

対称空間入門

— 大阪市立大学数学研究所連続講義 —
(数学院生談話会連続講義)

田崎博之

2010年度

(第1回 2010年11月11日-13日)

(第2回 2011年3月16日-18日)

はしがき

2010年8月に神戸大学で開かれた幾何学シンポジウムの際に、大阪市立大学大学院生の橋本要さんから講義の依頼がありました。今まで大学院生から講義の依頼をうけたことはなかったので不思議に思っていたのですが、大阪市立大学の大仁田義裕さんの話では大学院生が講師を選んで連続講義を企画する制度があるそうです。通常の集中講義はカリキュラムの一環ですから、講義の計画はしかるべき会議で承認され履修した学生は単位をとることができますが、この連続講義はそれとは異なり講義の計画は講師と学生の間で決めればすぐに実行でき単位とは無関係だということです。これはすばらしい制度だと思いました。学生が講師を選ぶ講義を担当するというのは、私にとって嬉しいことですのでこの連続講義を引き受けることにしました。

講義の内容はすぐに決まりました。この講義以前の私のホームページの「講義ノートに関する説明」のページに次のように書いていました。「今までに対称空間に関する幾何学の研究は数々おこなってきましたが、結局その基礎に関する講義はしないままになっています。いずれは対称空間の基礎的な講義をしようと思っています。」こう思いながらもなかなかその機会はありませんでした。今回依頼を受けた講義は対称空間の話をするいい機会だと感じ、講義の内容は対称空間に決めました。

講義の内容が決まったといっても、対称空間の基本的事項を証明付きで解説するとすると Helgason の教科書のように大変な分量になってしまい、数日間の講義でやるには無理があります。そこで、対称空間の一般論の定義や定理等は正確に述べるが、定理等の証明は付けない、そのかわり Grassmann 多様体や古典型コンパクト Lie 群等の例について一般論で示したことを詳しく論じるという方針で講義をすることにしました。

具体的に講義内容を吟味し始めると、対称空間の話始める前に Lie 群と Lie 環、Riemann 多様体、Riemann 等質空間に関する基本事項を解説した方がよさそうだと感じました。これらについてはそれ以前に何度か講義をしていたので、その講義ノートから必要事項を抜き出して並べるとこれらの基本事項の一般論の部分になりました。古典型 Lie 群や Grassmann 多様体の場合の詳しい考察を付け加えて、準備の章がおおむねできあがりしました。

次に Riemann 対称空間の基本事項を集めて、定義、定理等に区分して一般論を展開しました。この一般論を Grassmann 多様体や古典型コンパクト Lie 群等の例に適用したときの具体的計算を追加して Riemann 対称空間の章を完成させるという構想は固まりましたが、実際に講義をする前に講義ノートはまだ完成していませんでした。

大阪市立大学の数学事務から届いた連続講義の事務的手続きに関するメールには、第1回目：11月11日-13日と書かれていました。第2回目もあるかもしれないというメッセージが含まれています。そこで、第1回目が始まる前ではありま

したが、次のような第 2 回目の案を考えてみました。

(A) ルート系から半単純 Lie 環と対称空間の分類

(B) Chen-Nagano 理論から対蹠集合と実形の交叉

(A) 案は対称空間の講義内容としては標準的です。(B) 案は 2010 年 12 月 4 日 (土) 開催の秋葉原微分幾何セミナーでの田中真紀子さんとの共同講演の内容です。この講演内容の詳細と具体例への適用について解説すれば対称空間入門の続きの講義になると考えました。とりあえず二つの案を準備していましたが、第 2 回目は (A) 案になりそうです。

講義をした 11 月 11 日 (木) から 13 日 (土) の間、多くの方々に講義を聞いていただき充実した時間を過ごすことができました。この連続講義を企画してくれた橋本要さんとそもそもこのような制度の実施を可能にくださった大仁田義裕さんに感謝します。入江博さんと坊向伸隆さんには板書の記録をとっていただき、感謝しています。その板書の記録を参考にしながら講義ノートを完成させました。

2010 年 11 月 29 日

講義概要

各点で点対称を持つ Riemann 多様体は Riemann 対称空間と呼ばれ、定曲率空間、射影空間や Grassmann 多様体、コンパクト Lie 群などを含む基本的な Riemann 多様体の族を与えています。この講義では具体例を軸にして Riemann 対称空間の基本的な性質を解説します。そのためには Lie 群と Lie 環、Riemann 多様体、Riemann 等質空間などの基礎事項も必要になるので、これらに関する準備を最初に行います。さらにそれらを利用して Riemann 対称空間の典型的例である Grassmann 多様体を特に詳しく扱うことにします。準備に続く Riemann 対称空間の章では、Riemann 対称空間の定義から導かれる基本的性質や Riemann 対称対との対応関係に関する一般論について解説します。Grassmann 多様体や古典型コンパクト Lie 群の場合に一般論はどうなるかについても説明します。

第2回はしがき

この連続講義の第1回の2010年11月11日–13日の間にこの年度中に第2回の講義の依頼を受け、引き受けることにしました。前に考えていた第2回案

(A) ルート系から半単純 Lie 環と対称空間の分類

(B) Chen-Nagano 理論から対蹠集合と実形の交叉

から対称空間の講義内容としては標準的な (A) 案にしました。その後、第2回の講義日程を3月16日(水)から18日(金)に決定し、講義の準備を進めていました。通常の講義や入試の終わった後は比較的準備に時間をとることができ、3月11日(金)には対称空間の分類について講義内容を研究室で考えていました。そこに東北関東大地震が起き、講義の準備に最低限必要な資料を研究室から持ちだして避難しました。その後は講義の準備を進める時間的余裕はかなり制限されてしまいました。大阪に向けつくばから出発した3月15日(火)にはつくばエクスプレス (TX) は計画停電の影響で10:30から20:00までは運休するということなので、朝は早めに自宅を出発しTXに乗車しました。TXと山手線はものすごい混雑で大変でしたが、東京駅からの新幹線はいつものように順調でした。車内で橋本要さんに携帯電話でメールを送り、大阪に向けてのぞみに乗ったことと、可能なら Helgason の対称空間の教科書 [1] を講義期間中貸してほしいと伝えました。大阪には昼前に到着し、ホテルに着いてからは部屋で講義の準備を進めました。

講義初日の16日に橋本さんが Helgason の教科書を用意しておいてくれました。おかげさまで講義の準備に役立てることができました。今回の講義の最初に第1回の講義の復習を簡単にしました。特に、対称空間の定義 (定義 2.1.1)、対称空間から等長変換群の対合的自己同型写像が定まること (定理 2.1.3)、この対合的自己写像の持つ性質を抽出した Riemann 対称対の定義 (定義 2.1.5)、逆に Riemann 対称対から対称空間が定まること (定理 2.1.6) について復習しました。定義 2.1.5 で定義した Riemann 対称対の Lie 環版にあたる直交対称 Lie 代数を使って、対称空間のコンパクト型・非コンパクト型・Euclid 型の定義、分解、双対性、既約分解、分類などを扱うことと、そのためには複素半単純 Lie 環の情報が必要になることを説明しました。以上の若干長い前置きをしてから、第3章の複素半単純 Lie 環に入りました。この章と次の第4章の対称空間の分解と分類の内容は、この題材を扱う上で標準的なものばかりです。これらについては主に Helgason の教科書 [1] を参考にしました。前回同様に定理等の証明は付けなかった代わりに、多くの定義定理等に例を付けました。特に第3章、第4章の内容を把握するために複素単純 Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ とその実形 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ と $\mathfrak{su}(n)$ を繰り返し登場させました。これらの Lie 環と関連した直和分解の計算は比較的簡単なので、ルート空間分解、実形、Cartan 分解、直交対称 Lie 代数の双対性等の理解に役立つと思います。最後の節ではコンパクト型対称空間の基本群を扱いました。基本群については竹内先生の論文 [2] も参考にしました。ただし、この論文ではアフィン Weyl 群を使って基本群を記述し

ていますが、この講義では極大可換部分空間の格子の商として基本群を表現しました。これでコンパクト型対称空間の局所的な分類だけではなく、大域的な分類もできることになります。

この連続講義の第3回を2011年度にするという話がでました。余震も福島原発の事故も収まっていないため先が見えず不安な状況では、できるかどうかわからなくても未来の講義の案を考えるのはいいことだと思い、講義が可能になれば引き受けることにしました。内容は第2回の案の一つ

(B) Chen-Nagano 理論から対蹠集合と実形の交叉

にしようと思います。

今回の講義期間3月16日(水)から18日(金)の間も、多くの方々に講義を聞いていただきありがたく思っています。また第2回の連続講義を可能にいただいた大仁田さんと橋本さんに感謝します。事前準備の不十分な部分の板書記録をとっていただいた坊向さんにも感謝しています。

2011年3月23日

第2回講義概要

対称空間の構造を詳しく調べるために、対称空間の性質を等長変換群の Lie 環から構成される直交対称 Lie 代数の性質に帰着させます。直交対称 Lie 代数の性質を調べるためには、複素半単純 Lie 環の構造に関する情報が重要になります。そこで、複素半単純 Lie 環のルート空間分解、分類、コンパクト実形等に関する準備を行います。直交対称 Lie 代数に複素半単純 Lie 環の結果を適用して、直交対称 Lie 代数さらに対称空間のコンパクト型・非コンパクト型・Euclid 型の定義、分解、双対性、既約分解、分類などを扱います。

目次

はしがき	i
講義概要	ii
第2回はしがき	iii
第2回講義概要	iv
第1章 準備	1
1.1 Lie 群と Lie 環	1
1.2 Riemann 多様体	7
1.3 Riemann 等質空間	10
1.4 Grassmann 多様体	14
第2章 Riemann 対称空間	19
2.1 Riemann 対称空間	19
2.2 曲率と全測地的部分多様体	22
2.3 コンパクト Lie 群	25
第3章 複素半単純 Lie 環	31
3.1 半単純 Lie 環	31
3.2 Cartan 部分環とルート空間分解	33
3.3 複素単純 Lie 環の分類	37
3.4 半単純 Lie 環の直和分解	39
第4章 対称空間の分解と分類	43
4.1 直交対称 Lie 代数	43
4.2 対称空間の双対性	45
4.3 対称空間の分解	46
4.4 非コンパクト型対称空間	48
4.5 コンパクト型対称空間	48
4.6 対称空間の分類	50
4.7 コンパクト型対称空間の基本群	51
参考文献	54

第1章 準備

この章では Riemann 対称空間の解説に必要な Lie 群と Lie 環、Riemann 多様体、Riemann 等質空間に関する準備をする。さらにそれらを利用して Riemann 対称空間の典型的例である Grassmann 多様体についても解説しておく。Grassmann 多様体とは係数体が実数体 \mathbb{R} 、複素数体 \mathbb{C} 、または四元数体 \mathbb{H} のベクトル空間内の部分ベクトル空間全体の成す多様体のことである。

1.1 Lie 群と Lie 環

定義 1.1.1 多様体 G が群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \rightarrow G; (x, y) \mapsto xy, \quad G \rightarrow G; x \mapsto x^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、 G を Lie 群と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元は e で表す。)

例 1.1.2 V を有限次元実ベクトル空間とすると、 V の正則線形変換の全体 $GL(V)$ は Lie 群になる。 $GL(\mathbb{R}^n)$ は $GL(n, \mathbb{R})$ とも書く。 $GL(V)$ を実一般線形群と呼ぶ。複素一般線形群、四元数一般線形群も同様に定義する。

定義 1.1.3 Lie 群 G の元 g に対して微分同型写像 L_g, R_g を

$$L_g : G \rightarrow G; x \mapsto gx, \quad R_g : G \rightarrow G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれ g による左移動、右移動と呼ぶ。 G 上のベクトル場 X は、 G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき左不変ベクトル場と呼ばれる。右不変ベクトル場も同様に定義できる。

定義 1.1.4 実ベクトル空間 \mathfrak{g} に双線形写像 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

が成り立つとき、 \mathfrak{g} を Lie 環と呼ぶ。Lie 環 \mathfrak{g} のベクトル部分空間 \mathfrak{h} が、演算 $[\cdot, \cdot]$ に関して閉じているとき、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Lie 部分環と呼ぶ。

Lie 環 \mathfrak{g} の Lie 部分環は \mathfrak{g} のブラケットを制限することで Lie 環になる。

例 1.1.5 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\cdot, \cdot]$ に関して Lie 環になる。

例 1.1.6 V を実ベクトル空間とする。 V の線形変換全体 $\text{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると $\text{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。 $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ と書く。

定理 1.1.7 G を Lie 群とし、 G の左不変ベクトル場の全体を \mathfrak{g} で表す。すると、 \mathfrak{g} は G 上のベクトル場全体の成す Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G; X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$ が成り立つ。

定義 1.1.8 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 \mathfrak{g} を Lie 群 G の Lie 環と呼ぶ。

定義 1.1.9 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f : G \rightarrow H$ が群の準同型写像でもあるとき、 f を Lie 群の準同型写像と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、 f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、 f を Lie 群の同型写像と呼び Lie 群 G と H は同型であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、 f を Lie 環の準同型写像と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、 f を Lie 環の同型写像と呼び、Lie 環 \mathfrak{g} と \mathfrak{h} は同型であるという。

命題 1.1.10 G を Lie 群とし G の単位元を含む連結成分を G_0 とすると、 G_0 は G の正規部分群であり、さらに Lie 部分群である。

Lie 群 G の単位元を含む連結成分 G_0 を単位連結成分と呼ぶことにする。

定理 1.1.11 $GL(n, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 環を \mathfrak{g} とし、 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ ($g \in GL(n, \mathbb{R})$) によって定めると、写像

$$\tilde{\cdot} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}; X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

上記定理より $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 環の演算は行列の交代積 $XY - YX$ とみなせるため、左不変ベクトル場のブラケット積よりは扱いが簡単になる。

定義 1.1.12 実数全体 \mathbb{R} を加法に関して Lie 群とみなしたとき、 \mathbb{R} から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の一径数部分群と呼ぶ。

定理 1.1.13 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。Lie 環 \mathfrak{g} の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c: \mathbb{R} \rightarrow G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、 c は G の一径数部分群になり、 $X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 1.1.7 によって $\frac{dc}{dt}(0) \in T_e G$ に対応する \mathfrak{g} の元 X を c に対応させる。

今後、 \mathbb{K} は \mathbb{R} 、 \mathbb{C} または \mathbb{H} のいずれかに等しいものとする。

定義 1.1.14 n 次 \mathbb{K} 正方行列全体を $M_n(\mathbb{K})$ で表す。 $X \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

によって e^X を定めると、この無限級数はコンパクト一様絶対収束することが知られている。これを行列の指数関数と呼ぶ。

命題 1.1.15 $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ と $P \in GL(n, \mathbb{K})$ に対して以下が成り立つ。

- (1) $e^{PXP^{-1}} = Pe^X P^{-1}$.
- (2) $XY = YX$ ならば $e^{X+Y} = e^X e^Y$ が成り立つ。
- (3) e^X は正則行列になり、 $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
- (4) $\frac{d}{dt} e^{tX} = e^{tX} X = X e^{tX}$.

