対称空間入門(第3回)

— 大阪市立大学数学研究所連続講義 —
(数学院生談話会連続講義)

田崎博之

2011年度
(2012年3月7日–9日)

2010年度
(第1回 2010年11月11日–13日)
(第2回 2011年3月16日–18日)

はしがき

2010 年度から始めた連続講義「対称空間入門」の第 3 回目にして最終回でもある今回の講義では、コンパクト型 Hermite 対称空間とそれらを含む対称 R 空間を導入し、これらの基本的性質について解説します。前回まで Riemann 対称空間を扱っていましたが、今回は正則等長的な点対称を持つ Hermite 対称空間について特に詳しく説明します。コンパクト型 Hermite 対称空間と対称 R 空間は Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持つクラスです。コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になり、逆に対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になるという結果は、これらの対称空間の間の密接な関係を示しています。さらにこの結果はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉を調べるときに重要な役割を演じます。

次に対称空間の極地と対蹠集合に関する解説をします。極地とは Riemann 対称空間の点対称の不動点集合の連結成分のことで、Chen-Nagano [2] が導入した基本的な全測地的部分多様体です。各係数体の射影空間内の射影超平面は極地の例になっています。極地と対蹠集合は Riemann 対称空間の点対称から定まる概念ですので、すべての Riemann 対称空間に対して考えることができますが、コンパクト型 Hermite 対称空間と対称 R 空間の極地と対蹠集合は特に顕著な性質を持っています。コンパクト型 Hermite 対称空間と対称 R 空間は Lie 環に部分多様体として埋め込むことができ、点対称で固定される点と Lie 環の元として可換である点が対応します。このことから極大可換部分空間との交叉が大対蹠集合になることがわかり、極大可換部分空間の共役性から大対蹠集合の共役性が従います。これらに関する準備の後、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する研究 [11] と田中真紀子さんとの共同研究 [9]、[10] の結果を紹介します。コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形が横断的に交わるとき、その交叉は対蹠集合であるという結果を示すと、極地を使って交叉の詳しい性質を調べることが可能になります。特に既約コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交点数を完全に決定できます。

二つの実形の交叉は対蹠集合であるというこの講義ノートで述べた結果は、二つの実形に関する Floer ホモロジーの決定や交点数の評価と積分公式から Lagrange 部分多様体の体積の評価を導くという入江博さん、酒井高司さんとの共同研究 [4] に応用できました。この実形の交叉の対蹠性の拡張とその応用については現在も共同研究が進展中です。今後のこの方面の研究の進展にこの講義ノートが役に立てばと願っています。

連続講義の第 3 回目を可能にしていただいた大仁田義裕さんと橋本要さん、講義を聞いていただいた方々、特に遠方から講義に出席された方々、講義ノートの不備や修正案を講義の際に示していただいた入江博さん、井川治さん、酒井高司さん、この講義ノートのもとになっている共同研究を推し進めていただいた田中真紀子さんに感謝しています。

2012 年 3 月 11 日

講義概要

Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持つものに対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間があります。これらの定義と基本的性質、対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の間の対応などについて解説します。次に Chen-Nagano の導入した極地の基本的部分を説明します。これらを利用して対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合の基本的性質を導きます。

目 次

第5章　対称R空間

Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持つ対称 R 空間についてこの章で解説する。コンパクト型 Hermite 対称空間はさらに特別な対称 R 空間であるが、それだけではなく対称 R 空間全体とも密接な関係がある。

5.1　Hermite対称空間

定義 5.1.1 M を Hermite 多様体とする。任意の $x \in M$ に対して M の対合的正則等長変換 s_x が存在して、x は s_x の孤立不動点になるとき、M を **Hermite 対称空間**と呼ぶ。

定義より Hermite 対称空間は Riemann 対称空間になる。

命題 5.1.2 Hermite 対称空間 M の正則等長変換全体の単位連結成分を G で表す。G は M に推移的に作用し、$o \in M$ をとり $K = \{k \in G \mid ko = o\}$ と定めると、(G, K) は M を定める Riemann 対称対になる。さらに、M は Kähler 多様体になる。

Riemann 対称対から Riemann 対称空間を定める [12] の定理 2.1.5 に対応する Hermite 対称空間に関する結果は次の命題である。

命題 5.1.3 [12] の定理 2.1.6 の設定に加えて原点 o の接ベクトル空間の直交変換 J_o が存在して、$J_o^2 = -1$ を満たし、J_o は $\mathrm{Ad}(K)$ の各元の作用と可換になると仮定する。このとき、J_o は一意的に G/K 上の G 不変概複素構造 J に拡張できる。さらに J は積分可能であり、G/K は Hermite 対称空間になる。

