対称空間入門

— 大阪市立大学数学研究所連続講義 —
(数学院生談話会連続講義)

田崎博之

第 1 回 2010 年 11 月 11 日–13 日
第 2 回 2011 年 3 月 16 日–18 日
第 3 回 2012 年 3 月 7 日–9 日

はしがき

この講義ノートは大阪市立大学で行った三回の連続講義の際に配付したものをまとめて手直しをしたものです。使いやすいように索引も付けました。三回の講義期間とその概要は以下のとおりです。

(1) 2010 年 11 月 11 日 (木) から 13 日 (土)
第 1 回講義概要　各点で点対称を持つ Riemann 多様体は Riemann 対称空間と呼ばれ、定曲率空間、射影空間や Grassmann 多様体、コンパクト Lie 群などを含む基本的な Riemann 多様体の族を与えています。この講義では具体例を軸にして Riemann 対称空間の基本的な性質を解説します。そのためには Lie 群と Lie 環、Riemann 多様体、Riemann 等質空間などの基礎事項も必要になるので、これらに関する準備を最初に行います。さらにそれらを利用して Riemann 対称空間の典型的例である Grassmann 多様体を特に詳しく扱うことにします。準備に続く Riemann 対称空間の章では、Riemann 対称空間の定義から導かれる基本的性質や Riemann 対称対との対応関係に関する一般論ついて解説します。Grassmann 多様体や古典型コンパクト Lie 群の場合に一般論はどうなるかについても説明します。

(2) 2011 年 3 月 16 日 (水) から 18 日 (金)
第 2 回講義概要　対称空間の構造を詳しく調べるために、対称空間の性質を等長変換群の Lie 環から構成される直交対称 Lie 代数の性質に帰着させます。直交対称 Lie 代数の性質を調べるためには、複素半単純 Lie 環の構造に関する情報が重要になります。そこで、複素半単純 Lie 環のルート空間分解、分類、コンパクト実形等に関する準備を行います。直交対称 Lie 代数に複素半単純 Lie 環の結果を適用して、直交対称 Lie 代数さらに対称空間のコンパクト型・非コンパクト型・Euclid 型の定義、分解、双対性、既約分解、分類などを扱います。

(3) 2012 年 3 月 7 日 (水) から 9 日 (金)
第 3 回講義概要　Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持つものに対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間があります。これらの定義と基本的性質、対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の間の対応などについて解説します。次に Chen-Nagano の導入した極地の基本的部分を説明します。これらを利用して対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合の基本的性質を導きます。

(1) では第 1 章と第 2 章、(2) では第 3 章と第 4 章、(3) では第 5 章と第 6 章の講義を行いました。第 5 章の題名は内容に合わせて改名しました。こうして三回の連続講義のノートをまとめてみると、第 6 章を書きたいためにこの講義ノートを書いてきたという気がしてきます。この第 6 章は対蹠集合に関する研究 [13] と田中

真紀子さんとの共同研究 [11]、[12] の成果を含んでいます。第 6 章で扱ったコンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉の対蹠性は入江博さん、酒井高司さんとの共同研究 [5] にも発展しています。これらの共同研究は現在も進展中で、この講義ノートがこれらの共同研究やこの方面の今後の研究の基礎資料になればと願っています。

この三回の大阪市立大学での連続講義の実施を可能にしていただいた大仁田義裕さんと橋本要さん、講義を聞いていただいた方々、特に遠方から講義に出席された方々、この講義ノート作成にいろいろな形で協力していただいた坊向伸隆さん、田中真紀子さん、入江博さん、井川治さん、酒井高司さんに感謝しています。

2012 年 4 月 8 日

追記

この講義ノートのどこにどの例を書いたのか自分でもすぐに見つけられなくなってきたので、例の目次を追加しました。これには後で見たくなる可能性のある計算例を入れました。後で参照することはあまりないだろうと思われる例は入れていません。また例という項目ではないものもいくつか入っています。本文はまだ変更していません。この講義ノートの 2012 年 4 月 8 日版をプリントアウトしている方は今回の例の目次の部分だけプリントアウトしてはさめば利用できます。

2012 年 8 月 8 日

追記

参考文献で引用していた文献がすべて出版されましたので、それらの出版情報を追加しました。その後も第 6 章の内容に関連した研究は進んでいます。新たに得られた成果をこの章に追加した講義ノートをいつか書いてみたいものです。

2014 年 2 月 25 日

目 次

例の目次

第1章　準備

この章ではRiemann対称空間の解説に必要になるLie群とLie環、Riemann多様体、Riemann等質空間に関する準備をする。さらにそれらを利用してRiemann対称空間の典型的例であるGrassmann多様体についても解説しておく。Grassmann多様体とは係数体が実数体$\mathbb{R}$、複素数体$\mathbb{C}$、または四元数体$\mathbb{H}$のベクトル空間内の部分ベクトル空間全体の成す多様体のことである。

1.1　Lie群とLie環

定義 1.1.1 多様体Gが群構造を持ち、その群演算

$$G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy, \qquad G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

がC^∞級写像になるとき、Gを**Lie群**と呼ぶ。(特にことわらないかぎり、群の単位元はeで表す。)

例 1.1.2 Vを有限次元実ベクトル空間とすると、Vの正則線形変換の全体$GL(V)$はLie群になる。$GL(\mathbb{R}^n)$は$GL(n, \mathbb{R})$とも書く。$GL(V)$を**実一般線形群**と呼ぶ。**複素一般線形群**、**四元数一般線形群**も同様に定義する。

定義 1.1.3 Lie群Gの元gに対して微分同型写像L_g, R_gを

$$L_g : G \to G; x \mapsto gx, \qquad R_g : G \to G; x \mapsto xg$$

によって定め、それぞれgによる**左移動**、**右移動**と呼ぶ。G上のベクトル場Xは、Gの任意の元gに対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれる。**右不変ベクトル場**も同様に定義できる。

定義 1.1.4 実ベクトル空間$\mathfrak{g}$に双線形写像$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$があり、すべての元$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

が成り立つとき、$\mathfrak{g}$を**Lie環**と呼ぶ。Lie環$\mathfrak{g}$のベクトル部分空間$\mathfrak{h}$が、演算$[\ ,\ ]$に関して閉じているとき、$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{g}$の**Lie部分環**と呼ぶ。

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ のブラケットを制限することで Lie 環になる。

例 1.1.5 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 1.1.6 V を実ベクトル空間とする。V の線形変換全体 $\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X,Y] = XY - YX$ と定めると $\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ とも書く。

定理 1.1.7 G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表す。すると、$\mathfrak{g}$ は G 上のベクトル場全体の成す Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG; X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$ が成り立つ。

定義 1.1.8 Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

定義 1.1.9 Lie 群の間の C^∞ 級写像 $f : G \to H$ が群の準同型写像でもあるとき、f を **Lie 群の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持ち、f^{-1} も Lie 群の準同型写像であるとき、f を **Lie 群の同型写像**と呼び Lie 群 G と H は**同型**であるという。Lie 環の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X,Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、f を **Lie 環の準同型写像**と呼ぶ。さらに f が逆写像 f^{-1} を持つとき、f を **Lie 環の同型写像**と呼び、Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は**同型**であるという。

命題 1.1.10 G を Lie 群とし G の単位元を含む連結成分を G_0 とすると、G_0 は G の正規部分群であり、さらに Lie 部分群である。

Lie 群 G の単位元を含む連結成分 G_0 を**単位連結成分**と呼ぶことにする。

定理 1.1.11 $GL(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n,\mathbb{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n,\mathbb{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{\ } : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}\ ;\ X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

上記定理より $GL(n,\mathbb{R})$ の Lie 環の演算は行列の交代積 $XY - YX$ とみなせるため、左不変ベクトル場のブラケット積よりは扱いが簡単になる。

定義 1.1.12 実数全体 $\mathbb{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbb{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 1.1.13 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 1.1.7 によって $\dfrac{dc}{dt}(0) \in T_eG$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X を c に対応させる。

今後、$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$ のいずれかに等しいものとする。

定義 1.1.14 n 次 $\mathbb{K}$ 正方行列全体を $M_n(\mathbb{K})$ で表す。$X \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

によって e^X を定めると、この無限級数はコンパクト一様絶対収束することが知られている。これを**行列の指数関数**と呼ぶ。

命題 1.1.15 $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ と $P \in GL(n, \mathbb{K})$ に対して以下が成り立つ。

(1) $e^{PXP^{-1}} = Pe^X P^{-1}$.

(2) $XY = YX$ ならば $e^{X+Y} = e^X e^Y$ が成り立つ。

(3) e^X は正則行列になり、$(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

(4) $\dfrac{d}{dt} e^{tX} = e^{tX} X = X e^{tX}$.

例 1.1.16 $GL(n, \mathbb{K})$ の一径数部分群を求める。$GL(n, \mathbb{K})$ の接ベクトルを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の元と同一視する。$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong T_e(GL(n, \mathbb{K}))$ に対応する $GL(n, \mathbb{K})$ 上の左不変ベクトル場を $\tilde{X}$ で表すと、$\tilde{X}_g = gX$ $(g \in GL(n, \mathbb{K}))$ となる。したがって、X に対応する $GL(n, \mathbb{K})$ の一径数部分群 c は

$$\frac{dc(t)}{dt} = c(t)X \quad (t \in \mathbb{R}), \quad c(0) = e$$

を満たす。したがって、$c(t) = e^{tX}$ となる。

定義 1.1.17 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.1.13 で存在を示した X の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級になることがわかる。

例 1.1.18 例 1.1.16 で示したように $GL(n,\mathbb{K})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ の元 X に対応する一径数部分群は e^{tX} になるので、$GL(n,\mathbb{K})$ の指数写像は行列の指数関数に一致する。

命題 1.1.19 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。定理 1.1.13 の対応で $X \in \mathfrak{g}$ に対して対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

定理 1.1.20 Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

$d\exp_0 = \alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ となり、逆関数定理より exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

多様体 X 上の C^∞ 級関数全体のなすベクトル空間を $C^\infty(X)$ で表す。

命題 1.1.21 G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(Xf)(g) &= \frac{d}{dt} f(g \exp tX)\bigg|_{t=0} \\
([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}.
\end{aligned}
$$

最初の等式は次のように示すことができる。

$$
(Xf)(g) = df(X_g) = df(dL_g X_e) = df\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g \exp tX \right) = \frac{d}{dt} f(g \exp tX)\bigg|_{t=0}.
$$

系 1.1.22 Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y] = 0$ となる。

定義 1.1.23 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X,Y] = 0$ となるとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 1.1.22 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

命題 1.1.24 Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

定理 1.1.25 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とおく。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 1.1.7 の線形同型写像を $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_eG,\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_eH$ とすると、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 環の準同型写像になる。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{df} & \mathfrak{h} \\
{\scriptstyle \alpha_G}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle \alpha_H} \\
T_eG & \xrightarrow{df_e} & T_eH
\end{array}
$$

定義 1.1.26 Lie 群の準同型写像 $f: G \to H$ に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を f の**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 1.1.25 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 1.1.27 A, B, C を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ とおく。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f: A \to B,\ g: B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

系 1.1.28 A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f: A \to B$ を Lie 群の同型写像とすると、$df: \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

　一般に上の系の逆は真ではない。被覆準同型写像は同型にはならないが、その微分は Lie 環の同型写像になる。

命題 1.1.29 G, H を Lie 群とし、これらの Lie 環と指数写像をそれぞれ $\mathfrak{g}, \exp_G$ と $\mathfrak{h}, \exp_H$ で表す。$f: G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、次が成り立つ。

$$f(\exp_G X) = \exp_H(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{df} & \mathfrak{h} \\
{\scriptstyle \exp_G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_H} \\
G & \xrightarrow{f} & H
\end{array}$$

定義 1.1.30 Lie 群 G と有限次元ベクトル空間 V に対して、G から $GL(V)$ への Lie 群の準同型写像を G の**表現**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V に対して、$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を $\mathfrak{g}$ の**表現**と呼ぶ。

命題 1.1.31 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y],\ Y \in \mathfrak{g}$ として $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を定めると $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 環の表現になる。

定義 1.1.32 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して定まる表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ。

定理 1.1.33 Lie 群 G の元 g に対して $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$ は G の内部自己同型になる。$\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$ となり $g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の表現になり Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現 ad に一致する。

定義 1.1.34 Lie 群 G に対して定まる表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の**随伴表現**と呼ぶ。

　$g \exp X = g \exp X g^{-1} g = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) g$ となるので、随伴表現は群演算の非可換の度合を測っているとみなせる。

例 1.1.35 有限次元ベクトル空間 V に対する一般線形群 $GL(V)$ の随伴表現を求めてみよう。例 1.1.18 より、$GL(V)$ の指数写像は線形変換の指数関数に一致する。$g \in GL(V),\ X \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tgXg^{-1}}\bigg|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

定義 1.1.36 Lie 群 H が Lie 群 G の **Lie 部分群**であるとは、H が G の部分多様体であり同時に H が G の部分群であることをいう。

定理 1.1.37 G を Lie 群とし H を G の部分群とする。H が G の閉集合ならば、H は相対位相に関して Lie 部分群になる。

定義 1.1.38 一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

定義 1.1.39 V を有限次元実ベクトル空間とし、$SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det g = 1\}$ と表すと、$SL(V)$ は線形 Lie 群になる。$SL(V)$ を**特殊線形群**と呼ぶ。$SL(V)$ の Lie 環を $\mathfrak{sl}(V)$ で表すと、$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$ となる。$\mathbb{R}^n$ における特殊線形群とその Lie 環を $SL(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ とも書く。複素数の場合も同様に特殊線形群を定義できる。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき、$\mathbb{K} - \{0\}$ を乗法に関して Lie 群とみなすと、$\det : GL(V) \to \mathbb{K} - \{0\}$ は Lie 群の準同型になり、その微分は $d(\det) = \mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathbb{K}$ になることが行列式の微分の計算からわかる。

四元数の場合には、実数や複素数の場合のように行列式を定義できないので、特殊線形群を同様に考えることはできない。

定義 1.1.40 $\mathbb{R}^n$ の標準内積を保つ線形変換、すなわち直交変換の全体を $O(n)$ で表し**直交群**と呼ぶ。

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t gg = 1_n\}$$

となり、$O(n)$ は線形 Lie 群になる。$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ を**回転群**と呼ぶ。$\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表すと

$$\langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \quad (g \in O(n), X, Y \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ。これを微分することにより $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(n) &= \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \langle TX, Y \rangle + \langle X, TY \rangle = 0\} \\ &= \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid T \text{ は交代行列 }\}.\end{aligned}$$

これより、$\dim O(n) = n(n-1)/2$ であることがわかる。$O(n)$ の単位連結成分は $O(n)_0 = SO(n)$ となり、$O(n)$ と $SO(n)$ の Lie 環は同型になることがわかる。

定義 1.1.41 $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合も $\mathbb{K}^n$ の標準 Hermite 内積を保つ線形変換、すなわちユニタリ変換、四元数ユニタリ変換の全体を $U(n), Sp(n)$ で表し、それぞれ**ユニタリ群**、**シンプレクティック群**と呼ぶ。$X \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $X^* = {}^t\bar{X}$ と表すと

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = 1_n\},$$
$$Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) \mid g^* g = 1_n\}$$

となり、$U(n), Sp(n)$ は線形 Lie 群になる。$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ を**特殊ユニタリ群**と呼ぶ。$U(n), Sp(n), SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n), \mathfrak{su}(n)$ は次で与えられる。

$$\mathfrak{u}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\},$$
$$\mathfrak{sp}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid X^* + X = 0\},$$
$$\mathfrak{su}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* + X = 0, \mathrm{tr} X = 0\}.$$

これらより、$\dim U(n) = n(n-1) + n = n^2, \dim Sp(n) = 2n(n-1) + 3n = n(2n+1), \dim SU(n) = n^2 - 1$ であることがわかる。$U(n), Sp(n), SU(n)$ はすべて連結になることがわかる。

1.2 Riemann 多様体

定義 1.2.1 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ が存在し、M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

定義 1.2.2 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の曲線 $c : [a, b] \to M$ の長さ $L(c)$ を

$$L(c) = \int_a^b \langle c'(t), c'(t)\rangle^{1/2} dt$$

によって定める。M が連結な場合、$p, q \in M$ に対して

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ曲線 }\}$$

によって $d(p, q)$ を定める。

命題 1.2.3 定義 1.2.2 で定めた d は連結 Riemann 多様体の距離になり、この距離から定まる位相は多様体構造を定める位相に一致する。

定理 1.2.4 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)\end{aligned}$$

を満たすようにベクトル場 $\nabla_X Y$ が定まり、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \qquad \nabla_X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

を満たす。

定義 1.2.5 定理 1.2.4 で定めた接続 ∇ を Riemann 多様体の **Levi-Civita 接続**と呼ぶ。また、$\nabla_X Y$ を Y の X による**共変微分**という。

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

によって**曲率テンソル** R を定める。

定義 1.2.6 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の曲線 c に沿って定義されたベクトル場 X に対して、$\nabla_{c'(t)} X$ を定めることができる。$\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0$ を満たす曲線 $c(t)$ を測地線と呼ぶ。

定義 1.2.7 常微分方程式の解の存在と一意性より、$p \in M$ と $X \in T_pM$ に対して 0 を含むある開区間 I と測地線 $\gamma_X : I \to M$ が存在して

$$\gamma_X(0) = p, \quad \gamma'_X(0) = X$$

を満たすことがわかる。$\mathrm{Exp}_p(X) = \gamma_X(1)$ によって、$\mathrm{Exp}_p : B_p \to M$ を定める。B_p は T_pM の原点を含む開集合であり、T_pM 全体になるとは限らない。Exp_p を M の**指数写像** と呼ぶ。

指数写像を使うと p を始点とし $X \in T_pM$ を初速度とする測地線は $t \mapsto \mathrm{Exp}_p(tX)$ と表すことができる。Riemann 対称空間において、Lie 群の指数写像と Riemann 多様体の指数写像は密接な関係にあることがわかる。

定理 1.2.8 (Hopf-Rinow) 連結 Riemann 多様体 M に対して次の条件は同値になる。

(1) ある点 $p \in M$ において Exp_p は T_pM 全体で定義できる。

(2) すべての点 $p \in M$ において Exp_p は T_pM 全体で定義できる。

(3) M は距離 d に関して完備距離空間になる。

これらの条件が成り立つとき、任意の $p, q \in M$ に対して p, q を結ぶ最短測地線が存在する。

定義 1.2.9 定理 1.2.8 の条件を満たす連結 Riemann 多様体を**完備 Riemann 多様体**という。

定義 1.2.10 M を完備 Riemann 多様体とする。$p \in M$ と単位接ベクトル $X \in T_pM$ に対して

$$t(X) = \sup\{s > 0 \mid \mathrm{Exp}_p(uX)(0 \leq u \leq s) \text{ は端点を結ぶ最短測地線 }\}$$

とおき、

$$\tilde{C}_p(M) = \bigcup_{\substack{X \in T_pM \\ |X|=1}} t(X)X, \qquad C_p(M) = \mathrm{Exp}_p(\tilde{C}_p(M))$$

によって、M の p における**接最小軌跡** $\tilde{C}_p(M)$ と**最小軌跡** $C_p(M)$ を定義する。ただし、$\tilde{C}_p(M)$ の定義の合併において、$t(X) = \infty$ となる X は考えないことにする。

$M = \mathbb{E}^n$ のときは、どの測地線をどこまで延しても最短なので、すべての単位接ベクトル X に対して $t(X) = \infty$ になる。したがって、$\tilde{C}_p(\mathbb{E}^n) = \emptyset, C_p(\mathbb{E}^n) = \emptyset$ が成り立つ。M が単位球面 S^n のときは、すべての単位接ベクトル X に対して $t(X) = \pi$ となる。したがって、$\tilde{C}_p(S^n) = \{Y \in T_pS^n \mid |Y| = \pi\}, C_p(S^n) = \{-p\}$ が成り立つ。

一般の連結完備 Riemann 多様体 M に対して、

$$B_p = \bigcup_{\substack{X \in T_pM \\ |X|=1}} \{uX \mid 0 \leq u < t(X)\}$$

とおくと、B_p は n 次元円板と位相同型になり、$\mathrm{Exp}_p : B_p \to M - C_p(M)$ は微分同型になることがわかる。さらに、$M = (M - C_p(M)) \cup C_p(M)$ が成り立つので、$C_p(M)$ は M の構造を調べる上で重要である。

定義 1.2.11 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$K_\sigma = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2} \qquad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

とおき、K_σ を σ の**断面曲率**と呼ぶ。ここで、$|X \wedge Y|$ は X, Y の張る平行四辺形の面積である。$\dim M = 2$ のとき、断面曲率は Gauss 曲率と一致する。

定義 1.2.12 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の接ベクトル X, Y に対して、

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

によって M 上の $(0, 2)$ 型テンソル場 Ric を定める。Ric を **Ricci テンソル**と呼ぶ。単位接ベクトル X に対して $\mathrm{Ric}(X, X)$ を X の **Ricci 曲率**と呼ぶ。Ricci 曲率が一定値をとるとき、M を **Einstein 多様体**と呼ぶ。

完備 Riemann 多様体の曲率と位相に関して以下の結果が知られている。

定理 1.2.13 (Cartan) M を連結、単連結な完備 Riemann 多様体とし、その断面曲率は 0 以下と仮定する。このとき、M の任意の点 p に対して $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ は微分同型写像になる。

定理 1.2.14 (Myers) M を連結完備 Riemann 多様体とし、ある正数 c が存在し、任意の単位接ベクトル X の Ricci 曲率が $\mathrm{Ric}(X, X) \geq c$ を満たすと仮定する。このとき、M はコンパクトになり、基本群 $\pi_1(M, p)$ は有限群になる。

上の二つの定理は Riemann 対称空間の位相を考えるときに基本的役割を果たす。

1.3 Riemann 等質空間

定義 1.3.1 M を多様体とし G を Lie 群とする。C^∞ 級写像 $G \times M \to M; (g, x) \mapsto g \cdot x$ が存在し、任意の $g_1, g_2 \in G, x \in M$ と G の単位元 e に対して

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \qquad e \cdot x = x$$

が成り立つとき、G を M の **Lie 変換群**と呼ぶ。さらに任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$ となるとき G は M に**推移的**に作用しているという。

定理 1.3.2 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。射影 $\pi : G \to G/H; g \mapsto gH$ によって G の H による剰余類の全体 G/H に商位相をいれる。すなわち、

$$\{O \subset G/H \mid \pi^{-1}(O) \text{ は } G \text{ の開集合}\}$$

を G/H の開集合系として定める。このとき、

$$G \times (G/H) \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$$

によって G が G/H の Lie 変換群になるような G/H の多様体構造が存在する。

定義 1.3.3 G を Lie 群とし H を G の閉 Lie 部分群とする。定理 1.3.2 で存在を示した多様体構造を持つ G/H を G の**等質空間**と呼ぶ。G は G/H に推移的に作用する Lie 変換群になっている。