例 1.1.16 $GL(n, \mathbb{K})$ の一径数部分群を求める。 $GL(n, \mathbb{K})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の元と同一視する。 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong T_e(GL(n, \mathbb{K}))$ に対応する $GL(n, \mathbb{K})$ 上の左不変ベクトル場を \tilde{X} で表すと、 $\tilde{X}_g = gX$ ($g \in GL(n, \mathbb{K})$) となる。したがって、 X に対応する $GL(n, \mathbb{K})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbb{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。したがって、 $c(t) = e^{tX}$ となる。

定義 1.1.17 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.1.13 で存在を示した X の積分曲線 $c: \mathbb{R} \rightarrow G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、 $\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ を定義する。 \exp を Lie 群 G の指数写像と呼ぶ。指数写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は C^∞ 級になることがわかる。

例 1.1.18 例 1.1.16 で示したように $GL(n, \mathbb{K})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、 $GL(n, \mathbb{K})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 1.1.19 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。定理 1.1.13 の対応で $X \in \mathfrak{g}$ に対して対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

定理 1.1.20 Lie 群 G とその Lie 環 \mathfrak{g} に対して、 G の指数写像 \exp は \mathfrak{g} における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

$d\exp_0 = \alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ となり、逆関数定理より \exp は \mathfrak{g} における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

多様体 X 上の C^∞ 級関数全体のなすベクトル空間を $C^\infty(X)$ で表す。

命題 1.1.21 G を Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$ に対して次が成り立つ。

$$(Xf)(g) = \left. \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right|_{t=0}$$

$$([X, Y]f)(g) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1}) \right|_{s=t=0}.$$

最初の等式は次のように示すことができる。

$$(Xf)(g) = df(X_g) = df(dL_g X_e) = df \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp tX \right) = \left. \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right|_{t=0}.$$

系 1.1.22 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 \mathfrak{g} の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ となる。

定義 1.1.23 Lie 環 \mathfrak{g} の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ となるとき、 \mathfrak{g} は可換であるという。この用語を使うと系 1.1.22 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

命題 1.1.24 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 1.1.25 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。 $f : G \rightarrow H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 1.1.7 の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$, $\alpha_H : \mathfrak{h} \rightarrow T_e H$ とすると、 $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df} & \mathfrak{h} \\ \alpha_G \downarrow \cong & & \cong \downarrow \alpha_H \\ T_e G & \xrightarrow{df_e} & T_e H \end{array}$$

定義 1.1.26 Lie 群の準同型写像 $f : G \rightarrow H$ に対して、 $df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を f の微分と呼ぶ。この用語を使うと定理 1.1.25 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 1.1.27 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。 A の恒等写像の微分は \mathfrak{a} の恒等写像である。また $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ を Lie 群の準同型写像とすると、 $d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$ が成り立つ。

系 1.1.28 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。 $f : A \rightarrow B$ を Lie 群の同型写像とすると、 $df : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

一般に上の系の逆は真ではない。被覆準同型写像は同型にはならないが、その微分は Lie 環の同型写像になる。

命題 1.1.29 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環と指数写像をそれぞれ \mathfrak{g}, \exp_G と \mathfrak{h}, \exp_H で表す。 $f : G \rightarrow H$ を Lie 群の準同型写像とすると、次が成り立つ。

$$f(\exp_G X) = \exp_H(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df} & \mathfrak{h} \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

定義 1.1.30 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、 G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の表現と呼ぶ。 Lie 環 \mathfrak{g} とベクトル空間 V に対して、 \mathfrak{g} から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を \mathfrak{g} の表現と呼ぶ。

命題 1.1.31 Lie 環 \mathfrak{g} の元 X に対して $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y], Y \in \mathfrak{g}$ として $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

定義 1.1.32 Lie 環 \mathfrak{g} に対して定まる表現 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} の随伴表現と呼ぶ。

定理 1.1.33 Lie 群 G の元 g に対して $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ は G の内部自己同型になる。 $\text{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。 G の Lie 環を \mathfrak{g} とすると、 $\text{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X)$ ($g \in G, X \in \mathfrak{g}$) が成り立つ。さらに、 $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は \mathfrak{g} の随伴表現 ad に一致する。

定義 1.1.34 Lie 群 G に対して定まる表現 $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ を G の随伴表現と呼ぶ。

$g \exp X = g \exp X g^{-1} g = \exp(\text{Ad}(g)X) g$ となるので、随伴表現は群演算の非可換の度合を測っているとみなせる。

例 1.1.35 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めよう。例 1.1.18 より、 $GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。 $g \in GL(V)$, $X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\text{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}} \right|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

定義 1.1.36 Lie 群 H が Lie 群 G の Lie 部分群であるとは、 H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

定理 1.1.37 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。 H が G の閉集合ならば、 H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 1.1.38 一般線形群の閉 Lie 部分群を線形 Lie 群と呼ぶ。

定義 1.1.39 V を有限次元実ベクトル空間とし、 $SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det g = 1\}$ と表すと、 $SL(V)$ は線形 Lie 群になる。 $SL(V)$ を特殊線形群と呼ぶ。 $SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、 $\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{tr} X = 0\}$ となる。 \mathbb{R}^n における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ と書く。複素数の場合も同様に特殊線形群を定義できる。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき、 $\mathbb{K} - \{0\}$ を乗法に関して Lie 群とみなすと、 $\det : GL(V) \rightarrow \mathbb{K} - \{0\}$ は Lie 群の準同型になり、その微分は $d(\det) = \text{tr} : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ になることが行列式の微分の計算からわかる。

四元数の場合には、実数や複素数の場合のように行列式を定義できないので、特殊線形群を同様に考えることはできない。

定義 1.1.40 \mathbb{R}^n の標準内積を保つ線形変換、すなわち直交変換の全体を $O(n)$ で表し直交群と呼ぶ。

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t g g = 1_n\}$$

となり、 $O(n)$ は線形 Lie 群になる。 $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ を回転群と呼ぶ。 \mathbb{R}^n の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すと

$$\langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \quad (g \in O(n), X, Y \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ。これを微分することにより $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &= \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \langle TX, Y \rangle + \langle X, TY \rangle = 0\} \\ &= \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid T \text{ は交代行列}\}. \end{aligned}$$

これより、 $\dim O(n) = n(n-1)/2$ であることがわかる。 $O(n)$ の単位連結成分は $O(n)_0 = SO(n)$ となり、 $O(n)$ と $SO(n)$ の Lie 環は同型になることがわかる。

定義 1.1.41 $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合も \mathbb{K}^n の標準 Hermite 内積を保つ線形変換、すなわちユニタリ変換、四元数ユニタリ変換の全体を $U(n), Sp(n)$ で表し、それぞれユニタリ群、シンプレクティック群と呼ぶ。 $X \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $X^* = {}^t \bar{X}$ と表すと

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = 1_n\},$$

$$Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) \mid g^* g = 1_n\}$$

となり、 $U(n), Sp(n)$ は線形 Lie 群になる。 $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ を特殊ユニタリ群と呼ぶ。 $U(n), Sp(n), SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n), \mathfrak{su}(n)$ は次で与えられる。

$$\mathfrak{u}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\},$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid X^* + X = 0\},$$

$$\mathfrak{su}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* + X = 0, \operatorname{tr} X = 0\}.$$

これらより、 $\dim U(n) = n(n-1) + n = n^2$, $\dim Sp(n) = 2n(n-1) + 3n = n(2n+1)$, $\dim SU(n) = n^2 - 1$ であることがわかる。 $U(n), Sp(n), SU(n)$ はすべて連結になることがわかる。

1.2 Riemann 多様体

定義 1.2.1 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 $T_p M$ に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ が存在し、 M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y \rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を M 上の Riemann 計量と呼び、 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を Riemann 多様体と呼ぶ。 Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

定義 1.2.2 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の曲線 $c: [a, b] \rightarrow M$ の長さ $L(c)$ を

$$L(c) = \int_a^b \langle c'(t), c'(t) \rangle^{1/2} dt$$

によって定める。 M が連結な場合、 $p, q \in M$ に対して

$$d(p, q) = \inf \{L(c) \mid c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ曲線}\}$$

によって $d(p, q)$ を定める。

命題 1.2.3 定義 1.2.2 で定めた d は連結 Riemann 多様体の距離になり、この距離から定まる位相は多様体構造を定める位相に一致する。

定理 1.2.4 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle) \end{aligned}$$

を満たすようにベクトル場 $\nabla_X Y$ が定まり、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

を満たす。

定義 1.2.5 定理 1.2.4 で定めた接続 ∇ を Riemann 多様体の Levi-Civita 接続と呼ぶ。また、 $\nabla_X Y$ を Y の X による共変微分という。

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

によって曲率テンソル R を定める。

定義 1.2.6 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の曲線 c に沿って定義されたベクトル場 X に対して、 $\nabla_{c'(t)} X$ を定めることができる。 $\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0$ を満たす曲線 $c(t)$ を測地線と呼ぶ。

定義 1.2.7 常微分方程式の解の存在と一意性より、 $p \in M$ と $X \in T_p M$ に対して 0 を含むある开区間 I と測地線 $\gamma_X : I \rightarrow M$ が存在して

$$\gamma_X(0) = p, \quad \gamma_X'(0) = X$$

を満たすことがわかる。 $\text{Exp}_p(X) = \gamma_X(1)$ によって、 $\text{Exp}_p : B_p \rightarrow M$ を定める。 B_p は $T_p M$ の原点を含む開集合であり、 $T_p M$ 全体になるとは限らない。 Exp_p を M の指数写像と呼ぶ。

指数写像を使うと p を始点とし $X \in T_p M$ を初速度とする測地線は $t \mapsto \text{Exp}_p(tX)$ と表すことができる。Riemann 対称空間において、Lie 群の指数写像と Riemann 多様体の指数写像は密接な関係にあることがわかる。

定理 1.2.8 (Hopf-Rinow) 連結 Riemann 多様体 M に対して次の条件は同値になる。

- (1) ある点 $p \in M$ において Exp_p は $T_p M$ 全体で定義できる。
- (2) すべての点 $p \in M$ において Exp_p は $T_p M$ 全体で定義できる。
- (3) M は距離 d に関して完備距離空間になる。

これらの条件が成り立つとき、任意の $p, q \in M$ に対して p, q を結ぶ最短測地線が存在する。

定義 1.2.9 定理 1.2.8 の条件を満たす連結 Riemann 多様体を完備 Riemann 多様体という。

定義 1.2.10 M を完備 Riemann 多様体とする。 $p \in M$ と単位接ベクトル $X \in T_p M$ に対して

$$t(X) = \sup\{s > 0 \mid \text{Exp}_p(uX)(0 \leq u \leq s) \text{ は端点を結ぶ最短測地線}\}$$

とおき、

$$\tilde{C}_p(M) = \bigcup_{\substack{X \in T_p M \\ |X|=1}} t(X)X, \quad C_p(M) = \text{Exp}_p(\tilde{C}_p(M))$$

によって、 M の p における接最小軌跡 $\tilde{C}_p(M)$ と最小軌跡 $C_p(M)$ を定義する。ただし、 $\tilde{C}_p(M)$ の定義の合併において、 $t(X) = \infty$ となる X は考えないことにする。

$M = \mathbb{E}^n$ のときは、どの測地線をどこまで延しても最短なので、すべての単位接ベクトル X に対して $t(X) = \infty$ になる。したがって、 $\tilde{C}_p(\mathbb{E}^n) = \emptyset, C_p(\mathbb{E}^n) = \emptyset$ が成り立つ。 M が単位球面 S^n のときは、すべての単位接ベクトル X に対して $t(X) = \pi$ となる。したがって、 $\tilde{C}_p(S^n) = \{Y \in T_p S^n \mid |Y| = \pi\}, C_p(S^n) = \{-p\}$ が成り立つ。

一般の連結完備 Riemann 多様体 M に対して、

$$B_p = \bigcup_{\substack{X \in T_p M \\ |X|=1}} \{uX \mid 0 \leq u < t(X)\}$$

とおくと、 B_p は n 次元円板と位相同型になり、 $\text{Exp}_p : B_p \rightarrow M - C_p(M)$ は微分同型になることがわかる。さらに、 $M = (M - C_p(M)) \cup C_p(M)$ が成り立つので、 $C_p(M)$ は M の構造を調べる上で重要である。

定義 1.2.11 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 $T_p M$ 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$K_\sigma = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2} \quad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

とおき、 K_σ を σ の断面曲率と呼ぶ。ここで、 $|X \wedge Y|$ は X, Y の張る平行四辺形の面積である。 $\dim M = 2$ のとき、断面曲率は Gauss 曲率と一致する。

定義 1.2.12 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の接ベクトル X, Y に対して、

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

によって M 上の $(0, 2)$ 型テンソル場 Ric を定める。 Ric を Ricci テンソルと呼ぶ。単位接ベクトル X に対して $\text{Ric}(X, X)$ を X の Ricci 曲率と呼ぶ。 Ricci 曲率が一定値をとるとき、 M を Einstein 多様体と呼ぶ。

完備 Riemann 多様体の曲率と位相に関して以下の結果が知られている。

定理 1.2.13 (Cartan) M を連結、単連結な完備 Riemann 多様体とし、その断面曲率は 0 以下と仮定する。このとき、 M の任意の点 p に対して $\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M$ は微分同型写像になる。

定理 1.2.14 (Myers) M を連結完備 Riemann 多様体とし、ある正数 c が存在し、任意の単位接ベクトル X の Ricci 曲率が $\text{Ric}(X, X) \geq c$ を満たすと仮定する。このとき、 M はコンパクトになり、基本群 $\pi_1(M, p)$ は有限群になる。

上の二つの定理は Riemann 対称空間の位相を考えるとときに基本的役割を果たす。

1.3 Riemann 等質空間

定義 1.3.1 M を多様体とし G を Lie 群とする。 C^∞ 級写像 $G \times M \rightarrow M; (g, x) \mapsto g \cdot x$ が存在し、任意の $g_1, g_2 \in G, x \in M$ と G の単位元 e に対して

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \quad e \cdot x = x$$

が成り立つとき、 G を M の Lie 変換群と呼ぶ。さらに任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$ となるとき G は M に推移的に作用しているという。

定理 1.3.2 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。射影 $\pi : G \rightarrow G/H; g \mapsto gH$ によって G の H による剰余類の全体 G/H に商位相をいれる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を G/H の開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \rightarrow G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって G が G/H の Lie 変換群になるような G/H の多様体構造が存在する。

定義 1.3.3 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。定理 1.3.2 で存在を示した多様体構造を持つ G/H を G の等質空間と呼ぶ。 G は G/H に推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定理 1.3.4 G は多様体 M に推移的に作用している Lie 変換群で G の連結成分の個数は可算であるとする。 $p \in M$ をとり