定理 5.1.4 Hermite 対称空間 M の正則等長変換全体の単位連結成分 G が半単純になると仮定する。$o \in M$ をとる。$K = \{k \in G \mid ko = o\}$ とおき、K に対応する Lie 環を $\mathfrak{k}$ で表す。このとき、M の o における概複素構造 J_o は $\{\mathrm{ad}T \mid T \in \mathfrak{k}\}$ の中心に含まれ、点対称 s_o は K の中心の単位連結成分に含まれる。

上記の結果より、正則等長変換群の単位連結成分が半単純である場合、Hermite 対称空間の概複素構造を見つけだすためにはイソトロピー部分群の Lie 環の中心を調べればよい。

例 5.1.5 コンパクト型対称対 $(SU(r+n), S(U(r)\times U(n)))$ は複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ を定める。イソトロピー部分群

$$S(U(r)\times U(n)) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right] \middle| A\in U(r),\ B\in U(n),\ \det A \det B = 1 \right\}$$

の Lie 環

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(r)\times \mathfrak{u}(n)) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} X & 0 \\ 0 & Y \end{array} \right] \middle| X\in \mathfrak{u}(r),\ Y\in \mathfrak{u}(n),\ \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y = 0 \right\}$$

の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} \frac{it}{r}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{it}{n}1_n \end{array} \right] \middle| t\in\mathbb{R} \right\}.$$

対称対による Lie 環の分解を

$$\mathfrak{su}(r+n) = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(r)\times\mathfrak{u}(n)) + \mathfrak{m}$$

と表すと

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \middle| X\in M_{r,n}(\mathbb{C}) \right\}$$

が成り立つ。$\mathrm{ad}(\mathfrak{z}(\mathfrak{k}))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は

$$\left[\left[\begin{array}{cc} \frac{it}{r}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{it}{n}1_n \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{i(r+n)t}{rn}X \\ -(\frac{i(r+n)t}{rn}X)^* & 0 \end{array} \right]$$

となる。$\mathfrak{m}$ を $M_{r,n}(\mathbb{C})$ と同一視すると、上記の $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ の元の作用は $i(r+n)t/rn$ 倍になる。そこで $t = rn/(r+n)$ とおくと、その作用は i 倍になる。これらの計算から

$$J = \left[\begin{array}{cc} \frac{in}{r+n}1_r & 0 \\ 0 & -\frac{ir}{r+n}1_n \end{array} \right] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$$

とおくと

$$(\mathrm{ad}J)X = iX, \quad (\mathrm{ad}J)^2X = -X \qquad (X\in\mathfrak{m})$$

が成り立つ。さらに、$\mathrm{ad}J$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、[12] の 1.4 Grassmann 多様体で定めた $\mathfrak{m}$ 上の内積に関して等長的になることがわかる。したがって、$\mathrm{ad}J$ は複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の概複素構造を定め、これによって $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ は Hermite 対称空間になることがわかる。

$r=1$ の場合は $G_1(\mathbb{C}^{1+n})$ は n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ になる。$\mathbb{C}P^n$ の元は $\mathbb{C}^{1+n}$ 内の複素 1 次元部分空間だから、生成ベクトル $z = (z_1,\dots,z_{n+1}) \neq 0$ で表すことができる。$z, w\in\mathbb{C}^{1+n} - \{0\}$ が $\mathbb{C}P^n$ の同じ元を定めるための必要十分条件は $\mathbb{C}z = \mathbb{C}w$ である。これより z の成分に関する同次多項式 $f(z)$ から $\mathbb{C}P^n$ の部分集合 $\{\mathbb{C}z\in\mathbb{C}P^n \mid f(z)=0\}$ が定まる。たとえば、$\{\mathbb{C}z\in\mathbb{C}P^n \mid z_{n+1}=0\}$ は $\mathbb{C}P^{n-1}$ と Hermite 多様体として同型になる。

例 5.1.6 $r+n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{r+n}$ 内の r 次元有向部分空間全体を $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ で表す。$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ を**有向実 Grassmann 多様体**と呼ぶ。有向部分空間に対して向きを考えない部分空間を対応させることで、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ から $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ への二重被覆写像が定まる。これによって、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ にも rn 次元多様体構造が定まる。

$SO(r+n)$ は $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に推移的に作用する。$\mathbb{R}^r$ に標準的な向きを定めた有向部分空間を o で表す。

$$\{k \in SO(r+n) \mid ko = o\} = SO(r) \times SO(n)$$

が成り立つことがわかる。これらによって、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $SO(r+n)/SO(r)\times SO(n)$ と微分同型になる。さらに、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の場合と同様に $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に Riemann 計量を定め Riemann 対称空間になることもわかる。

有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は外積 $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ への自然な埋め込みを持つ。$x \in \tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に対して、x の正の向きの正規直交基底 $x_1, \dots, x_r$ をとる。x に $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ を対応させることで $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ から $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ への写像が定まる。この写像の像

$$\left\{ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n} \;\middle|\; x_1, \dots, x_r \text{ は } \mathbb{R}^{r+n} \text{ 内の正規直交系} \right\}$$