定理 1.3.4 G は多様体 M に推移的に作用している Lie 変換群で G の連結成分の個数は可算であるとする。$p \in M$ をとり

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$$

とおくと、G_p は G の閉 Lie 部分群になる。さらに写像

$$\alpha : G/G_p \to M; gG_p \mapsto g \cdot p$$

は等質空間 G/G_p と M との間の微分同型写像になる。

定義 1.3.5 Riemann 計量を持つ Lie 群の任意の左移動が等長的になっているとき、その Riemann 計量を**左不変**という。任意の右移動も等長的になる左不変 Riemann 計量を、両側不変 Riemann 計量という。

命題 1.3.6 Lie 群 G の左不変 Riemann 計量の全体と、その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積の全体は一対一に対応する。さらに、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応する。

随伴表現 Ad の定め方 (定理 1.1.33) より、G の元 g に対して

$$\mathrm{Ad}(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}}) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$$

となり、G の両側不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積の全体は一対一に対応することがわかる。

定理 1.3.7 G をコンパクト Hausdorff 位相群とする。このとき、次の条件を満たす G 上の Radon 測度 μ_G が一意的に存在する。

(1) $\mu_G(G) = 1$

(2) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(gx)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(3) G 上の μ_G 可積分関数 f と $g \in G$ に対して

$$\int_G f(xg)d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

(4) G 上の μ_G 可積分関数 f に対して

$$\int_G f(x^{-1})d\mu_G(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

定義 1.3.8 定理 1.3.7 で定まるコンパクト Hausdorff 位相群 G 上の測度を、G の **Haar 測度**と呼ぶ。

注意 1.3.9 有限群 G に対して

$$\mu_G(X) = \frac{\#X}{\#G} \quad (X \subset G)$$

によって G 上の測度 μ_G を定める。G 上の関数 f に対して、

$$\int_G f d\mu_G = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} f(g)$$

となり、μ_G は定理 1.3.7 の条件を満たす。コンパクト Hausdorff 位相群上の Haar 測度は、有限群上の元の個数による測度の一般化とみることができる。

命題 1.3.10 (ρ, V) をコンパクト Hausdorff 位相群 G の表現とすると、ρ が直交（ユニタリ）表現になるような V の内積が存在する。

V の内積 A_0 を一つとっておく。任意の $u, v \in V$ について

$$\tilde{A}_0(u, v) = \int A_0(\rho(g)^{-1}(u), \rho(g)^{-1}(v)) d\mu_G g$$

によって $\tilde{A}_0$ を定めると、$\tilde{A}_0$ に関して ρ が直交 (ユニタリ) 表現になる。

系 1.3.11 コンパクト Lie 群には、両側不変 Riemann 計量が存在する。

例 1.3.12 直交群 $O(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^tXY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{o}(n))$$

によって $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^tXY) = \mathrm{tr}({}^t({}^tXY)) = \mathrm{tr}({}^tYX) = \langle Y, X \rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}({}^tXY) = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij}$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle\ ,\ \rangle$ が対称になることがわかる。任意の $g \in O(n)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} = gX\,{}^tg \qquad (X \in \mathfrak{o}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle &= \mathrm{tr}({}^t(gX\,{}^tg)gY\,{}^tg) = \mathrm{tr}(g\,{}^tX\,{}^tggY\,{}^tg) \\ &= \mathrm{tr}({}^tXY) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(O(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $O(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 1.3.13 ユニタリ群 $U(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。複素正方行列 X に対して $X^* = {}^t\bar{X}$ と書く。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(X^*Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{u}(n))$$

によって $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(X^*Y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}((X^*Y)^*) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(Y^*X) = \langle Y, X \rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X=(X_{ij}), Y=(Y_{ij})\in\mathfrak{u}(n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle &= \mathrm{Retr}(X^*Y)=\mathrm{Re}\sum_{i,j}\bar{X}_{ij}Y_{ij}=\sum_{i,j}\mathrm{Re}(\bar{X}_{ij}Y_{ij})\\ &=\sum_{i,j}(\mathrm{Re}X_{ij}\mathrm{Re}Y_{ij}+\mathrm{Im}X_{ij}\mathrm{Im}Y_{ij})\end{aligned}$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle\ ,\ \rangle$ が対称になることがわかる。任意の $g\in U(n)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X=gXg^{-1}=gXg^* \qquad (X\in\mathfrak{u}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y\rangle &= \mathrm{Retr}((gXg^*)^*gYg^*)=\mathrm{Retr}(gX^*g^*gYg^*)\\ &=\mathrm{Retr}(X^*Y)=\langle X,Y\rangle.\end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(U(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $U(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

例 1.3.14 シンプレクティック群 $Sp(n)$ の両側不変 Riemann 計量は以下のように具体的に構成できる。四元数正方行列 X に対して $X^*={}^t\bar{X}$ と書く。

$$\langle X,Y\rangle=\mathrm{Retr}(X^*Y) \qquad (X,Y\in\mathfrak{sp}(n))$$

によって $Sp(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(n)$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X,Y\rangle=\mathrm{Retr}(X^*Y)=\mathrm{Retr}((X^*Y)^*)=\mathrm{Retr}(Y^*X)=\langle Y,X\rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X=(X_{ab}), Y=(Y_{ab})\in\mathfrak{sp}(n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle &= \mathrm{Retr}(X^*Y)=\mathrm{Re}\sum_{a,b}\bar{X}_{ab}Y_{ab}=\sum_{a,b}\mathrm{Re}(\bar{X}_{ab}Y_{ab})\\ &=\sum_{a,b}(\mathrm{Re}X_{ab}\mathrm{Re}Y_{ab}+\mathrm{Im}_iX_{ab}\mathrm{Im}_iY_{ab}+\mathrm{Im}_jX_{ab}\mathrm{Im}_jY_{ab}+\mathrm{Im}_kX_{ab}\mathrm{Im}_kY_{ab})\end{aligned}$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle\ ,\ \rangle$ が対称になることがわかる。内積の不変性を示すために準備をしておく。四元数の積は可換ではないので、四元数正方行列 A,B に対して $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ は一般には成立しない。しかしながら、四元数 u,v に対して $\mathrm{Re}(uv)=\mathrm{Re}(vu)$ は成り立つので、$\mathrm{Retr}(AB)=\mathrm{Retr}(BA)$ は成立する。任意の $g\in Sp(n)$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X=gXg^{-1}=gXg^* \qquad (X\in\mathfrak{sp}(n))$$

となるので、

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle &= \mathrm{Retr}((gXg^*)^*gYg^*) = \mathrm{Retr}(gX^*g^*gYg^*)\\ &= \mathrm{Retr}(X^*Y) = \langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(Sp(n))$ 不変になり、命題 1.3.6 より、対応する $Sp(n)$ 上の Riemann 計量は両側不変になる。

定義 1.3.15 Riemann 計量を持つ等質空間 G/H とする。定理 1.3.2 で定まる G の G/H への作用が等長的になっているとき、その Riemann 計量を G **不変**という。

命題 1.3.16 G を Lie 群とし、H を G の閉 Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。

系 1.3.17 G を Lie 群とし、H を G のコンパクト Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

が存在し、

$$\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

を満たす。等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

1.4 Grassmann 多様体

1.1 節と同様、$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$ のいずれかに等しいものとする。自然数 r, n をとる。$r+n$ 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{r+n}$ 内の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ で表す。$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を **Grassmann 多様体**と呼ぶ。特に $r=1$ の場合に $G_1(\mathbb{K}^{1+n})$ は n **次元** $\mathbb{K}$ **射影空間**と呼び、$\mathbb{K}P^n$ とも書く。$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の元 V に対して

$$\phi_V : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to G_r(\mathbb{K}^{r+n})\ ;\ f \mapsto \mathrm{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\}$$

とおくと、$\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定める。係数体が $\mathbb{C}$ の場合、$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は複素多様体になる。係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に応じて $d = 1, 2, 4$ とすると、各 Grassmann 多様体の次元は

$$\dim G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) = drn$$

となる。$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の複素多様体としての次元は rn である。

証明 $V \in \dim G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$O_V = \{U \in G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \mid U \cap V^\perp = \{0\}\}$$

とおいて

$$(*) \qquad \phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) = O_V$$

が成り立つことを示す。$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ に対して $\mathrm{graph} f$ の任意の元は $v \in V$ によって $v + f(v)$ と表すことができる。$v + f(v) \in V^\perp$ とすると $v = 0$ となり、$f(v) = 0$ すなわち $v + f(v) = 0$ が成り立つ。よって

$$\phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \subset O_V$$

を得る。逆に $U \cap V^\perp = \{0\}$ を満たす $U \in \dim G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ をとる。$\mathbb{K}^{r+n}$ から V への直交射影 P_V の核は $V^\perp$ だから、P_V の U への制限 $P_V|_U : U \to V$ の核は $U \cap V^\perp = \{0\}$ となって $P_V|_U$ は単射になる。U と V は次元が等しいので $P_V|_U$ は線形同型写像になる。そこでその逆写像を $g : V \to U$ で表す。v に対して $g(v) \in U$ の V への直交射影が v になるので、$g(v) - v \in V^\perp$ が成り立つ。そこで $f(v) = g(v) - v$ とおくと、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ となり、

$$\mathrm{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\} = \{g(v) \mid v \in V\} = U.$$

したがって、

$$\phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \supset O_V$$

となり、$(*)$ が成り立つことがわかる。

$V, W \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \to \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

が微分同型写像になることを示す。まず

$$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp), \quad \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, W^\perp)$$

が開集合になることを示しておく。ϕ_V とグラフの定義より

$$\begin{aligned}\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid \mathrm{graph} f \cap W^\perp = \{0\}\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W(\mathrm{graph} f) = W\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W \circ (1_V + f) : \mathbb{K}\text{ 線形同型写像 }\}\end{aligned}$$

となり、$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ は写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\ ;\ f \mapsto P_W \circ (1_V + f)$$

の $\mathbb{K}$ 線形同型写像全体の逆像になる。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ において $\mathbb{K}$ 線形同型写像全体は開集合になり、$\phi_V^{-1}(O_V\cap O_W)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V^{\perp})$ の開集合になる。$\phi_W^{-1}(O_V\cap O_W)$ についても同様である。

$f\in\phi_V^{-1}(O_V\cap O_W)$ に対して $\phi_V(f)=\mathrm{graph}f$ となり、上の議論より

$$P_W|_{\mathrm{graph}f}:\mathrm{graph}f\to W$$

の逆写像 $(P_W|_{\mathrm{graph}f})^{-1}$ によって $\phi_W(\mathrm{graph}f)=(P_W|_{\mathrm{graph}f})^{-1}-1_W$ となる。よって

$$\phi_W^{-1}\circ\phi_V(f)=(P_W|_{\mathrm{graph}f})^{-1}-1_W.$$

これより

$$\phi_W^{-1}\circ\phi_V:\phi_V^{-1}(O_V\cap O_W)\to\phi_W^{-1}(O_V\cap O_W)$$

が微分同型写像になることがわかる。

以上で $\{\phi_V\mid V\in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定めることがわかる。係数体が $\mathbb{C}$ の場合、$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は複素多様体になることもわかる。

Grassmann 多様体は Riemann 等質空間になり、コンパクト線形 Lie 群の商空間による表示を持つことを示す。

$$U_{\mathbb{K}}(m)=\begin{cases}O(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{R}),\\ U(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{C}),\\ Sp(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{H}),\end{cases}\qquad SU_{\mathbb{K}}(m)=\begin{cases}SO(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{R}),\\ SU(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{C}),\\ Sp(m) & (\mathbb{K}=\mathbb{H})\end{cases}$$

とおく。これらはすべて線形 Lie 群になる。まず、$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。$\mathbb{K}^{r+n}$ の標準的正規直交基底を $e_1,\dots,e_{r+n}$ で表す。$\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{H}$ の場合はそれぞれ対応する Hermite 内積に関するユニタリ基底とする。$o=\mathbb{K}^r$ を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の原点とする。任意の $V\in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して、V の正規直交基底 $v_1,\dots,v_r$ をとる。これを $\mathbb{K}^{r+n}$ の正規直交基底 $v_1,\dots,v_{r+n}$ に延長する。$e_1,\dots,e_{r+n}$ を $v_1,\dots,v_{r+n}$ に写す $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の元 u をとると、$uo=V$ が成り立つ。したがって、$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は推移的になる。$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の商空間として表すために

$$K=\{k\in U_{\mathbb{K}}(r+n)\mid ko=o\}$$

を求める。$k_{11}\in M_{r,r}(\mathbb{K}),k_{12}\in M_{r,n}(\mathbb{K}),k_{21}\in M_{n,r}(\mathbb{K}),k_{22}\in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$k=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}\in K$$

とすると、$1\le i\le r$ に対して $ke_i\in o$ となるので、$k_{21}=0$ を得る。$ko=o$ より $ko^{\perp}=o^{\perp}$ となり、$r+1\le j\le r+n$ に対して $ke_j\in o^{\perp}$ となる。よって $k_{12}=0$ を得る。これより

$$K\subset\left\{\begin{bmatrix}k_{11}&0\\0&k_{22}\end{bmatrix}\in U_{\mathbb{K}}(r+n)\,\middle|\,k_{11}\in M_{\mathbb{K}}(r),k_{22}\in M_{\mathbb{K}}(n)\right\}.$$

ここで右辺において $k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ となることがわかる。そこで、

$$U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \middle| k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n) \right\}$$

とおくと、上で示したことは $K \subset U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ である。逆に $U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ の元が o を固定することは形からわかるので、$K = U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ が成り立つ。以上り $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ と微分同型になる。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合に、$SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。すでに $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の作用は推移的であることを示したので、任意の $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対してある $u \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が存在して $V = uo$ が成り立つ。$u_z = \mathrm{diag}(z, 1_n), z \in U_{\mathbb{K}}(1)$ とすると $u_z \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ となり $\det u_z = z$ が成り立つ。$\det u \in U_{\mathbb{K}}(1)$ となるので、$z = \det u^{-1}$ とすると $uu_z \in SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ を得る。よって、$V = uo = uu_z o$ となり、$SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用する。o を固定する $SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ の部分群は

$$S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) = (U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) \cap SU(r+n)$$

になる。よって $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $SU_{\mathbb{K}}(r+n)/S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ と微分同型になる。

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変 Riemann 計量を定めるために系 1.3.17 を利用する。$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n)$ の直和分解 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{m}$ を

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{array} \right] \middle| X_{11} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r), X_{22} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) \right\},$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \middle| X \in M_{r,n}(\mathbb{K}) \right\}$$

によって定める。$\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ が成り立つことが次の計算からわかる。

$$k = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \in U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(k) \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right]^* \\ = \left[\begin{array}{cc} 0 & k_{11} X k_{22}^* \\ -k_{22} X^* k_{11}^* & 0 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} 0 & k_{11} X k_{22}^* \\ -(k_{11} X k_{22}^*)^* & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

そこで、

$$\mathfrak{m} \ni \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow X \in M_{r,n}(\mathbb{K})$$

によって $\mathfrak{m}$ と $M_{r,n}(\mathbb{K})$ を同一視すると、$\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r)\times U_{\mathbb{K}}(n))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\cdot X = k_{11}Xk_{22}^*$$

による $M_{r,n}(\mathbb{K})$ への作用と同値になる。

$$\langle X,Y\rangle = \mathrm{Retr}(X^*Y) \qquad (X,Y\in M_{r,n}(\mathbb{K}))$$

によって $M_{r,n}(\mathbb{K})$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X,Y\rangle = \mathrm{Retr}(X^*Y) = \mathrm{Retr}((X^*Y)^*) = \mathrm{Retr}(Y^*X) = \langle Y,X\rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X=(X_{ab}), Y=(Y_{ab})\in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle &= \mathrm{Retr}(X^*Y) = \mathrm{Re}\sum_{a,b}\bar{X}_{ab}Y_{ab} = \sum_{a,b}\mathrm{Re}(\bar{X}_{ab}Y_{ab}) \\ &= \sum_{a,b}(\mathrm{Re}X_{ab}\mathrm{Re}Y_{ab} + \mathrm{Im}_iX_{ab}\mathrm{Im}_iY_{ab} + \mathrm{Im}_jX_{ab}\mathrm{Im}_jY_{ab} + \mathrm{Im}_kX_{ab}\mathrm{Im}_kY_{ab})\end{aligned}$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle\ ,\ \rangle$ が対称になることがわかる。$k_{11}\in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22}\in U_{\mathbb{K}}(n)$ と $X,Y\in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して、

$$\begin{aligned}\langle k_{11}Xk_{22}^*, k_{11}Yk_{22}^*\rangle &= \mathrm{Retr}((k_{11}Xk_{22}^*)^*k_{11}Yk_{22}^*) = \mathrm{Retr}(k_{22}X^*k_{11}^*k_{11}Yk_{22}^*) \\ &= \mathrm{Retr}(k_{22}X^*Yk_{22}^*) = \mathrm{Retr}(X^*Y) = \langle X,Y\rangle.\end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r)\times U_{\mathbb{K}}(n))$ 不変になり、系 1.3.17 より、対応する $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r)\times U_{\mathbb{K}}(n)$ 上の Riemann 計量は $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変になる。

第2章　Riemann対称空間

2.1　Riemann対称空間

定義 2.1.1 二乗が恒等変換になる変換を**対合的**という。M を Riemann 多様体とする。任意の $x \in M$ に対して M の対合的等長変換 s_x が存在して、x は s_x の孤立不動点になるとき、M を **Riemann 対称空間**と呼ぶ。s_x を**点対称**と呼ぶ。

x が s_x の孤立不動点になることから、x のある近傍で s_x の不動点は x のみになる。これと $s_x^2 = 1_M$ をあわせると $(ds_x)_x = -1$ となる。特に s_s は x を通る測地線を逆向きに変換する。

定理 2.1.2 連結 Riemann 対称空間は完備 Riemann 多様体になる。等長変換全体のなす群は推移的に作用し、Lie 変換群になる。特に、Riemann 等質空間になる。

以後連結 Riemann 対称空間を単に対称空間と呼ぶことにする。集合 X の変換 $\varphi : X \to X$ に対して、φ の不動点全体を $F(\varphi, X)$ で表す。

定理 2.1.3 M を対称空間とする。M の等長変換全体の単位連結成分を G で表す。$o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ と定める。$\sigma : G \to G$; $g \mapsto s_o g s_o$ は G の対合的自己同型写像になり

$$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$$

を満たす。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$、K の Lie 環を $\mathfrak{k}$ とすると

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}$$

が成り立つ。$d\sigma$ の -1 固有空間を $\mathfrak{m}$ とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

は直和分解になる。$\pi : G \to M$; $g \mapsto go$ とすると次が成り立つ。

$$d\pi_e : \mathfrak{m} \to T_o M : \text{線形同型},$$
$$\mathrm{Exp}_o(d\pi_e(X)) = (\exp X)o \quad (X \in \mathfrak{m}).$$

以下、$d\pi_e : \mathfrak{m} \to T_oM$ によって $\mathfrak{m}$ と T_oM を同一視する。

例 2.1.4 $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$s_V = 1_V - 1_{V^\perp} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

によって s_V を定める。s_V の $\mathbb{K}^{r+n}$ への作用は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用を誘導する。1.4 節で定めた Riemann 計量に関して s_V の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換になり、$s_V^2 = 1$ を満たし、V は s_V の孤立不動点になるることがわかる。これより $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間になる。

証明　1.4 節で示したように $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換になるので、特に s_V の作用も等長変換になる。s_V の形より $s_V^2 = 1$ が成り立つこともわかる。O_V における s_V の不動点は V だけであることを証明する。O_V の元 x をとりその基底を直交直和分解 $\mathbb{K}^{r+n} = V + V^\perp$ に従って $v_1 + v_1^\perp, \ldots, v_r + v_r^\perp$ と表示する。ここで、$v_i \in V, v_i^\perp \in V^\perp$ である。$P_V|_x : x \to V$ は線形同型になるので、$v_1, \ldots, v_r$ は V の基底になる。$s_V(x) = x$ と仮定すると

$$v_i = \frac{1}{2}(v_i + v_i^\perp + s_V(v_i + v_i^\perp)) \in x$$

となり、$x = \{v_1, \ldots, v_r\}_{\mathbb{K}} = V$ が成り立つ。したがって、O_V における s_V の不動点は V だけになり、特に V は s_V の孤立不動点になる。以上で $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間になることがわかった。

1.4 節で示したように Grassmann 多様体は $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ と等質空間として表示できる。定理 2.1.3 で定めた対合的自己同型 $\sigma : G \to G\ ;\ g \mapsto s_o g s_o$ は

$$\sigma(g) = \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \qquad (g \in U_{\mathbb{K}}(r+n)).$$

$g_{11} \in M_{r,r}(\mathbb{K}), g_{12} \in M_{r,n}(\mathbb{K}), g_{21} \in M_{n,r}(\mathbb{K}), g_{22} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

とすると、

$$\sigma(g) = \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22}. \end{bmatrix}$$

したがって、

$$F(\sigma, U_{\mathbb{K}}(r+n)) = U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$$

が成り立つ。σ の微分は

$$\begin{aligned} d\sigma(X) &= \frac{d}{dt}\sigma(\exp tX)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} \exp tX \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これより、$d\sigma$ の ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{m},$$
$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, X \in M(r,n;\mathbb{K}) \right\}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) &= \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) \mid d\sigma(X) = X\}, \\ \mathfrak{m} &= \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) \mid d\sigma(X) = -X\}. \end{aligned}$$

$d\pi_e : \mathfrak{m} \to T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+n}))$ によって同一視する。$r \leq n$ のとき、

$$X = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & \theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \theta_r & \\ \hline -\theta_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -\theta_r & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}\right]$$

とおいて $\mathrm{Exp}X = (\exp X)o$ を求める。行列の指数関数の定義より

$$\exp X = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \cos\theta_1 & & & \sin\theta_1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \cos\theta_r & & & \sin\theta_r & \\ \hline -\sin\theta_1 & & & \cos\theta_1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & -\sin\theta_r & & & \cos\theta_r & \\ \hline & & & & & & 1_{r-n} \end{array}\right]$$

となることがわかる。これより

$$\begin{aligned} (\exp X)e_1 &= \cos\theta_1 e_1 + \sin\theta_1 e_{r+1}, \\ &\vdots \\ (\exp X)e_r &= \cos\theta_r e_r + \sin\theta_r e_{2r} \end{aligned}$$

となるので、o を始点とし初速度ベクトル X の測地線は

$$(\exp tX)o = \{\cos t\theta_1 e_1 + \sin t\theta_1 e_{r+1}, \ldots, \cos t\theta_r e_r + \sin t\theta_r e_{2r}\}_{\mathbb{K}}$$

となる。

定義 2.1.5 G を連結 Lie 群とし、K を G の閉部分群とする。G の対合的自己同型 $\sigma : G \to G$ が存在して、$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$ を満たし、$\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトになるとき、(G, K) を **Riemann 対称対**と呼ぶ。

$\mathrm{Ad}_G(H)$ がコンパクトになるという条件は不変内積の存在を保証するためにある。

定理 2.1.6 (G, K) を Riemann 対称対とする。$\pi : G \to G/K$ で自然な射影を表し、$o = \pi(e)$ とする。Riemann 対称対を定める対合的自己同型を $\sigma : G \to G$ で表す。このとき、G 不変 Riemann 計量に対して G/K は対称空間になり、$g \in G$ の G/K への作用を $\tau(g)$ で表すと次の等式が成り立つ。

$$s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma, \quad \tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o.$$