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$$

とおくと、 G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに写像

$$\alpha : G/G_p \rightarrow M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

は等質空間 G/G_p と M との間の微分同型写像になる。

定義 1.3.5 Riemann 計量を持つ Lie 群の任意の左移動が等長的になっているとき、その Riemann 計量を左不変という。任意の右移動も等長的になる左不変 Riemann 計量を、両側不変 Riemann 計量という。

命題 1.3.6 Lie 群 G の左不変 Riemann 計量の全体と、その Lie 環 \mathfrak{g} の内積の全体は一対一に対応する。さらに、 G の両側不変 Riemann 計量の全体と、 \mathfrak{g} の $\text{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

随伴表現 Ad の定め方 (定理 1.1.33) より、 G の元 g に対して

$$\text{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$$

となり、 G の両側不変 Riemann 計量の全体と、 \mathfrak{g} の $\text{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応することがわかる。

定理 1.3.7 G をコンパクト Hausdorff 位相群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の Radon 測度 μ_G が一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(3) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

(4) G 上の μ_G 可積分関数 f に対して

$$\int_G f(x^{-1}) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

定義 1.3.8 定理 1.3.7 で定まるコンパクト Hausdorff 位相群 G 上の測度を、 G の Haar 測度と呼ぶ。

注意 1.3.9 有限群 G に対して

$$\mu_G(X) = \frac{\#X}{\#G} \quad (X \subset G)$$

によって G 上の測度 μ_G を定める。 G 上の関数 f に対して、

$$\int_G f d\mu_G = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f(g)$$

となり、 μ_G は定理 1.3.7 の条件を満たす。コンパクト Hausdorff 位相群上の Haar 測度は、有限群上の元の個数による測度の一般化とみることができる。

命題 1.3.10 (ρ, V) をコンパクト Hausdorff 位相群 G の表現とすると、 ρ が直交 (ユニタリ) 表現になるような V の内積が存在する。

V の内積 A_0 を一つとっておく。任意の $u, v \in V$ について

$$\tilde{A}_0(u, v) = \int A_0(\rho(g)^{-1}(u), \rho(g)^{-1}(v)) d\mu_G g$$

によって \tilde{A}_0 を定めると、 \tilde{A}_0 に関して ρ が直交 (ユニタリ) 表現になる。

系 1.3.11 コンパクト Lie 群には、両側不変 Riemann 計量が存在する。

例 1.3.12 直交群 $O(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}({}^tXY) \quad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ 上の二次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}({}^tXY) = \text{tr}({}^t({}^tXY)) = \text{tr}({}^tYX) = \langle Y, X \rangle$$

だから、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は対称になっている。さらに、 $X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}({}^tXY) = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij}$$

より $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が対称になることがわかる。任意の $g \in O(n)$ に対して

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} = gX {}^tg \quad (X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle &= \text{tr}({}^t(gX {}^tg)gY {}^tg) = \text{tr}(g {}^tX {}^tggY {}^tg) \\ &= \text{tr}({}^tXY) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\text{Ad}(O(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $O(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 1.3.13 ユニタリ群 $U(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。複素正方行列 X に対して $X^* = {}^t\bar{X}$ と書く。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr}(X^*Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{u}(n))$$

によって $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ 上の二次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr}(X^*Y) = \text{Re tr}((X^*Y)^*) = \text{Re tr}(Y^*X) = \langle Y, X \rangle$$

だから、 \langle , \rangle は対称になっている。さらに、 $X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{u}(n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle &= \text{Re tr}(X^*Y) = \text{Re} \sum_{i,j} \bar{X}_{ij} Y_{ij} = \sum_{i,j} \text{Re}(\bar{X}_{ij} Y_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} (\text{Re} X_{ij} \text{Re} Y_{ij} + \text{Im} X_{ij} \text{Im} Y_{ij})\end{aligned}$$

より \langle , \rangle は正定値になる。この等式からでも \langle , \rangle が対称になることがわかる。任意の $g \in U(n)$ に対して

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} = gXg^* \quad (X \in \mathfrak{u}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned}\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle &= \text{Re tr}((gXg^*)^* gYg^*) = \text{Re tr}(gX^*g^*gYg^*) \\ &= \text{Re tr}(X^*Y) = \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

したがって、 \langle , \rangle は $\text{Ad}(U(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $U(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 1.3.14 シンプレクティック群 $Sp(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。四元数正方行列 X に対して $X^* = {}^t \bar{X}$ と書く。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr}(X^*Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{sp}(n))$$

よって $Sp(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(n)$ 上の二次形式 \langle , \rangle を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr}(X^*Y) = \text{Re tr}((X^*Y)^*) = \text{Re tr}(Y^*X) = \langle Y, X \rangle$$

だから、 \langle , \rangle は対称になっている。さらに、 $X = (X_{ab}), Y = (Y_{ab}) \in \mathfrak{sp}(n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle &= \text{Re tr}(X^*Y) = \text{Re} \sum_{a,b} \bar{X}_{ab} Y_{ab} = \sum_{a,b} \text{Re}(\bar{X}_{ab} Y_{ab}) \\ &= \sum_{a,b} (\text{Re} X_{ab} \text{Re} Y_{ab} + \text{Im}_i X_{ab} \text{Im}_i Y_{ab} + \text{Im}_j X_{ab} \text{Im}_j Y_{ab} + \text{Im}_k X_{ab} \text{Im}_k Y_{ab})\end{aligned}$$

より \langle , \rangle は正定値になる。この等式からでも \langle , \rangle が対称になることがわかる。内積の不変性を示すために準備をしておく。四元数の積は可換ではないので、四元数正方行列 A, B に対して $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ は一般には成立しない。しかしながら、四元数 u, v に対して $\text{Re}(uv) = \text{Re}(vu)$ は成り立つので、 $\text{Re tr}(AB) = \text{Re tr}(BA)$ は成立する。任意の $g \in Sp(n)$ に対して

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} = gXg^* \quad (X \in \mathfrak{sp}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned}\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle &= \text{Retr}((gXg^*)^*gYg^*) = \text{Retr}(gX^*g^*gYg^*) \\ &= \text{Retr}(X^*Y) = \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\text{Ad}(Sp(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $Sp(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

定義 1.3.15 Riemann 計量を持つ等質空間 G/H とする。定理 1.3.2 で定まる G の G/H への作用が等長的になっているとき、その Riemann 計量を G 不変という。

命題 1.3.16 G を Lie 群とし、 H を G の閉 Lie 部分群とする。 G と H の Lie 環をそれぞれ \mathfrak{g} と \mathfrak{h} で表す。このとき、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\text{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。

系 1.3.17 G を Lie 群とし、 H を G のコンパクト Lie 部分群とする。 G と H の Lie 環をそれぞれ \mathfrak{g} と \mathfrak{h} で表す。このとき、 \mathfrak{g} の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\text{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \text{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

を満たす。等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、 \mathfrak{m} の $\text{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、 \mathfrak{m} の $\text{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、 G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

1.4 Grassmann 多様体

1.1 節と同様、 \mathbb{K} は \mathbb{R} 、 \mathbb{C} または \mathbb{H} のいずれかに等しいものとする。自然数 r, n をとる。 $r+n$ 次元 \mathbb{K} ベクトル空間 \mathbb{K}^{r+n} 内の r 次元 \mathbb{K} 部分空間全体を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ で表す。 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を Grassmann 多様体と呼ぶ。特に $r=1$ の場合に $G_1(\mathbb{K}^{1+n})$ は n 次元 \mathbb{K} 射影空間と呼び、 $\mathbb{K}P^n$ とも書く。 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の元 V に対して

$$\phi_V : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \rightarrow G_r(\mathbb{K}^{r+n}); f \mapsto \text{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\}$$

とおくと、 $\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定める。係数体が \mathbb{C} の場合、 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は複素多様体になる。係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に応じて $d = 1, 2, 4$ とすると、各 Grassmann 多様体の次元は

$$\dim G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \dim \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) = drn$$

となる。 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の複素多様体としての次元は rn である。

証明 $V \in \dim G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$O_V = \{U \in G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \mid U \cap V^\perp = \{0\}\}$$

とにおいて

$$(*) \quad \phi_V(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) = O_V$$

が成り立つことを示す。 $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ に対して $\text{graph} f$ の任意の元は $v \in V$ によって $v + f(v)$ と表すことができる。 $v + f(v) \in V^\perp$ とすると $v = 0$ となり、 $f(v) = 0$ すなわち $v + f(v) = 0$ が成り立つ。よって

$$\phi_V(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \subset O_V$$

を得る。逆に $U \cap V^\perp = \{0\}$ を満たす $U \in \dim G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ をとる。 \mathbb{K}^{r+n} から V への直交射影 P_V の核は V^\perp だから、 P_V の U への制限 $P_V|_U : U \rightarrow V$ の核は $U \cap V^\perp = \{0\}$ となって $P_V|_U$ は単射になる。 U と V は次元が等しいので $P_V|_U$ は線形同型写像になる。そこでその逆写像を $g : V \rightarrow U$ で表す。 v に対して $g(v) \in U$ の V への直交射影が v になるので、 $g(v) - v \in V^\perp$ が成り立つ。そこで $f(v) = g(v) - v$ とおくと、 $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ となり、

$$\text{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\} = \{g(v) \mid v \in V\} = U.$$

したがって、

$$\phi_V(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \supset O_V$$

となり、 $(*)$ が成り立つことがわかる。

$V, W \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \rightarrow \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

が微分同型写像になることを示す。まず

$$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp), \quad \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, W^\perp)$$

が開集合になることを示しておく。 ϕ_V とグラフの定義より

$$\begin{aligned} \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid \text{graph} f \cap W^\perp = \{0\}\} \\ &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W(\text{graph} f) = W\} \\ &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W \circ (1_V + f) : \mathbb{K} \text{ 線形同型写像} \} \end{aligned}$$

となり、 $\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ は写像

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) ; f \mapsto P_W \circ (1_V + f)$$

の \mathbb{K} 線形同型写像全体の逆像になる。 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ において \mathbb{K} 線形同型写像全体は開集合になり、 $\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ は $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ の開集合になる。 $\phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$ についても同様である。

$f \in \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ に対して $\phi_V(f) = \text{graph} f$ となり、上の議論より

$$P_W|_{\text{graph} f} : \text{graph} f \rightarrow W$$

の逆写像 $(P_W|_{\text{graph} f})^{-1}$ によって $\phi_W(\text{graph} f) = (P_W|_{\text{graph} f})^{-1} - 1_W$ となる。よって

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V(f) = (P_W|_{\text{graph} f})^{-1} - 1_W.$$

これより

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \rightarrow \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

が微分同型写像になることがわかる。

以上で $\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定めることがわかる。係数体が \mathbb{C} の場合、 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は複素多様体になることもわかる。

Grassmann 多様体は Riemann 等質空間になり、コンパクト線形 Lie 群の商空間による表示を持つことを示す。

$$U_{\mathbb{K}}(m) = \begin{cases} O(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ U(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \\ Sp(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{H}), \end{cases} \quad SU_{\mathbb{K}}(m) = \begin{cases} SO(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ SU(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \\ Sp(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

とおく。これらはすべて線形 Lie 群になる。まず、 $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。 \mathbb{K}^{r+n} の標準的正規直交基底を e_1, \dots, e_{r+n} で表す。 $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合はそれぞれ対応する Hermite 内積に関するユニタリ基底とする。 $o = \mathbb{K}^r$ を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の原点とする。任意の $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して、 V の正規直交基底 v_1, \dots, v_r をとる。これを \mathbb{K}^{r+n} の正規直交基底 v_1, \dots, v_{r+n} に延長する。 e_1, \dots, e_{r+n} を v_1, \dots, v_{r+n} に写す $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の元 u をとると、 $uo = V$ が成り立つ。したがって、 $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は推移的になる。 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の商空間として表すために

$$K = \{k \in U_{\mathbb{K}}(r+n) \mid ko = o\}$$

を求める。 $k_{11} \in M_{r,r}(\mathbb{K}), k_{12} \in M_{r,n}(\mathbb{K}), k_{21} \in M_{n,r}(\mathbb{K}), k_{22} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \in K$$

とすると、 $1 \leq i \leq r$ に対して $ke_i \in o$ となるので、 $k_{21} = 0$ を得る。 $ko = o$ より $ko^\perp = o^\perp$ となり、 $r+1 \leq j \leq r+n$ に対して $ke_j \in o^\perp$ となる。よって $k_{12} = 0$ を得る。これより

$$K \subset \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \in U_{\mathbb{K}}(r+n) \mid k_{11} \in M_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in M_{\mathbb{K}}(n) \right\}.$$

ここで右辺において $k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ となることがわかる。そこで、

$$U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \middle| k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n) \right\}$$

とおくと、上で示したことは $K \subset U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ である。逆に $U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ の元が o を固定することは形からわかるので、 $K = U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ が成り立つ。以上より $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ と微分同型になる。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合に、 $SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。すでに $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の作用は推移的であることを示したので、任意の $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対してある $u \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が存在して $V = uo$ が成り立つ。 $u_z = \text{diag}(z, 1_n), z \in U_{\mathbb{K}}(1)$ とすると $u_z \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ となり $\det u_z = z$ が成り立つ。 $\det u \in U_{\mathbb{K}}(1)$ となるので、 $z = \det u^{-1}$ とすると $uu_z \in SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ を得る。よって、 $V = uo = uu_zo$ となり、 $SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用する。 o を固定する $SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ の部分群は

$$S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) = (U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) \cap SU(r+n)$$

になる。よって $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $SU_{\mathbb{K}}(r+n)/S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ と微分同型になる。

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変 Riemann 計量を定めるために系 1.3.17 を利用する。 $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n)$ の直和分解 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{m}$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) &= \left\{ \left[\begin{array}{cc} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{array} \right] \middle| X_{11} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r), X_{22} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) \right\}, \\ \mathfrak{m} &= \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \middle| X \in M_{r,n}(\mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

によって定める。 $\text{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ が成り立つことが次の計算からわかる。

$$k = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \in U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$$

に対して

$$\begin{aligned} \text{Ad}(k) \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right]^* \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & k_{11}Xk_{22}^* \\ -k_{22}X^*k_{11}^* & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & k_{11}Xk_{22}^* \\ -(k_{11}Xk_{22}^*)^* & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

そこで、

$$\mathfrak{m} \ni \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow X \in M_{r,n}(\mathbb{K})$$

によって \mathfrak{m} と $M_{r,n}(\mathbb{K})$ を同一視すると、 $\text{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ の \mathfrak{m} への作用は、

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \cdot X = k_{11}Xk_{22}^*$$

による $M_{r,n}(\mathbb{K})$ への作用と同値になる。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Retr}(X^*Y) \quad (X, Y \in M_{r,n}(\mathbb{K}))$$

によって $M_{r,n}(\mathbb{K})$ 上の二次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \text{Retr}(X^*Y) = \text{Retr}((X^*Y)^*) = \text{Retr}(Y^*X) = \langle Y, X \rangle$$