は Euclid 空間 $\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+n}$ の部分多様体だから、$\tilde{G}_r(\mathbb{R}^{r+n})$ と同一視すると便利なことがある。

$r=2$ の場合、イソトロピー部分群 $SO(2)\times SO(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(2)\times\mathfrak{o}(n)$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{o}(2) \times \{0\}.$$

Riemann 対称対による Lie 環の分解を

$$\mathfrak{o}(2+n) = \mathfrak{o}(2) \times \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}$$

と表すと

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; X \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \right\}.$$

そこで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$$

とおくと

$$(\mathrm{ad}A)^2 X = -X \qquad (X \in \mathfrak{m})$$

が成り立つ。さらに、$\mathrm{ad}A$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、[12] の 1.4 Grassmann 多様体で定めた $\mathfrak{m}$ 上の内積に関して等長的になることがわかる。したがって、$\mathrm{ad}A$ は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$

の概複素構造を定め、これによって $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ は Hermite 対称空間になることがわかる。

$v \in \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ に対して、v の正の向きの正規直交基底 x, y をとる。$z = x + iy \in \mathbb{C}^{2+n}$ とおく。v に $\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^{1+n}$ を対応させることで $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ から $\mathbb{C}P^{1+n}$ への写像が定まる。この写像の像は

$$\{\mathbb{C}(x+iy) \in \mathbb{C}P^{1+n} \mid x, y \text{ は } \mathbb{R}^{2+n} \text{ 内の正規直交系 }\}$$

となる。他方

$$\sum_{a=1}^{2+n} z_a^2 = \sum_{a=1}^{2+n}(x_a + iy_a)^2 = \sum_{a=1}^{2+n}(x_a^2 - y_a^2 + 2ix_a y_a) = 0$$

となるので、上記の写像の像は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{1+n}$ 内の複素二次超曲面

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}z \in \mathbb{C}P^{1+n} \mid z_1^2 + \cdots + z_{2+n}^2 = 0\}$$

に含まれる。さらに、これらは一致することもわかる。そこで、これらを同一視して $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ も複素二次超曲面と呼ぶ。

例 5.1.7 実線形同型写像 $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\sigma(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0 + x_1 i - x_2 j - x_3 k \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

によって定める。すると

$$iqi^{-1} = \sigma(q) \qquad (q \in \mathbb{H})$$

が成り立つ。四元数行列の各成分に σ を作用させることにより、σ の四元数行列への作用を定める。$I = i1_n$ とおくと

$$IXI^{-1} = \sigma(X) \qquad (X \in M_n(\mathbb{H}))$$

が成り立つ。これより σ を $Sp(n)$ に制限すると $Sp(n)$ の対合的自己同型写像になる。これも σ で表す。$F(\sigma, Sp(n)) = U(n)$ となり、$(Sp(n), U(n))$ はコンパクト型 Riemann 対称対になる。σ の誘導する Lie 環 $\mathfrak{sp}(n)$ の対合的自己同型写像も σ に一致する。これの ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{sp}(n) \mid X \in M_n(\mathbb{R}j + \mathbb{R}k)\}$$

である。$X \in \mathfrak{m}$ に対して $IX = \sigma(X)I = -XI$ となる。そこで $J = I/2 \in \mathfrak{u}(n)$ とおくと

$$(\mathrm{ad}J)X = \frac{1}{2}(IX - XI) = IX, \quad (\mathrm{ad}I)^2 X = I^2 X = -X.$$

これより $Sp(n)/U(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間であることがわかる。

補題 5.1.8 M を Hermite 対称空間とする。このとき、M の等長変換全体の単位連結成分 G' が半単純になることと M の正則等長変換全体の単位連結成分 G が半単純になることは同値になる。さらにこの場合は $G = G'$ が成り立つ。

補題 5.1.8 より、Riemann 対称空間のコンパクト型と非コンパクト型の定義 ([12] の定義 4.3.1) をそのまま Hermite 対称空間に対しても利用できる。

定理 5.1.9 コンパクト型 Hermite 対称空間は単連結になる。

単連結コンパクト型対称空間の既約対称空間の Riemann 積への分解に関する定理 ([12] の定理 4.3.7) に対応するコンパクト型 Hermite 対称空間の分解は次のようになる。非コンパクト型 Hermite 対称空間の場合も同様である。

命題 5.1.10 コンパクト型 Hermite 対称空間に対する [12] の定理 4.3.7 の分解の各因子はコンパクト型既約 Hermite 対称空間になる。非コンパクト型 Hermite 対称空間に対する [12] の定理 4.3.7 の分解の各因子は非コンパクト型既約 Hermite 対称空間になる。

