),\ X_{ij} = 0 (i > j)\}$$

とおくと、$T(n, \mathbf{C})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{C})$ は連結である。さらに、$X \in T(n, \mathbf{C})$ に対して $\det X = \prod_{i=1}^n X_{ii} > 0$ だから $X \in GL(n, \mathbf{C})$。したがって $T(n, \mathbf{C}) \subset GL(n, \mathbf{C})$。さらに $T(n, \mathbf{C})$ は $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群になる。

$$P : U(n) \times T(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C}); (a, X) \mapsto aX$$

とおくと P は連続になる。さらに P が全射になることを示そう。任意の $g \in GL(n, \mathbf{C})$ に対して $g = [g_1 \ldots g_n]$ と縦ベクトル $g_i \in \mathbf{C}^n$ を使って表す。$g_1, \ldots, g_n$ は $\mathbf{C}^n$ の基底になる。$\mathbf{C}^n$ の標準的な Hermite 内積に関して $g_1, \ldots g_n$ に Gram-Schmidt の直交化を行う。$b_1 = g_1, a_1 = \frac{1}{|b_1|} b_1$ とし、$b_k, a_k (k \ge 2)$ を次のように帰納的に定める。

$$b_k = g_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle g_k, a_i \rangle a_i, \quad a_k = \frac{1}{|b_k|} b_k.$$

すると $a_1, \ldots, a_n$ は $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底になる。各 a_k は $g_1, \ldots, g_k$ の線形結合になっていて、その線形結合の g_k の係数は $1/|b_k| > 0$ である。そこで基底の変換を

$$(*) \quad [a_1 \ldots a_n] = [g_1 \ldots g_n] X$$

で表すと $X \in T(n, \mathbf{C})$ となる。$a = [a_1 \dots a_n]$ とおくと $a \in U(n)$ で $a = gX$。$g = aX^{-1}$ になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{C})$ だから $g = P(a, X^{-1})$。したがって P は全射である。定理 12.1 より $U(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{C})$ も連結だから $GL(n, \mathbf{C})$ は連結である。

$$S : GL(n, \mathbf{C}) \to SL(n, \mathbf{C}); X \mapsto X \begin{bmatrix} \frac{1}{\det X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。S は連続になり $X \in SL(n, \mathbf{C})$ に対して $S(X) = X$ だから、$S(GL(n, \mathbf{C})) = SL(n, \mathbf{C})$ が成り立つ。よって $SL(n, \mathbf{C})$ も連結になる。

定理 12.6 $GL(n, \mathbf{R})$ は 2 つの連結成分

$$GL^+(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g > 0\}, \quad \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g < 0\}$$

を持つ。$SL(n, \mathbf{R})$ は連結である。

証明 定理 12.5 の証明で使った記号を使うことにする。

$$\det : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\}$$

は連続であり、$GL^+(n, \mathbf{R})$ は開集合の逆像になるので $GL(n, \mathbf{R})$ の開部分群になる。特に、$GL^+(n, \mathbf{R})$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の Lie 部分群である。$T(n, \mathbf{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \cap T(n, \mathbf{C})$ とおくと、$T(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の凸部分集合になる。特に $T(n, \mathbf{R})$ は連結である。さらに $T(n, \mathbf{R})$ は $GL^+(n, \mathbf{R})$ の部分群になる。以下で $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ を示そう。定理 12.5 の証明と同様にすると、任意の $g \in GL^+(n, \mathbf{R})$ に対してある $a \in O(n)$ と $X \in T(n, \mathbf{R})$ が存在し $a = gX$ となる。$\det g > 0, \det X > 0$ だから $\det a = 1$ になり $a \in SO(n)$。$g = aX^{-1}$ になり $X^{-1} \in T(n, \mathbf{R})$。したがって $P(SO(n) \times T(n, \mathbf{R})) = GL^+(n, \mathbf{R})$ である。定理 12.3 より $SO(n)$ は連結で $T(n, \mathbf{R})$ も連結だから $GL^+(n, \mathbf{R})$ は連結である。

$$\det{}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t > 0\}) = GL^+(n, \mathbf{R}),$$
$$\det{}^{-1}(\{t \in \mathbf{R} | t < 0\}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) | \det g < 0\}$$

はどちらも $GL(n, \mathbf{R})$ の開かつ閉の連結部分集合になる。したがってこれら 2 つが $GL(n, \mathbf{R})$ の連結成分である。

次に $ST(n, \mathbf{R}) = T(n, \mathbf{R}) \cap SL(n, \mathbf{R})$ とおくと $S(T(n, \mathbf{R})) = ST(n, \mathbf{R})$ となり $T(n, \mathbf{R})$ は連結だから $ST(n, \mathbf{R})$ も連結になる。任意の $g \in SL(n, \mathbf{R})$ に対して $a = gX,\ a \in SO(n), X \in T(n, \mathbf{R})$ となり $\det g = 1$ より $\det X = 1$。したがって $P(SO(n) \times ST(n, \mathbf{R})) = SL(n, \mathbf{R})$。$SO(n)$ は連結だから $SL(n, \mathbf{R})$ も連結になる。

系 12.7 V を n 次元実ベクトル空間とし、

$$B_{\mathbf{R}}(V) = \{(v_1, \ldots, v_n) \in V^n | v_1, \ldots, v_n \text{は} V \text{の基底}\}$$

として V の基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ を定義すると $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^n の開集合で $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。n 次元複素ベクトル空間 W に対して同様に W の基底全体 $B_{\mathbf{C}}(W)$ を定義すると $B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^n の開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になる。特に $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

証明 V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を 1 つ固定しておく。

$$T : \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V) \to V^n; g \mapsto (g(e_1), \ldots, g(e_n))$$

とおくと、T は線形同型写像になり $T(GL_{\mathbf{R}}(V)) = B_{\mathbf{R}}(V)$。したがって $B_{\mathbf{R}}(V)$ は V^n の開集合になり $GL_{\mathbf{R}}(V)$ と微分同型になる。定理 12.6 より $B_{\mathbf{R}}(V)$ は 2 つの連結成分を持つ。

複素ベクトル空間 W の場合も T と同様の写像を定義することにより、$B_{\mathbf{C}}(W)$ は W^n の開集合で $GL_{\mathbf{C}}(W)$ と微分同型になることがわかる。定理 12.5 より $B_{\mathbf{C}}(W)$ は連結になる。

定義 12.8 有限次元実ベクトル空間 V の基底の全体 $B_{\mathbf{R}}(V)$ の 1 つの連結成分を V の向きと呼ぶ。系 12.7 より V は 2 つの向きを持っている。

系 12.9 n 次元実ベクトル空間 V の 2 つの基底 $u_1, \ldots, u_n$ と $v_1, \ldots, v_n$ が V の同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X \in GL(n, \mathbf{R})$(つまり $(u_1 \ldots u_n) = (v_1 \ldots v_n)X$) が $GL^+(n, \mathbf{R})$ に属することである。

系 12.10 内積を持つ n 次元実ベクトル空間 V の 2 つの正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ と $v_1, \ldots, v_n$ が V の同じ向きに属するための必要十分条件は、基底の変換行列 $X \in O(n)$(つまり $(u_1 \ldots u_n) = (v_1 \ldots v_n)X$) が $SO(n)$ に属することである。