だから、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は対称になっている。さらに、 $X = (X_{ab}), Y = (Y_{ab}) \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \text{Retr}(X^*Y) = \text{Re} \sum_{a,b} \bar{X}_{ab} Y_{ab} = \sum_{a,b} \text{Re}(\bar{X}_{ab} Y_{ab}) \\ &= \sum_{a,b} (\text{Re} X_{ab} \text{Re} Y_{ab} + \text{Im}_i X_{ab} \text{Im}_i Y_{ab} + \text{Im}_j X_{ab} \text{Im}_j Y_{ab} + \text{Im}_k X_{ab} \text{Im}_k Y_{ab}) \end{aligned}$$

より $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が対称になることがわかる。 $k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ と $X, Y \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle k_{11}Xk_{22}^*, k_{11}Yk_{22}^* \rangle &= \text{Retr}((k_{11}Xk_{22}^*)^* k_{11}Yk_{22}^*) = \text{Retr}(k_{22}X^*k_{11}^* k_{11}Yk_{22}^*) \\ &= \text{Retr}(k_{22}X^*Yk_{22}^*) = \text{Retr}(X^*Y) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\text{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ 不変になり、系 1.3.17 より、対応する $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ 上の Riemann 計量は $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変になる。

第2章 Riemann 対称空間

2.1 Riemann 対称空間

定義 2.1.1 二乗が恒等変換になる変換を対合的という。\$M\$ を Riemann 多様体とする。任意の \$x \in M\$ に対して \$M\$ の対合的等長変換 \$s_x\$ が存在して、\$x\$ は \$s_x\$ の孤立不動点になるとき、\$M\$ を Riemann 対称空間と呼ぶ。\$s_x\$ を点対称と呼ぶ。

\$x\$ が \$s_x\$ の孤立不動点になることから、\$x\$ のある近傍で \$s_x\$ の不動点は \$x\$ のみになる。これと \$s_x^2 = 1_M\$ をあわせると \$(ds_x)_x = -1\$ となる。特に \$s_x\$ は \$x\$ を通る測地線を逆向きに変換する。

定理 2.1.2 連結 Riemann 対称空間は完備 Riemann 多様体になる。等長変換全体のなす群は推移的に作用し、Lie 変換群になる。特に、Riemann 等質空間になる。

以後連結 Riemann 対称空間を単に対称空間と呼ぶことにする。集合 \$X\$ の変換 \$\varphi : X \to X\$ に対して、\$\varphi\$ の不動点全体を \$F(\varphi, X)\$ で表す。

定理 2.1.3 \$M\$ を対称空間とする。\$M\$ の等長変換全体の単位連結成分を \$G\$ で表す。\$o \in M\$ をとり \$K = \{k \in G \mid ko = o\}\$ と定める。\$\sigma : G \to G ; g \mapsto s_o g s_o\$ は \$G\$ の対合的自己同型写像になり

$$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$$

を満たす。\$G\$ の Lie 環を \$\mathfrak{g}\$、\$K\$ の Lie 環を \$\mathfrak{k}\$ とすると

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}$$

が成り立つ。\$d\sigma\$ の \$-1\$ 固有空間を \$\mathfrak{m}\$ とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

は直和分解になる。\$\pi : G \to M ; g \mapsto go\$ とすると次が成り立つ。

$$d\pi_e : \mathfrak{m} \to T_o M : \text{線形同型,}$$

$$\text{Exp}_o(d\pi_e(X)) = (\exp X)o \quad (X \in \mathfrak{m}).$$

以下、 $d\pi_e : \mathfrak{m} \rightarrow T_oM$ によって \mathfrak{m} と T_oM を同一視する。

例 2.1.4 $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$s_V = 1_V - 1_{V^\perp} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

によって s_V を定める。 s_V の \mathbb{K}^{r+n} への作用は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用を誘導する。1.4 節で定めた Riemann 計量に関して s_V の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換になり、 $s_V^2 = 1$ を満たし、 V は s_V の孤立不動点になることがわかる。これより $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間になる。

証明 1.4 節で示したように $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換になるので、特に s_V の作用も等長変換になる。 s_V の形より $s_V^2 = 1$ が成り立つこともわかる。 O_V における s_V の不動点は V だけであることを証明する。 O_V の元 x をとりその基底を直交直和分解 $\mathbb{K}^{r+n} = V + V^\perp$ に従って $v_1 + v_1^\perp, \dots, v_r + v_r^\perp$ と表示する。ここで、 $v_i \in V, v_i^\perp \in V^\perp$ である。 $P_V|_x : x \rightarrow V$ は線形同型になるので、 v_1, \dots, v_r は V の基底になる。 $s_V(x) = x$ と仮定すると

$$v_i = \frac{1}{2}(v_i + v_i^\perp + s_V(v_i + v_i^\perp)) \in x$$

となり、 $x = \{v_1, \dots, v_r\}_{\mathbb{K}} = V$ が成り立つ。したがって、 O_V における s_V の不動点は V だけになり、特に V は s_V の孤立不動点になる。以上で $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間になることがわかった。

1.4 節で示したように Grassmann 多様体は $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ と等質空間として表示できる。定理 2.1.3 で定めた対合的自己同型 $\sigma : G \rightarrow G ; g \mapsto s_o g s_o$ は

$$\sigma(g) = \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \quad (g \in U_{\mathbb{K}}(r+n)).$$

$g_{11} \in M_{r,r}(\mathbb{K}), g_{12} \in M_{r,n}(\mathbb{K}), g_{21} \in M_{n,r}(\mathbb{K}), g_{22} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

とすると、

$$\sigma(g) = \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

したがって、

$$F(\sigma, U_{\mathbb{K}}(r+n)) = U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$$

が成り立つ。 σ の微分は

$$\begin{aligned} d\sigma(X) &= \left. \frac{d}{dt} \sigma(\exp tX) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \exp tX \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \right|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これより、 $d\sigma$ の ± 1 固有空間分解は

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) &= \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{m} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \mid X \in M(r, n; \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) &= \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) \mid d\sigma(X) = X\}, \\ \mathfrak{m} &= \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) \mid d\sigma(X) = -X\}. \end{aligned}$$

$d\pi_e : \mathfrak{m} \rightarrow T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+n}))$ によって同一視する。 $r \leq n$ のとき、

$$X = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & \theta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \theta_r \\ \hline -\theta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -\theta_r & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right]$$

とにおいて $\exp X = (\exp X)_o$ を求める。行列の指数関数の定義より

$$\exp X = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \theta_1 & & & \sin \theta_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \cos \theta_r & & & \sin \theta_r \\ \hline -\sin \theta_1 & & & \cos \theta_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -\sin \theta_r & & & \cos \theta_r \\ \hline & & & & & 1_{r-n} \end{array} \right]$$

となることがわかる。これより

$$\begin{aligned} (\exp X)e_1 &= \cos \theta_1 e_1 + \sin \theta_1 e_{r+1}, \\ &\vdots \\ (\exp X)e_r &= \cos \theta_r e_r + \sin \theta_r e_{2r} \end{aligned}$$

となるので、 o を始点とし初速度ベクトル X の測地線は

$$(\exp tX)o = \{\cos t\theta_1 e_1 + \sin t\theta_1 e_{r+1}, \dots, \cos t\theta_r e_r + \sin t\theta_r e_{2r}\}_{\mathbb{K}}$$

となる。

定義 2.1.5 G を連結 Lie 群とし、 K を G の閉部分群とする。 G の対合的自己同型 $\sigma : G \rightarrow G$ が存在して、 $F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$ を満たし、 $\text{Ad}_G(K)$ がコンパクトになるとき、 (G, K) を Riemann 対称対と呼ぶ。

$\text{Ad}_G(H)$ がコンパクトになるという条件は不変内積の存在を保証するためにある。

定理 2.1.6 (G, K) を Riemann 対称対とする。 $\pi : G \rightarrow G/K$ で自然な射影を表し、 $o = \pi(e)$ とする。Riemann 対称対を定める対合的自己同型を $\sigma : G \rightarrow G$ で表す。このとき、 G 不変 Riemann 計量に対して G/K は対称空間になり、 $g \in G$ の G/K への作用を $\tau(g)$ で表すと次の等式が成り立つ。

$$s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma, \quad \tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o.$$

2.2 曲率と全測地的部分多様体

Riemann 多様体 M の部分多様体 N が次の条件を満たすとき、 N を M の全測地的部分多様体という。 N のどの測地線も M の測地線になる。Euclid 空間内の次元の低い Euclid 空間や球面内の大円などは全測地的部分多様体の例である。

定理 2.2.1 (G, K) を Riemann 対称対とし、 R を対称空間 G/K の曲率テンソルとする。Riemann 対称対から定まる G の Lie 環 \mathfrak{g} の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。 $\mathfrak{m} \cong T_o(G/K)$ を同一視する。このとき、次の等式が成り立つ。

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{m})$$

定義 2.2.2 Lie 環の部分空間 \mathfrak{n} が

$$X, Y, Z \in \mathfrak{n} \Rightarrow [[X, Y], Z] \in \mathfrak{n}$$

を満たすとき、 \mathfrak{n} を Lie 三対系と呼ぶ。

Riemann 対称対から定まる Lie 環 \mathfrak{g} の直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ について、

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$$

が成り立つ。これは $d\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が Lie 環の対合的自己同型であり、 \mathfrak{k} が $d\sigma$ の $+1$ 固有空間、 \mathfrak{m} が $d\sigma$ の -1 固有空間であることからわかる。どれも同様なので $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ を示しておく。 $X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して

$$d\sigma([X, Y]) = [d\sigma X, d\sigma Y] = [-X, -Y] = [X, Y]$$

となり、 $[X, Y] \in \mathfrak{k}$ を得る。

上記のブラケット積に関する包含関係から

$$[[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$$

が成り立ち、 \mathfrak{m} は Lie 三対系になることがわかる。

定理 2.2.3 (G, K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 \mathfrak{g} の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。 $\mathfrak{m} \cong T_o(G/K)$ を同一視する。 o を含む G/K の全測地的部分多様体 N に対して T_oN は \mathfrak{m} に含まれる Lie 三対系になる。逆に \mathfrak{n} を \mathfrak{m} に含まれる Lie 三対系とすると、 $\text{Exp}_o \mathfrak{n}$ は o を含む G/K の全測地的部分多様体になる。さらに N が平坦であることと、 T_oN が \mathfrak{m} の可換部分空間であることは同値になる。また、 N が極大平坦全測地的部分多様体であることと、 T_oN が \mathfrak{m} に含まれる極大可換部分空間であることは同値になる。

$n < m$ のとき自然な包含関係 $\mathbb{K}^{r+n} \subset \mathbb{K}^{r+m}$ は包含関係 $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{K}^{r+m})$ を導く。それぞれの Lie 環の分解を

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) &= \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+m) &= \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(m) + \mathfrak{m} \end{aligned}$$

とする。同一視 $\mathfrak{n} = T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+n}))$ と $\mathfrak{m} = T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+m}))$ により \mathfrak{n} は \mathfrak{m} の部分空間とみなせる。このとき、 \mathfrak{n} は \mathfrak{m} 内の $r+n$ 次正方形行列の成分のみある行列全体になり、 $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ が成り立つことがわかる。さらに $\text{Exp}_o(\mathfrak{n}) = G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ が成り立ち、 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+m})$ の全測地的部分多様体になる。

$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の元 V に $V^{\mathbb{C}} = V + iV \subset \mathbb{C}^{r+n}$ を対応させることにより、 $G_r(\mathbb{R}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ とみなせる。それぞれの Lie 環の分解を

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(r+n) &= \mathfrak{o}(r) \times \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{u}(r+n) &= \mathfrak{u}(r) \times \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m} \end{aligned}$$

とする。同一視 $\mathfrak{n} = T_o(G_r(\mathbb{R}^{r+n}))$ と $\mathfrak{m} = T_o(G_r(\mathbb{C}^{r+n}))$ により \mathfrak{n} は \mathfrak{m} の部分空間とみなせる。このとき、 \mathfrak{n} は \mathfrak{m} 内の実行列全体になり、 $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ が成り立つことがわかる。さらに $\text{Exp}_o(\mathfrak{n}) = G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ が成り立ち、 $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になる。これは包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ を利用している。

包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ と $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ を利用すると、 $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{H}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になること、 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{H}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になることがわかる。

定理 2.2.4 (G, K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 \mathfrak{g} の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。 $\mathfrak{m} \cong T_o(G/K)$ を同一視する。 \mathfrak{a} を \mathfrak{m} 内の極大可換部分空間とする。 $A = \text{Exp}_o \mathfrak{a}$ とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{a}, \quad G/K = \bigcup_{k \in K} kA.$$

標準形の観点からは上の定理の主張は次のように言い換えることができる。任意の $X \in \mathfrak{m}$ に対してある $k \in K$ が存在して $\text{Ad}(k)X \in \mathfrak{a}$ が成り立つ。任意の $x \in G/K$ に対してある $k \in K$ が存在して $kx \in A$ が成り立つ。

$r \leq n$ のとき Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の場合を考える。 \mathfrak{m} を $M_{r,n}(\mathbb{K})$ と同一視する。

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \theta_1 & \\ \hline & \ddots \\ \theta_r & \end{array} \right] \middle| \theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R} \right\}$$

は極大可換部分空間になることがわかる。さらに定理 2.2.4 の主張を標準形の観点から次のように言い換えることができる。任意の $X \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対してある $(k_1 1, k_2 2) \in U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ が存在して $k_{11} X k_{22}^* \in \mathfrak{a}$ が成り立つ。これは行列の標準形に他ならない。

行列群による対称空間に定理 2.2.4 を適用すると多くの行列の標準形が得られる。

定義 2.2.5 定理 2.2.4 より極大可換部分空間同士は $\text{Ad}(K)$ の作用によって共役になり、特にその次元は極大可換部分空間のとり方に依存しない。そこで、 $\text{rk}(G/K) = \dim \mathfrak{a}$ とおき、これを G/K の階数と呼ぶ。

上の Grassmann 多様体の例より、 $r \leq n$ のとき $\text{rk}G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = r$ である。特に射影空間の階数は 1 になる。射影空間の場合、

$$\exp t \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & \end{array} \right] o = \{ \cos te_1 + \sin te_2 \}_{\mathbb{K}}$$

は周期 π の閉測地線になる。 $U_{\mathbb{K}}(1) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ の作用はすべての接ベクトルの方向を移し合うため、 o を出発するすべての測地線はこの閉測地線と移り合う。したがって、すべての測地線は同じ長さの閉測地線になる。

\mathbb{C}^n 内の実 n 次元部分空間 V が $V \perp iV$ を満たすとき、 V を Lagrange 部分空間と呼ぶ。 \mathbb{C}^n 内の Lagrange 部分空間全体を $\text{Lag}(n)$ で表す。 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ は Lagrange 部分空間の例である。 $U(n)$ の \mathbb{C}^n への自然な作用は $\text{Lag}(n)$ への作用を誘導し、この作用は推移的であることがわかる。さらに、

$$\{u \in U(n) \mid u\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n\} = O(n)$$