定義 5.1.11 M を Hermite 多様体とする。M の 0 ではない接ベクトル X に対して X の張る複素 1 次元部分空間は実 2 次元部分空間になりその断面曲率を X の**正則断面曲率**と呼ぶ。

定理 5.1.12 コンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は正になる。非コンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は負になる。

定義 5.1.13 D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする。任意の $x \in D$ に対して D の対合的正則同型 s_x が存在して、x は s_x の孤立不動点になるとき、D を**有界対称領域**と呼ぶ。

定理 5.1.14 有界対称領域にはある Hermite 計量が存在して、非コンパクト型 Hermite 対称空間になる。逆に非コンパクト型 Hermite 対称空間に対して、それと正則同型になる有界対称領域が存在する。

5.2 コンパクト型 Hermite 対称空間

定理 5.2.1 $\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ に G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。このとき、J を通る G 軌道 $M = G \cdot J$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。逆にコンパクト型 Hermite 対称空間はこのように表現される。

証明の概略　$K=\{k\in G \mid kJ=J\}$ とすると、M は G/K と微分同型であり、K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g} \mid [J,X]=0\}=\ker(\mathrm{ad}J)$$

が成り立つ。特に $J\in\mathfrak{k}$ である。$\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ とすると

$$\mathfrak{m}=\{[J,X] \mid X\in\mathfrak{g}\}=\mathrm{im}(\mathrm{ad}J)$$

が成り立つ。$(\mathrm{ad}J)^3=-\mathrm{ad}J$ より $\sigma=e^{\pi\mathrm{ad}J}$ とおくと、σ は $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型になる。このとき、$\mathfrak{k}$ は σ の固有値 1 に対する固有空間であり、$\mathfrak{m}$ は σ の固有値 -1 に対する固有空間である。σ の誘導する G の対合的自己同型も σ で表すことにすると、これによって (G,K) は Riemann 対称対になる。さらに $\mathfrak{m}$ は $\mathrm{ad}J$ 不変になり、$(\mathrm{ad}J|_{\mathfrak{m}})^2=-1$ が成り立つ。$\mathrm{ad}J|_{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{m}$ の等長線形変換になることもわかる。したがって、$M=G/K$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。

逆に、M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の等長変換全体の単位連結成分 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。M の複素構造を定める $\mathfrak{g}$ の元 J は $(\mathrm{ad}J)^3=-\mathrm{ad}J$ を満たし、M は $\mathrm{Ad}(G)J$ と微分同型になることがわかる。

定理 5.2.1 よりコンパクト型 Hermite 対称空間の随伴軌道表示の複素等質空間による表示を得る。そのために岩澤分解を準備する。

$\mathfrak{g}_0$ を実半単純 Lie 環とし、$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ をその Cartan 分解とする。$\mathfrak{p}_0$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}_0$ の極大可換部分環 $\mathfrak{h}_0$ をとる。$\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ は複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になり、[12] の定理 3.2.5 の $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}=\sqrt{-1}\mathfrak{k}_0\cap\mathfrak{h}_0+\mathfrak{a}$ で与えられる。$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の部分空間 $\mathfrak{a}$ の基底を先に並べることにより、$(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を入れる。$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ に関するルート系を Δ で表す。$\alpha\in\Delta$ のルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表す。辞書式順序により $\Delta^+=\{\alpha\in\Delta \mid \alpha>0\}$ を定めることができる。

$$P_+=\{\alpha\in\Delta^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{a}}\neq 0\}$$

によって P_+ を定め、

$$\mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in P_+}\mathfrak{g}_\alpha,\quad \mathfrak{n}_0=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{n},\quad \mathfrak{s}_0=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0$$

とおく。すると、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の冪零 Lie 部分環、$\mathfrak{n}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の冪零 Lie 部分環、$\mathfrak{s}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の可解 Lie 部分環になる。

定理 5.2.2 (岩澤分解)　上記設定のもとで、$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0$ は直和になる。これを $\mathfrak{g}_0$ の**岩澤分解**と呼ぶ。(G,K) を $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}_0)$ に対応する Riemann 対称対とし、$\mathfrak{a},\mathfrak{n}_0$ に対応する G の連結 Lie 部分群をそれぞれ A,N とする。このとき

$$K\times A\times N\to G\ ;\ (k,a,n)\mapsto kan$$

は微分同型写像になる。これを G の**岩澤分解**と呼ぶ。

上記設定のもとで、

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{a}^* = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

とおくと、$\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形、$\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{u}$ の極大可換部分環、$\mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の冪零 Lie 部分環になる。