2.2 曲率と全測地的部分多様体

Riemann 多様体 M の部分多様体 N が次の条件を満たすとき、N を M の**全測地的部分多様体**という。N のどの測地線も M の測地線になる。Euclid 空間内の次元の低い Euclid 空間や球面内の大円などは全測地的部分多様体の例である。

定理 2.2.1 (G, K) を Riemann 対称対とし、R を対称空間 G/K の曲率テンソルとする。Riemann 対称対から定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。$\mathfrak{m} \cong T_o(G/K)$ を同一視する。このとき、次の等式が成り立つ。

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{m})$$

定義 2.2.2 Lie 環の部分空間 $\mathfrak{n}$ が

$$X, Y, Z \in \mathfrak{n} \Rightarrow [[X, Y], Z] \in \mathfrak{n}$$

を満たすとき、$\mathfrak{n}$ を **Lie 三対系**と呼ぶ。

Riemann 対称対から定まる Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ について、

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$$

が成り立つ。これは $d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が Lie 環の対合的自己同型であり、$\mathfrak{k}$ が $d\sigma$ の $+1$ 固有空間、$\mathfrak{m}$ が $d\sigma$ の -1 固有空間であることからわかる。どれも同様なので $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ を示しておく。$X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して

$$d\sigma([X, Y]) = [d\sigma X, d\sigma Y] = [-X, -Y] = [X, Y]$$

となり、$[X, Y] \in \mathfrak{k}$ を得る。

上記のブラケット積に関する包含関係から

$$[[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$$

が成り立ち、$\mathfrak{m}$ は Lie 三対系になることがわかる。

定理 2.2.3 (G, K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。$\mathfrak{m} \cong T_o(G/K)$ を同一視する。o を含む G/K の全測地的部分多様体 N に対して T_oN は $\mathfrak{m}$ に含まれる Lie 三対系になる。逆に $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{m}$ に含まれる Lie 三対系とすると、$\mathrm{Exp}_o\mathfrak{n}$ は o を含む G/K の全測地的部分多様体になる。さらに N が平坦であることと、T_oN が $\mathfrak{m}$ の可換部分空間であることは同値になる。また、N が極大平坦全測地的部分多様体であることと、T_oN が $\mathfrak{m}$ に含まれる極大可換部分空間であることは同値になる。

$n < m$ のとき自然な包含関係 $\mathbb{K}^{r+n} \subset \mathbb{K}^{r+m}$ は包含関係 $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{K}^{r+m})$ を導く。それぞれの Lie 環の分解を

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+m) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(m) + \mathfrak{m}$$

とする。同一視 $\mathfrak{n} = T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+n}))$ と $\mathfrak{m} = T_o(G_r(\mathbb{K}^{r+m}))$ により $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{m}$ の部分空間とみなせる。このとき、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{m}$ 内の $r+n$ 次正方行列の成分のみある行列全体になり、$[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ が成り立つことがわかる。さらに $\mathrm{Exp}_o(\mathfrak{n}) = G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ が成り立ち、$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+m})$ の全測地的部分多様体になる。

$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の元 V に $V^{\mathbb{C}} = V + iV \subset \mathbb{C}^{r+n}$ を対応させることにより、$G_r(\mathbb{R}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ とみなせる。それぞれの Lie 環の分解を

$$\mathfrak{o}(r+n) = \mathfrak{o}(r) \times \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{u}(r+n) = \mathfrak{u}(r) \times \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}$$

とする。同一視 $\mathfrak{n} = T_o(G_r(\mathbb{R}^{r+n}))$ と $\mathfrak{m} = T_o(G_r(\mathbb{C}^{r+n}))$ により $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{m}$ の部分空間とみなせる。このとき、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{m}$ 内の実行列全体になり、$[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ が成り立つことがわかる。さらに $\mathrm{Exp}_o(\mathfrak{n}) = G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ が成り立ち、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になる。これは包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ を利用している。

包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ と $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ を利用すると、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{H}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になること、$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{H}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になることがわかる。

定理 2.2.4 (G,K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ とする。$\mathfrak{m}\cong T_o(G/K)$ を同一視する。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間とする。$A=\mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}$ とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\mathfrak{m}=\bigcup_{k\in K}\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a},\quad G/K=\bigcup_{k\in K}kA.$$

標準形の観点からは上の定理の主張は次のように言い換えることができる。任意の $X\in\mathfrak{m}$ に対してある $k\in K$ が存在して $\mathrm{Ad}(k)X\in\mathfrak{a}$ が成り立つ。任意の $x\in G/K$ に対してある $k\in K$ が存在して $kx\in A$ が成り立つ。

$r\le n$ のとき Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の場合を考える。$\mathfrak{m}$ を $M_{r,n}(\mathbb{K})$ と同一視する。

$$\mathfrak{a}=\left\{\left[\begin{array}{ccc|c}\theta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \theta_r & \end{array}\right]\;\middle|\;\theta_1,\dots,\theta_r\in\mathbb{R}\right\}$$

は極大可換部分空間になることがわかる。さらに定理 2.2.4 の主張を標準形の観点から次のように言い換えることができる。任意の $X\in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対してある $(k_11,k_22)\in U_{\mathbb{K}}(r)\times U_{\mathbb{K}}(n)$ が存在して $k_{11}Xk_{22}^*\in\mathfrak{a}$ が成り立つ。これは行列の標準形に他ならない。

行列群による対称空間に定理 2.2.4 を適用すると多くの行列の標準形が得られる。

定義 2.2.5 定理 2.2.4 より極大可換部分空間同士は $\mathrm{Ad}(K)$ の作用によって共役になり、特にその次元は極大可換部分空間のとり方に依存しない。そこで、$\mathrm{rk}(G/K)=\dim\mathfrak{a}$ とおき、これを G/K の**階数**と呼ぶ。

上の Grassmann 多様体の例より、$r\le n$ のとき $\mathrm{rk}G_r(\mathbb{K}^{r+n})=r$ である。特に射影空間の階数は 1 になる。射影空間の場合、

$$\exp t\left[\begin{array}{cc|c} & 1 & \\ -1 & & \\ \hline & & \end{array}\right]o=\{\cos te_1+\sin te_2\}_{\mathbb{K}}$$

は周期 π の閉測地線になる。$U_{\mathbb{K}}(1)\times U_{\mathbb{K}}(n)$ の作用はすべての接ベクトルの方向を移し合うため、o を出発するすべての測地線はこの閉測地線と移り合う。したがって、すべての測地線は同じ長さの閉測地線になる。

$\mathbb{C}^n$ 内の実 n 次元部分空間 V が $V\perp iV$ を満たすとき、V を **Lagrange 部分空間**と呼ぶ。$\mathbb{C}^n$ 内の Lagrange 部分空間全体を $\mathrm{Lag}(n)$ で表す。$\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$ は Lagrange 部分空間の例である。$U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用は $\mathrm{Lag}(n)$ への作用を誘導し、この作用は推移的であることがわかる。さらに、

$$\{u\in U(n)\mid u\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\}=O(n)$$

となり、$\mathrm{Lag}(n)$ は $U(n)/O(n)$ と微分同型になる多様体構造を持つことがわかる。

$$\sigma : U(n) \to U(n)\ ;\ u \mapsto \bar{u}$$

によって自己同型 σ を定めると、$F(\sigma, U(n)) = O(n)$ が成り立ち、$(U(n), O(n))$ は Riemann 対称対になる。したがって、$\mathrm{Lag}(n) \cong U(n)/O(n)$ は対称空間になる。

$$d\sigma : \mathfrak{u}(n) \to \mathfrak{u}(n)\ ;\ X \mapsto \bar{X}$$

となり、$d\sigma$ の $+1$ 固有空間は $\mathfrak{o}(n)$ であり、-1 固有空間は

$$\mathfrak{m} = \{iX \mid X \text{ は実対称行列 }\}.$$

$\mathfrak{u}(n)$ の Riemann 対称対から定まる直和分解は $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}$ となる。

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間になることがわかる。定理 2.2.4 より

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{g \in O(n)} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{a} = \bigcup_{g \in O(n)} g\mathfrak{a}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形の観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次実対称行列 X に対してある $g \in O(n)$ が存在して gXg^{-1} は対角行列になる。定理 2.2.4 からは

$$\mathrm{Lag}(n) = \bigcup_{g \in O(n)} g\mathrm{Exp}(\mathfrak{a})\mathbb{R}^n$$

もわかる。ここで、

$$g\mathrm{Exp} \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{bmatrix} \mathbb{R}^n = g\{e^{i\theta_1}e_1, \dots, e^{i\theta_n}e_n\}_{\mathbb{R}} = \{e^{i\theta_1}ge_1, \dots, e^{i\theta_n}ge_n\}_{\mathbb{R}}$$

となるので、次の主張を得る。任意の $V \in \mathrm{Lag}(n)$ に対してある $\theta_1, \dots, \theta_n$ と $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在して次が成り立つ。

$$V = \{e^{i\theta_1}v_1, \dots, e^{i\theta_n}v_n\}_{\mathbb{R}}.$$

これは Lagrange 部分空間の標準形とみなすことができる。

2.3　コンパクト Lie 群

この節ではコンパクト連結 Lie 群が対称空間とみなせることを示し、Lie 群としての構造と対称空間としての構造の間の関係を明らかにする。

G をコンパクト連結 Lie 群とする。$\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ によって写像 $\sigma : G \times G \to G \times G$ を定めると、σ は対合的自己同型写像になる。

$$\Delta G = \{(g, g) \mid g \in G\}$$

によって対角線集合 ΔG を定めると、ΔG は G と Lie 群として同型になり特にコンパクトになる。さらに $F(\sigma, G \times G) = \Delta G$ が成り立つ。したがって、$(G \times G, \Delta G)$ は Riemann 対称対になる。この Riemann 対称対から定まる対称空間 $G \times G/\Delta G$ は

$$\iota : G \times G/\Delta G \to G\ ;\ (g_1, g_2)\Delta G \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

によって G と微分同型になる。

証明　$(g_1, g_2)\Delta G = (g_1 g, g_2 g)\Delta G$ であり、$g_1 g(g_2 g)^{-1} = g_1 g g^{-1} g_2 = g_1 g_2^{-1}$ となる。よって、ι は well-defined である。

$\iota(g_1, g_2) = \iota(g_1', g_2')$ とすると、$g_1 g_2^{-1} = g_1'(g_2')^{-1}$ が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}(g_1, g_2)\Delta G &= (g_1 g_2^{-1}, g_2 g_2^{-1})\Delta G = (g_1 g_2^{-1}, e)\Delta G = (g_1'(g_2')^{-1}, e)\Delta G \\ &= (g_1', g_2')\Delta G\end{aligned}$$

となり、ι は単射になる。任意の $g \in G$ に対して $\iota((g, e)\Delta G) = g$ となり、ι は全射になることもわかる。ι とその逆写像 $\iota^{-1}(g) = (g, e)\Delta G$ はともに C^∞ 級写像になり、ι が微分同型であることがわかる。

この微分同型によって両者を同一視する。$G \times G$ の $G \times G/\Delta G$ への作用は ι によって G への作用を誘導する。

$$\begin{aligned}\iota((g_1, g_2)(x_1, x_2)\Delta G) &= \iota((g_1 x_1, g_2 x_2)\Delta G) = g_1 x_1 (g_2 x_2)^{-1} \\ &= g_1 x_1 x_2^{-1} g_2^{-1} = g_1 \iota((x_1, x_2)\Delta G) g_2^{-1}\end{aligned}$$

となるので、$G \times G$ の G への作用は

$$(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1} \quad ((g_1, g_2) \in G \times G,\ x \in G)$$

となる。これより、$G \times G/\Delta G$ の $G \times G$ 不変 Riemann 計量は G の両側不変 Riemann 計量に対応する。自然な射影 $G \times G \to G \times G/\Delta G$ と微分同型 ι の合成を π で表すと

$$\pi : G \times G \to G\ ;\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

となる。定理 2.1.6 より、G の単位元 e における点対称 s_e は $s_e \circ \pi = \pi \circ \sigma$ を満たす。$(g_1, g_2) \in G \times G$ に対して、

$$s_e(\pi(g_1, g_2)) = s_e(g_1 g_2^{-1}), \quad \pi(\sigma(g_1, g_2)) = \pi(g_2, g_1) = g_2 g_1^{-1} = (g_1 g_2^{-1})^{-1}.$$

したがって、$x \in G$ に対して $s_e(x) = x^{-1}$ が成り立つ。一般の $g \in G$ における点対称は $s_g(x) = gx^{-1}g$ となることが次の計算よりわかる。

$$s_g(x) = L_g \circ s_e \circ L_g^{-1}(x) = L_g \circ s_e(g^{-1}x) = L_g((g^{-1}x)^{-1}) = L_g(x^{-1}g) = gx^{-1}g.$$

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表すと $G \times G$ の Lie 環は $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ になる。

$$d\sigma(X_1, X_2) = (X_2, X_1) \quad ((X_1, X_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$$

となるので、Riemann 対称対に対応する直和分解 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は

$$\mathfrak{k} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{m} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

で与えられる。$d\pi : \mathfrak{m} \to T_eG$ を求めておく。$X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$d\pi(X, 0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp tX, e) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tX = X,$$
$$d\pi(0, X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(e, \exp tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp tX)^{-1} = -X$$

となるので、

$$d\pi(X, Y) = X - Y \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を得る。特に

$$d\pi(X, -X) = 2X \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

他方、定理 2.1.3 より $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}_e(d\pi(X, -X)) &= \pi(\exp_{G\times G}(X, -X)) = \pi(\exp X, \exp(-X)) \\ &= \exp X(\exp(-X))^{-1} = \exp 2X.\end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{Exp}_e 2X = \exp 2X$ すなわち

$$\mathrm{Exp}_e X = \exp X \quad (X \in \mathfrak{g})$$

を得る。

$\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ をとる。

$$\mathfrak{a} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{t}\}$$

は $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間になる。したがって、定理 2.2.4 より

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in \Delta G} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

を得る。$k = (g, g)$ とすると

$$\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \{(\mathrm{Ad}(g)X, -\mathrm{Ad}(g)X) \mid X \in \mathfrak{t}\}$$

となるので、

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$$

を得る。$T = \mathrm{Exp}_e(\mathfrak{a})$ とおくと、$T = \exp \mathfrak{t}$ が成り立つ。T を**極大トーラス**と呼ぶ。$G \times G$ の $G \times G/\Delta G$ への作用を G への作用とみなすと

$$(g_1, g_2)(x, e)\Delta G = (g_1 x, g_2)\Delta \leftrightarrow g_1 x g_2^{-1}$$

となる。したがって、

$$G = \bigcup_{k \in \Delta G} k \cdot T = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}.$$

$SO(n)$ の場合

$$X(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(2)$$

とおく。$r = [n/2]$ とする。

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} X(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & X(\theta_r) & \\ & & & (0) \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{o}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。上の行列の右下の (0) は n が奇数の場合に 0 があり、n が偶数の場合には何もないことを表している。これより

$$\mathfrak{o}(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in SO(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次交代行列 $X \in \mathfrak{o}(n)$ に対してある $g \in SO(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$$

とおくと $\exp X(\theta) = R(\theta)$ となり、

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_r) & \\ & & & (1) \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong SO(2) \times \cdots \times SO(2)$$

が成り立つ。$\mathfrak{t}$ の場合と同様に、上の行列の右下の (1) は n が奇数の場合に 0 があり、n が偶数の場合には何もないことを表している。

$$SO(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次回転行列 $x \in SO(n)$ に対してある $g \in SO(n)$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ が成り立つ。

$U(n)$ の場合

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{u}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。これより

$$\mathfrak{u}(n) = \bigcup_{g \in U(n)} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in U(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次交代 Hermite 行列 $X \in \mathfrak{u}(n)$ に対してある $g \in U(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

となり

$$U(n) = \bigcup_{g \in U(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次ユニタリ行列 $x \in U(n)$ に対してある $g \in U(n)$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ が成り立つ。

$Sp(n)$ の場合

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathfrak{sp}(n)$ の極大可換 Lie 部分環になることがわかる。これより

$$\mathfrak{sp}(n) = \bigcup_{g \in Sp(n)} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \bigcup_{g \in Sp(n)} g\mathfrak{t}g^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次四元数交代 Hermite 行列 $X \in \mathfrak{sp}(n)$ に対してある $g \in Sp(n)$ が存在して $gXg^{-1} \in \mathfrak{t}$ が成り立つ。

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

となり

$$Sp(n) = \bigcup_{g \in Sp(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これを行列の標準形に関する観点から言い換えると次の主張になる。任意の n 次シンプレクティック行列 $x \in Sp(n)$ に対してある $g \in Sp(n)$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ が成り立つ。

第3章　複素半単純Lie環

対称空間の曲率テンソルはLie環のブラケット積で表示できることから、対称空間の局所的性質とLie環の構造の間には密接な関係がある。さらに対称空間の分類とLie環の分類の間にも密接な関係がある。そこで、この章ではその準備として複素半単純Lie環の構造について解説する。

3.1　半単純Lie環

定義1.1.4では係数体が実数の場合のLie環を定義したが、この節以降では係数体を複素数にしたLie環も扱う。それらを区別するために定義1.1.4で定義したLie環を**実Lie環**と呼ぶことにする。

定義 3.1.1 複素ベクトル空間$\mathfrak{g}$に複素双線形写像$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$があり、すべての元$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

が成り立つとき、$\mathfrak{g}$を**複素Lie環**と呼ぶ。

実Lie環に対して定義したLie部分環、準同型写像、同型写像などの概念は係数体が複素数の場合も同様に使うことにする。この節で扱うLie環は特に断わらないかぎり実または複素有限次元Lie環である。実と複素の特定していないでただLie環という場合は、実と複素の両方のLie環で成り立つ事項を扱かっているものとする。

定義 3.1.2 Lie環$\mathfrak{g}$のベクトル部分空間$\mathfrak{h}$が、

$$X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすとき、$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{g}$の**イデアル**と呼ぶ。$\mathfrak{g}$の次元が2以上であって、自分自身と$\{0\}$以外のイデアルを持たないとき、$\mathfrak{g}$を**単純Lie環**という。単純Lie環の直和になるLie環を**半単純Lie環**という。Lie群のLie環が単純になるとき、そのLie群を**単純Lie群**という。同様に、Lie群のLie環が半単純になるとき、そのLie群を**半単純**という。

定義 3.1.3 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** B を次で定義する。

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \quad (X,Y \in \mathfrak{g}).$$

B は対称になる。さらに B は $\mathfrak{g}$ の自己同型に関して不変になることがわかる。

定理 3.1.4 Lie 環が半単純になるための必要十分条件は、その Killing 形式が非退化になることである。

例 3.1.5 $\mathfrak{o}(3)$ について考える。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{o}(3)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。これより $\mathrm{ad}(e_i)(1 \leq i \leq 3)$ の基底 e_1, e_2, e_3 に関する表現行列は

$$\mathrm{ad}(e_1) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_2) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_3) : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になり

$$\begin{aligned} &B(e_1, e_1) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(e_1)\mathrm{ad}(e_1)) = -2,\ B(e_1, e_2) = B(e_2, e_1) = 0, \\ &B(e_1, e_3) = B(e_3, e_1) = 0,\ B(e_2, e_2) = -2,\ B(e_2, e_3) = 0,\ B(e_3, e_3) = -2. \end{aligned}$$

したがって B の e_1, e_2, e_3 に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となり、B は非退化になる。したがって、定理 3.1.3 より $\mathfrak{o}(3)$ は半単純になる。実は単純になることもわかる。

例 3.1.6 $\mathfrak{su}(2)$ について考える。

$$e_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の基底になり

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

が成り立つ。これより $\mathfrak{su}(2)$ は $\mathfrak{o}(3)$ と Lie 環として同型になることがわかる。したがって、$\mathfrak{su}(2)$ も単純 Lie 環になる。さらに

$$\mathfrak{su}(2) + \sqrt{-1}\mathfrak{su}(2) = \sum_{i=1}^{3}(\mathbb{R}e_i + \mathbb{R}\sqrt{-1}e_i) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

が成り立ち、$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は $\mathfrak{su}(2)$ の複素化とみなせる。一般に、実 Lie 環のベクトル空間としての複素化には自然に複素 Lie 環の構造が定まる。Lie 環の複素化の定義は定義 3.4.6 で与える。$\mathfrak{su}(2)$ は最初から $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に含まれているため、複素化を考えやすい。e_1, e_2, e_3 は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底にもなり、$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の Killing 形式も非退化になることがわかる。したがって、定理 3.1.3 より $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は半単純になる。実は単純になることもわかる。

上記の例ではコンパクト単純 Lie 群 $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の複素化が複素単純 Lie 環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ になっている。この現象はこの場合にかぎらず一般的に成り立つ。これについてはあとで述べる。さらにこの現象は後で述べる単純 Lie 環の分類やコンパクト型 Rimann 対称空間と非コンパクト型 Riemann 対称空間の双対性と深く関係している。

3.2　Cartan 部分環とルート空間分解

定義 3.2.1 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ が次の条件を満たすとき、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分環**と呼ぶ。

(1) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環である。

(2) 各 $H \in \mathfrak{h}$ に対して、$\mathrm{ad}H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は対角化可能である。

定理 3.2.2 複素半単純 Lie 環は Cartan 部分環を持つ。

$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とし、$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環とする。各 $H \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は対角化可能である。さらに、$H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ をとると

$$\mathrm{ad}H_1\mathrm{ad}H_2 - \mathrm{ad}H_2\mathrm{ad}H_1 = [\mathrm{ad}H_1, \mathrm{ad}H_2] = \mathrm{ad}[H_1, H_2] = 0$$

となるので、$\mathrm{ad}H_1$ と $\mathrm{ad}H_2$ は可換になる。よって、これらは同時対角化可能である。同様に、$\{\mathrm{ad}H \mid H \in \mathfrak{h}\}$ はすべて同時対角化可能になる。この状況は次のルー

ト空間で記述することでより明確に表現できる。ベクトル空間 V の双対空間を V^* で表す。$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (H \in \mathfrak{h})\}$$

によって $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート空間** $\mathfrak{g}_\alpha$ を定める。$\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\}$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ のとき、α を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート**と呼び、その全体を Δ で表し**ルート系**と呼ぶ。

定理 3.2.3 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して以下が成り立つ。

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ は直和になる。

(2) 各 $\alpha \in \Delta$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

(3) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立ち、$\alpha + \beta \in \Delta$ を満たすときは、$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つ。

(4) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B を $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ に制限すると非退化になる。$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$B(H, H_\alpha) = \alpha(H) \quad (H \in \mathfrak{h})$$

を満たす $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ が一意的に存在する。

(5) $\alpha \in \Delta$ に対して $-\alpha \in \Delta$ となり、

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha, \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0.$$

例 3.2.4 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の Lie 部分環を

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \,\middle|\, z_i \in \mathbb{C},\ z_1 + \cdots + z_n = 0 \right\}$$

によって定めると、$\mathfrak{h}$ は可換 Lie 部分環になる。$1 \leq i \neq j \leq n$ に対して $E_{i,j}$ で (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は 0 の n 次正方行列を表す。

$$H = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}$$

に対して

$$[H, E_{i,j}] = HE_{i,j} - E_{i,j}H = (z_i - z_j)E_{i,j}.$$

よって、各 $E_{i,j}$ は $\{\mathrm{ad}H \mid H \in \mathfrak{h}\}$ の同時固有ベクトルになっている。これをふまえて $e_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$e_i \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} = z_i$$