となり、 $\text{Lag}(n)$ は $U(n)/O(n)$ と微分同型になる多様体構造を持つことがわかる。

$$\sigma : U(n) \rightarrow U(n) ; u \mapsto \bar{u}$$

によって自己同型 σ を定めると、 $F(\sigma, U(n)) = O(n)$ が成り立ち、 $(U(n), O(n))$ は Riemann 対称対になる。したがって、 $\text{Lag}(n) \cong U(n)/O(n)$ は対称空間になる。

$$d\sigma : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathfrak{u}(n) ; X \mapsto \bar{X}$$

となり、 $d\sigma$ の $+1$ 固有空間は $\mathfrak{o}(n)$ であり、 -1 固有空間は

$$\mathfrak{m} = \{iX \mid X \text{ は実対称行列}\}.$$

$\mathfrak{u}(n)$ の Riemann 対称対から定まる直和分解は $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}$ となる。

$$\mathfrak{a} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{array} \right] \mid \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと、 \mathfrak{a} は \mathfrak{m} の極大可換部分空間になることがわかる。定理 2.2.4 より

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{g \in O(n)} \text{Ad}(g)\mathfrak{a} = \bigcup_{g \in O(n)} g\mathfrak{a}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形の観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次実対称行列 X に対してある $g \in O(n)$ が存在して gXg^{-1} は対角行列になる。定理 2.2.4 からは

$$\text{Lag}(n) = \bigcup_{g \in O(n)} g\text{Exp}(\mathfrak{a})\mathbb{R}^n$$

もわかる。ここで、

$$g\text{Exp} \left[\begin{array}{ccc} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{array} \right] \mathbb{R}^n = g\{e^{i\theta_1}e_1, \dots, e^{i\theta_n}e_n\}_{\mathbb{R}} = \{e^{i\theta_1}ge_1, \dots, e^{i\theta_n}ge_n\}_{\mathbb{R}}$$

となるので、次の主張を得る。任意の $V \in \text{Lag}(n)$ に対してある $\theta_1, \dots, \theta_n$ と \mathbb{R}^n の正規直交基底 v_1, \dots, v_n が存在して次が成り立つ。

$$V = \{e^{i\theta_1}v_1, \dots, e^{i\theta_n}v_n\}_{\mathbb{R}}.$$

これは Lagrange 部分空間の標準形とみなすことができる。

2.3 コンパクト Lie 群

この節ではコンパクト連結 Lie 群が対称空間とみなせることを示し、Lie 群としての構造と対称空間としての構造の間の関係を明らかにする。

G をコンパクト連結 Lie 群とする。 $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ によって写像 $\sigma : G \times G \rightarrow G \times G$ を定めると、 σ は対合的自己同型写像になる。

$$\Delta G = \{(g, g) \mid g \in G\}$$

によって対角線集合 ΔG を定めると、 ΔG は G と Lie 群として同型になり特にコンパクトになる。さらに $F(\sigma, G \times G) = \Delta G$ が成り立つ。したがって、 $(G \times G, \Delta G)$

は Riemann 対称対になる。この Riemann 対称対から定まる対称空間 $G \times G/\Delta G$ は

$$\iota : G \times G/\Delta G \rightarrow G ; (g_1, g_2)\Delta G \mapsto g_1g_2^{-1}$$

によって G と微分同型になる。

証明 $(g_1, g_2)\Delta G = (g_1g, g_2g)\Delta G$ であり、 $g_1g(g_2g)^{-1} = g_1gg^{-1}g_2 = g_1g_2^{-1}$ となる。よって、 ι は well-defined である。

$\iota(g_1, g_2) = \iota(g'_1, g'_2)$ とすると、 $g_1g_2^{-1} = g'_1(g'_2)^{-1}$ が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} (g_1, g_2)\Delta G &= (g_1g_2^{-1}, g_2g_2^{-1})\Delta G = (g_1g_2^{-1}, e)\Delta G = (g'_1(g'_2)^{-1}, e)\Delta G \\ &= (g'_1, g'_2)\Delta G \end{aligned}$$

となり、 ι は単射になる。任意の $g \in G$ に対して $\iota((g, e)\Delta G) = g$ となり、 ι は全射になることもわかる。 ι とその逆写像 $\iota^{-1}(g) = (g, e)\Delta G$ はともに C^∞ 級写像になり、 ι が微分同型であることがわかる。

この微分同型によって両者を同一視する。 $G \times G$ の $G \times G/\Delta G$ への作用は ι によって G への作用を誘導する。

$$\begin{aligned} \iota((g_1, g_2)(x_1, x_2)\Delta G) &= \iota((g_1x_1, g_2x_2)\Delta G) = g_1x_1(g_2x_2)^{-1} \\ &= g_1x_1x_2^{-1}g_2^{-1} = g_1\iota((x_1, x_2)\Delta G)g_2^{-1} \end{aligned}$$

となるので、 $G \times G$ の G への作用は

$$(g_1, g_2) \cdot x = g_1xg_2^{-1} \quad ((g_1, g_2) \in G \times G, x \in G)$$

となる。これより、 $G \times G/\Delta G$ の $G \times G$ 不変 Riemann 計量は G の両側不変 Riemann 計量に対応する。自然な射影 $G \times G \rightarrow G \times G/\Delta G$ と微分同型 ι の合成を π で表すと

$$\pi : G \times G \rightarrow G ; (g_1, g_2) \mapsto g_1g_2^{-1}$$

となる。定理 2.1.6 より、 G の単位元 e における点対称 s_e は $s_e \circ \pi = \pi \circ \sigma$ を満たす。 $(g_1, g_2) \in G \times G$ に対して、

$$s_e(\pi(g_1, g_2)) = s_e(g_1g_2^{-1}), \quad \pi(\sigma(g_1, g_2)) = \pi(g_2, g_1) = g_2g_1^{-1} = (g_1g_2^{-1})^{-1}.$$

したがって、 $x \in G$ に対して $s_e(x) = x^{-1}$ が成り立つ。一般の $g \in G$ における点対称は $s_g(x) = gx^{-1}g$ となるのが次の計算よりわかる。

$$s_g(x) = L_g \circ s_e \circ L_g^{-1}(x) = L_g \circ s_e(g^{-1}x) = L_g((g^{-1}x)^{-1}) = L_g(x^{-1}g) = gx^{-1}g.$$

G の Lie 環を \mathfrak{g} で表すと $G \times G$ の Lie 環は $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ になる。

$$d\sigma(X_1, X_2) = (X_2, X_1) \quad ((X_1, X_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$$

となるので、Riemann 対称対に対応する直和分解 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は

$$\mathfrak{k} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{m} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

で与えられる。 $d\pi : \mathfrak{m} \rightarrow T_e G$ を求めておく。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} d\pi(X, 0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\exp tX, e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX = X, \\ d\pi(0, X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(e, \exp tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp tX)^{-1} = -X \end{aligned}$$

となるので、

$$d\pi(X, Y) = X - Y \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を得る。特に

$$d\pi(X, -X) = 2X \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

他方、定理 2.1.3 より $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Exp}_e(d\pi(X, -X)) &= \pi(\exp_{G \times G}(X, -X)) = \pi(\exp X, \exp(-X)) \\ &= \exp X (\exp(-X))^{-1} = \exp 2X. \end{aligned}$$

となるので、 $\text{Exp}_e 2X = \exp 2X$ すなわち

$$\text{Exp}_e X = \exp X \quad (X \in \mathfrak{g})$$

を得る。

\mathfrak{g} の極大可換部分 Lie 環 \mathfrak{t} をとる。

$$\mathfrak{a} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{t}\}$$

は \mathfrak{m} の極大可換部分空間になる。したがって、定理 2.2.4 より

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in \Delta G} \text{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

を得る。 $k = (g, g)$ とすると

$$\text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \{(\text{Ad}(g)X, -\text{Ad}(g)X) \mid X \in \mathfrak{t}\}$$

となるので、

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \text{Ad}(g)\mathfrak{t}$$

を得る。 $T = \text{Exp}_e(\mathfrak{a})$ とおくと、 $T = \exp \mathfrak{t}$ が成り立つ。 T を極大トーラスと呼ぶ。 $G \times G$ の $G \times G / \Delta G$ への作用を G への作用とみなすと

$$(g_1, g_2)(x, e)\Delta G = (g_1x, g_2)\Delta \leftrightarrow g_1xg_2^{-1}$$

となる。したがって、

$$G = \bigcup_{k \in \Delta G} k \cdot T = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}.$$

$SO(n)$ の場合

$$X(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(2)$$

とおく。 $r = \lfloor n/2 \rfloor$ とする。

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} X(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & X(\theta_r) & \\ & & & (0) \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{o}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。上の行列の右下の (0) は n が奇数の場合に 0 があり、 n が偶数の場合には何も無いことを表している。これより

$$\mathfrak{o}(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} \text{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in SO(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次交代行列 $X \in \mathfrak{o}(n)$ に対してある $g \in SO(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in SO(2)$$

とおくと $\exp X(\theta) = R(\theta)$ となり、

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_r) & \\ & & & (1) \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong SO(2) \times \cdots \times SO(2)$$

が成り立つ。 \mathfrak{t} の場合と同様に、上の行列の右下の (1) は n が奇数の場合に 0 があり、 n が偶数の場合には何も無いことを表している。

$$SO(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次回転行列 $x \in SO(n)$ に対してある $g \in SO(n)$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ が成り立つ。

$U(n)$ の場合

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{u}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。これより

$$\mathfrak{u}(n) = \bigcup_{g \in U(n)} \text{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in U(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次交代 Hermite 行列 $X \in \mathfrak{u}(n)$ に対してある $g \in U(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

となり

$$U(n) = \bigcup_{g \in U(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次ユニタリ行列 $x \in U(n)$ に対してある $g \in U(n)$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ が成り立つ。

$Sp(n)$ の場合

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{sp}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。これより

$$\mathfrak{sp}(n) = \bigcup_{g \in Sp(n)} \text{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in Sp(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次四元数交代 Hermite 行列 $X \in \mathfrak{sp}(n)$ に対してある $g \in Sp(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

となり

$$Sp(n) = \bigcup_{g \in Sp(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次シプレクティック行列 $x \in Sp(n)$ に対してある $g \in Sp(n)$ が存在して $g x g^{-1} \in T$ が成り立つ。

第3章 複素半単純Lie環

対称空間の曲率テンソルはLie環のブラケット積で表示できることから、対称空間の局所的性質とLie環の構造の間には密接な関係がある。さらに対称空間の分類とLie環の分類の間にも密接な関係がある。そこで、この章ではその準備として複素半単純Lie環の構造について解説する。

3.1 半単純Lie環

定義 1.1.4 では係数体が実数の場合のLie環を定義したが、この節以降では係数体を複素数にしたLie環も扱う。それらを区別するために定義 1.1.4 で定義したLie環を実Lie環と呼ぶことにする。

定義 3.1.1 複素ベクトル空間 \mathfrak{g} に複素双線形写像 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

が成り立つとき、 \mathfrak{g} を複素Lie環と呼ぶ。

実Lie環に対して定義したLie部分環、準同型写像、同型写像などの概念は係数体が複素数の場合も同様に使うことにする。この節で扱うLie環は特に断わらないかぎり実または複素有限次元Lie環である。実と複素の特定していないただLie環という場合は、実と複素の両方のLie環で成り立つ事項を扱っているものとする。

定義 3.1.2 Lie環 \mathfrak{g} のベクトル部分空間 \mathfrak{h} が、

$$X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすとき、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} のイデアルと呼ぶ。 \mathfrak{g} の次元が2以上であって、自分自身と $\{0\}$ 以外のイデアルを持たないとき、 \mathfrak{g} を単純という。単純Lie環の直和になるLie環を半単純という。Lie群のLie環が単純になるとき、そのLie群を単純という。同様に、Lie群のLie環が半単純になるとき、そのLie群を半単純という。

定義 3.1.3 Lie 環 \mathfrak{g} の Killing 形式 B を次で定義する。

$$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

B は対称になる。さらに B は \mathfrak{g} の自己同型に関して不変になることがわかる。

定理 3.1.4 Lie 環が半単純になるための必要十分条件は、その Killing 形式が非退化になることである。

例 3.1.5 $\mathfrak{o}(3)$ について考える。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{o}(3)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。これより $\text{ad}(e_i) (1 \leq i \leq 3)$ の基底 e_1, e_2, e_3 に関する表現行列は

$$\text{ad}(e_1) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}(e_2) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}(e_3) : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になり

$$B(e_1, e_1) = \text{tr}(\text{ad}(e_1)\text{ad}(e_1)) = -2, \quad B(e_1, e_2) = B(e_2, e_1) = 0, \\ B(e_1, e_3) = B(e_3, e_1) = 0, \quad B(e_2, e_2) = -2, \quad B(e_2, e_3) = 0, \quad B(e_3, e_3) = -2.$$

したがって B の e_1, e_2, e_3 に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となり、 B は非退化になる。したがって、定理 3.1.3 より $\mathfrak{o}(3)$ は半単純になる。実は単純になることもわかる。

例 3.1.6 $\mathfrak{su}(2)$ について考える。

$$e_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。これより $\mathfrak{su}(2)$ は $\mathfrak{o}(3)$ と Lie 環として同型になることがわかる。したがって、 $\mathfrak{su}(2)$ も単純 Lie 環になる。さらに

$$\mathfrak{su}(2) + \sqrt{-1}\mathfrak{su}(2) = \sum_{i=1}^3 (\mathbb{R}e_i + \mathbb{R}\sqrt{-1}e_i) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

が成り立ち、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は $\mathfrak{su}(2)$ の複素化とみなせる。一般に、実 Lie 環のベクトル空間としての複素化には自然に複素 Lie 環の構造が定まる。Lie 環の複素化の定義は定義 3.4.6 で与える。 $\mathfrak{su}(2)$ は最初から $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に含まれているため、複素化を考えやすい。 e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底にもなり、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の Killing 形式も非退化になることがわかる。したがって、定理 3.1.3 より $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は半単純になる。実は単純になることもわかる。

上記の例ではコンパクト単純 Lie 群 $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の複素化が複素単純 Lie 環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ になっている。この現象はこの場合にかぎらず一般的に成り立つ。これについてはあとで述べる。さらにこの現象は後で述べる単純 Lie 環の分類やコンパクト型 Riemann 対称空間と非コンパクト型 Riemann 対称空間の双対性と深く関係している。

3.2 Cartan 部分環とルート空間分解

定義 3.2.1 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Lie 部分環 \mathfrak{h} が次の条件を満たすとき、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Cartan 部分環と呼ぶ。

- (1) \mathfrak{h} は \mathfrak{g} の極大可換 Lie 部分環である。
- (2) 各 $H \in \mathfrak{h}$ に対して、 $\text{ad}H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は対角化可能である。