定理 5.2.3 (岩澤分解) 上記設定のもとで、$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ を実 Lie 環とみなしたとき $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の岩澤分解になる。$G^{\mathbb{C}}$ を G の複素化とする。$\mathfrak{u}, \mathfrak{a}^*, \mathfrak{n}_+$ に対応する $G^{\mathbb{C}}$ の連結 Lie 部分群をそれぞれ U, A^*, N_+ とする。このとき

$$U \times A^* \times N_+ \to G^{\mathbb{C}} \ ; \ (u, a, n) \mapsto uan$$

は $G^{\mathbb{C}}$ 実 Lie 群とみなしたときの岩澤分解になる。

注意 5.2.4 連結実半単純 Lie 群 G の複素化がつねに存在するとはかぎらないが、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ の複素化は存在することがわかる。

定理 5.2.1 はコンパクト半単純 Lie 環の特別な条件を満たす元の随伴軌道がコンパクト型 Hermite 対称空間になることを示している。次の命題は、コンパクト半単純 Lie 環の任意の元の随伴軌道は複素等質空間になることを示している。コンパクト半単純 Lie 環の元の随伴軌道は**複素旗多様体**と呼ばれていて、重要な複素等質空間の例を与えている。

命題 5.2.5 $\mathfrak{u}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$U = \mathrm{Int}(\mathfrak{u})$ とする。任意の 0 ではない元 $X \in \mathfrak{u}$ に対してその随伴軌道 $U \cdot X$ は複素等質空間の構造を持つ。

証明の概略　コンパクト半単純 Lie 環はあるコンパクト型 Riemann 対称空間の等長変換全体のなす Lie 群の Lie 環になり、対応する双対非コンパクト型 Riemann 対称空間に上記設定を適用できる。極大トーラスの共役性 ([12] の定理 2.2.4 と 2.3 節) より $H \in U \cdot X \cap \mathfrak{a}^*$ をとることができ、

$$U_H = \{u \in U \mid u \cdot H = H\}$$

とおくと $U \cdot X \cong U/U_H$ が成り立つ。U_H に対応する Lie 環 $\mathfrak{u}_H$ は

$$\mathfrak{u}_H = \{Z \in \mathfrak{u} \mid [H, Z] = 0\}$$

となり、

$$\mathfrak{u}_H + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \alpha(H) \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

は $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の連結複素 Lie 部分環になることがわかる。これより、$U_H A^* N_+$ は $U^{\mathbb{C}} = \mathrm{Int}(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}})$ の複素 Lie 部分群になる。さらに、$U/U_H \cong UA^*N_+/U_H A^* N_+ = U^{\mathbb{C}}/U_H A^* N_+$ が成り立つので、U/U_H は複素等質空間になる。

例 5.2.6 $\mathfrak{su}(r+n)$ の複素化は $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ になる。[12] の例3.2.4で定めた $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ は例 5.1.5 で定めた J を含む。例 3.2.4 で定めたルートに関して

$$\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(J) = 0\} = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq r\} \cup \{\alpha_{i,j} \mid r+1 \leq i \neq j \leq r+n\}.$$

$i < j$ のとき $\alpha_{i,j} > 0$ となるように辞書式順序を導入しておくと、

$$\{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha(J) \neq 0\} = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq r+n\}$$

となる。命題 5.2.5 の証明の概略中に定めた $\mathfrak{sl}(r+n,\mathbb{C})$ 内の複素 Lie 部分環を $\mathfrak{p}$ で表すと

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X \in M_r(\mathbb{C}), Y \in M(r,n;\mathbb{C}),\ Z \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Z = 0 \end{array} \right\}.$$

$SL(r+n,\mathbb{C})$ 内の対応する複素 Lie 部分群を P で表すと

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X \in M_r(\mathbb{C}), Y \in M(r,n;\mathbb{C}),\ Z \in M_n(\mathbb{C}) \\ \det X \det Z = 1 \end{array} \right\}$$

が成り立つ。したがって、次の同型を得る。

$$G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SU(r+n)/S(U(r) \times U(n)) \cong SL(r+n,\mathbb{C})/P.$$

この同型は次のように考えても得られる。[12] の 1.4 節では、$SU(r+n)$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ に推移的に作用し $\mathbb{C}^r$ を固定する部分群が $S(U(r) \times U(n))$ になることを示して $G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SU(r+n)/S(U(r) \times U(n))$ が成り立つことがわかった。$SL(r+n,\mathbb{C})$ も $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ に推移的に作用する。

$$\{g \in SL(r+n,\mathbb{C}) \mid g\mathbb{C}^r = \mathbb{C}^r\} = P$$

がわかり、これより $G_r(\mathbb{C}^{r+n}) \cong SL(r+n,\mathbb{C})/P$ が成り立つ。

5.3 対称 R 空間

この節では対称 R 空間の定義と基本的性質、コンパクト型 Hermite 対称空間との関係について解説する。その前に Hermite 多様体の実形について準備をしておく。