によって定め、$\alpha_{i,j} = e_i - e_j$ とおくと、

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid [H, X] = \alpha_{i,j}(H)X \ (H \in \mathfrak{h})\} = \mathbb{C}E_{i,j}$$

が成り立つ。さらに

$$(*) \qquad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j} = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}}$$

は直和分解になる。これより、$\mathfrak{h}$ は極大可換 Lie 部分環になることがわかる。また、各 $\mathrm{ad}H$ $(H \in \mathfrak{h})$ は対角化可能になる。以上より、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の Cartan 部分環になる。$(*)$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の $\mathfrak{h}$ によるルート空間分解になる。ルート系は次のようになる。

$$\Delta = \{\alpha_{i,j} \mid i \neq j\}.$$

定理 3.2.5 定理 3.2.3 の条件と記号のもとで $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$ とおくと、$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{h}$ の実部分空間になり、以下が成り立つ。

(1) B は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上正定値実内積になる。

(2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は実部分空間の直和になる。

上記定理の (1) よりルートは $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上実数値をとることがわかる。

定理 3.2.6 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を複素半単純 Lie 環とする。$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の Cartan 部分環とし、それぞれのルート系を Δ, Δ' で表す。$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha, \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha' \in \Delta'} \mathbb{R}H_{\alpha'}$ とおく。定理3.2.5 より $\Delta \subset (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*, \Delta' \subset (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ とみなせる。実線形同型写像 $\phi : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ が $\Delta' \circ \phi = \Delta$ を満たすならば、ϕ は複素 Lie 環の同型写像 $\tilde{\phi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ に拡張できる。

上記定理は複素半単純 Lie 環のルート系が線形同型対応によって対応するならば、複素半単純 Lie 環は同型になることを主張している。

複素半単純 Lie 環の Cartan 部分環同士は自己同型写像で写り合うことがわかる。特に Cartan 部分環の次元は Cartan 部分環のとり方に依存しない。

定義 3.2.7 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環の次元を $\mathfrak{g}$ の**階数**という。

命題 3.2.8 定理 3.2.3 の条件と記号のもとで、$\alpha, \beta \in \Delta$ に対して

$$p = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \beta + n\alpha \in \Delta \cup \{0\}\}, \quad q = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid \beta + n\alpha \in \Delta \cup \{0\}\}$$

とおくと、

$$\{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap (\Delta \cup \{0\}) = \{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z},\ p \leq n \leq q\}$$

が成り立つ。さらに

$$p + q = -\frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

この命題より $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $\dfrac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$ は整数になることがわかる。さらに、絶対値が 3 以下の整数になることがわかる。

定義 3.2.9 V を有限次元実ベクトル空間とする。$v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とする。任意の $x, y \in V$ に対して

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

とおいたとき、$a_1, \ldots, a_n$ の最初に 0 ではない a_i が正ならば $x > y$ とする。これによって V に定まる全順序を**辞書式順序**という。

辞書式順序はもちろん基底のとり方に依存するため、あまり役に立たないように感じるかもしれないが、ルート系のようなベクトル空間の有限部分集合の性質を調べるには有効である。

定義 3.2.10 定理 3.2.5 より $\Delta \subset (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ とみなせる。$(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を定めておく。$\alpha \in \Delta$ が $\alpha > 0$ であり、正のルート β, γ によって $\alpha = \beta + \gamma$ と表すことができないとき、α を**単純ルート**という。

例 3.2.11 例 3.2.4 において、$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ のルート系を求めた。ここではさらに単純ルートの全体を求める。例 3.2.4 の設定や記号はそのまま使うことにする。

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix} \middle|\ x_i \in \mathbb{R},\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

となることがわかる。$\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = n - 1$ となり、

$$\alpha_{1,2} = e_1 - e_2, \alpha_{2,3} = e_2 - e_3, \ldots, \alpha_{n-1,n} = e_{n-1} - e_n$$

は $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ の基底になる。これに関する辞書式順序を $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に導入する。すると $i < j$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j) \\ &= \alpha_{i,i+1} + \cdots + \alpha_{j-1,j} > 0. \end{aligned}$$

これより

$$\alpha_{j,i} = -\alpha_{i,i+1} - \cdots - \alpha_{j-1,j} < 0$$

もわかる。上記の計算より単純ルートの全体は

$$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{n-1,n}.$$

になる。

定理 3.2.12 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のルート系 Δ の単純ルート全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とすると、r は $\mathfrak{g}$ の階数に一致する。任意の $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

であり、n_i はすべて 0 以上であるかすべて 0 以下であるかのどちらかである。

3.3 複素単純 Lie 環の分類

第 3.2 節の設定と記号をそのまま使うことにする。複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関するルート系 Δ から定まる実部分空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B を制限すると正定値になる。この内積から定まる $\mathfrak{h}^*$ の内積も B で表すことにする。すると、

$$B(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta) = \alpha(H_\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*)$$

が成り立つ。

定義 3.3.1 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の単純ルートの全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする。

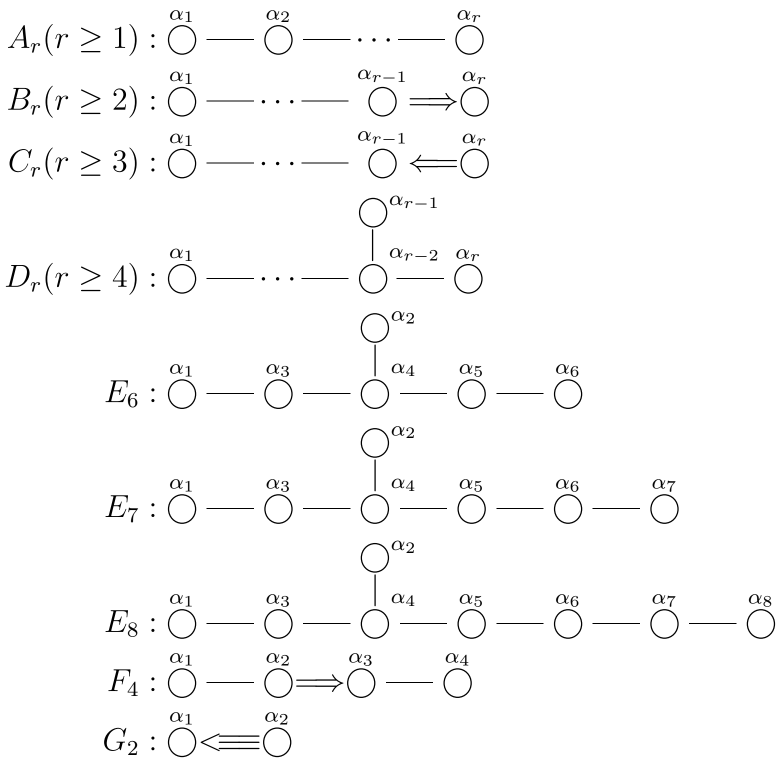
$$a_{ij} = \frac{2B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

が定める行列 (a_{ij}) を $\mathfrak{g}$ の **Cartan 行列**と呼ぶ。$i \neq j$ のとき、$a_{ij} = 0, -1, -2, -3$ になる。

Cartan 行列の性質を抽出して特徴付けることで、逆に Cartan 行列から複素半単純 Lie 環を構成できる。Cartan 行列を特徴付ける性質を少し弱めるとそれから構成される Lie 環は無限次元になり、無限次元 Lie 環論に発展していく。

定義 3.3.2 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の単純ルートの全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする。◯ を r 個並べ、各 ◯ に α_1 から α_r のラベルを付ける。α_i と α_j を $a_{ij} = -1$ のときは一重線で結び、$a_{ij} = -2$ のときは二重線で結び α_j から α_i の向きに矢印を付け、$a_{ij} = -3$ のときは三重線で結び α_j から α_i の向きに矢印を付ける。得られた図形を $\mathfrak{g}$ の **Dynkin 図形**と呼ぶ。

定理 3.3.3 複素単純 Lie 環の Dynkin 図形は次のいずれかになり、Dynkin 図形の同じ複素単純 Lie 環は同型になる。



注意 3.3.4 Dynkin 図形が A_r 型になる複素単純 Lie 環は

$$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(r+1, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

である。Dynkin 図形が B_r 型になる複素単純 Lie 環は

$$\mathfrak{o}(2r+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2r+1, \mathbb{C}) \mid X : \text{交代}\}$$

である。Dynkin 図形が C_r 型になる複素単純 Lie 環は

$$\mathfrak{sp}(r, \mathbb{C}) = \left\{ X \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -{}^t Z_1 \end{bmatrix},\ Z_i \in M_r(\mathbb{C}),\ Z_2, Z_3 : \text{対称} \right\}$$

である。Dynkin 図形が D_r 型になる複素単純 Lie 環は

$$\mathfrak{o}(2r, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2r, \mathbb{C}) \mid X : \text{交代}\}$$

である。以上を**古典型複素単純 Lie 環**と呼ぶ。Dynkin 図形が E, F, G 型になる複素単純 Lie 環の記述は簡単ではないので、ここでは省略するが、これらを**例外型複素単純 Lie 環**と呼ぶ。

3.4　半単純 Lie 環の直和分解

定義 3.4.1 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ (Y \in \mathfrak{g})\}$$

を $\mathfrak{g}$ の**中心**と呼ぶ。コンパクト Lie 群の Lie 環と同型になる実 Lie 環を**コンパクト Lie 環**と呼ぶ。

命題 3.4.2 Lie 群 G の中心は閉 Lie 部分群になり、その Lie 環は G の Lie 環の中心に一致する。

例 3.4.3 ユニタリ群 $U(n)$ の中心は $\{z1_n \mid z \in U(1)\}$ になり、その Lie 環は $\{y1_n \mid y \in \mathfrak{u}(1)\}$ になる。これは $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の中心に一致する。特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の中心は $\{z1_n \mid z \in U(1),\ z^n = 1\}$ になり、位数 n の巡回群に同型である。この Lie 環は $\{0\}$ であり、$SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(n)$ の中心に一致する。

命題 3.4.4
(1) 実 Lie 環がコンパクト Lie 環になるための必要十分条件は、その Killing 形式が半負定値になることである。

(2) コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の中心を $\mathfrak{z}$ で表すと、$\mathfrak{g}$ はイデアルの直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に分解し、$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はコンパクト半単純 Lie 環になる。

定理 3.4.5 コンパクト連結半単純 Lie 群の普遍被覆群はコンパクトになる。

コンパクト連結半単純 Lie 群に両側不変 Riemann 計量を入れると、Ricci 曲率が正定値になることがわかり、Myers の定理 (定理 1.2.14) より基本群は有限群になる。したがって、その普遍被覆群もコンパクトになる。

定義 3.4.6 係数体を制限することにより複素 Lie 環 $\mathfrak{l}$ を実 Lie 環とみなすことができる。それを $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ と書くことにする。$\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{g}$ が次の条件を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{l}$ の**実形**と呼ぶ。$\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ が $\mathfrak{g}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ の直和になる。

実 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の積 $[\ ,\ ] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}$ のベクトル空間としての複素化 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の積 $[\ ,\ ] : \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ に複素双線形に拡張できる。これによって、$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 環になる。$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ を実 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の**複素化**という。このとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の実形になっている。

複素 Lie 環 $\mathfrak{l}$ の実形 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{l}$ と同型になり、自然にこれらを同一視できる。

定理 3.4.7 複素半単純 Lie 環はコンパクト実形を持つ。

複素半単純 Lie 環のルート空間分解を利用して定理 3.4.7 を証明できる。

例 3.4.8 $\mathfrak{su}(n)$ は複素単純 Lie 環 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の実 Lie 部分環になる。$\mathfrak{su}(n)$ の任意の元は

$$X+\sqrt{-1}Y \quad (X : n \text{ 次実交代行列 } Y : n \text{ 次実対称行列 } \mathrm{tr}Y=0)$$

と表すことができる。この形より

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})=\mathfrak{su}(n)+\sqrt{-1}\mathfrak{su}(n)$$

は直和になる。したがって、$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ のコンパクト実形になる。

定義 3.4.9 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して随伴表現の像 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する $GL(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群を $\mathfrak{g}$ の**随伴群**と呼び、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で表す。

連結 Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると、G の随伴表現の像は $\mathfrak{g}$ の随伴群に一致する。すなわち、$\mathrm{Ad}(G)=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つことがわかる。

命題 3.4.10 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコンパクト実形は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の作用で写り合う。

コンパクト半単純 Lie 環が単純になることとその複素化が複素単純になることは同値になる。したがって 定理 3.3.3 より、複素単純 Lie 環の分類に対応してコンパクト単純 Lie 環の分類も得られる。さらに定理 3.4.5 より複素単純 Lie 環と単連結コンパクト単純 Lie 群は一対一に対応し、単連結コンパクト単純 Lie 群の分類も得られる。

A_r 型 $(r\geq 1)$ 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SU(r+1)$ である。B_2 型 $(r\geq 2)$ 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SO(2r+1)$ の二重被覆群 $Spin(2r+1)$ である。C_r 型 $(r\geq 3)$ 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $Sp(r)$ である。D_r 型 $(r\geq 4)$ 複素単純 Lie 環に対応する単連結コンパクト単純 Lie 群は $SO(2r)$ の二重被覆群 $Spin(2r)$ である。$Spin(n)$ はスピノル群と呼ばれ、抽象的には回転群 $SO(n)$ の普遍被覆群として定義される。Clifford 代数を利用して具体的に構成することもできる。例外型複素単純 Lie 環についてもそれぞれ単連結コンパクト単純 Lie 群が対応する。

定義 3.4.11 $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ が複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像で不変であり、

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{m}=\mathfrak{g}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{u}$$

とおくと、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ が直和になるとき、この直和分解を **Cartan 分解**と呼ぶ。

例 3.4.12 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は実単純 Lie 環であり、その複素化は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ になる。$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ に関する複素共役写像は通常の複素共役写像

$$\bar{\ } : \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\ ;\ X \mapsto \bar{X}$$

に一致する。例 3.4.8 でみたように、$\mathfrak{su}(n)$ の任意の元は

$$X + \sqrt{-1}Y \quad (X : n \text{ 次実交代行列 } Y : n \text{ 次実対称行列 } \mathrm{tr}Y = 0)$$

と表すことができ、

$$\overline{X + \sqrt{-1}Y} = X - \sqrt{-1}Y$$

だから、$\overline{\mathfrak{su}(n)} = \mathfrak{su}(n)$ が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\},\\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \cap \sqrt{-1}\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}\end{aligned}$$

とおくと、$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は直和になる。したがって、この $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の交代行列と対称行列への直和分解は Cartan 分解になっている。

定理 3.4.13 実半単純 Lie 環は Cartan 分解を持つ。

定理 3.4.14 $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環とし、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{m}_2$$

を $\mathfrak{g}$ の二つの Cartan 分解とする。このとき、ある $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が存在して、次が成り立つ。

$$\phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2, \quad \phi(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2.$$

定義 3.4.15 $\mathfrak{g}$ を実 Lie 環とし、$\mathfrak{k}$ をその Lie 部分環とする。$\mathfrak{g}$ の随伴表現の $\mathfrak{k}$ の像 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環になる。$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ に対応する $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の連結 Lie 部分群がコンパクトになるとき、$\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{g}$ の**コンパクトに埋め込まれた Lie 部分環**という。

命題 3.4.16 $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を Lie 部分環 $\mathfrak{k}$ と部分空間 $\mathfrak{m}$ による直和分解とする。このとき、次の (1) と (2) は同値である。

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は Cartan 分解である。

(2) 写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$\theta(T + X) = T - X \quad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{m})$$

によって定めると、θ は $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になり、

$$B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

は $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積になる。ただし、B は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式である。

これらの条件が成り立つとき、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の極大なコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環になる。

定義 3.4.17 実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像 θ に対して、

$$B_\theta(X,Y) = -B(X, \theta(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって定めた双線形形式が正定値内積になるとき、θ を $\mathfrak{g}$ の **Cartan 対合**と呼ぶ。

命題 3.4.16 より、実半単純 Lie 環の Cartan 分解から Cartan 対合が定まることがわかる。

例 3.4.18 例 3.4.12 より

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}$$

とおくと、$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は Cartan 分解になる。これから定まる Cartan 対合 θ に関して $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ 内の交代行列全体が $+1$ 固有空間であり、対称行列全体が -1 固有空間になるので、

$$\theta(X) = -{}^tX \quad (X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

と表される。これが対合的自己同型写像になり、± 1 固有空間が $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ になることは次のように直接計算でも確かめることができる。θ が対合的であることと ± 1 固有空間が $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ になることは θ の定義からわかる。$X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}[\theta(X), \theta(Y)] &= [-{}^tX, -{}^tY] = [{}^tX, {}^tY] = {}^tX{}^tY - {}^tY{}^tX = {}^t(YX - XY) \\ &= -{}^t[X, Y] = \theta([X, Y]).\end{aligned}$$

したがって、θ は Lie 環の自己同型写像になり、Cartan 対合であることがわかる。

第4章　対称空間の分解と分類

4.1　直交対称 Lie 代数

(G, K) を Riemann 対称対とし、$\sigma : G \to G$ をその対合的自己同型写像とする。G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表す。σ の微分 $d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になる。$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$ より $\mathfrak{k}$ は $d\sigma$ の $+1$ 固有空間に一致する。$\mathrm{Ad}_G(K)$ がコンパクトであることより、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環であることがわかる。これらをふまえて、Lie 群に対する Lie 環の概念の類似にあたる Riemann 対称対に対する概念を定義する。

定義 4.1.1 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像 s が次の条件を満たすとき、組 $(\mathfrak{g}, s)$ を**直交対称 Lie 代数**と呼ぶ。s の $+1$ 固有空間 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクトに埋め込まれた Lie 部分環になる。$\mathfrak{g}$ の中心を $\mathfrak{z}$ として、$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ が成り立つとき、$(\mathfrak{g}, s)$ を**効果的**という。連結 Lie 群 G とその Lie 部分群 K の対 (G, K) は次の条件を満たすとき、$(\mathfrak{g}, s)$ に対応しているという。G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ であり、K に対応する Lie 部分環は s の $+1$ 固有空間に一致する。二つの直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_1, s_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, s_2)$ に対して、Lie 環の同型写像 $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が存在して $\phi \circ s_1 = s_2 \circ \phi$ が成り立つときに、$(\mathfrak{g}_1, s_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, s_2)$ は**同型**であるという。

Riemann 対称対 (G, K) とその対合的自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して、$(\mathfrak{g}, d\sigma)$ は直交対称 Lie 代数になる。逆に直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Lie 群の対 (G, K) がどのようなときに Riemann 対称対になるかについては次の命題がある。

命題 4.1.2 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とし、(G, K) を $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Lie 群の対とする。G が単連結で K が連結ならば、(G, K) は Riemann 対称対になる。

注意 4.1.3 直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Lie 群の対 (G, K) は一般には Riemann 対称対になるとは限らない。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 s に対応する Lie 群 G の自己同型写像が存在しないこともあれば、もし Lie 群 G の自己同型写像が存在してもその不動点集合に K が含まれないこともある。

定義 4.1.4 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とする。s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。

(1) $\mathfrak{g}$ がコンパクト半単純 Lie 環のとき、$(\mathfrak{g}, s)$ を**コンパクト型直交対称 Lie 代数**という。

(2) $\mathfrak{g}$ が非コンパクト半単純 Lie 環であって、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解のとき、$(\mathfrak{g}, s)$ を**非コンパクト型直交対称 Lie 代数**という。

(3) $\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{g}$ の可換イデアルのとき、$(\mathfrak{g}, s)$ を **Euclid 型直交対称 Lie 代数**という。

例 4.1.5 (1) $\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の任意の対合的自己同型写像 s に対して、$(\mathfrak{g}, s)$ は効果的コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。

(2) $\mathfrak{g}$ を非コンパクト半単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解に対応して定まる Cartan 対合 s に対して、$(\mathfrak{g}, s)$ は効果的非コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。

(3) $\mathfrak{m}$ を有限次元実ベクトル空間とし、$\mathfrak{k}$ を $GL(\mathfrak{m})$ のコンパクト Lie 部分群の Lie 環とする。実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ によって定める。$\mathfrak{g}$ 上のブラケット積を次のように定める。

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0 \quad (X_1, X_2 \in \mathfrak{m}), \\
&[T, X] = -[X, T] = T \cdot X \quad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{m}), \\
&[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1 \quad (T_1, T_2 \in \mathfrak{k}).
\end{aligned}$$

これによって $\mathfrak{g}$ は Lie 環になる。

$$s(T + X) = T - X \quad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{m})$$

によって s を定めると、s は $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になる。これにより、$(\mathfrak{g}, s)$ は効果的 Euclid 型直交対称 Lie 代数になる。

定理 4.1.6 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とする。このとき、$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ が存在して、以下が成り立つ。

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_+$ は直和分解。

(2) $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ は s の作用に関して不変であり、$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関して直交している。

(3) s の $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_+$ への制限をそれぞれ s_0, s_-, s_+ とする。このとき、

$$(\mathfrak{g}_0, s_0), \quad (\mathfrak{g}_-, s_-), \quad (\mathfrak{g}_+, s_+)$$

はそれぞれ Euclid 型、コンパクト型、非コンパクト型直交対称 Lie 代数になる。

4.2　対称空間の双対性

定義 4.2.1 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を s の ± 1 固有空間分解とする。

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

によって $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 内の実部分空間 $\mathfrak{g}^*$ を定めると、$\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実 Lie 部分環になる。さらに、s の複素化の $\mathfrak{g}^*$ への制限

$$s^*(T + \sqrt{-1}X) = T - \sqrt{-1}X \quad (T \in \mathfrak{k},\ X \in \mathfrak{m})$$

は $\mathfrak{g}^*$ の対合的自己同型写像になる。あとの命題 4.2.3 より $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ は直交対称 Lie 代数になる。$(\mathfrak{g}^*, s^*)$ を $(\mathfrak{g}, s)$ の**双対**という。

例 4.2.2 例 3.4.12 と 3.4.18 で述べた $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の Cartan 分解と Cartan 対合から定まる直交対称 Lie 代数は、$(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ になる。ただし、

$$\theta(X) = -{}^tX \quad (X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

である。$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の Cartan 分解は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{交代}\}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X : \text{対称}\}$$

によって定まるので、$(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ の双対の $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(n)$$

になる。θ を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ に複素化し、$\mathfrak{su}(n)$ に制限した対合的自己同型写像 θ^* によって、$(\mathfrak{su}(n), \theta^*)$ が $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \theta)$ の双対になる。ここで、$X \in \mathfrak{su}(n)$ に対して

$$\theta^*(X) = -{}^tX = \bar{X}$$

となる。

　特に $n = 2$ の場合、$(SL(2, \mathbb{R}), SO(2))$ は $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \theta)$ に対応する Riemann 対称対になり、$SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ は双曲平面になる。他方、$(SU(2), SO(2))$ は $(\mathfrak{su}(n), \theta^*)$ に対応する Riemann 対称対になり、$SU(2)/SO(2)$ は 2 次元球面になる。