定理 3.2.2 複素半単純 Lie 環は Cartan 部分環を持つ。

\mathfrak{g} を複素半単純 Lie 環とし、 \mathfrak{h} をその Cartan 部分環とする。各 $H \in \mathfrak{h}$ に対して $\text{ad}H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は対角化可能である。さらに、 $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ をとると

$$\text{ad}H_1 \text{ad}H_2 - \text{ad}H_2 \text{ad}H_1 = [\text{ad}H_1, \text{ad}H_2] = \text{ad}[H_1, H_2] = 0$$

となるので、 $\text{ad}H_1$ と $\text{ad}H_2$ は可換になる。よって、これらは同時対角化可能である。同様に、 $\{\text{ad}H \mid H \in \mathfrak{h}\}$ はすべて同時対角化可能になる。この状況は次のルー

ト空間で記述することでより明確に表現できる。ベクトル空間 V の双対空間を V^* で表す。 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (H \in \mathfrak{h})\}$$

によって \mathfrak{g} の \mathfrak{h} に関するルート空間 \mathfrak{g}_α を定める。 $\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\}$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ のとき、 α を \mathfrak{g} の \mathfrak{h} に関するルートと呼び、その全体を Δ で表しルート系と呼ぶ。

定理 3.2.3 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 部分環 \mathfrak{h} に対して以下が成り立つ。

- (1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ は直和になる。
- (2) 各 $\alpha \in \Delta$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
- (3) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立ち、 $\alpha + \beta \in \Delta$ を満たすときは、 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つ。
- (4) \mathfrak{g} の Killing 形式 B を $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ に制限すると非退化になる。 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$B(H, H_\alpha) = \alpha(H) \quad (H \in \mathfrak{h})$$

を満たす $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ が一意的に存在する。

- (5) $\alpha \in \Delta$ に対して $-\alpha \in \Delta$ となり、

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha, \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0.$$

例 3.2.4 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の Lie 部分環を

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{array} \right] \mid z_i \in \mathbb{C}, z_1 + \cdots + z_n = 0 \right\}$$

によって定めると、 \mathfrak{h} は可換 Lie 部分環になる。 $1 \leq i \neq j \leq n$ に対して $E_{i,j}$ で (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は 0 の n 次正方行列を表す。

$$H = \left[\begin{array}{ccc} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{array} \right] \in \mathfrak{h}$$

に対して

$$[H, E_{i,j}] = HE_{i,j} - E_{i,j}H = (z_i - z_j)E_{i,j}.$$

よって、各 $E_{i,j}$ は $\{\text{ad}H \mid H \in \mathfrak{h}\}$ の同時固有ベクトルになっている。これをふまえて $e_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$e_i \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} = z_i$$

によって定め、 $\alpha_{i,j} = e_i - e_j$ とおくと、

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid [H, X] = \alpha_{i,j}(H)X \ (H \in \mathfrak{h})\} = \mathbb{C}E_{i,j}$$

が成り立つ。さらに

$$(*) \quad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j} = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}}$$

は直和分解になる。これより、 \mathfrak{h} は極大可換 Lie 部分環になることがわかる。また、各 $\text{ad}H$ ($H \in \mathfrak{h}$) は対角化可能になる。以上より、 \mathfrak{h} は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の Cartan 部分環になる。 $(*)$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の \mathfrak{h} によるルート空間分解になる。ルート系は次のようになる。

$$\Delta = \{\alpha_{i,j} \mid i \neq j\}.$$

定理 3.2.5 定理 3.2.3 の条件と記号のもとで $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}$ とおくと、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は \mathfrak{h} の実部分空間になり、以下が成り立つ。

- (1) B は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上正定値実内積になる。
- (2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は実部分空間の直和になる。

上記定理の (1) よりルートは $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上実数値をとることがわかる。

定理 3.2.6 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を複素半単純 Lie 環とする。 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の Cartan 部分環とし、それぞれのルート系を Δ, Δ' で表す。 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha' \in \Delta'} \mathbb{R}H_{\alpha'}$ とおく。定理 3.2.5 より $\Delta \subset (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*, \Delta' \subset (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ とみなせる。実線形同型写像 $\phi: \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ が $\Delta' \circ \phi = \Delta$ を満たすならば、 ϕ は複素 Lie 環の同型写像 $\tilde{\phi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ に拡張できる。

上記定理は複素半単純 Lie 環のルート系が線形同型対応によって対応するならば、複素半単純 Lie 環は同型になることを主張している。

複素半単純 Lie 環の Cartan 部分環同士は自己同型写像で写り合うことがわかる。特に Cartan 部分環の次元は Cartan 部分環のとり方に依存しない。

定義 3.2.7 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 部分環の次元を \mathfrak{g} の階数という。

命題 3.2.8 定理 3.2.3 の条件と記号のもとで、 $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して

$$p = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \beta + n\alpha \in \Delta \cup \{0\}\}, \quad q = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid \beta + n\alpha \in \Delta \cup \{0\}\}$$

とおくと、

$$\{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap (\Delta \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}, p \leq n \leq q\}$$

が成り立つ。さらに

$$p + q = -\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

この命題より $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$ は整数になることがわかる。さらに、絶対値が 3 以下の整数になることがわかる。

定義 3.2.9 V を有限次元実ベクトル空間とする。 v_1, \dots, v_n を V の基底とする。任意の $x, y \in V$ に対して

$$x - y = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

とおいたとき、 a_1, \dots, a_n の最初に 0 ではない a_i が正ならば $x > y$ とする。これによって V に定まる全順序を辞書式順序という。

辞書式順序はもちろん基底のとり方に依存するため、あまり役に立たないように感じるかもしれないが、ルート系のようなベクトル空間の有限部分集合の性質を調べるには有効である。

定義 3.2.10 定理 3.2.5 より $\Delta \subset (\mathfrak{h}_\mathbb{R})^*$ とみなせる。 $(\mathfrak{h}_\mathbb{R})^*$ に辞書式順序を定めておく。 $\alpha \in \Delta$ が $\alpha > 0$ であり、正のルート β, γ によって $\alpha = \beta + \gamma$ と表すことができないとき、 α を単純ルートという。

例 3.2.11 例 3.2.4 において、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ のルート系を求めた。ここではさらに単純ルートの全体を求める。例 3.2.4 の設定や記号はそのまま使うことにする。

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{array} \right] \mid x_i \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$$

となることがわかる。 $\dim \mathfrak{h}_\mathbb{R} = n - 1$ となり、

$$\alpha_{1,2} = e_1 - e_2, \alpha_{2,3} = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1,n} = e_{n-1} - e_n$$

は $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ の基底になる。これに関する辞書式順序を $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に導入する。すると $i < j$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j) \\ &= \alpha_{i,i+1} + \cdots + \alpha_{j-1,j} > 0.\end{aligned}$$

これより

$$\alpha_{j,i} = -\alpha_{i,i+1} - \cdots - \alpha_{j-1,j} < 0$$

もわかる。上記の計算より単純ルートの全体は

$$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{n-1,n}.$$

になる。

定理 3.2.12 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} のルート系 Δ の単純ルート全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ とすると、 r は \mathfrak{g} の階数に一致する。任意の $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

であり、 n_i はすべて 0 以上であるかすべて 0 以下であるかのどちらかである。

3.3 複素単純 Lie 環の分類

第 3.2 節の設定と記号をそのまま使うことにする。複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 部分環 \mathfrak{h} に関するルート系 Δ から定まる実部分空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に \mathfrak{g} の Killing 形式 B を制限すると正定値になる。この内積から定まる \mathfrak{h}^* の内積も B で表すことにする。すると、

$$B(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta) = \alpha(H_\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*)$$

が成り立つ。

定義 3.3.1 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の単純ルートの全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ とする。

$$a_{ij} = \frac{2B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

が定める行列 (a_{ij}) を \mathfrak{g} の Cartan 行列と呼ぶ。 $i \neq j$ のとき、 $a_{ij} = 0, -1, -2, -3$ になる。

Cartan 行列の性質を抽出して特徴付けることで、逆に Cartan 行列から複素半単純 Lie 環を構成できる。Cartan 行列を特徴付ける性質を少し弱めるとそれから構成される Lie 環は無限次元になり、無限次元 Lie 環論に発展していく。

である。以上を古典型複素単純 Lie 環と呼ぶ。Dynkin 図形が E, F, G 型になる複素単純 Lie 環の記述は簡単ではないので、ここでは省略するが、これらを例外型複素単純 Lie 環と呼ぶ。

3.4 半単純 Lie 環の直和分解

定義 3.4.1 Lie 環 \mathfrak{g} に対して

$$\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ (Y \in \mathfrak{g})\}$$

を \mathfrak{g} の中心と呼ぶ。コンパクト Lie 群の Lie 環と同型になる実 Lie 環をコンパクト Lie 環と呼ぶ。

命題 3.4.2 Lie 群 G の中心は閉 Lie 部分群になり、その Lie 環は G の Lie 環の中心に一致する。

例 3.4.3 ユニタリ群 $U(n)$ の中心は $\{z1_n \mid z \in U(1)\}$ になり、その Lie 環は $\{y1_n \mid y \in \mathfrak{u}(1)\}$ になる。これは $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の中心に一致する。特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の中心は $\{z1_n \mid z \in U(1), z^n = 1\}$ になり、位数 n の巡回群に同型である。この Lie 環は $\{0\}$ であり、 $SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(n)$ の中心に一致する。

命題 3.4.4 (1) 実 Lie 環がコンパクト Lie 環になるための必要十分条件は、その Killing 形式が半負定値になることである。

(2) コンパクト Lie 環 \mathfrak{g} の中心を \mathfrak{z} で表すと、 \mathfrak{g} はイデアルの直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に分解し、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はコンパクト半単純 Lie 環になる。

定理 3.4.5 コンパクト連結半単純 Lie 群の普遍被覆群はコンパクトになる。

コンパクト連結半単純 Lie 群に両側不変 Riemann 計量を入れると、Ricci 曲率が正定値になることがわかり、Myers の定理 (定理 1.2.14) より基本群は有限群になる。したがって、その普遍被覆群もコンパクトになる。

定義 3.4.6 係数体を制限することにより複素 Lie 環 \mathfrak{l} を実 Lie 環とみなすことができる。それを $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ と書くことにする。 $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ の Lie 部分環 \mathfrak{g} が次の条件を満たすとき、 \mathfrak{g} を \mathfrak{l} の実形と呼ぶ。 $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ が \mathfrak{g} と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ の直和になる。

実 Lie 環 \mathfrak{h} の積 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ を \mathfrak{h} のベクトル空間としての複素化 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の積 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ に複素双線形に拡張できる。これによって、 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 環になる。 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ を実 Lie 環 \mathfrak{h} の複素化という。このとき、 \mathfrak{h} は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の実形になっている。

複素 Lie 環 \mathfrak{l} の実形 \mathfrak{g} の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は \mathfrak{l} と同型になり、自然にこれらを同一視できる。

定理 3.4.7 複素半単純 Lie 環はコンパクト実形を持つ。

複素半単純 Lie 環のルート空間分解を利用して定理 3.4.7 を証明できる。

例 3.4.8 $su(n)$ は複素単純 Lie 環 $sl(n, \mathbb{C})$ の実 Lie 部分環になる。 $su(n)$ の任意の元は

$$X + \sqrt{-1}Y \quad (X : n \text{ 次実交代行列 } Y : n \text{ 次実対称行列 } \operatorname{tr}Y = 0)$$

と表すことができる。この形より

$$sl(n, \mathbb{C}) = su(n) + \sqrt{-1}su(n)$$

は直和になる。したがって、 $su(n)$ は $sl(n, \mathbb{C})$ のコンパクト実形になる。

定義 3.4.9 Lie 環 \mathfrak{g} に対して随伴表現の像 $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。 $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群を \mathfrak{g} の随伴群と呼び、 $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ で表す。

連結 Lie 群 G の Lie 環を \mathfrak{g} とすると、 G の随伴表現の像は \mathfrak{g} の随伴群に一致する。すなわち、 $\operatorname{Ad}(G) = \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つことがわかる。

命題 3.4.10 複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} のコンパクト実形は $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ の作用で写り合う。

コンパクト半単純 Lie 環が単純になることとその複素化が複素単純になることは同値になる。したがって定理 3.3.3 より、複素単純 Lie 環の分類に対応してコンパクト単純 Lie 環の分類も得られる。さらに定理 3.4.5 より複素単純 Lie 環と単連結コンパクト単純 Lie 群は一対一に対応し、単連結コンパクト単純 Lie 群の分類も得られる。

A_r 型 ($r \geq 1$) 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SU(r+1)$ である。 B_2 型 ($r \geq 2$) 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SO(2r+1)$ の二重被覆群 $Spin(2r+1)$ である。 C_r 型 ($r \geq 3$) 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $Sp(r)$ である。 D_r 型 ($r \geq 4$) 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SO(2r)$ の二重被覆群 $Spin(2r)$ である。 $Spin(n)$ はスピノル群と呼ばれ、抽象的には回転群 $SO(n)$ の普遍被覆群として定義される。Clifford 代数を利用して具体的に構成することもできる。例外型複素単純 Lie 環についてもそれぞれ単連結コンパクト単純 Lie 群に対応する。

定義 3.4.11 \mathfrak{g} を実半単純 Lie 環とする。 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 \mathfrak{u} が複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の \mathfrak{g} に関する複素共役写像で不変であり、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{u}$$

とおくと、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ が直和になるとき、この直和分解を Cartan 分解と呼ぶ。

例 3.4.12 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ は実単純 Lie 環であり、その複素化は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ になる。 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に関する複素共役写像は通常複素共役写像

$$\bar{} : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) ; X \mapsto \bar{X}$$

に一致する。例 3.4.8 でみたように、 $\mathfrak{su}(n)$ の任意の元は

$$X + \sqrt{-1}Y \quad (X : n \text{ 次実交代行列 } Y : n \text{ 次実対称行列 } \operatorname{tr}Y = 0)$$

と表すことができ、

$$\overline{X + \sqrt{-1}Y} = X - \sqrt{-1}Y$$

だから、 $\overline{\mathfrak{su}(n)} = \mathfrak{su}(n)$ が成り立つ。さらに

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\},$$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap \sqrt{-1}\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}$$

とおくと、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は直和になる。したがって、この $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の交代行列と対称行列への直和分解は Cartan 分解になっている。

定理 3.4.13 実半単純 Lie 環は Cartan 分解を持つ。

定理 3.4.14 \mathfrak{g} を実半単純 Lie 環とし、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{m}_2$$

を \mathfrak{g} の二つの Cartan 分解とする。このとき、ある $\phi \in \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ が存在して、次が成り立つ。

$$\phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2, \quad \phi(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2.$$

定義 3.4.15 \mathfrak{g} を実 Lie 環とし、 \mathfrak{k} をその Lie 部分環とする。 \mathfrak{g} の随伴表現の \mathfrak{k} の像 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ は $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ に対応する $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群がコンパクトになるとき、 \mathfrak{k} を \mathfrak{g} のコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環という。