補題 5.3.1 Riemann 多様体の等長変換の不動点集合の連結成分は全測地的部分多様体になる。

定義 5.3.2 Kähler 多様体の対合的反正則等長変換の不動点集合が空ではないとき、**実形**と呼ぶ。Kähler 多様体内の実次元が半分の実部分多様体への Kähler 形式の引き戻しが消えるとき、その実部分多様体を **Lagrange 部分多様体**と呼ぶ。

補題 5.3.1 より、実形の各連結成分は全測地的 Lagrange 部分多様体になることがわかる。

例 5.3.3 実 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ の元を複素化することにより複素 Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の元が対応する。この対応により $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の全測地的部分多様体になることがわかる。$G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の元 W にその複素共役

$$\bar{W} = \{\bar{w} \mid w \in W\}$$

を対応させる写像は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の対合的反正則等長変換になり、その不動点集合は $G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ に一致する。したがって、$G_r(\mathbb{R}^{r+n})$ は $G_r(\mathbb{C}^{r+n})$ の実形である。

定義 5.3.4 連結 Riemann 多様体 M の等長変換全体のなす Lie 群の単位連結成分の元で写り合う部分集合を**合同**という。

例 5.3.5 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ の対合的反正則等長変換 τ_k $(0 \leq k \leq n)$ を

$$\tau_k(\mathbb{C}z) = \mathbb{C}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{k+1}, -\bar{z}_{k+2}, \ldots, -\bar{z}_{2+n}) \quad (\mathbb{C}z \in Q_n(\mathbb{C}))$$

によって定める。対応する $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ の写像も同じ記号 τ_k で表すことにすると、正規直交系 $x, y \in \mathbb{R}^{2+n}$ に対して、

$$\tau_k(x \wedge y) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+1} \\ -x_{k+2} \\ \vdots \\ -x_{2+n} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -y_1 \\ \vdots \\ -y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{2+n} \end{bmatrix}$$

となる。$Q_n(\mathbb{C}) = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n}) \subset \bigwedge^2 \mathbb{R}^{2+n}$ とみなして、部分多様体 $S^{k,n-k}$ を

$$S^{k,n-k} = S^k(\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_{k+1}) \wedge S^{n-k}(\mathbb{R}e_{k+2} + \cdots + \mathbb{R}e_{n+2})$$

によって定める。上の τ_k の表示より

$$F(\tau_k, \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})) = S^{k,n-k}$$

が成り立つことがわかり、$S^{k,n-k}$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の実形になる。$S^{k,n-k}$ は $S^k \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2$ と等長的である。$S^{k,n-k}$ と $S^{n-k,k}$ は合同になることがわかる。さらに $Q_n(\mathbb{C})$ の任意の実形は $S^{k,n-k}$ $(0 \leq k \leq [n/2])$ のいずれかと合同になることが知られている。

命題 5.3.6 (T.[11] と Tanaka-T.[10]) M をコンパクト Kähler 多様体とし、正則断面曲率は正と仮定する。このとき、M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体 L_1, L_2 に対して、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ が成り立つ。特に M の実形は連結になる。

証明　$L_1 \cap L_2 = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。L_1 と L_2 を最短測地線 $c(s)$ $(0 \leq s \leq d(L_1, L_2))$ で結ぶ。M は Kähler 多様体だから、複素構造 J は平行になる。速度ベクトル $c'(s)$ は $c(s)$ に沿って平行になり、$Jc'(s)$ は $c(s)$ に沿った平行法ベクトル場になる。$c(s)$ の最短性から $c'(s)$ は端点でそれぞれ L_1 と L_2 に直交する。L_1, L_2 が Lagrange 部分多様体であることから、法ベクトル場 $Jc'(s)$ は端点でそれぞれ L_1 と L_2 に接する。$Jc'(s)$ の生成する $c(s)$ の変分曲線族 $c_t(s) = \mathrm{Exp}_{c(s)}(tJc'(s))$ は、L_1, L_2 が全測地的部分多様体であることから、L_1, L_2 を結ぶ曲線族になる。この曲線族の長さに関する第一変分は 0 になり、M の正則断面曲率が正であるという仮定から、第二変分は

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d^2\mathcal{L}(c_t)}{dt^2}\right|_{t=0} \\
&= \int_0^{d(L_1,L_2)} \left\{ \langle \nabla_{\partial/\partial s} Jc'(s), \nabla_{\partial/\partial s} Jc'(s) \rangle - \langle R(Jc'(s), c'(s))c'(s), Jc'(s) \rangle \right\} ds \\
&= -\int_0^{d(L_1,L_2)} \langle R(Jc'(s), c'(s))c'(s), Jc'(s) \rangle ds < 0.
\end{aligned}
$$

これは $c(s)$ の最短性に反する。したがって、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ が成り立つ。