命題 4.2.3 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とし、$(\mathfrak{g}^*, s^*)$ を $(\mathfrak{g}, s)$ の双対とする。このとき、以下が成り立つ。

(1) $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ は直交対称 Lie 代数になる。

(2) $(\mathfrak{g}, s)$ がコンパクト型ならば、$(\mathfrak{g}^*, s^*)$ は非コンパクト型になる。逆に $(\mathfrak{g}, s)$ が非コンパクト型ならば、$(\mathfrak{g}^*, s^*)$ はコンパクト型になる。

(3) $(\mathfrak{g}_1, s_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, s_2)$ が同型ならば、$(\mathfrak{g}_1^*, s_1^*)$ と $(\mathfrak{g}_2^*, s_2^*)$ も同型になる。

定理 4.2.4 $\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$s : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$; $(X, Y) \mapsto (Y, X)$ によって対合的自己同型写像 s を定めると $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, s)$ はコンパクト型直交対称 Lie 代数になる。これの双対になる非コンパクト型直交対称 Lie 代数を $(\mathfrak{l}^*, s^*)$ で表すと、$\mathfrak{l}^*$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と実 Lie 環として同型になる。さらに、$(\mathfrak{l}^*, s^*)$ は直交対称 Lie 代数として $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像 σ の組 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \sigma)$ と同型になる。

逆にコンパクト型直交対称 Lie 代数 (l, s) の双対になる非コンパクト型直交対称 Lie 代数 (l^*, s^*) の Lie 環 $\mathfrak{l}^*$ が複素 Lie 環の構造を持てば、(l^*, s^*) は上記のようにして得られる。

4.3 対称空間の分解

定義 4.3.1 Riemann 対称対 (G, K) から定まる直交対称 Lie 代数がコンパクト型になるとき、(G, K) を**コンパクト型 Riemann 対称対**という。Riemann 対称対の**非コンパクト型 Riemann 対称対**、**Euclid 型 Riemann 対称対**についても同様に定義する。対称空間 M の等長変換全体の単位連結成分を G で表し、$o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ と定めると、定理 2.1.3 より (G, K) は Riemann 対称対になる。この Riemann 対称対 (G, K) がコンパクト型になるとき、M を**コンパクト型 Riemann 対称空間**という。**非コンパクト型 Riemann 対称空間**、**Euclid 型 Riemann 対称空間**についても同様に定義する。

定理 4.3.2 M を対称空間とする。

(1) M がコンパクト型ならば、M の断面曲率は 0 以上になる。

(2) M が非コンパクト型ならば、M の断面曲率は 0 以下になる。

(3) M が Euclid 型ならば、M の断面曲率は 0 になる。

命題 4.3.3 M を対称空間とし、$\pi : \tilde{M} \to M$ を M の普遍被覆空間とする。π が局所等長的になるように $\tilde{M}$ の Riemann 計量を入れると $\tilde{M}$ も対称空間になる。

定義 4.3.4 Riemann 多様体 M_1, M_2 の多様体としての積 $M_1 \times M_2$ に

$$T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) = T_x M_1 + T_y M_2$$

が直交直和になるように Riemann 計量を導入したものを M_1 と M_2 の **Riemann 積**と呼ぶ。

定理 4.3.5 M を単連結対称空間とする。このとき、M は Riemann 積

$$M = M_0 \times M_- \times M_+$$

に分解する。ここで、M_0 は Euclid 空間、M_- はコンパクト型対称空間、M_+ は非コンパクト型対称空間である。

定義 4.3.6 $(\mathfrak{g}, s)$ を直交対称 Lie 代数とし、s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。$(\mathfrak{g}, s)$ が次の条件を満たすとき、$(\mathfrak{g}, s)$ を**既約**という。

(1) $\mathfrak{g}$ は半単純であり、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の $\{0\}$ 以外のイデアルを含まない。

(2) $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{m}$ に既約に作用する。

既約直交対称 Lie 代数に対応する Riemann 対称対も**既約**という。対称空間 M の等長変換全体の単位連結成分を G で表し、$o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ によって定まる Riemann 対称対 (G, K) が既約になるとき、M を**既約**という。

直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ が既約になることと、その双対 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ が既約になることは同値になる。

定理 4.3.7 M を単連結コンパクト型対称空間とする。このとき、M は Riemann 積

$$M = M_1 \times \cdots \times M_r$$

に分解する。ここで、各 M_i はコンパクト型既約対称空間である。単連結非コンパクト型対称空間も同様の分解を持つ。

定理 4.3.8 コンパクト型既約直交対称 Lie 代数は次のいずれかになる。

I コンパクト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその対合的自己同型写像 s による $(\mathfrak{g}, s)$.

II コンパクト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $s : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}\ ;\ (X, Y) \mapsto (Y, X)$ による $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, s)$.

非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数は次のいずれかになる。

III 非コンパクト単純実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ が複素単純 Lie 環になり、$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像 s の不動点集合がコンパクトに埋め込まれた部分環になるときの $(\mathfrak{g}, s)$.

IV 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ を実 Lie 環とみなした $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ とそのコンパクト実形に関する複素共役写像 s による $(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}, s)$.

さらに既約直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ が III 型になることとその双対 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ が I 型になることは同値になり、$(\mathfrak{g}, s)$ が IV 型になることと $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ が II 型になることは同値になる。

II 型の既約直交対称 Lie 代数はコンパクト単純 Lie 環と一対一に対応し、これにより分類できる。これに応じて IV 型の既約直交対称 Lie 代数も分類できる。

4.4　非コンパクト型対称空間

定理 4.4.1 (G, K) を非コンパクト型直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Lie 群の対とする。定義 4.1.1 より G は連結である。このとき以下が成り立つ。

(1) K は連結閉部分群になり、G の中心 Z を含む。さらに K がコンパクトであることと Z が有限群であることは同値になる。このとき、K は G の極大コンパクト部分群になる。

(2) G の対合的自己同型写像 θ が存在して $K = F(\theta, G)$ と $d\theta = s$ が成り立つ。すなわち、(G, K) は Riemann 対称対になる。

(3) s の ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す。写像 $\mathfrak{m} \times K \to G$; $(X, k) \mapsto (\exp X)k$ は微分同型写像になり、対称空間 G/K の指数写像も微分同型写像になる。

定理 4.4.2 (G, K) を非コンパクト型 Riemann 対称対とする。K_1 を G のコンパクト部分群とすると、ある $g \in G$ が存在して $g^{-1}K_1 g \subset K$ が成り立つ。さらに K はただ一つの極大コンパクト部分群 K' を持ち、K' は G の極大コンパクト部分群にもなっている。

定理 4.4.3 G を連結半単純 Lie 群とする。G のすべての極大コンパクト部分群は連結になり、G の内部自己同型写像によって共役になる。K を G の極大コンパクト部分群とすると Euclid 空間に微分同型な部分多様体 E が G 内に存在して、写像 $E \times K \to G$; $(e, k) \mapsto ek$ は微分同型写像になる。

4.5　コンパクト型対称空間

この節ではコンパクト型対称空間の制限ルート系について解説する。設定やそれに伴う記号が多くなるため、一度定めた設定や記号は原則としてその後でもそのまま使うことにする。

$(\mathfrak{g}, s)$ をコンパクト型直交対称 Lie 代数とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を s の ± 1 固有空間とする。$\mathfrak{g}$ に $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ と s の作用に関して不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入する。このとき、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は直交直和分解になる。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとると、

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$$

は直和分解になり、複素化 $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ は複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になる。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する各ルートは $\mathfrak{t}$ 上純虚数の値をとることがわかる。そこで、前章の複素半単純 Lie 環のルートの定義と $\sqrt{-1}$ 倍異なるが、次のようにルートの定義をやりなおす。$\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

によって $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}$ に関する**ルート空間** $\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}$ を定め、

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\}$$

によって**ルート系**を定める。定理 3.2.3 のルート空間分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}$$

となる。さらに、$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle\lambda, H\rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

によって $\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}}$ を定める。$\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\}$ に対して $\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$ のとき、λ を $(\mathfrak{g}, s)$ の $\mathfrak{a}$ に関する**制限ルート**と呼び、その全体を

$$\Delta_{\mathfrak{m}} = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\}$$

で表し、**制限ルート系**と呼ぶ。$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \overline{H}$ で表し、

$$\Delta_0 = \Delta \cap \mathfrak{k} = \{\alpha \in \Delta \mid \bar{\alpha} = 0\}$$

とおくと

$$\Delta_{\mathfrak{m}} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Delta - \Delta_0\}$$

が成り立つ。$\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{a}$ の中心化部分環を $\mathfrak{k}_0$ とおく。

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0 \ (H \in \mathfrak{a})\}.$$

$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_{-\lambda}^{\mathbb{C}}), \qquad \mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_{-\lambda}^{\mathbb{C}})$$

によって**制限ルート空間** $\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda$ を定める。$\mathfrak{a}$ の基底によって $\mathfrak{a}$ に辞書式順序を定める。

$$\Delta_{\mathfrak{m}}^+ = \{\lambda \in \Delta_{\mathfrak{m}} \mid \lambda > 0\}$$

によって正の制限ルートの全体を表す。

定理 4.5.1 コンパクト型直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対して以下が成り立つ。

(1) $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda\in\Delta_{\mathfrak{m}}^+} \mathfrak{k}_\lambda, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda\in\Delta_{\mathfrak{m}}^+} \mathfrak{m}_\lambda$ は直交直和になる。

(2) $\lambda, \mu \in \Delta_{\mathfrak{m}}$ に対して $[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{k}_\mu] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu}$, $[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{m}_\mu] \subset \mathfrak{m}_{\lambda+\mu}$, $[\mathfrak{m}_\lambda, \mathfrak{m}_\mu] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu}$ が成り立つ。

この定理より $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathrm{ad}H$ の作用を詳しく調べることができる。$(\mathfrak{g}, s)$ に対応する対称空間の共変微分、曲率テンソル等は $\mathfrak{g}$ のブラケット積 $[\ ,\ ]$ によって記述できるので、制限ルート系を使ってこれらを記述できる。これによって、測地線とその挙動、測地線に沿った Jacobi 場、Laplace 作用素等の偏微分作用素をルートを使って記述でき、対称空間上の幾何学的問題や解析的問題に対して制限ルート系は強力な道具になる。

4.6　対称空間の分類

定理 4.6.1 I 型既約直交対称 Lie 代数に対応する Lie 環の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は次のいずれかになる。

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{AI} & (\mathfrak{su}(n), \mathfrak{o}(n)) \\
\mathrm{AII} & (\mathfrak{su}(2n), \mathfrak{sp}(n)) \\
\mathrm{AIII} & (\mathfrak{su}(p+q), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \times \mathfrak{u}(q))) \\
\mathrm{BDI} & (\mathfrak{o}(p+q), \mathfrak{o}(p) \times \mathfrak{o}(q)) \\
\mathrm{DIII} & (\mathfrak{o}(2n), \mathfrak{u}(n)) \\
\mathrm{CI} & (\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n)) \\
\mathrm{CII} & (\mathfrak{sp}(p+q), \mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(q))
\end{array}$$

これ以外に例外型 12 種類。

上記の I 型既約直交対称 Lie 代数の対合的自己同型写像は以下のとおり。AI の $\mathfrak{su}(n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = \bar{X} \quad (X \in \mathfrak{su}(n))$$

となる。

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと、AII の $\mathfrak{su}(2n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1} \quad (X \in \mathfrak{su}(2n))$$

となる。

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{bmatrix}$$

とおくと、AIII の $\mathfrak{su}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = I_{p,q} X I_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{su}(p+q))$$

となる。BDI の $\mathfrak{o}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = I_{p,q} X I_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{o}(p+q))$$

となる。DIII の $\mathfrak{o}(2n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1} \quad (X \in \mathfrak{o}(2n))$$

となる。CI の $\mathfrak{sp}(n)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = \bar{X} \quad (X \in \mathfrak{sp}(n))$$

となる。ただし、ここでは $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$ として、$\mathfrak{sp}(n)$ を四元数ではなく複素数で表している。

$$K_{p,q} = \begin{bmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{bmatrix}$$

とおくと、CII の $\mathfrak{sp}(p+q)$ の対合的自己同型写像は

$$s(X) = K_{p,q} X K_{p,q} \quad (X \in \mathfrak{sp}(p+q))$$

となる。

コンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類は定理 4.3.8 より I 型と II 型に別れる。I 型については定理 4.6.1 により分類され、II 型については複素単純 Lie 環の分類を与えている定理 3.3.3 により分類される。非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類は双対を考えることによりコンパクト型既約直交対称 Lie 代数の分類に帰着する。以上によって既約直交対称 Lie 代数の分類が完成する。

単連結対称空間は定理 4.3.5 より Euclid 空間、単連結コンパクト型対称空間、非コンパクト型対称空間の Riemann 積に分解する。定理 4.4.1 より非コンパクト型対称空間は単連結になることに注意しておく。定理 4.3.7 より単連結コンパクト型対称空間と非コンパクト型対称空間はそれぞれ単連結コンパクト型既約対称空間と非コンパクト型既約対称空間の Riemann 積に分解する。以上により単連結対称空間の分類は単連結コンパクト型既約対称空間と非コンパクト型既約対称空間の分類に帰着する。単連結コンパクト型既約対称空間はコンパクト型既約直交対称 Lie 代数と一対一に対応し、非コンパクト型既約対称空間は非コンパクト型既約直交対称 Lie 代数と一対一に対応するので、これで単連結対称空間の分類が得られる。

4.7 コンパクト型対称空間の基本群

単連結コンパクト型対称空間は前節の結果から分類される。単連結とは限らないコンパクト型対称空間は普遍被覆からの被覆写像と基本群の情報によって把握できる。

補題 4.7.1 完備 Riemann 多様体の基本群の元は代表元として測地線をとることができる。

完備 Riemann 多様体の普遍被覆空間は完備になり、被覆写像の逆像の二点を測地線で結び被覆写像で写すことにより、基本群の代表元として測地線をとることができる。

4.5 節の設定と記号をそのまま使うことにする。(G, K) をコンパクト型直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Riemann 対称対とする。$\gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}}$ に対して

$$A_\gamma = \frac{2\pi}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \gamma$$

とおく。

$$\Gamma(G/K) = \{H \in \mathfrak{a} \mid \exp H \in K\} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \mathrm{Exp} H = o\},$$
$$\Gamma^0 = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}}\}_{\mathbb{Z}},$$
$$\Gamma^* = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \gamma, H \rangle \in \pi\mathbb{Z} \ (\gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}})\}$$

によって $\mathfrak{a}$ の格子 $\Gamma(G/K), \Gamma^0, \Gamma^*$ を定める。Γ^0 は A_γ の整数係数線形結合の全体である。Riemann 対称対と制限ルート系の性質からこれらは次の包含関係を持つことがわかる。

命題 4.7.2 $\Gamma^0 \subset \Gamma(G/K) \subset \Gamma^*$.

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\gamma_H : [0,1] \to G/K \ ; \ t \mapsto \mathrm{Exp} tH$$

によって G/K の測地線 γ_H を定め、

$$f : \Gamma(G/K) \to \pi_1(G/K, o) \ ; \ H \to [\gamma_H]$$

とおく。$H \in \Gamma(G/K)$ ならば γ_H は G/K の o を通る閉測地線になり、o を基点とする G/K の基本群 $\pi(G/K, o)$ の元 $[\gamma_H]$ を定める。

定理 4.7.3 $f : \Gamma \to \pi_1(G/K, o)$ は全射準同型になり、特に $\pi_1(G/K, o)$ は可換になる。さらに

$$\ker f = \Gamma^0, \quad \pi_1(G/K, o) \cong \Gamma(G/K)/\Gamma^0$$

が成り立つ。

補題 4.7.1 より $\pi_1(G/K, o)$ の元は代表元として o を端点とする測地線をとることができる。定理 2.2.4 は同じ直交対称 Lie 代数に対応する Riemann 対称対に対して同じ結論が得られるので

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K_0} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$$

となり、o を端点にする測地線は $\mathrm{Exp}_o \mathfrak{a}$ の測地線とホモトピックになる。これより f は全射になることがわかる。

$\tilde{G}$ を $\mathfrak{g}$ を Lie 環として持つ単連結コンパクト Lie 群とする。Lie 環の対合的自己同型 $s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は Lie 群の対合的自己同型 $\tilde{s} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ を誘導する。$\tilde{s}$ の不動点集合

$$\tilde{K} = F(\tilde{s}, \tilde{G})$$

は連結になることが知られている。命題 4.1.2 より $(\tilde{G}, \tilde{K})$ は Riemann 対称対になり、コンパクト型対称空間 $\tilde{G}/\tilde{K}$ は単連結になる。よって定理 4.7.3 より、$\Gamma(\tilde{G}/\tilde{K}) = \Gamma^0$ が成り立つ。

$\mathfrak{g}$ の随伴群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ において

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})\ ;\ x \mapsto sxs^{-1}$$

は対合的自己同型写像になり、

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s = \{x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \mid sxs^{-1} = x\}$$

とおくと、$(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}), \mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s)$ は Riemann 対称対になる。したがって、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s$ はコンパクト型対称空間になる。さらに $\Gamma(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s) = \Gamma^*$ が成り立つことがわかる。

$(\mathfrak{g}, s)$ に対応する任意の Riemann 対称対 (G, K) について考える。普遍被覆写像 $\tilde{G} \to G$ は被覆写像 $\tilde{G}/\tilde{K} \to G/K$ を誘導する。また随伴表現 $\mathrm{Ad}_G : G \to GL(\mathfrak{g})$ の像は随伴群に一致し、$\mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ は被覆写像になる。これは被覆写像 $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G : G/K \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s$ を誘導する。以上を図にまとめると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{G}/\tilde{K} & ----- & \Gamma^0 = \Gamma(\tilde{G}, \tilde{K}) \\
\downarrow & & \cap \\
G/K & ----- & \Gamma(G, K) \\
\downarrow & & \cap \\
\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s & ----- & \Gamma^* = \Gamma(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}), \mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s)
\end{array}$$

命題 4.7.4 $(G_1, K_1), (G_2, K_2)$ を $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Riemann 対称対とする。

$$\Gamma(G_1/K_1) \subset \Gamma(G_2/K_2)$$

となるための必要十分条件は、被覆写像 $\phi : G_1/K_1 \to G_2/K_2$ が存在して次を満たすことである。

(1) $d\phi$ は $\mathfrak{m}$ の恒等写像。

(2) $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{G_2} \circ \phi = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{G_1}$.

系 4.7.5 $(G_1, K_1), (G_2, K_2)$ を $(\mathfrak{g}, s)$ に対応する Riemann 対称対とする。

$$\Gamma(G_1/K_1) = \Gamma(G_2/K_2)$$

の必要十分条件は、$G_1/K_1, G_2/K_2$ が $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s$ の Riemann 被覆として同値になることである。

命題 4.7.6 $\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ に対して、$\widetilde{\exp} 2\Gamma$ は $\tilde{G}$ の中心に含まれ $G = \tilde{G}/\widetilde{\exp} 2\Gamma$ は $\mathfrak{g}$ に対応するコンパクト半単純 Lie 群になる。s は G の対合的自己同型写像 $\bar{s}$ を誘導し、$\Gamma(G/F(\bar{s}, G)) = \Gamma$ が成り立つ。

以上より、コンパクト型直交対称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ に対応するコンパクト型対称空間 M は被覆写像 $M \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_s$ を持ち、このような被覆写像は $\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ と一対一に対応する。さらに、$\Gamma^0 \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ を満たす格子 Γ と Γ^*/Γ^0 の部分群は一対一に対応する。Γ^*/Γ^0 は有限 abel 群になり、有限巡回群の有限個の積になる。したがって、すべての部分群を分類することができる。

第5章　Hermite対称空間と対称 R 空間

Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持つ対称 R 空間についてこの章で解説する。コンパクト型 Hermite 対称空間はさらに特別な対称 R 空間であるが、それだけではなく対称 R 空間全体とも密接な関係がある。

5.1　Hermite対称空間

定義 5.1.1 M を Hermite 多様体とする。任意の $x \in M$ に対して M の対合的正則等長変換 s_x が存在して、x は s_x の孤立不動点になるとき、M を **Hermite 対称空間**と呼ぶ。

定義より Hermite 対称空間は Riemann 対称空間になる。

命題 5.1.2 Hermite 対称空間 M の正則等長変換全体の単位連結成分を G で表す。G は M に推移的に作用し、$o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ と定めると、(G, K) は M を定める Riemann 対称対になる。さらに、M は Kähler 多様体になる。

Riemann 対称対から Riemann 対称空間を定める定理 2.1.6 に対応する Hermite 対称空間に関する結果は次の命題である。

命題 5.1.3 定理 2.1.6 の設定に加えて原点 o の接ベクトル空間の直交変換 J_o が存在して、$J_o^2 = -1$ を満たし、J_o は $\mathrm{Ad}(K)$ の各元の作用と可換になると仮定する。このとき、J_o は一意的に G/K 上の G 不変概複素構造 J に拡張できる。さらに J は積分可能であり、G/K は Hermite 対称空間になる。

定理 5.1.4 Hermite 対称空間 M の正則等長変換全体の単位連結成分 G が半単純になると仮定する。$o \in M$ をとる。$K = \{k \in G \mid ko = o\}$ とおき、K に対応する Lie 環を $\mathfrak{k}$ で表す。このとき、M の o における概複素構造 J_o は $\{\mathrm{ad}T \mid T \in \mathfrak{k}\}$ の中心に含まれ、点対称 s_o は K の中心の単位連結成分に含まれる。

上記の結果より、正則等長変換群の単位連結成分が半単純である場合、Hermite 対称空間の概複素構造を見つけだすためにはイソトロピー部分群の Lie 環の中心を調べればよい。

例 5.1.5 コンパクト型対称対 $(SU(r+n), S(U(r)\times U(n)))$ は複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ を定める。イソトロピー部分群

$$S(U(r)\times U(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \middle| A \in U(r),\ B \in U(n),\ \det A \det B = 1 \right\}$$

の Lie 環

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(r)\times\mathfrak{u}(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{u}(r),\ Y \in \mathfrak{u}(n),\ \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y = 0 \right\}$$

の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{it}{r}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{it}{n}1_n \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

対称対による Lie 環の分解を

$$\mathfrak{su}(r+n) = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(r)\times\mathfrak{u}(n)) + \mathfrak{m}$$

と表すと

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \middle| X \in M_{r,n}(\mathbb{C}) \right\}$$

が成り立つ。$\mathrm{ad}(\mathfrak{z}(\mathfrak{k}))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{it}{r}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{it}{n}1_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i(r+n)t}{rn}X \\ -(\frac{i(r+n)t}{rn}X)^* & 0 \end{bmatrix}$$

となる。$\mathfrak{m}$ を $M_{r,n}(\mathbb{C})$ と同一視すると、上記の $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ の元の作用は $i(r+n)t/rn$ 倍になる。そこで $t = rn/(r+n)$ とおくと、その作用は i 倍になる。これらの計算から

$$J = \begin{bmatrix} \frac{in}{r+n}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{ir}{r+n}1_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$$

とおくと

$$(\mathrm{ad}J)X = iX, \quad (\mathrm{ad}J)^2X = -X \qquad (X \in \mathfrak{m})$$