命題 3.4.16 \mathfrak{g} を実半単純 Lie 環とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を Lie 部分環 \mathfrak{k} と部分空間 \mathfrak{m} による直和分解とする。このとき、次の (1) と (2) は同値である。

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は Cartan 分解である。

(2) 写像 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を

$$\theta(T + X) = T - X \quad (T \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m})$$

によって定めると、 θ は \mathfrak{g} の対合的自己同型写像になり、

$$B_{\theta}(X, Y) = -B(X, \theta(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

は \mathfrak{g} 上の正定値内積になる。ただし、 B は \mathfrak{g} の Killing 形式である。

これらの条件が成り立つとき、 \mathfrak{k} は \mathfrak{g} の極大なコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環になる。

定義 3.4.17 実半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の対合的自己同型写像 θ に対して、

$$B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって定めた双線形形式が正定値内積になるとき、 θ を \mathfrak{g} の Cartan 対合と呼ぶ。

命題 3.4.16 より、実半単純 Lie 環の Cartan 分解から Cartan 対合が定まることがわかる。

例 3.4.18 例 3.4.12 より

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}$$

とおくと、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は Cartan 分解になる。これから定まる Cartan 対合 θ に関して $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ 内の交代行列全体が $+1$ 固有空間であり、対称行列全体が -1 固有空間になるので、

$$\theta(X) = -{}^tX \quad (X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

と表される。これが対合的自己同型写像になり、 ± 1 固有空間が $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ になることは次のように直接計算でも確かめることができる。 θ が対合的であることと ± 1 固有空間が $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ になることは θ の定義からわかる。 $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} [\theta(X), \theta(Y)] &= [{}^{-t}X, {}^{-t}Y] = [{}^tX, {}^tY] = {}^tX{}^tY - {}^tY{}^tX = {}^t(YX - XY) \\ &= -{}^t[X, Y] = \theta([X, Y]). \end{aligned}$$

したがって、 θ は Lie 環の自己同型写像になり、Cartan 対合であることがわかる。

第4章 対称空間の分解と分類

4.1 直交対称 Lie 代数

(G, K) を Riemann 対称対とし、 $\sigma : G \rightarrow G$ をその対合的自己同型写像とする。 G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表す。 σ の微分 $d\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は Lie 環 \mathfrak{g} の対合的自己同型写像になる。 $F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$ より \mathfrak{k} は $d\sigma$ の $+1$ 固有空間に一致する。 $\text{Ad}_G(K)$ がコンパクトであることより、 \mathfrak{k} は \mathfrak{g} のコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環であることがわかる。これらをふまえて、Lie 群に対する Lie 環の概念の類似にあたる Riemann 対称対に対する概念を定義する。

定義 4.1.1 実 Lie 環 \mathfrak{g} の対合的自己同型写像 s が次の条件を満たすとき、組 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数と呼ぶ。 s の $+1$ 固有空間 \mathfrak{k} は \mathfrak{g} のコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環になる。 \mathfrak{g} の中心を \mathfrak{z} として、 $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ が成り立つとき、 (\mathfrak{g}, s) を効果的という。連結 Lie 群 G とその Lie 部分群 K の対 (G, K) は次の条件を満たすとき、 (\mathfrak{g}, s) に対応しているという。 G の Lie 環は \mathfrak{g} であり、 K に対応する Lie 部分環は s の $+1$ 固有空間に一致する。二つの直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}_1, s_1) と (\mathfrak{g}_2, s_2) に対して、Lie 環の同型写像 $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ が存在して $\phi \circ s_1 = s_2 \circ \phi$ が成り立つときに、 (\mathfrak{g}_1, s_1) と (\mathfrak{g}_2, s_2) は同型であるという。

Riemann 対称対 (G, K) とその対合的自己同型写像 $\sigma : G \rightarrow G$ に対して、 $(\mathfrak{g}, d\sigma)$ は直交対称 Lie 代数になる。逆に直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) に対応する Lie 群の対 (G, K) がどのようなときに Riemann 対称対になるかについては次の命題がある。

命題 4.1.2 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とし、 (G, K) を (\mathfrak{g}, s) に対応する Lie 群の対とする。 G が単連結で K が連結ならば、 (G, K) は Riemann 対称対になる。

注意 4.1.3 直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) に対応する Lie 群の対 (G, K) は一般には Riemann 対称対になるとは限らない。Lie 環 \mathfrak{g} の自己同型写像 s に対応する Lie 群 G の自己同型写像が存在しないこともあれば、もし Lie 群 G の自己同型写像が存在してもその不動点集合に K が含まれないこともある。

定義 4.1.4 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とする。 s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。

- (1) \mathfrak{g} がコンパクト半単純 Lie 環のとき、 (\mathfrak{g}, s) をコンパクト型という。

- (2) \mathfrak{g} が非コンパクト半単純 Lie 環であって、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ が \mathfrak{g} の Cartan 分解のとき、 (\mathfrak{g}, s) を非コンパクト型という。
- (3) \mathfrak{m} が \mathfrak{g} の可換イデアルのとき、 (\mathfrak{g}, s) を Euclid 型という。

例 4.1.5 (1) \mathfrak{g} をコンパクト半単純 Lie 環とする。 \mathfrak{g} の任意の対合的自己同型写像 s に対して、 (\mathfrak{g}, s) は効果的コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。

- (2) \mathfrak{g} を非コンパクト半単純 Lie 環とする。 \mathfrak{g} の Cartan 分解に対応して定まる Cartan 対合 s に対して、 (\mathfrak{g}, s) は効果的非コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。
- (3) \mathfrak{m} を有限次元実ベクトル空間とし、 \mathfrak{k} を $GL(\mathfrak{m})$ のコンパクト Lie 部分群の Lie 環とする。実ベクトル空間 \mathfrak{g} を直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ によって定める。 \mathfrak{g} 上のブラケット積を次のように定める。

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0 \quad (X_1, X_2 \in \mathfrak{m}), \\ [T, X] &= -[X, T] = T \cdot X \quad (T \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m}), \\ [T_1, T_2] &= T_1 T_2 - T_2 T_1 \quad (T_1, T_2 \in \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

これによって \mathfrak{g} は Lie 環になる。

$$s(T + X) = T - X \quad (T \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m})$$

によって s を定めると、 s は \mathfrak{g} の対合的自己同型写像になる。これにより、 (\mathfrak{g}, s) は効果的 Euclid 型直交対称 Lie 代数になる。

定理 4.1.6 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とする。このとき、 \mathfrak{g} のイデアル $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ が存在して、以下が成り立つ。

- (1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_+$ は直和分解。
- (2) $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ は s の作用に関して不変であり、 \mathfrak{g} の Killing 形式に関して直交している。
- (3) s の $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ への制限をそれぞれ s_0, s_-, s_+ とする。このとき、

$$(\mathfrak{g}_0, s_0), \quad (\mathfrak{g}_-, s_-), \quad (\mathfrak{g}_+, s_+)$$

はそれぞれ Euclid 型、コンパクト型、非コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。

4.2 対称空間の双対性

定義 4.2.1 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を s の ± 1 固有空間分解とする。

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

によって \mathfrak{g} の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 内の実部分空間 \mathfrak{g}^* を定めると、 \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実 Lie 部分環になる。さらに、 s の複素化の \mathfrak{g}^* への制限

$$s^*(T + \sqrt{-1}X) = T - \sqrt{-1}X \quad (T \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m})$$

は \mathfrak{g}^* の対合的自己同型写像になる。あとの命題 4.2.3 より (\mathfrak{g}^*, s^*) は直交対称 Lie 代数になる。 (\mathfrak{g}^*, s^*) を (\mathfrak{g}, s) の双対という。

例 4.2.2 例 3.4.12 と 3.4.18 で述べた $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の Cartan 分解と Cartan 対合から定まる直交対称 Lie 代数は、 $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ になる。ただし、

$$\theta(X) = -{}^t X \quad (X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

である。 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の Cartan 分解は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}$$

によって定まるので、 $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ の双対の $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(n)$$

になる。 θ を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ に複素化し、 $\mathfrak{su}(n)$ に制限した対合的自己同型写像 θ^* によって、 $(\mathfrak{su}(n), \theta^*)$ が $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ の双対になる。ここで、 $X \in \mathfrak{su}(n)$ に対して

$$\theta^*(X) = -{}^t X = \bar{X}$$

となる。

特に $n = 2$ の場合、 $(SL(2, \mathbb{R}), SO(2))$ は $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \theta)$ に対応する Riemann 対称対になり、 $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ は双曲平面になる。他方、 $(SU(2), SO(2))$ は $(\mathfrak{su}(n), \theta^*)$ に対応する Riemann 対称対になり、 $SU(2)/SO(2)$ は 2 次元球面になる。

命題 4.2.3 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とし、 (\mathfrak{g}^*, s^*) を (\mathfrak{g}, s) の双対とする。このとき、以下が成り立つ。

- (1) (\mathfrak{g}^*, s^*) は直交対称 Lie 代数になる。
- (2) (\mathfrak{g}, s) がコンパクト型ならば、 (\mathfrak{g}^*, s^*) は非コンパクト型になる。逆に (\mathfrak{g}, s) が非コンパクト型ならば、 (\mathfrak{g}^*, s^*) はコンパクト型になる。

(3) (\mathfrak{g}_1, s_1) と (\mathfrak{g}_2, s_2) が同型ならば、 $(\mathfrak{g}_1^*, s_1^*)$ と $(\mathfrak{g}_2^*, s_2^*)$ も同型になる。

定理 4.2.4 \mathfrak{g} をコンパクト半単純 Lie 環とし、 $s : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}; (X, Y) \mapsto (Y, X)$ によって対合的自己同型写像 s を定めると $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, s)$ はコンパクト型直交対称 Lie 代数になる。この双対になる非コンパクト型直交対称 Lie 代数を (\mathfrak{l}^*, s^*) で表すと、 \mathfrak{l}^* は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と実 Lie 環として同型になる。さらに、 (\mathfrak{l}^*, s^*) は直交対称 Lie 代数として $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と \mathfrak{g} に関する複素共役写像 σ の組 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \sigma)$ と同型になる。

逆にコンパクト型直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{l}, s) の双対になる非コンパクト型直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{l}^*, s^*) の Lie 環 \mathfrak{l}^* が複素 Lie 環の構造を持てば、 (\mathfrak{l}^*, s^*) は上記のようにして得られる。

4.3 対称空間の分解

定義 4.3.1 Riemann 対称対 (G, K) から定まる直交対称 Lie 代数がコンパクト型になるとき、 (G, K) をコンパクト型という。Riemann 対称対の非コンパクト型、Euclid 型についても同様に定義する。対称空間 M の等長変換全体の単位連結成分を G で表し、 $o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ と定めると、定理 2.1.3 より (G, K) は Riemann 対称対になる。この Riemann 対称対 (G, K) がコンパクト型になるとき、 M をコンパクト型という。対称空間の非コンパクト型、Euclid 型についても同様に定義する。

定理 4.3.2 M を対称空間とする。

- (1) M がコンパクト型ならば、 M の断面曲率は 0 以上になる。
- (2) M が非コンパクト型ならば、 M の断面曲率は 0 以下になる。
- (3) M が Euclid 型ならば、 M の断面曲率は 0 になる。

命題 4.3.3 M を対称空間とし、 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ を M の普遍被覆空間とする。 π が局所等長的になるように \tilde{M} の Riemann 計量を入れると \tilde{M} も対称空間になる。

定義 4.3.4 Riemann 多様体 M_1, M_2 の多様体としての積 $M_1 \times M_2$ に

$$T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) = T_x M_1 + T_y M_2$$

が直交直和になるように Riemann 計量を導入したものを M_1 と M_2 の Riemann 積と呼ぶ。

定理 4.3.5 M を単連結対称空間とする。このとき、 M は Riemann 積

$$M = M_0 \times M_- \times M_+$$

に分解する。ここで、 M_0 は Euclid 空間、 M_- はコンパクト型対称空間、 M_+ は非コンパクト型対称空間である。

定義 4.3.6 (\mathfrak{g}, s) を直交対称 Lie 代数とし、 s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。 (\mathfrak{g}, s) が次の条件を満たすとき、 (\mathfrak{g}, s) を既約という。

- (1) \mathfrak{g} は半単純であり、 \mathfrak{k} は \mathfrak{g} の $\{0\}$ 以外のイデアルを含まない。
- (2) $\text{ad}(\mathfrak{k})$ は \mathfrak{m} に既約に作用する。

既約直交対称 Lie 代数に対応する Riemann 対称対も既約という。対称空間 M の等長変換全体の単位連結成分を G で表し、 $o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ によって定まる Riemann 対称対 (G, K) が既約になるとき、 M を既約という。

直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) が既約になることと、その双対 (\mathfrak{g}^*, s^*) が既約になることは同値になる。

定理 4.3.7 M を単連結コンパクト型対称空間とする。このとき、 M は Riemann 積

$$M = M_1 \times \cdots \times M_r$$

に分解する。ここで、各 M_i はコンパクト型既約対称空間である。単連結非コンパクト型対称空間も同様の分解を持つ。

定理 4.3.8 コンパクト型既約直交対称 Lie 代数は次のいずれかになる。

- I コンパクト単純 Lie 環 \mathfrak{g} とその対合的自己同型写像 s による (\mathfrak{g}, s) .
- II コンパクト単純 Lie 環 \mathfrak{g} と $s : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} ; (X, Y) \mapsto (Y, X)$ による $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, s)$.

非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数は次のいずれかになる。

- III 非コンパクト単純実 Lie 代数 \mathfrak{g} の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ が複素単純 Lie 環になり、 \mathfrak{g} の対合的自己同型写像 s の不動点集合がコンパクトに埋め込まれた部分環になるときの (\mathfrak{g}, s) .
- IV 複素単純 Lie 環 \mathfrak{g} を実 Lie 環とみなした $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ とそのコンパクト実形に関する複素共役写像 s による $(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}, s)$.