M の対合的反正則等長変換の不動点集合の各連結成分は全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体になる。連結成分がもし二つ以上あると上で示したことより、それらは交わりを持つことになり矛盾する。したがって、連結成分は一つだけになり実形は連結になる。

命題 5.3.6 より、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は連結になり、二つの実形は必ず交わることがわかる。

定義 5.3.7 (G, K) を Riemann 対称対とし、これから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。$X \in \mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道 $\mathrm{Ad}(K)X$ が $\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 不変内積から誘導される Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になるとき、$\mathrm{Ad}(K)X$ を**対称 R 空間**と呼ぶ。

注意 5.3.8 定理 5.2.1 よりコンパクト型 Hermite 対称空間はコンパクト半単純 Lie 環の随伴表現の軌道として表現できる。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間は対称 R 空間になる。

定理 5.3.9 対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になる。逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になる。

証明の概略　Riemann 対称対の線形イソトロピー表現は双対の線形イソトロピー表現と同値になるため、対称 R 空間を考える際の Riemann 対称対は非コンパクト型を考えれば十分である。(G, K) を非コンパクト型 Riemann 対称対とし、こ

れから定まる G の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ の直和分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ とする。$X \in \mathfrak{p}_0$ に対して $\mathrm{Ad}(K)X$ が対称 R 空間であると仮定すると、必要なら X を定数倍することによって $(\mathrm{ad}X)^3 = \mathrm{ad}X$ が成り立つ。[1] $\mathfrak{g}_0$ に 5.2 節の設定と記号を使うことにする。

$$(\mathrm{ad}(\sqrt{-1}X))^3 = \sqrt{-1}^3(\mathrm{ad}X)^3 = -\sqrt{-1}\mathrm{ad}X = -\mathrm{ad}(\sqrt{-1}X)$$

となり、$\sqrt{-1}X \in \mathfrak{u}$ だから、$\mathrm{Ad}(U)(\sqrt{-1}X)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。$\sqrt{-1}\mathrm{Ad}(K)X = \mathrm{Ad}(K)(\sqrt{-1}X)$ より、$\mathrm{Ad}(K)X$ は $\mathrm{Ad}(K)(\sqrt{-1}X)$ と同一視でき、$\mathrm{Ad}(K)X$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 $\mathrm{Ad}(U)(\sqrt{-1}X)$ の部分多様体になる。X を含む $\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、これについても 5.2 節の設定と記号を使うことにする。$H = \sqrt{-1}X \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}$ とおく。

$$K_H = \{k \in K \mid k \cdot H = H\}$$

とおくと $K \cdot H \cong K/K_H$ が成り立つ。K_H に対応する Lie 環 $\mathfrak{k}_H$ は

$$\mathfrak{k}_H = \{Z \in \mathfrak{k} \mid [Z, H] = 0\}$$

である。定理 5.2.2(岩澤分解) より

$$K \cdot H \cong K/K_H \cong KAN/K_HAN = G/K_HAN.$$

さらに $\mathfrak{g}_0$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}_H + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ の複素化が $\mathfrak{u}_H + \mathfrak{a}^* + \mathfrak{n}_+$ に一致することがわかる。$\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役写像を σ で表すと、σ は $G^{\mathbb{C}}$ の自己同型写像を誘導し $\sigma(U_HA^*N_+) = U_HA^*N_+$ を満たす。よって反正則微分同型写像 $\sigma : G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \to G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+$ を誘導し、σ の不動点集合は G/K_HAN に一致する。σ を U/U_H で考えると等長変換であることもわかる。したがって、$\mathrm{Ad}(K)X \cong G/K_HAN$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 $G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \cong U/U_H$ の実形になる。

逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になることを定理 5.2.1 の設定のもとで示す。コンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換 $\tau : M \to M$ によって M の実形 L が定まっているとする。$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定しても一般性は失われない。M の元 x は $g \in G$ によって $x = g \cdot J$ と表すことができる。

$$\tau(x) = (\tau g) \cdot J = (\tau g \tau^{-1} \tau) \cdot J = (I_\tau(g)) \cdot J$$

となるので、$F(I_\tau, G) \cdot J \subset F(\tau, G \cdot J) = L$ を得る。さらに、命題 5.3.6 より実形 L は連結になり、$F(I_\tau, G) \cdot J = L$ が成り立つことがわかる。$dI_\tau(J) = -J$ が成り立ち J は dI_τ の -1 固有空間に含まれる。$(G, F(I_\tau, G))$ は Riemann 対称対になり、L は対称 R 空間になる。

[1] $(\mathrm{ad}X)^3 = \mathrm{ad}X$ より $\mathrm{ad}X$ の固有値は $-1, 0, 1$ になり、固有空間分解によって $\mathfrak{g}_0$ の第一種階別 Lie 環の構造が定まる。これにより対称 R 空間と第一種階別 Lie 代数は対応する。