が成り立つ。さらに、$\mathrm{ad}J$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、1.4 節「Grassmann 多様体」で定めた $\mathfrak{m}$ 上の内積に関して等長的になることがわかる。したがって、$\mathrm{ad}J$ は複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の概複素構造を定め、これによって $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は Hermite 対称空間になることがわかる。

$r=1$ の場合は $G_1(\mathbb{C}^{1+n})$ は n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ になる。$\mathbb{C}P^n$ の元は $\mathbb{C}^{1+n}$ 内の複素 1 次元部分空間だから、生成ベクトル $z = (z_1,\dots,z_{n+1}) \neq 0$ で表すことができる。$z, w \in \mathbb{C}^{1+n} - \{0\}$ が $\mathbb{C}P^n$ の同じ元を定めるための必要十分条件は $\mathbb{C}z = \mathbb{C}w$ である。これより z の成分に関する同次多項式 $f(z)$ から $\mathbb{C}P^n$ の部分集合 $\{\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^n \mid f(z) = 0\}$ が定まる。たとえば、$\{\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^n \mid z_{n+1} = 0\}$ は $\mathbb{C}P^{n-1}$ と Hermite 多様体として同型になる。

例 5.1.6 $r+n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{r+n}$ 内の r 次元有向部分空間全体を $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ で表す。$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ を**有向実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。有向部分空間に対して向きを考えない部分空間を対応させることで、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ から $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ への二重被覆写像が定まる。これによって、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ にも rn 次元多様体構造が定まる。

$SO(r+n)$ は $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に推移的に作用する。$\mathbb{R}^r$ に標準的な向きを定めた有向部分空間を o で表す。

$$\{k \in SO(r+n) \mid ko = o\} = SO(r) \times SO(n)$$

が成り立つことがわかる。これらによって、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $SO(r+n)/SO(r) \times SO(n)$ と微分同型になる。さらに、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の場合と同様に $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に Riemann 計量を定め Riemann 対称空間になることもわかる。

有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は外積 $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ への自然な埋め込みを持つ。$x \in \tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に対して、x の正の向きの正規直交基底 $x_1, \ldots, x_r$ をとる。x に $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ を対応させることで $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ から $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ への写像が定まる。この写像の像

$$\left\{ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_r \text{ は } \mathbb{R}^{r+n} \text{ 内の正規直交系} \right\}$$

は Euclid 空間 $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ の部分多様体だから、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ と同一視すると便利なことがある。

$r=2$ の場合、イソトロピー部分群 $SO(2) \times SO(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(2) \times \mathfrak{o}(n)$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{o}(2) \times \{0\}.$$

Riemann 対称対による Lie 環の分解を

$$\mathfrak{o}(2+n) = \mathfrak{o}(2) \times \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}$$

と表すと

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; X \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \right\}.$$

そこで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$$

とおくと

$$(\mathrm{ad}A)^2 X = -X \qquad (X \in \mathfrak{m})$$

が成り立つ。さらに、$\mathrm{ad}A$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、1.4 節「Grassmann 多様体」で定めた $\mathfrak{m}$ 上の内積に関して等長的になることがわかる。したがって、$\mathrm{ad}A$ は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$

の概複素構造を定め、これによって $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ は Hermite 対称空間になることがわかる。

$v \in \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ に対して、v の正の向きの正規直交基底 x, y をとる。$z = x + iy \in \mathbb{C}^{2+n}$ とおく。v に $\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^{1+n}$ を対応させることで $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ から $\mathbb{C}P^{1+n}$ への写像が定まる。この写像の像は

$$\{\mathbb{C}(x+iy) \in \mathbb{C}P^{1+n} \mid x, y \text{ は } \mathbb{R}^{2+n} \text{ 内の正規直交系}\}$$

となる。他方

$$\sum_{a=1}^{2+n} z_a^2 = \sum_{a=1}^{2+n}(x_a + iy_a)^2 = \sum_{a=1}^{2+n}(x_a^2 - y_a^2 + 2ix_a y_a) = 0$$

となるので、上記の写像の像は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{1+n}$ 内の複素二次超曲面

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^{1+n} \mid z_1^2 + \cdots + z_{2+n}^2 = 0\}$$

に含まれる。さらに、これらは一致することもわかる。そこで、これらを同一視して $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ も複素二次超曲面と呼ぶ。

例 5.1.7 実線形同型写像 $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\sigma(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0 + x_1 i - x_2 j - x_3 k \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

によって定める。すると

$$iqi^{-1} = \sigma(q) \qquad (q \in \mathbb{H})$$

が成り立つ。四元数行列の各成分に σ を作用させることにより、σ の四元数行列への作用を定める。$I = i1_n$ とおくと

$$IXI^{-1} = \sigma(X) \qquad (X \in M_n(\mathbb{H}))$$

が成り立つ。これより σ を $Sp(n)$ に制限すると $Sp(n)$ の対合的自己同型写像になる。これも σ で表す。$F(\sigma, Sp(n)) = U(n)$ となり、$(Sp(n), U(n))$ はコンパクト型 Riemann 対称対になる。σ の誘導する Lie 環 $\mathfrak{sp}(n)$ の対合的自己同型写像も σ に一致する。これの ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sp}(n) \mid X \in M_n(\mathbb{R}j + \mathbb{R}k)\}$$

である。$X \in \mathfrak{m}$ に対して $IX = \sigma(X)I = -XI$ となる。そこで $J = I/2 \in \mathfrak{u}(n)$ とおくと

$$(\mathrm{ad}J)X = \frac{1}{2}(IX - XI) = IX, \quad (\mathrm{ad}I)^2 X = I^2 X = -X.$$

これより $Sp(n)/U(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間であることがわかる。

補題 5.1.8 M を Hermite 対称空間とする。このとき、M の等長変換全体の単位連結成分 G' が半単純になることと M の正則等長変換全体の単位連結成分 G が半単純になることは同値になる。さらにこの場合は $G = G'$ が成り立つ。

補題 5.1.8 より、Riemann 対称空間のコンパクト型と非コンパクト型の定義 (定義 4.3.1) をそのまま Hermite 対称空間に対しても利用できる。

定理 5.1.9 コンパクト型 Hermite 対称空間は単連結になる。

単連結コンパクト型対称空間の既約対称空間の Riemann 積への分解に関する定理 (定理 4.3.7) に対応するコンパクト型 Hermite 対称空間の分解は次のようになる。非コンパクト型 Hermite 対称空間の場合も同様である。

命題 5.1.10 コンパクト型 Hermite 対称空間に対する定理 4.3.7 の分解の各因子はコンパクト型既約 Hermite 対称空間になる。非コンパクト型 Hermite 対称空間に対する定理 4.3.7 の分解の各因子は非コンパクト型既約 Hermite 対称空間になる。

定義 5.1.11 M を Hermite 多様体とする。M の 0 ではない接ベクトル X に対して X の張る複素 1 次元部分空間は実 2 次元部分空間になりその断面曲率を X の**正則断面曲率**と呼ぶ。

定理 5.1.12 コンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は正になる。非コンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は負になる。

定義 5.1.13 D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする。任意の $x \in D$ に対して D の対合的正則同型 s_x が存在して、x は s_x の孤立不動点になるとき、D を**有界対称領域**と呼ぶ。

定理 5.1.14 有界対称領域にはある Hermite 計量が存在して、非コンパクト型 Hermite 対称空間になる。逆に非コンパクト型 Hermite 対称空間に対して、それと正則同型になる有界対称領域が存在する。

5.2 コンパクト型 Hermite 対称空間

定理 5.2.1 $\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ に G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。このとき、J を通る G 軌道 $M = G \cdot J$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。逆にコンパクト型 Hermite 対称空間はこのように表現される。

証明の概略 $K = \{k \in G \mid kJ = J\}$ とすると、M は G/K と微分同型であり、K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [J, X] = 0\} = \ker(\mathrm{ad}J)$$

が成り立つ。特に $J \in \mathfrak{k}$ である。$\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ とすると

$$\mathfrak{m} = \{[J, X] \mid X \in \mathfrak{g}\} = \mathrm{im}(\mathrm{ad}J)$$

が成り立つ。$(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ より $\sigma = e^{\pi \mathrm{ad}J}$ とおくと、σ は $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型になる。このとき、$\mathfrak{k}$ は σ の固有値 1 に対する固有空間であり、$\mathfrak{m}$ は σ の固有値 -1 に対する固有空間である。σ の誘導する G の対合的自己同型も σ で表すことにすると、これによって (G, K) は Riemann 対称対になる。さらに $\mathfrak{m}$ は $\mathrm{ad}J$ 不変になり、$(\mathrm{ad}J|_{\mathfrak{m}})^2 = -1$ が成り立つ。$\mathrm{ad}J|_{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{m}$ の等長線形変換になることもわかる。したがって、$M = G/K$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。

逆に、M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の等長変換全体の単位連結成分 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。M の複素構造を定める $\mathfrak{g}$ の元 J は $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たし、M は $\mathrm{Ad}(G)J$ と微分同型になることがわかる。

定理 5.2.1 よりコンパクト型 Hermite 対称空間の随伴軌道表示の複素等質空間による表示を得る。そのために岩澤分解を準備する。

$\mathfrak{g}_0$ を実半単純 Lie 環とし、$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ をその Cartan 分解とする。$\mathfrak{p}_0$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}_0$ の極大可換部分環 $\mathfrak{h}_0$ をとる。$\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ は複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になり、定理 3.2.5 の $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sqrt{-1}\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$ で与えられる。$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の部分空間 $\mathfrak{a}$ の基底を先に並べることにより、$(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を入れる。$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を Δ で表す。$\alpha \in \Delta$ のルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表す。辞書式順序により $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha > 0\}$ を定めることができる。

$$P_+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0\}$$

によって P_+ を定め、

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_0$$

とおく。すると、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の冪零 Lie 部分環、$\mathfrak{n}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の冪零 Lie 部分環、$\mathfrak{s}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の可解 Lie 部分環になる。

定理 5.2.2 (岩澤分解) 上記設定のもとで、$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_0$ は直和になる。これを $\mathfrak{g}_0$ の**岩澤分解**と呼ぶ。(G, K) を $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ に対応する Riemann 対称対とし、$\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_0$ に対応する G の連結 Lie 部分群をそれぞれ A, N とする。このとき

$$K \times A \times N \to G\ ;\ (k, a, n) \mapsto kan$$

は微分同型写像になる。これを G の**岩澤分解**と呼ぶ。

上記設定のもとで、

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{a}^* = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

とおくと、$\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形、$\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{u}$ の極大可換部分環、$\mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の冪零 Lie 部分環になる。

定理 5.2.3 (岩澤分解) 上記設定のもとで、$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ を実 Lie 環とみなしたとき $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の岩澤分解になる。$G^{\mathbb{C}}$ を G の複素化とする。$\mathfrak{u}, \mathfrak{a}^*, \mathfrak{n}_+$ に対応する $G^{\mathbb{C}}$ の連結 Lie 部分群をそれぞれ U, A^*, N_+ とする。このとき

$$U \times A^* \times N_+ \to G^{\mathbb{C}}\ ;\ (u, a, n) \mapsto uan$$

は $G^{\mathbb{C}}$ 実 Lie 群とみなしたときの岩澤分解になる。

注意 5.2.4 連結実半単純 Lie 群 G の複素化がつねに存在するとはかぎらないが、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ の複素化は存在することがわかる。

定理 5.2.1 はコンパクト半単純 Lie 環の特別な条件を満たす元の随伴軌道がコンパクト型 Hermite 対称空間になることを示している。次の命題は、コンパクト半単純 Lie 環の任意の元の随伴軌道は複素等質空間になることを示している。コンパクト半単純 Lie 環の元の随伴軌道は**複素旗多様体**と呼ばれていて、重要な複素等質空間の例を与えている。

命題 5.2.5 $\mathfrak{u}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$U = \mathrm{Int}(\mathfrak{u})$ とする。任意の 0 ではない元 $X \in \mathfrak{u}$ に対してその随伴軌道 $U \cdot X$ は複素等質空間の構造を持つ。

証明の概略　コンパクト半単純 Lie 環はあるコンパクト型 Riemann 対称空間の等長変換全体のなす Lie 群の Lie 環になり、対応する双対非コンパクト型 Riemann 対称空間に上記設定を適用できる。極大トーラスの共役性 (定理 2.2.4 と 2.3 節) より $H \in U \cdot X \cap \mathfrak{a}^*$ をとることができ、

$$U_H = \{u \in U \mid u \cdot H = H\}$$

とおくと $U \cdot X \cong U/U_H$ が成り立つ。U_H に対応する Lie 環 $\mathfrak{u}_H$ は

$$\mathfrak{u}_H = \{Z \in \mathfrak{u} \mid [H, Z] = 0\}$$

となり、

$$\mathfrak{u}_H + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \alpha(H) \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

は $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の連結複素 Lie 部分環になることがわかる。これより、$U_H A^* N_+$ は $U^{\mathbb{C}} = \mathrm{Int}(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}})$ の複素 Lie 部分群になる。さらに、$U/U_H \cong UA^*N_+/U_H A^* N_+ = U^{\mathbb{C}}/U_H A^* N_+$ が成り立つので、U/U_H は複素等質空間になる。

例 5.2.6 $\mathfrak{su}(r+n)$ の複素化は $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ になる。例 3.2.4 で定めた $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ は例 5.1.5 で定めた J を含む。例 3.2.4 で定めたルートに関して

$$\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(J)=0\} = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq r\} \cup \{\alpha_{i,j} \mid r+1 \leq i \neq j \leq r+n\}.$$

$i<j$ のとき $\alpha_{i,j}>0$ となるように辞書式順序を導入しておくと、

$$\{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha(J) \neq 0\} = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq r+n\}$$

となる。命題 5.2.5 の証明の概略中に定めた $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ 内の複素 Lie 部分環を $\mathfrak{p}$ で表すと

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} X \in M_r(\mathbb{C}), Y \in M(r,n;\mathbb{C}),\ Z \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Z = 0 \end{array} \right\}.$$

$SL(r+n,\mathbb{C})$ 内の対応する複素 Lie 部分群を P で表すと

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} X \in M_r(\mathbb{C}), Y \in M(r,n;\mathbb{C}),\ Z \in M_n(\mathbb{C}) \\ \det X \det Z = 1 \end{array} \right\}$$

が成り立つ。したがって、次の同型を得る。

$$G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SU(r+n)/S(U(r)\times U(n)) \cong SL(r+n,\mathbb{C})/P.$$

この同型は次のように考えても得られる。1.4 節では、$SU(r+n)$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ に推移的に作用し $\mathbb{C}^r$ を固定する部分群が $S(U(r)\times U(n))$ になることを示して $G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SU(r+n)/S(U(r)\times U(n))$ が成り立つことがわかった。$SL(r+n,\mathbb{C})$ も $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ に推移的に作用する。

$$\{g \in SL(r+n,\mathbb{C}) \mid g\mathbb{C}^r = \mathbb{C}^r\} = P$$

がわかり、これより $G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SL(r+n,\mathbb{C})/P$ が成り立つ。

5.3 対称 R 空間

この節では対称 R 空間の定義と基本的性質、コンパクト型 Hermite 対称空間との関係について解説する。その前に Hermite 多様体の実形について準備をしておく。

補題 5.3.1 Riemann 多様体の等長変換の不動点集合の連結成分は全測地的部分多様体になる。

定義 5.3.2 Kähler 多様体の対合的反正則等長変換の不動点集合が空ではないとき、**実形**と呼ぶ。Kähler 多様体内の実次元が半分の実部分多様体への Kähler 形式の引き戻しが消えるとき、その実部分多様体を **Lagrange 部分多様体**と呼ぶ。

補題 5.3.1 より、実形の各連結成分は全測地的 Lagrange 部分多様体になることがわかる。

例 5.3.3 実 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の元を複素化することにより複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の元が対応する。この対応により $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になることがわかる。$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の元 W にその複素共役

$$\bar{W} = \{\bar{w} \mid w \in W\}$$

を対応させる写像は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の対合的反正則等長変換になり、その不動点集合は $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に一致する。したがって、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の実形である。

定義 5.3.4 連結 Riemann 多様体 M の等長変換全体のなす Lie 群の単位連結成分の元で写り合う部分集合を**合同**という。

例 5.3.5 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ の対合的反正則等長変換 τ_k $(0 \leq k \leq n)$ を

$$\tau_k(\mathbb{C}z) = \mathbb{C}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{k+1}, -\bar{z}_{k+2}, \ldots, -\bar{z}_{2+n}) \quad (\mathbb{C}z \in Q_n(\mathbb{C}))$$

によって定める。対応する $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ の写像も同じ記号 τ_k で表すことにすると、正規直交系 $x, y \in \mathbb{R}^{2+n}$ に対して、

$$\tau_k(x \wedge y) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+1} \\ -x_{k+2} \\ \vdots \\ -x_{2+n} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -y_1 \\ \vdots \\ -y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{2+n} \end{bmatrix}$$

となる。$Q_n(\mathbb{C}) = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n}) \subset \bigwedge^2 \mathbb{R}^{2+n}$ とみなして、部分多様体 $S^{k,n-k}$ を

$$S^{k,n-k} = S^k(\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_{k+1}) \wedge S^{n-k}(\mathbb{R}e_{k+2} + \cdots + \mathbb{R}e_{n+2})$$

によって定める。上の τ_k の表示より

$$F(\tau_k, \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})) = S^{k,n-k}$$

が成り立つことがわかり、$S^{k,n-k}$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の実形になる。$S^{k,n-k}$ は $S^k \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2$ と等長的である。$S^{k,n-k}$ と $S^{n-k,k}$ は合同になることがわかる。さらに $Q_n(\mathbb{C})$ の任意の実形は $S^{k,n-k}$ $(0 \leq k \leq [n/2])$ のいずれかと合同になることが知られている。

命題 5.3.6 (T.[13] と Tanaka-T.[12]) M をコンパクト Kähler 多様体とし、正則断面曲率は正と仮定する。このとき、M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体 L_1, L_2 に対して、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ が成り立つ。特に M の実形は連結になる。

証明 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。L_1 と L_2 を最短測地線 $c(s)$ $(0 \leq s \leq d(L_1, L_2))$ で結ぶ。M は Kähler 多様体だから、複素構造 J は平行になる。速度ベクトル $c'(s)$ は $c(s)$ に沿って平行になり、$Jc'(s)$ は $c(s)$ に沿った平行法ベクトル場になる。$c(s)$ の最短性から $c'(s)$ は端点でそれぞれ L_1 と L_2 に直交する。L_1, L_2 が Lagrange 部分多様体であることから、法ベクトル場 $Jc'(s)$ は端点でそれぞれ L_1 と L_2 に接する。$Jc'(s)$ の生成する $c(s)$ の変分曲線族 $c_t(s) = \mathrm{Exp}_{c(s)}(tJc'(s))$ は、L_1, L_2 が全測地的部分多様体であることから、L_1, L_2 を結ぶ曲線族になる。この曲線族の長さに関する第一変分は 0 になり、M の正則断面曲率が正であるという仮定から、第二変分は

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d^2\mathcal{L}(c_t)}{dt^2}\right|_{t=0} \\
&= \int_0^{d(L_1,L_2)} \left\{ \langle \nabla_{\partial/\partial s} Jc'(s), \nabla_{\partial/\partial s} Jc'(s) \rangle - \langle R(Jc'(s), c'(s))c'(s), Jc'(s) \rangle \right\} ds \\
&= -\int_0^{d(L_1,L_2)} \langle R(Jc'(s), c'(s))c'(s), Jc'(s) \rangle ds < 0.
\end{aligned}
$$

これは $c(s)$ の最短性に反する。したがって、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ が成り立つ。

M の対合的反正則等長変換の不動点集合の各連結成分は全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体になる。連結成分がもし二つ以上あると上で示したことより、それらは交わりを持つことになり矛盾する。したがって、連結成分は一つだけになり実形は連結になる。

命題 5.3.6 より、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は連結になり、二つの実形は必ず交わることがわかる。

定義 5.3.7 (G, K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。$X \in \mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道 $\mathrm{Ad}(K)X$ が $\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 不変内積から誘導される Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になるとき、$\mathrm{Ad}(K)X$ を**対称 R 空間**と呼ぶ。

注意 5.3.8 定理 5.2.1 よりコンパクト型 Hermite 対称空間はコンパクト半単純 Lie 環の随伴表現の軌道として表現できる。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間は対称 R 空間になる。

定理 5.3.9 対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になる。逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になる。

証明の概略 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現は双対の線形イソトロピー表現と同値になるため、対称 R 空間を考える際の Riemann 対称対は非コンパクト型を考えれば十分である。(G, K) を非コンパクト型 Riemann 対称対とし、こ

れから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ の直和分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ とする。$X \in \mathfrak{p}_0$ に対して $\mathrm{Ad}(K)X$ が対称 R 空間であると仮定すると、必要なら X を定数倍することによって $(\mathrm{ad}X)^3 = \mathrm{ad}X$ が成り立つ。[1] $\mathfrak{g}_0$ に 5.2 節の設定と記号を使うことにする。

$$(\mathrm{ad}(\sqrt{-1}X))^3 = \sqrt{-1}^3(\mathrm{ad}X)^3 = -\sqrt{-1}\mathrm{ad}X = -\mathrm{ad}(\sqrt{-1}X)$$

となり、$\sqrt{-1}X \in \mathfrak{u}$ だから、$\mathrm{Ad}(U)(\sqrt{-1}X)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。$\sqrt{-1}\mathrm{Ad}(K)X = \mathrm{Ad}(K)(\sqrt{-1}X)$ より、$\mathrm{Ad}(K)X$ は $\mathrm{Ad}(K)(\sqrt{-1}X)$ と同一視でき、$\mathrm{Ad}(K)X$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 $\mathrm{Ad}(U)(\sqrt{-1}X)$ の部分多様体になる。X を含む $\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、これについても 5.2 節の設定と記号を使うことにする。$H = \sqrt{-1}X \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}$ とおく。

$$K_H = \{k \in K \mid k \cdot H = H\}$$

とおくと $K \cdot H \cong K/K_H$ が成り立つ。K_H に対応する Lie 環 $\mathfrak{k}_H$ は

$$\mathfrak{k}_H = \{Z \in \mathfrak{k} \mid [Z, H] = 0\}$$

である。定理 5.2.2(岩澤分解) より

$$K \cdot H \cong K/K_H \cong KAN/K_HAN = G/K_HAN.$$

さらに $\mathfrak{g}_0$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}_H + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ の複素化が $\mathfrak{u}_H + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+$ に一致することがわかる。$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役写像を σ で表すと、σ は $G^{\mathbb{C}}$ の自己同型写像を誘導し $\sigma(U_HA^*N_+) = U_HA^*N_+$ を満たす。よって反正則微分同型写像 $\sigma : G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \to G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+$ を誘導し、σ の不動点集合は G/K_HAN に一致する。σ を U/U_H で考えると等長変換であることもわかる。したがって、$\mathrm{Ad}(K)X \cong G/K_HAN$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 $G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \cong U/U_H$ の実形になる。

逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になることを定理 5.2.1 の設定のもとで示す。コンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換 $\tau : M \to M$ によって M の実形 L が定まっているとする。$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定しても一般性は失われない。M の元 x は $g \in G$ によって $x = g \cdot J$ と表すことができる。

$$\tau(x) = (\tau g) \cdot J = (\tau g \tau^{-1} \tau) \cdot J = (I_\tau(g)) \cdot J$$