さらに既約直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) が III 型になることとその双対 (\mathfrak{g}^*, s^*) が I 型になることは同値になり、 (\mathfrak{g}, s) が IV 型になることと (\mathfrak{g}^*, s^*) が II 型になることは同値になる。

II 型の既約直交対称 Lie 代数はコンパクト単純 Lie 環と一対一に対応し、これにより分類できる。これに応じて IV 型の既約直交対称 Lie 代数も分類できる。

4.4 非コンパクト型対称空間

定理 4.4.1 (G, K) を非コンパクト型直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) に対応する Lie 群の対とする。定義 4.1.1 より G は連結である。このとき以下が成り立つ。

- (1) K は連結閉部分群になり、 G の中心 Z を含む。さらに K がコンパクトであることと Z が有限群であることは同値になる。このとき、 K は G の極大コンパクト部分群になる。
- (2) G の対合的自己同型写像 θ が存在して $K = F(\theta, G)$ と $d\theta = s$ が成り立つ。すなわち、 (G, K) は Riemann 対称対になる。
- (3) s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。写像 $\mathfrak{m} \times K \rightarrow G; (X, k) \mapsto (\exp X)k$ は微分同型写像になり、対称空間 G/K の指数写像も微分同型写像になる。

定理 4.4.2 (G, K) を非コンパクト型 Riemann 対称対とする。 K_1 を G のコンパクト部分群とすると、ある $g \in G$ が存在して $g^{-1}K_1g \subset K$ が成り立つ。さらに K はただ一つの極大コンパクト部分群 K' を持ち、 K' は G の極大コンパクト部分群にもなっている。

定理 4.4.3 G を連結半単純 Lie 群とする。 G のすべての極大コンパクト部分群は連結になり、 G の内部自己同型写像によって共役になる。 K を G の極大コンパクト部分群とすると Euclid 空間に微分同型な部分多様体 E が G 内に存在して、写像 $E \times K \rightarrow G; (e, k) \mapsto ek$ は微分同型写像になる。

4.5 コンパクト型対称空間

この節ではコンパクト型対称空間の制限ルート系について解説する。設定やそれに伴う記号が多くなるため、一度定めた設定や記号は原則としてその後もそのまま使うことにする。

(\mathfrak{g}, s) をコンパクト型直交対称 Lie 代数とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を s の ± 1 固有空間とする。 \mathfrak{g} に $\text{Int}(\mathfrak{g})$ と s の作用に関して不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を導入する。このとき、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は直交直和分解になる。 \mathfrak{m} 内の極大可換部分空間 \mathfrak{a} をとり、 \mathfrak{a} を含む \mathfrak{g} の極大可換部分環 \mathfrak{t} をとると、

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$$

は直和分解になり、複素化 $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ は複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になる。 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する各ルートは \mathfrak{t} 上純虚数の値をとることがわかる。そこで、前章の複素半単純 Lie 環のルートの定義と $\sqrt{-1}$ 倍異なるが、次のようにルートの定義をやりなおす。 $\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

によって $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の \mathfrak{t} に関するルート空間 $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ を定め、

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\}$$

によってルート系を定める。定理 3.2.3 のルート空間分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$$

となる。さらに、 $\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \lambda, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

によって $\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ を定める。 $\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\}$ に対して $\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$ のとき、 λ を (\mathfrak{g}, s) の \mathfrak{a} に関する制限ルートと呼び、その全体を

$$\Delta_m = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\}$$

で表し、制限ルート系と呼ぶ。 \mathfrak{t} から \mathfrak{a} への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$ で表し、

$$\Delta_0 = \Delta \cap \mathfrak{k} = \{\alpha \in \Delta \mid \bar{\alpha} = 0\}$$

とおくと

$$\Delta_m = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Delta - \Delta_0\}$$

が成り立つ。 \mathfrak{k} における \mathfrak{a} の中心化部分環を \mathfrak{k}_0 とおく。

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0 \ (H \in \mathfrak{a})\}.$$

$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{k}_{\lambda} = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_{-\lambda}^{\mathbb{C}}), \quad \mathfrak{m}_{\lambda} = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} - \mathfrak{g}_{-\lambda}^{\mathbb{C}})$$

によって制限ルート空間 $\mathfrak{k}_{\lambda}, \mathfrak{m}_{\lambda}$ を定める。 \mathfrak{a} の基底によって \mathfrak{a} に辞書式順序を定める。

$$\Delta_m^+ = \{\lambda \in \Delta_m \mid \lambda > 0\}$$

によって正の制限ルートの全体を表す。

定理 4.5.1 コンパクト型直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) に対して以下が成り立つ。

$$(1) \ \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Delta_m^+} \mathfrak{k}_{\lambda}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in \Delta_m^+} \mathfrak{m}_{\lambda} \text{ は直交直和になる。}$$

$$(2) \ \lambda, \mu \in \Delta_m \text{ に対して } [\mathfrak{k}_{\lambda}, \mathfrak{k}_{\mu}] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu}, [\mathfrak{k}_{\lambda}, \mathfrak{m}_{\mu}] \subset \mathfrak{m}_{\lambda+\mu}, [\mathfrak{m}_{\lambda}, \mathfrak{m}_{\mu}] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu} \text{ が成り立つ。}$$

この定理より $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\text{ad}H$ の作用を詳しく調べることができる。 (\mathfrak{g}, s) に対応する対称空間の共変微分、曲率テンソル等は \mathfrak{g} のブラケット積 $[\cdot, \cdot]$ によって記述できるので、制限ルート系を使ってこれらを記述できる。これによって、測地線とその挙動、測地線に沿った Jacobi 場、Laplace 作用素等の偏微分作用素をルートを使って記述でき、対称空間上の幾何学の問題や解析的問題に対して制限ルート系は強力な道具になる。

4.6 対称空間の分類

定理 4.6.1 I 型既約直交対称 Lie 代数に対応する Lie 環の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は次のいずれかになる。

$$\begin{aligned} \text{AI} & (\mathfrak{su}(n), \mathfrak{o}(n)) \\ \text{AII} & (\mathfrak{su}(2n), \mathfrak{sp}(n)) \\ \text{AIII} & (\mathfrak{su}(p+q), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \times \mathfrak{u}(q))) \\ \text{BDI} & (\mathfrak{o}(p+q), \mathfrak{o}(p) \times \mathfrak{o}(q)) \\ \text{DIII} & (\mathfrak{o}(2n), \mathfrak{u}(n)) \\ \text{CI} & (\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n)) \\ \text{CII} & (\mathfrak{sp}(p+q), \mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(q)) \end{aligned}$$

これ以外に例外型 12 種類。

上記の I 型既約直交対称 Lie 代数の対合的自己同型写像は以下のとおり。AI の $\mathfrak{su}(n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = \bar{X} \quad (X \in \mathfrak{su}(n))$$

となる。

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、AII の $\mathfrak{su}(2n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1} \quad (X \in \mathfrak{su}(2n))$$

となる。

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{bmatrix}$$

とおくと、AIII の $\mathfrak{su}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = I_{p,q} X I_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{su}(p+q))$$

となる。BDI の $\mathfrak{o}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = I_{p,q} X I_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{o}(p+q))$$

となる。DIII の $\mathfrak{o}(2n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1} \quad (X \in \mathfrak{o}(2n))$$

となる。CI の $\mathfrak{sp}(n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = \bar{X} \quad (X \in \mathfrak{sp}(n))$$

となる。ただし、ここでは $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$ として、 $\mathfrak{sp}(n)$ を四元数ではなく複素数で表している。

$$K_{p,q} = \begin{bmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{bmatrix}$$

とおくと、CII の $\mathfrak{sp}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = K_{p,q} X K_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{sp}(p+q))$$

となる。

コンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類は定理 4.3.8 より I 型と II 型に別れる。I 型については定理 4.6.1 により分類され、II 型については複素単純 Lie 環の分類を与えている定理 3.3.3 により分類される。非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類は双対を考えることによりコンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類に帰着する。以上によって既約直交対称 Lie 代数の分類が完成する。

単連結対称空間は定理 4.3.5 より Euclid 空間、単連結コンパクト型対称空間、非コンパクト型対称空間の Riemann 積に分解する。定理 4.4.1 より非コンパクト型対称空間は単連結になることに注意しておく。定理 4.3.7 より単連結コンパクト型対称空間と非コンパクト型対称空間はそれぞれ単連結コンパクト型既約対称空間と非コンパクト型既約対称空間の Riemann 積に分解する。以上により単連結対称空間の分類は単連結コンパクト型既約対称空間と非コンパクト型既約対称空間の分類に帰着する。単連結コンパクト型既約対称空間はコンパクト型既約直交対称 Lie 代数と一対一に対応し、非コンパクト型既約対称空間は非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数と一対一に対応するので、これで単連結対称空間の分類が得られる。

4.7 コンパクト型対称空間の基本群

単連結コンパクト型対称空間は前節の結果から分類される。単連結とは限らないコンパクト型対称空間は普遍被覆からの被覆写像と基本群の情報によって把握できる。

補題 4.7.1 完備 Riemann 多様体の基本群の元は代表元として測地線をとることができる。

完備 Riemann 多様体の普遍被覆空間は完備になり、被覆写像の逆像の二点を測地線で結び被覆写像で写すことにより、基本群の代表元として測地線をとることができる。

4.5 節の設定と記号をそのまま使うことにする。 (G, K) をコンパクト型直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{s})$ に対応する Riemann 対称対とする。 $\gamma \in \Delta_m$ に対して

$$A_\gamma = \frac{2\pi}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \gamma$$

とおく。

$$\begin{aligned}\Gamma(G/K) &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \exp H \in K\} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \text{Exp}H = o\}, \\ \Gamma^0 &= \{A_\gamma \mid \gamma \in \Delta_m\}_{\mathbb{Z}}, \\ \Gamma^* &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \gamma, H \rangle \in \pi\mathbb{Z} (\gamma \in \Delta_m)\}\end{aligned}$$

によって \mathfrak{a} の格子 $\Gamma(G/K), \Gamma^0, \Gamma^*$ を定める。 Γ^0 は A_γ の整数係数線形結合の全体である。Riemann 対称対と制限ルート系の性質からこれらは次の包含関係を持つことがわかる。

命題 4.7.2 $\Gamma^0 \subset \Gamma(G/K) \subset \Gamma^*$.

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\gamma_H : [0, 1] \rightarrow G/K ; t \mapsto \text{Exp}tH$$

によって G/K の測地線 γ_H を定め、

$$f : \Gamma(G/K) \rightarrow \pi_1(G/K, o) ; H \rightarrow [\gamma_H]$$

とおく。 $H \in \Gamma(G/K)$ ならば γ_H は G/K の o を通る閉測地線になり、 o を基点とする G/K の基本群 $\pi_1(G/K, o)$ の元 $[\gamma_H]$ を定める。

定理 4.7.3 $f : \Gamma \rightarrow \pi_1(G/K, o)$ は全射準同型になり、特に $\pi_1(G/K, o)$ は可換になる。さらに

$$\ker f = \Gamma^0, \quad \pi_1(G/K, o) \cong \Gamma(G/K)/\Gamma^0$$

が成り立つ。

補題 4.7.1 より $\pi_1(G/K, o)$ の元は代表元として o を端点とする測地線をとることができる。定理 2.2.4 は同じ直交対称 Lie 代数に対応する Riemann 対称対に対して同じ結論が得られるので

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K_0} \text{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

となり、 o を端点にする測地線は $\text{Exp}_o\mathfrak{a}$ の測地線とホモトピックになる。これより f は全射になることがわかる。

\tilde{G} を \mathfrak{g} を Lie 環として持つ単連結コンパクト Lie 群とする。Lie 環の対合的自己同型 $s : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は Lie 群の対合的自己同型 $\tilde{s} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ を誘導する。 \tilde{s} の不動点集合

$$\tilde{K} = F(\tilde{s}, \tilde{G})$$

は連結になることが知られている。命題 4.1.2 より (\tilde{G}, \tilde{K}) は Riemann 対称対になり、コンパクト型対称空間 \tilde{G}/\tilde{K} は単連結になる。よって定理 4.7.3 より、 $\Gamma(\tilde{G}/\tilde{K}) = \Gamma^0$ が成り立つ。

\mathfrak{g} の随伴群 $\text{Int}(\mathfrak{g})$ において

$$\text{Int}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}) ; x \mapsto sxs^{-1}$$

は対合的自己同型写像になり、

$$\text{Int}(\mathfrak{g})_s = \{x \in \text{Int}(\mathfrak{g}) \mid sxs^{-1} = x\}$$

とおくと、 $(\text{Int}(\mathfrak{g}), \text{Int}(\mathfrak{g})_s)$ は Riemann 対称対になる。したがって、 $\text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s$ はコンパクト型対称空間になる。さらに $\Gamma(\text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s) = \Gamma^*$ が成り立つことがわかる。

(\mathfrak{g}, s) に対応する任意の Riemann 対称対 (G, K) について考える。普遍被覆写像 $\tilde{G} \rightarrow G$ は被覆写像 $\tilde{G}/\tilde{K} \rightarrow G/K$ を誘導する。また随伴表現 $\text{Ad}_G : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ の像は随伴群に一致し、 $\text{Ad}_G : G \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g})$ は被覆写像になる。これは被覆写像 $\widetilde{\text{Ad}}_G : G/K \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s$ を誘導する。以上を図にまとめると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}/\tilde{K} & \text{-----} & \Gamma^0 = \Gamma(\tilde{G}, \tilde{K}) \\ \downarrow & & \cap \\ G/K & \text{-----} & \Gamma(G, K) \\ \downarrow & & \cap \\ \text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s & \text{-----} & \Gamma^* = \Gamma(\text{Int}(\mathfrak{g}), \text{Int}(\mathfrak{g})_s) \end{array}$$

命題 4.7.4 $(G_1, K_1), (G_2, K_2)$ を (\mathfrak{g}, s) に対応する Riemann 対称対とする。

$$\Gamma(G_1/K_1) \subset \Gamma(G_2/K_2)$$

となるための必要十分条件は、被覆写像 $\phi : G_1/K_1 \rightarrow G_2/K_2$ が存在して次を満たすことである。

- (1) $d\phi$ は \mathfrak{m} の恒等写像。
- (2) $\widetilde{\text{Ad}}_{G_2} \circ \phi = \widetilde{\text{Ad}}_{G_1}$.

系 4.7.5 $(G_1, K_1), (G_2, K_2)$ を (\mathfrak{g}, s) に対応する Riemann 対称対とする。

$$\Gamma(G_1/K_1) = \Gamma(G_2/K_2)$$

の必要十分条件は、 $G_1/K_1, G_2/K_2$ が $\text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s$ の Riemann 被覆として同値になることである。

命題 4.7.6 $\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ に対して、 $\widehat{\text{exp}}2\Gamma$ は \tilde{G} の中心に含まれ $G = \tilde{G}/\widehat{\text{exp}}2\Gamma$ は \mathfrak{g} に対応するコンパクト半単純 Lie 群になる。 s は G の対合的自己同型写像 \bar{s} を誘導し、 $\Gamma(G/F(\bar{s}, G)) = \Gamma$ が成り立つ。

以上より、コンパクト型直交対称 Lie 代数 (\mathfrak{g}, s) に対応するコンパクト型対称空間 M は被覆写像 $M \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g})/\text{Int}(\mathfrak{g})_s$ を持ち、このような被覆写像は $\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ と一対一に対応する。さらに、 $\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ と Γ^*/Γ^0 の部分群は一対一に対応する。 Γ^*/Γ^0 は有限 abel 群になり、有限巡回群の有限個の積になる。したがって、すべての部分群を分類することができる。

参考文献

- [1] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [2] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I. Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35 – 68.
- [3] 田崎博之、Riemann 幾何学の基礎 (2003 年度筑波大学数理物質科学研究科)
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln2003/tsukuba.html>
- [4] 田崎博之、等質空間と形状空間 (2004 年度筑波大学数理物質科学研究科)
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln2004/tsukuba.html>