となるので、$F(I_\tau, G) \cdot J \subset F(\tau, G \cdot J) = L$ を得る。さらに、命題 5.3.6 より実形 L は連結になり、$F(I_\tau, G) \cdot J = L$ が成り立つことがわかる。$dI_\tau(J) = -J$ が成り立ち J は dI_τ の -1 固有空間に含まれる。$(G, F(I_\tau, G))$ は Riemann 対称対になり、L は対称 R 空間になる。

[1] $(\mathrm{ad}X)^3 = \mathrm{ad}X$ より $\mathrm{ad}X$ の固有値は $-1, 0, 1$ になり、固有空間分解によって $\mathfrak{g}_0$ の第一種階別 Lie 環の構造が定まる。これにより対称 R 空間と第一種階別 Lie 代数は対応する。

第6章　極地と対蹠集合

この章では Chen-Nagano が [2] で導入した Riemann 対称空間の極地と [3] で導入した対蹠集合に関する基本事項を解説する。それらを利用して対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合の基本的性質を導く。さらに、コンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉に関する田中真紀子さんとの共同研究の成果についても述べる。

6.1　極地

定義 6.1.1 M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の点 x における点対称 s_x の固定点全体 $F(s_x, M)$ を

$$F(s_x, M) = \bigcup_{k=0}^{r} M_k^+$$

と連結成分の合併に分解する。この連結成分の一つ一つを M の**極地**と呼ぶ。極地が一点からなるとき**極**と呼ぶ。$\{x\}$ は必ず $F(s_x, M)$ の連結成分になるため、$\{x\}$ は**自明な極**と呼ぶ。

補題 5.3.1 より極地は全測地的部分多様体になる。極地の例を挙げておく。

例 6.1.2 n 次元単位球面

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

の点 x における点対称は $s_x = 1_{\mathbb{R}x} - 1_{x^\perp}$ と表すことができ、この不動点集合は $\{x, -x\}$ になる。よって、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、ともに極になる。

例 6.1.3 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとして、$\mathbb{K}^{r+n}$ 内の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体から成る係数体 $\mathbb{K}$ に関する Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ について考える。$r \le n$ と仮定しておく。$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に関する点対称は $s_V = 1_V - 1_{V^\perp}$ と表すことができ、

$$F(s_V, G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \bigcup_{k=0}^{r} \{V_1 \oplus V_2 \mid V_1 \in G_k(V),\, V_2 \in G_{r-k}(V^\perp)\}$$

が成り立つ。特に $V = \mathbb{K}^r = o$ の場合、

$$F(s_o, G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \bigcup_{k=0}^{r} G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n)$$

と表すことができる。

例 6.1.4 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ の極地を求める。$\mathbb{R}^2$ に標準的な向きを定めたものを o で表す。$\mathbb{R}^2$ に o とは逆の向きを定めたものを $\bar{o}$ で表す。o に関する点対称は $s_o = 1_o - 1_{o^\perp}$ と表すことができ、

$$F(s_o, \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\} \cup \tilde{G}_2(\langle e_3, \ldots, e_{2+n} \rangle_{\mathbb{R}})$$

が成り立つ。

補題 6.1.5 連結 Riemann 対称空間 M の点 x と M の等長変換 g に対して、$s_{gx} = gs_xg^{-1}$ が成り立つ。

証明　M の二つの等長変換 s_{gx}, gs_xg^{-1} はともに gx を固定し、$T_{gx}M$ における微分写像は -1 倍になるので、$s_{gx} = gs_xg^{-1}$ が成り立つ。

命題 6.1.6 コンパクト Riemann 対称空間の異なる点に関する極地は合同になる。

証明　M をコンパクト Riemann 対称空間とし、その等長変換全体のなす Lie 群の単位連結成分を G で表す。M の二点 x, y をとる。定理 2.1.2 より G は M に推移的に作用しているので、$y = gx$ となる $g \in G$ が存在する。補題 6.1.5 より $s_y = gs_xg^{-1}$ となって、$F(s_y, M) = gF(s_x, M)$ が成り立つ。したがって、x に関する極地と y に関する極地は g によって写り合う。

命題 6.1.6 より、コンパクト Riemann 対称空間の極地を考える場合は原点をとりそれに関する極地を考えれば十分である。

命題 6.1.7 (G, K) を Riemann 対称対とし、対応する Riemann 対称空間 G/K はコンパクトになるとする。G/K の原点を o で表す。G/K の o を通る極大トーラス A をとると、$F(s_o, G/K) = KF(s_o, A)$ が成り立つ。A に対応する極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ で表し、

$$\Gamma(G/K) = \{H \in \mathfrak{a} \mid \mathrm{Exp}H = o\}$$

とおくと $F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ が成り立つ。$F(s_o, A)$ は有限集合になり、G/K の各極地は $F(s_o, A)$ の点の K 軌道になる。

証明 定理 2.2.4 より、任意の $x \in G/K$ は $x = ka,\ k \in K,\ a \in A$ と表すことができる。

$$s_o(x) = s_o(ka) = kk^{-1}s_ok(a) = ks_{k^{-1}(o)}(a) = ks_o(a)$$

となるので、$x \in F(s_o, G/K)$ の必要十分条件は $a \in F(s_o, A)$ である。したがって、$F(s_o, G/K) = KF(s_o, A)$ が成り立つ。

A の任意の元は $H \in \mathfrak{a}$ によって $\mathrm{Exp}H$ と表すことができ、$s_o\mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}(-H)$ が成り立つ。したがって、

$$s_o\mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}H \Leftrightarrow \mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}(-H) \Leftrightarrow \mathrm{Exp}2H = o \Leftrightarrow H \in \frac{1}{2}\Gamma(G/K)$$

となり、$F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ を得る。

$F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ より $F(s_o, A)$ は有限集合になり、G/K の各極地は $F(s_o, A)$ の点の K 軌道になることがわかる。

例 6.1.8 $U(n)$ の単位元を通る極大トーラス

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

をとる。命題 6.1.7 と 2.3 節で示したことより

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{g \in U(n)} gF(s_e, T)g^{-1}$$

が成り立つ。$g \in U(n)$ に対して $s_e(g) = g^{-1}$ となることから、

$$F(s_e, T) = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となる。対角線の $+1$ の個数が等しい行列は共役になり、同じ $U(n)$ 軌道に含まれる。$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$G_k(\mathbb{C}^n) \to \left\{ g \begin{bmatrix} 1_k & \\ & -1_{n-k} \end{bmatrix} g^{-1} \middle| g \in U(n) \right\};\ V \mapsto 1_V - 1_{V^\perp}$$

は微分同型写像になるので、この写像によって同一視する。$1_V - 1_{V^\perp}$ は V に関する $\mathbb{C}^n$ 内の鏡映変換であり、上の微分同型写像の像は重複度 k の固有値 $+1$ と重複度 $n-k$ の固有値 -1 を持つ $U(n)$ の元の全体と一致する。そこで、$G_0(\mathbb{C}^n)$ は $\{-1_n\}$ と同一視し、$G_n(\mathbb{C}^n)$ は $\{1_n\}$ と同一視すると、

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} G_k(\mathbb{C}^n)$$

が $U(n)$ の極地の全体になる。

例 6.1.9 例5.1.7で定めたコンパクト型Hermite対称空間 $Sp(n)/U(n)$ の極地を求める。Lie環の分解

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}$$

の $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} \middle| \; t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$$

によって定める。

$$\exp \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_1 + \sin t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & \cos t_n + \sin t_n j \end{bmatrix}$$

となるので、$\mathfrak{a}$ に対応する $Sp(n)/U(n)$ の極大トーラス $A = \mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ の束は

$$\Gamma(Sp(n)/U(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} \middle| \; t_1, \dots, t_n \in \pi\mathbb{Z} \right\}$$

である。よって

$$\begin{aligned} F(s_o, A) &= \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(Sp(n)/U(n)) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} U(n) \middle| \; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n = 1 \text{ または } j \right\}. \end{aligned}$$

これらの点の $U(n)$ 軌道が極地になる。j と 1 の個数が等しい点の $U(n)$ 軌道は等しくなる。そこで、

$$J_a = \begin{bmatrix} j 1_a & \\ & 1_{n-a} \end{bmatrix}, \quad M_a^+ = U(n) J_a U(n) \subset Sp(n)/U(n) \qquad (0 \leq a \leq n)$$

とおくと、$Sp(n)/U(n)$ の極地の全体は $M_0^+, M_1^+, \dots, M_n^+$ である。$g \in U(n)$ に対して

$$\begin{aligned} g J_a U(n) = J_a U(n) &\Leftrightarrow J_a^{-1} g J_a U(n) = U(n) \Leftrightarrow J_a^{-1} g J_a \in U(n) \\ &\Leftrightarrow g \in U(a) \times U(n-a) \end{aligned}$$

となり、$M_a^+ \cong U(n)/U(a) \times U(n-a) \cong G_a(\mathbb{C}^n)$ が成り立つ。したがって、$Sp(n)/U(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, Sp(n)/U(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{C}^n)$$

と書くこともできる。

例 6.1.10 ユニタリ群 $U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(g) = \bar{g} \quad (g \in U(n))$$

によって定める。$F(\sigma, U(n)) = O(n)$ となり、$(U(n), O(n))$ はコンパクト Riemann 対称対になる。σ の誘導する Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の対合的自己同型写像も σ に一致する。これの ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid X \in M_n(\mathbb{R}i)\}$$

である。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$$

によって定める。

$$\exp \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_1 + \sin t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & \cos t_n + \sin t_n i \end{bmatrix}$$

となるので、$\mathfrak{a}$ に対応する $U(n)/O(n)$ の極大トーラス $A = \mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ の束は

$$\Gamma(U(n)/O(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \ldots, t_n \in \pi\mathbb{Z} \right\}$$

である。よって

$$\begin{aligned} F(s_o, A) &= \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(U(n)/O(n)) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} U(n) \ \middle| \ \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = 1 \text{ または } i \right\}. \end{aligned}$$

これらの点の $O(n)$ 軌道が極地になる。i と 1 の個数が等しい点の $O(n)$ 軌道は等しくなる。そこで、

$$I_a = \begin{bmatrix} i1_a & \\ & 1_{n-a} \end{bmatrix}, \quad M_a^+ = O(n)I_aO(n) \subset U(n)/O(n) \qquad (0 \leq a \leq n)$$

とおくと、$U(n)/O(n)$ の極地の全体は $M_0^+, M_1^+, \ldots, M_n^+$ である。$g \in O(n)$ に対して

$$\begin{aligned} gI_aO(n) = I_aO(n) &\Leftrightarrow I_a^{-1}gI_aO(n) = O(n) \Leftrightarrow I_a^{-1}gI_a \in O(n) \\ &\Leftrightarrow g \in O(a) \times O(n-a) \end{aligned}$$

となり、$M_a^+ \cong O(n)/O(a) \times O(n-a) \cong G_a(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。したがって、$U(n)/O(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, U(n)/O(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{R}^n)$$

と書くこともできる。

命題 6.1.11 対称 R 空間の極地は対称 R 空間になる。コンパクト型 Hermite 対称空間の極地はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。

6.2 対蹠集合

Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。[1] これらの概念は Chen-Nagano[3] が導入した。非コンパクト型 Riemann 対称空間の一点の点対称はその点以外に固定点を持たないため、対蹠集合は一点のみになり 2-number は 1 になる。そこで、以下ではコンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合や 2-number を考える。

対蹠集合の例を挙げておく。

例 6.2.1 n 次元単位球面 S^n の点 x における点対称 s_x の不動点集合は例 6.1.2 より $\{x, -x\}$ になる。よって、これは S^n の大対蹠集合になり、逆に S^n の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。特に、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。

例 6.2.2 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとして、Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の対蹠集合について考える。$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に関する点対称 s_V の不動点集合は V の $\mathbb{K}$ 部分空間と $V^\perp$ の $\mathbb{K}$ 部分空間の直和になる r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間の全体になる。このことから、$\mathbb{K}^{n+r}$ のユニタリ基底 $e_1, \ldots, e_{n+r}$ に対して

$$\{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \rangle_{\mathbb{K}} \in G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n+r\}$$

は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合になり、逆に $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。したがって、

$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \binom{n+r}{r}$$

が成り立つ。これは係数体 $\mathbb{K}$ に依存しない。

[1] 大対蹠集合の定義は 2-number が有限でなければ意味がないが、これは命題 6.2.4 で示す。

命題 6.2.3 コンパクト Riemann 対称空間 M とその極地 $M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\#_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

証明　$M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ を点 $o \in M$ に関する極地とする。A を o を含む M の対蹠集合とすると $A \subset F(s_o, M)$ が成り立ち、

$$A = \bigcup_{k=0}^{r} (A \cap M_k^+)$$

となる。各 $A \cap M_k^+$ は M_k^+ の対蹠集合になり次を得る。

$$\#A = \sum_{k=0}^{r} \#(A \cap M_k^+) \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

$\#A$ の上限が $\#_2 M$ だから、問題の不等式を得る。

命題 6.2.4 コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合は有限集合になる。さらに 2-number も有限になる。

証明　A をコンパクト Riemann 対称空間 M の対蹠集合とする。$x \in A$ とすると $A \subset F(s_x, M)$ が成り立つ。x は $F(s_x, M)$ の孤立点だから、x は A の孤立点になる。したがって、A は離散集合になり、特に有限集合になる。

$M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ を M の極地とすると命題 6.2.3 より

$$\#_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+$$

が成り立つ。M_k^+ が極の場合は $\#_2 M_k^+ = 1$ である。この場合は極地をとる操作は終了し、M_k^+ が極ではない場合は $o_k \in M_k^+$ をとり、さらに極地

$$F(s_{o_k}, M_k^+) = \bigcup_{j=0}^{r_k} (M_k^+)_j^+$$

を定める。すると命題 6.2.3 より

$$\#_2 M_k^+ \leq \sum_{j=0}^{r_k} \#_2 (M_k^+)_j^+$$

が成り立つ。Riemann 対称空間に対してその極地は次元が小さいので、このような極地をとる操作を有限回続けると極のみになる。したがって、$\#_2 M < \infty$ がわかる。

例 6.2.5 M_1, M_2 をコンパクト Riemann 対称空間とする。A_i を M_i の対蹠集合とすると、$A_1 \times A_2$ は $M_1 \times M_2$ の対蹠集合になる。さらに、A_i が M_i の大対蹠集合ならば、$A_1 \times A_2$ は $M_1 \times M_2$ の大対蹠集合になる。したがって、$\#_2(M_1 \times M_2) = \#_2 M_1 \cdot \#_2 M_2$ が成り立つ。例 6.2.1 より $\#_2 S^1 = 2$ だから、r 次元トーラス T^r の 2-number は $\#_2 T^r = 2^r$ となる。これより、階数 r のコンパクト Riemann 対称空間 M に対して $2^r \leq \#_2 M$ が成り立つ。

例 6.2.6 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとする。Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の極地は例 6.1.3 より

$$M_k^+ = G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n) \qquad (0 \leq k \leq r)$$

となる。例 6.2.2 と例 6.2.5 より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+ &= \sum_{k=0}^{r} \#_2(G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n)) = \sum_{k=0}^{r} \#_2(G_k(\mathbb{K}^r)) \cdot \#_2(G_{r-k}(\mathbb{K}^n)) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{n}{r-k}.\end{aligned}$$

$(1+x)^{r+n} = (1+x)^r(1+x)^n$ を二項展開して x^r の係数を比較すると

$$\binom{r+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{n}{r-k}$$

を得る。これより

$$\#_2(G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+$$

が成り立つ。これは命題 6.2.3 の不等式の等号が成り立つ例になっている。

竹内 [10] の結果より次が成り立つことがわかる。

定理 6.2.7 対称 R 空間 M とその極地 $M_0^+, M_1^+, \ldots, M_r^+$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\#_2 M = \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

[10] の主結果は次の定理である。

定理 6.2.8 M を対称 R 空間とし、その $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群を $H(M; \mathbb{Z}_2)$ で表すと、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 M = \dim H(M; \mathbb{Z}_2).$$

定理 6.2.7 を利用して対称 R 空間の 2-number を求める計算例を挙げておく。

例 6.2.9 $Sp(n)$ は対称 R 空間になることが知られている。例 6.1.8 と同様にして $Sp(n)$ の極地の全体は

$$F(s_e, Sp(n)) = \bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbb{H}^n)$$

であることがわかる。よって、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2 Sp(n) = \sum_{k=0}^{n} \#_2 G_k(\mathbb{H}^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

例 6.2.10 コンパクト対称空間 $U(n)/O(n)$ は対称 R 空間であることが知られている。例 6.1.10 より $U(n)/O(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, U(n)/O(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{R}^n)$$

である。よって、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2(U(n)/O(n)) = \sum_{a=0}^{n} \#_2 G_a(\mathbb{R}^n) = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} = 2^n.$$

2.3 節「コンパクト Lie 群」でみたようにコンパクト連結 Lie 群は Riemann 対称空間とみなせる。このときの対蹠集合と群構造の関連性についてまとめておく。

G をコンパクト連結 Lie 群とする。$x \in G$ における点対称 s_x は $L_x \circ s_e \circ L_{x^{-1}}$ に一致し、

$$s_x(y) = xy^{-1}x \qquad (y \in G)$$

が成り立つ。

等質性より、考える対蹠集合は単位元を含んでいると仮定しても一般性は失われない。A を G の単位元 e を含む対蹠集合とする。すると $x \in A$ に対して $x = s_e(x) = x^{-1}$ となるので、

$$x^2 = e \qquad (x \in A)$$

が成り立つ。さらに $x, y \in A$ に対して $y = s_x(y) = xy^{-1}x = xyx$ となり、

$$(*) \qquad xy = yx \qquad (x, y \in A)$$

が成り立つ。$x, y, z \in A$ に対して

$$s_z(xy) = z(xy)^{-1}z = zy^{-1}x^{-1}z = zyxz = yzzx = yx = xy$$

となるので、$A \cup \{xy\}$ も対蹠集合になる。したがって、A が極大対蹠集合ならば、A は部分群になる。さらに $(*)$ より A は可換部分群になる。有限 Abel 群の基本定理より A は $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積と群として同型になる。特に A が大対蹠集合になるときも同様になり、G の 2-number は 2 の冪乗になる。

例 6.2.11 $U(n)$ の単位元を含む極大対蹠集合 A をとる。上の議論より A は可換部分群になる。したがって、A の元は同時対角化可能になる。すなわち A は標準的な極大トーラス

$$T = \left\{ \left. \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} \right| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

の部分群と共役になる。$U(n)$ の極大対蹠集合を明らかにするためには $A \subset T$ と仮定してもよい。A の各元の位数は 2 であることと極大であることから、

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となって A が確定する。したがって、これは大対蹠集合になり、$\#_2 U(n) = 2^n$ が成り立つ。

上記の議論では $U(n)$ の 2-number だけではなく、大対蹠集合の形まで明らかになったが、2-number を求めるだけなら次のように計算することもできる。例 6.1.8 より $U(n)$ の極地の全体は

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{0 \le k \le n} G_k(\mathbb{C}^n)$$

だから、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2 U(n) = \sum_{0 \le k \le n} \#_2 G_k(\mathbb{C}^n) = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

連結コンパクト Lie 群の大対蹠部分群は、一般には極大トーラスに含まれるとはかぎらない。Chen-Nagano [3] の研究のきっかけになった Borel-Serre [1] では次の例を挙げている。

例 6.2.12 3 次回転群 $SO(3)$ の部分群 A を次のように定める。三つの直交軸に関する回転角 π の回転と恒等変換からなる部分集合を A で表す。これらの直交軸を定める正規直交基底による表現行列は対角成分の二つが -1 であり一つが 1 である対角行列三つと単位行列になる。

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

これは $SO(3)$ の大対蹠部分群になることがわかり、$\#_2 SO(3) = 4 = 2^2$ となる。A を含む $SO(3)$ の極大トーラスは存在しない。Riemann 多様体として $SO(3)$ は $\mathbb{R}P^3$ と同型になり、$\mathbb{R}P^3 = G_1(\mathbb{R}^4)$ だから例 6.2.2 からでも $\#_2 SO(3) = 4$ を得る。

6.3 対称 R 空間の対蹠集合

$\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ には G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定めておく。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。定理 5.2.1 より J を通る G 軌道 $G \cdot J$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になり、逆にコンパクト型 Hermite 対称空間はこのように表現される。

定理 6.3.1 (Sánchez[7], Tanaka-T.[12]) 上記設定のもとで $M = G \cdot J$ とする。$X \in M$ における M の点対称を s_X で表す。$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ である。さらに以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ 内の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になる。

証明の概略 $X \in M$ に関する Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_X + \mathfrak{m}_X, \quad \mathfrak{k}_X = \mathfrak{z}(X), \quad \mathfrak{m}_X = [X, \mathfrak{g}]$$

となる。$\mathrm{ad}X$ は $\mathfrak{m}_X$ の概複素構造を定め、

$$s_X(Y) = e^{\pi \mathrm{ad}X} Y \quad (Y \in M)$$

が成り立つ。これより、$X, Y \in M$ が $[X, Y] = 0$ を満たすならば、$s_X(Y) = Y$ が成り立つことがわかる。逆に $s_X(Y) = Y$ とすると $e^{\pi \mathrm{ad}X} Y = Y$ となり $Y \in \mathfrak{k}_X = \mathfrak{z}(X)$ を得る。これより $[X, Y] = 0$ が成り立つ。以上より、$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ であることがわかった。S を M の任意の対蹠集合とする。上で示したことより任意の $X, Y \in S$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つ。S の張る $\mathfrak{g}$ の部分空間を $S_{\mathbb{R}}$ で表すと、$S_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の可換 Lie 部分環になる。そこで、$S_{\mathbb{R}}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ をとる。すると $S \subset M \cap \mathfrak{t}$ が成り立つ。極大可換 Lie 部分環の共役性より、(A) と (B) が成り立つことがわかる。さらに大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ と表現できる。

定理 6.3.2 (Tanaka-T.[12]) $\tau : M \to M$ をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換とし、τ の不動点集合として M の実形 L が定まっているとする。

$$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定する。I_τ から定まる $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ とする。このとき、$L = M \cap \mathfrak{p}$ が成り立つ。さらに L に対して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

L の大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は I_τ から定まる対称対の Weyl 群の軌道になる。

証明の概略　定理 5.3.9 の証明の後半で示したことを利用すると

$$\tau(x) = -dI_\tau(x) \quad (x \in M)$$

がわかる。これより

$$L = \{x \in M \mid \tau(x) = x\} = M \cap \mathfrak{p}$$

を得る。

S を L の任意の対蹠集合とする。任意の $X, Y \in S$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つ。S の張る $\mathfrak{p}$ の部分空間を $S_\mathbb{R}$ で表すと、$S_\mathbb{R}$ は $\mathfrak{p}$ の可換部分空間になる。そこで、$S_\mathbb{R}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。すると $S \subset M \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ。極大可換 Lie 部分空間の $F(I_\tau, G)$ による共役性より、(A) と (B) が成り立つことがわかる。さらに大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ と表現できる。

系 6.3.3 (Tanaka-T.[12])　対称 R 空間の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

証明　定理 5.3.9 より対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になり、定理 6.3.2 より (A) と (B) が成り立つ。

$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合は性質 (A) を満たさないことがわかる ([12])。この概略を以下で説明する。$SU(4)$ の中心 Z は

$$Z = \{\pm 1_4, \pm i 1_4\} \cong \mathbb{Z}_4$$

となる。$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の単位元を e で表すと

$$F(s_e, \mathrm{Ad}(SU(4))) = \{g \in \mathrm{Ad}(SU(4)) \mid g^2 = e\} = \mathrm{Ad}\{x \in SU(4) \mid x^2 \in Z\}.$$

$T = S(U(1)^4)$ とおくと、T は $SU(4)$ の極大トーラスになる。

$$\{x \in SU(4) \mid x^2 \in Z\} = \bigcup_{g \in SU(4)} g\{t \in T \mid t^2 \in Z\}g^{-1}$$

が成り立つ。

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{4}i} & & & \\ & e^{\frac{\pi}{4}i} & & \\ & & e^{\frac{\pi}{4}i} & \\ & & & e^{-\frac{3\pi}{4}i} \end{bmatrix}$$

によって $I, J \in T$ を定めると、I, J の成分を置換したもの全体が $\{t \in T \mid t^2 \in Z\}$ に一致することがわかる。これより

$$\begin{aligned} M_0^+ &= \{e\}, \\ M_1^+ &= \mathrm{Ad}\{gIg^{-1} \mid g \in SU(4)\}, \\ M_2^+ &= \mathrm{Ad}\{gJg^{-1} \mid g \in SU(4)\} \end{aligned}$$

とおくと

$$F(s_e, \mathrm{Ad}(SU(4))) = M_0^+ \cup M_1^+ \cup M_2^+$$

がわかり、これらが $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の極地の全体になる。$SU(4)$ の共役作用に関する I, J の固定部分群を求めることにより、

$$\begin{aligned} M_1^+ &\cong (SU(4)/S(U(2) \times U(2)))/\mathbb{Z}_2 \cong G_2(\mathbb{C}^4)/\mathbb{Z}_2 \cong G_2(\mathbb{R}^6), \\ M_2^+ &\cong SU(4)/S(U(3) \times U(1)) \cong G_1(\mathbb{C}^4) \end{aligned}$$

を得る。これらより

$$\#_2 M_1^+ = \binom{6}{2} = 15, \qquad \#_2 M_2^+ = \binom{4}{1} = 4.$$

M_1^+ の大対蹠集合 A_1 をとると、$\# A_1 = 15$ である。$\{e\} \cup A_1$ は $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合になり

$$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) \geq 1 + \# A_1 = 16.$$

他方、

$$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) \leq \#_2 M_0^+ + \#_2 M_1^+ + \#_2 M_2^+ \leq 1 + 15 + 4 = 20.$$

$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4))$ は 2 の冪になるため、$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) = 16 = 2^4$ を得る。よって、$\{e\} \cup A_1$ は $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の大対蹠集合である。特に極大になり部分群になる。J の対角成分を置換したもの全体の Ad による像を A_2 で表すと、$\# A_2 = 4$ となり A_2 は M_2^+ の大対蹠集合であることがわかる。A_2 の生成する部分群を $\tilde{A}_2$ で表すと、

$$\tilde{A}_2 = \{e\} \cup A_2 \cup \mathrm{Ad} \left\{ \begin{bmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{bmatrix} \right\}$$

となって、$\tilde{A}_2$ は対蹠的部分群になる。$\mathrm{Ad}(J)$ の中心化部分群は $\mathrm{Ad}(S(U(3)\times U(1))$ になることがわかり、A_2 の中心化部分群は T に一致することがわかる。これより $\tilde{A}_2$ の中心化部分群も T に一致する。$\tilde{A}_2$ を含む対蹠集合 A が存在すれば、A は $\tilde{A}_2$ の中心化部分群に含まれるので T に含まれる。$\#_2 T = 2^3 = 8$ であり、$\#\tilde{A}_2 = 8$ だから、$\tilde{A}_2 = A$ となって、$\tilde{A}_2$ は極大対蹠集合になる。特に $\tilde{A}_2$ を含む大対蹠集合は存在しない。よって条件 (A) は成り立たない。$\mathrm{Ad}(SU(4))$ に対して条件 (B) は成り立つことがわかる。

6.4　コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉

この節の内容はおもに Tanaka-T.[11] に基づいている。

定義 6.4.1 多様体 X の部分多様体 Y_1, Y_2 に対して、任意の $x \in Y_1 \cap Y_2$ について $T_xX = T_xY_1 + T_xY_2$ が成り立つとき、Y_1 と Y_2 は**横断的に交わる**という。

定理 6.4.2 ([11]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

証明の概略　定理 5.1.12 よりコンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は正になる。命題 5.3.6 より L_1 と L_2 は交わる。$o \in L_1 \cap L_2$ と仮定しても一般性は失われない。o 以外の $p \in L_1 \cap L_2$ に対して、o, p は L_1 と L_2 において対蹠点になることを証明すれば十分である。

o, p を含む L_i の極大トーラス A_i をとる。さらに、A_i を含む M の極大トーラス A_i' をとる。M の制限ルート系によって $A_1' \cap A_2'$ を記述でき、さらに A_i が実形の極大トーラスであることから、o, p は対蹠点の関係にあることがわかる。したがって、L_1, L_2 においても対蹠点の関係にある。

定理 6.4.2 をもとにして、実形の交叉を詳しく調べるために準備をする。

補題 6.4.3 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L を原点 o を通る M の実形とする。M の o に関する極地 M^+ が $L \cap M^+ \neq \emptyset$ を満たすならば、$L \cap M^+$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 M^+ の実形になる。[2]

証明の概略　実形 L を定める M の対合的反正則等長変換を τ で表すと、$\tau \circ s_o = s_o \circ \tau$ が成り立つ。任意の $x \in F(s_o, M)$ に対して、$s_o(\tau(x)) = \tau(s_o(x)) = \tau(x)$ となり、$\tau(F(s_o, M)) = F(s_o, M)$ を得る。$p \in L \cap M^+$ をとる。$\tau(p) = p$ となり $\tau(M^+) = M^+$ が成り立つ。したがって、τ は M^+ の対合的反正則等長変換を誘導し、$L \cap M^+$ は M^+ の実形になる。

次の補題はコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉の性質を各極地の実形の交叉の性質に帰着できることを示している。

[2] M^+ がコンパクト型 Hermite 対称空間であることは、命題 6.1.11 より従う。

補題 6.4.4 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、M の原点 o に関する極地を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

と表す。

(1) L を M の原点 o を通る実形とすると、L の極地は

$$F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

となり、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) L_1, L_2 を M の原点 o を通り横断的に交わる実形とすると、次の等式が成り立つ。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\},$$
$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\}.$$

証明 (1) L は o を通る全測地的部分多様体だから、

$$F(s_o, L) = L \cap F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

となる。補題 6.4.3 より各 $L \cap M_j^+$ は空でなければ M_j^+ の実形になり、特に連結になる。よって $L \cap M_j^+$ は L の極地になる。定理 5.3.9 より L は対称 R 空間になり、定理 6.2.7 より次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) 定理 6.4.2 より $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。$L_1 \cap L_2$ は M の対蹠集合でもあるので、$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$ が成り立つ。したがって、次の等式を得る。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\}$$
$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\}.$$

定理 6.4.5 ([11]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2, L_1', L_2' を M の実形とする。さらに、L_1, L_1' は合同であり、L_2, L_2' も合同であると仮定する。L_1, L_2 が横断的に交わり、L_1', L_2' も横断的に交わるならば、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1' \cap L_2')$ が成り立つ。

証明の概略　定理の証明は次の主張の証明に帰着する。

(I) L_1, L_2 を M の実形とし、$g \in I_0(M)$ とする。L_1, L_2 は横断的に交わり、L_1, gL_2 も横断的に交わるとき、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap gL_2)$ が成り立つ。

さらに (I) の証明は次の主張の証明に帰着する。

(II) L_1, L_2 を M の実形とし、$o \in L_1 \cap L_2$ をとる。$k \in K = \{\phi \in I_0(M) \mid \phi(o) = o\}$ とする。L_1, L_2 は横断的に交わり、L_1, kL_2 も横断的に交わるとき、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$ が成り立つ。

以下で $\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$ を示す。

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

を極地とする。補題 6.4.4 の (2) より

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\},$$
$$L_1 \cap kL_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+)\right\}$$

となり

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\},$$
$$\#(L_1 \cap kL_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+)\right\}.$$

$kM_j^+ = M_j^+$ だから、$k(L_2 \cap M_j^+) = kL_2 \cap M_j^+$ となり、$L_2 \cap M_j^+$ と $kL_2 \cap M_j^+$ は各 j について同時に空になるか同じ一点になるかまたは M_j^+ 内の合同な実形になる。一番目、二番目の場合は $L_2 \cap M_j^+ = kL_2 \cap M_j^+$ となり、

$$(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) = (L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+).$$

したがって、

$$\#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} = \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+)\}.$$

三番目の場合はコンパクト型 Hermite 対称空間 M_j^+ において極地をとることにより上記の議論を続ける。この操作を有限回繰り返すと、極地の次元は必ず小さくなるので、一番目、二番目の場合だけになり (I) の結論

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$$

が成り立つことがわかる。

系 6.4.6 ([12]) 定理 6.4.5 の設定にさらに $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ という条件を加えると、$L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同になる。

後で述べる定理 6.5.1 の (2) は上の系の条件を満たしている。

定理 6.4.7 ([11]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

証明の概略 定理 6.4.2 より、$L_1 \cap L_2$ は L_1, L_2 の対蹠集合になるので、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ を示せばよい。

$o \in L_1 \cap L_2$ としても一般性は失われない。補題 6.4.4 の (2) より

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$
$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}$$

となる。L_i の極地は補題 6.4.4 の (1) より

$$F(s_o, L_i) = \bigcup_{j=0}^{r} L_i \cap M_j^+$$

となり、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L_i = \sum_{j=0}^{r} \#_2 (L_i \cap M_j^+).$$

L_1 と L_2 は合同だから $\#_2 L_1 = \#_2 L_2$ であり、各 j について $L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ も M_j^+ 内で合同になる。よって、$L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ は各 j について同時に空になるか、同じ一点になるか、または M_j^+ 内の合同な実形になる。一番目の場合は、

$$\# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\} = 0 = \#(L_i \cap M_j^+) = \#_2 (L_i \cap M_j^+).$$

二番目の場合は、

$$\#\left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\} = 1 = \#(L_i \cap M_j^+) = \#_2(L_i \cap M_j^+).$$

三番目の場合はコンパクト型 Hermite 対称空間 M_j^+ において極地をとることにより上記の議論を続ける。この操作を有限回繰り返すと、極地の次元は必ず小さくなるので、一番目、二番目の場合だけになり

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$$

が成り立つことがわかる。

6.5　既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉

この節の内容もおもに Tanaka-T.[11] に基づいている。

定理 6.5.1 ([11]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

証明の概略　二つの実形が合同な場合は定理 6.4.7 によって、交叉は実形の大対蹠集合になることがわかっているので、実形が合同ではない場合を考えればよい。既約コンパクト型 Hermite 対称空間と合同ではない二つの実形の組合せは以下のとおりであることが、Leung [6], Takeuchi [9] からわかる。

M	L_1	L_2
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$
$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$	$G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T \cdot E_6$	$T \cdot (E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

これらについて個別に定理の主張が成り立つことを確かめる。

定理 6.5.2 $0 \leq k \leq l \leq [n/2]$ とする。$Q_n(\mathbb{C})$ 内の $S^{k,n-k}$ と合同な実形 L_1 と $S^{l,n-l}$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm e_1 \wedge e_{k+2}, \ldots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。したがって、$L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2(k+1) \leq 2(l+1) = \#_2 L_2.$$

さらに $k = l = [n/2]$ ならば、$L_1 \cap L_2$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の大対蹠集合になる。

定理 6.5.3 $G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$ 内の $G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$ と合同な実形 L_1 と $G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \binom{m+q}{q} \leq \binom{2m+2q}{2q} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.4 $G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ 内の $U(n)$ と合同な実形 L_1 と $G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^n \leq \binom{2n}{n} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.5 $G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ 内の $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同な実形 L_1 と $U(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m, \qquad \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\} = \binom{2m}{m}$$

これより、$m = 1$ のとき $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ が成り立ち、$m \geq 2$ のとき $\#(L_1 \cap L_2) < \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ が成り立つ。

定理 6.5.6 $Sp(2m)/U(2m)$ 内の $Sp(m)$ と合同な実形 L_1 と $U(2m)/O(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^m \leq 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.7 $SO(4m)/U(2m)$ 内の $U(2m)/Sp(m)$ と合同な実形 L_1 と $SO(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^m \leq 2^{2m-1} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.8 $EIII = E_6/T \cdot Spin(10)$ 内の $FII = F_4/Spin(9)$ と合同な実形 L_1 と $G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 3 < 27 = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.9 $EVII = E_7/T \cdot E_6$ 内の $(T \times EIV)/\mathbb{Z}_3$ と合同な実形 L_1 と $AII(4)/\mathbb{Z}_2$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 8 < 56 = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.2 の証明の概略　$Q_n(\mathbb{C})$ の極地は

$$F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\} \cup Q_{n-2}(\mathbb{C})$$

となる。ただし、$F(s_o, Q_1(\mathbb{C})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\}$ であり、

$$F(s_o, Q_2(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_2, \pm e_3 \wedge e_4\}$$

である。L を o を通る $Q_n(\mathbb{C})$ の実形とする。L が $S^{0,n}$ と合同ならば、

$$L \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o, \bar{o}\}$$

となり、L が $S^{k,n-k}$ $(1 \leq k \leq [n/2])$ と合同ならば

$$L \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o, \bar{o}\} \cup L'$$

となり、L' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{k-1,n-k-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になることがわかる。

上記の交叉の情報を利用して、定理を k に関する帰納法で証明する。命題 5.3.6 より $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ となる。そこで $o = e_1 \wedge e_{k+2} \in L_1 \cap L_2$ としても一般性は失われない。$k = 0$ の場合は

$$L_1 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_2\}$$

となる。定理 6.4.2 より $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合になり $L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, Q_n(\mathbb{C}))$ が成り立つ。

$$L_2 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) \supset \{\pm e_1 \wedge e_2\}$$

となり、

$$L_1 \cap L_2 = \{\pm e_1 \wedge e_2\}.$$

$k-1$ の場合に定理の主張が成り立つと仮定して、k の場合にも成り立つことを示す。

$$L_1 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_{k+2}\} \cup L_1'$$

となり、L_1' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{k-1,n-k-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になる。L_2 についても

$$L_2 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_{k+2}\} \cup L_2'$$

となり、L_2' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{l-1,n-l-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になる。帰納法の仮定より $L_1' \cap L_2'$ は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で

$$\{\pm e_2 \wedge e_{k+3}, \dots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。したがって、$L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm e_1 \wedge e_{k+2}, \dots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。これは $S^{k,n-k}$ の大対蹠集合になるので、$L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2(k+1) \leq 2(l+1) = \#_2 L_2.$$

さらに $k = l = [n/2]$ ならば、$L_1 \cap L_2$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の大対蹠集合になる。

注意 6.5.10 複素二次超曲面の実形の交叉に関する論文 [13] を書いた時点では二つの実形の交叉が対蹠集合になることはあらかじめわかっていなかったため、複素二次超曲面の二つの極に関する最小軌跡の交叉が極地になるという特殊性を利用して定理 6.5.2 を証明した。それに対して上記の証明は実形の交叉の対蹠性があらかじめわかっているので、議論を数学的帰納法にのせる部分が [13] の証明よりも簡単になっている。

例 6.1.3 でみたように、既約コンパクト型 Hermite 対称空間の極地は一般には既約にはならない。実形の交叉を極地における実形の交叉に帰着させるためには、たとえ既約コンパクト型 Hermite 対称空間を対象とする場合でも、極地に現れる既約ではないコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する情報が必要になる。それらを扱うために次の補題 6.5.11 と命題 6.5.12 を準備しておく。

補題 6.5.11 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、$\tau : M \to M$ を対合的反正則等長変換とする。$(x, y) \mapsto (\tau(y), \tau(x))$ は $M \times M$ の対合的反正則等長変換になり、不動点集合である実形は次で与えられる。

$$D_\tau(M) = \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}.$$

コンパクト型 Hermite 対称空間 M は $M \times M$ の実形になることを補題 6.5.11 は示している。Leung [6] の 4. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces と Sánchez [7] の Proposition 3 では補題 6.5.11 の実形を想定していないように思われる。

命題 6.5.12 (1) M_1, M_2 をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_1' を M_1 の二つの実形、L_2, L_2' を M_2 の二つの実形とする。このとき、$L_1 \times L_2$ と $L_1' \times L_2'$ は $M_1 \times M_2$ の二つの実形になり、$(L_1 \times L_2) \cap (L_1' \times L_2') = (L_1 \cap L_1') \times (L_2 \cap L_2')$ が成り立つ。L_1, L_1' が横断的に交わり L_2, L_2' が横断的に交わるならば、$L_1 \times L_2$ と $L_1' \times L_2'$ も横断的に交わり $\#\{(L_1 \times L_2) \cap (L_1' \times L_2')\} = \#(L_1 \cap L_1')\#(L_2 \cap L_2')$ が成り立つ。

(2) L_1, L_2 をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の実形とし、$\tau : M \to M$ を対合的反正則等長変換とすると、次が成り立つ。

$$(L_1 \times L_2) \cap D_\tau(M) = \{(x, \tau(x)) \mid x \in L_1 \cap \tau^{-1}(L_2)\}.$$

$M \times M$ 内の実形 $L_1 \times L_2$ と $D_\tau(M)$ が横断的に交わることと L_1 と $\tau^{-1}(L_2)$ が横断的に交わることは同値になり、このとき

$$\#\{(L_1 \times L_2) \cap D_\tau(M)\} = \#\{L_1 \cap \tau^{-1}(L_2)\}.$$

ここで、$L_2 = (\tau_2, M)$ とすると、$\tau^{-1}(L_2) = F(\tau\tau_2\tau^{-1}, M)$ となり $\tau^{-1}(L_2)$ も M の実形である。

(3) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、$\tau_1, \tau_2 : M \to M$ を M の正則等長変換全体の単位連結成分の元によって共役な対合的反正則等長変換とすると、$D_{\tau_1}(M)$ と $D_{\tau_2}(M)$ は合同になる。さらに、$D_{\tau_1}(M)$ と $D_{\tau_2}(M)$ が横断的に交われば、$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2}(M)) = \#_2 M$ が成り立つ。

既約コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉を調べる際に、極地における実形の交叉は命題 6.5.12 の (1) と (2) の場合しか現れないが、今後一般のコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉を調べるために必要になる (3) も掲載した。

定理 6.5.3 の証明　q, m に関する帰納法で証明する。$q = m = 1$ のとき、$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ は複素二次超曲面 $Q_4(\mathbb{C})$ に同型であり、$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ 内の実形 $G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$ と $G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ はそれぞれ $Q_4(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{0,4}$ と $S^{2,2}$ と同型になる。したがって、定理 6.5.2 より $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2 < 6 = \#_2 L_2.$$

次に一般の q, m について考える。$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2q}) \times G_{2q-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \leq j \leq 2q)$$

となる。さらに、$0 \leq j \leq 2q$ について

$$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q}) \cap M_j^+ = \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^q) \times G_{q-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases}$$

$$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q}) \cap M_j^+ = G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2q}) \times G_{2q-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m}).$$

したがって、帰納法の仮定より

$$\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \binom{q}{k}\binom{m}{q-k}.$$

補題 6.4.4 と例 6.2.6 で示した二項係数の関係式より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{q} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m}{q-k} \\ &= \binom{m+q}{q} = \#_2 L_1 < \binom{2m+2q}{2q} = \#_2 L_2.\end{aligned}$$

定理 6.5.4 の証明　$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \qquad (0 \leq j \leq n)$$

となる。$G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ と $G_{n-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ は正則等長的であることに注意する。$0 \leq j \leq n$ について

$$\begin{aligned}U(n) \cap M_j^+ &= D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)) \\ G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) \cap M_j^+ &= G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

したがって、補題 6.5.11 と定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} &= \#\{(G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)) \cap D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n))\} \\ &= \#_2 G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{j}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{j=0}^{n} \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n \\ &= \#_2 U(n) \leq \binom{2n}{n} = \#_2 G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}).\end{aligned}$$

定理 6.5.5 の証明　$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \times G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \leq j \leq 2m)$$

である。$G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})$ と $G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})$ は正則等長的であることに注意する。$0 \leq j \leq 2m$ について

$$\begin{aligned}G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) \cap M_j^+ &= \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \times G_{m-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases} \\ U(2m) \cap M_j^+ &= D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})).\end{aligned}$$

したがって、補題 6.5.11 と定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} &= \#\{(G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \times G_{m-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m)) \cap D_{\tau_{2k}}(G_{2k}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}))\} \\ &= \#_2 G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) = \binom{m}{k}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{m} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \\ &\leq \binom{2m}{m} = \#_2 G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) \leq 2^{2m} = \#_2 U(2m).\end{aligned}$$

ここで、$m = 1$ のときは

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^1 = \binom{2}{1} = \#_2 G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2) < 2^2 = \#_2 U(2).$$

$m \geq 2$ のときは

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) < 2^{2m} = \#_2 U(2m).$$

定理 6.5.6 の証明　$Sp(2m)/U(2m)$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \times G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \leq j \leq 2m)$$

である。$0 \leq j \leq 2m$ について

$$Sp(m) \cap M_j^+ = \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases}$$

$$(U(2m)/O(2m)) \cap M_j^+ = G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m}).$$

したがって、定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} &= \#\{G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \cap G_{2k}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m})\} \\ &= \#_2 G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) = \binom{m}{k}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 と例 6.2.9、6.2.10 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{m} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \\ &= \#_2 Sp(m) \leq 2^{2m} = \#_2 U(2m)/O(2m).\end{aligned}$$

定理 6.5.7 を証明するために、$SO(4m)/U(2m)$ の極地を求めると、これらの極地はすべて複素 Grassmann 多様体になり、定理 6.5.3、6.5.4、6.5.5 の結果を適用できる。これによって、今までと同様な手法で定理 6.5.7 を証明できる。

定理 6.5.8 と 6.5.9 を証明するためには、極地を求めそれらの性質を調べる準備が必要になるので、ここではその詳細は省略する。

参考文献

[1] A. Borel and J. P. Serre, Sur certains sousgroupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 128–139.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Duke Math. J. **44** (1977), 745–755.

[3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[4] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 1135–1151.

[6] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom. **14** (1979), 179–185.

[7] C. U. Sánchez, The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 893–900.

[8] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I. Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35 – 68.

[9] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J., (2) **36**, 293–314 (1984)

[10] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115** (1989), 43–46

[11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **64** (2012), 1297–1332.

[12] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math., **50** (2013), 161–169.

[13] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J., **62** no.3 (2010), 375–382.

[14] 田崎博之、Riemann 幾何学の基礎 (2003 年度筑波大学数理物質科学研究科) http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln2003/tsukuba.html

[15] 田崎博之、等質空間と形状空間 (2004 年度筑波大学数理物質科学研究科) http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln2004/tsukuba.html

索 引