第6章　極地と対蹠集合

この章では Chen-Nagano が [2] で導入した Riemann 対称空間の極地と [3] で導入した対蹠集合に関する基本事項を解説する。それらを利用して対称 R 空間とコンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合の基本的性質を導く。さらに、コンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉に関する田中真紀子さんとの共同研究の成果についても述べる。

6.1　極地

定義 6.1.1 M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の点 x における点対称 s_x の固定点全体 $F(s_x, M)$ を

$$F(s_x, M) = \bigcup_{k=0}^{r} M_k^+$$

と連結成分の合併に分解する。この連結成分の一つ一つを M の**極地**と呼ぶ。極地が一点からなるとき**極**と呼ぶ。$\{x\}$ は必ず $F(s_x, M)$ の連結成分になるため、$\{x\}$ は**自明な極**と呼ぶ。

補題 5.3.1 より極地は全測地的部分多様体になる。極地の例を挙げておく。

例 6.1.2 n 次元単位球面

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

の点 x における点対称は $s_x = 1_{\mathbb{R}x} - 1_{x^\perp}$ と表すことができ、この不動点集合は $\{x, -x\}$ になる。よって、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、ともに極になる。

例 6.1.3 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとして、$\mathbb{K}^{r+n}$ 内の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体から成る係数体 $\mathbb{K}$ に関する Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ について考える。$r \leq n$ と仮定しておく。$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に関する点対称は $s_V = 1_V - 1_{V^\perp}$ と表すことができ、

$$F(s_V, G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \bigcup_{k=0}^{r} \{V_1 \oplus V_2 \mid V_1 \in G_k(V),\ V_2 \in G_{r-k}(V^\perp)\}$$

が成り立つ。特に $V = \mathbb{K}^r = o$ の場合、

$$F(s_o, G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \bigcup_{k=0}^{r} G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n)$$

と表すことができる。

例 6.1.4 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})$ の極地を求める。$\mathbb{R}^2$ に標準的な向きを定めたものを o で表す。$\mathbb{R}^2$ に o とは逆の向きを定めたものを $\bar{o}$ で表す。o に関する点対称は $s_o = 1_o - 1_{o^\perp}$ と表すことができ、

$$F(s_o, \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+n})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\} \cup \tilde{G}_2(\langle e_3, \ldots, e_{2+n}\rangle_{\mathbb{R}})$$

が成り立つ。

補題 6.1.5 連結 Riemann 対称空間 M の点 x と M の等長変換 g に対して、$s_{gx} = gs_xg^{-1}$ が成り立つ。

証明 M の二つの等長変換 s_{gx}, gs_xg^{-1} はともに gx を固定し、$T_{gx}M$ における微分写像は -1 倍になるので、$s_{gx} = gs_xg^{-1}$ が成り立つ。

命題 6.1.6 コンパクト Riemann 対称空間の異なる点に関する極地は合同になる。

証明 M をコンパクト Riemann 対称空間とし、その等長変換全体のなす Lie 群の単位連結成分を G で表す。M の二点 x, y をとる。[12] の定理 2.1.2 より G は M に推移的に作用しているので、$y = gx$ となる $g \in G$ が存在する。補題 6.1.5 より $s_y = gs_xg^{-1}$ となって、$F(s_y, M) = gF(s_x, M)$ が成り立つ。したがって、x に関する極地と y に関する極地は g によって写り合う。

命題 6.1.6 より、コンパクト Riemann 対称空間の極地を考える場合は原点をとりそれに関する極地を考えれば十分である。

命題 6.1.7 (G, K) を Riemann 対称対とし、対応する Riemann 対称空間 G/K はコンパクトになるとする。G/K の原点を o で表す。G/K の o を通る極大トーラス A をとると、$F(s_o, G/K) = KF(s_o, A)$ が成り立つ。A に対応する極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ で表し、

$$\Gamma(G/K) = \{H \in \mathfrak{a} \mid \mathrm{Exp}H = o\}$$

とおくと $F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ が成り立つ。$F(s_o, A)$ は有限集合になり、G/K の各極地は $F(s_o, A)$ の点の K 軌道になる。

証明　[12] の定理 2.2.4 より、任意の $x \in G/K$ は $x = ka,\ k \in K,\ a \in A$ と表すことができる。

$$s_o(x) = s_o(ka) = kk^{-1}s_o k(a) = ks_{k^{-1}(o)}(a) = ks_o(a)$$

となるので、$x \in F(s_o, G/K)$ の必要十分条件は $a \in F(s_o, A)$ である。したがって、$F(s_o, G/K) = KF(s_o, A)$ が成り立つ。

A の任意の元は $H \in \mathfrak{a}$ によって $\mathrm{Exp}H$ と表すことができ、$s_o\mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}(-H)$ が成り立つ。したがって、

$$s_o\mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}H \Leftrightarrow \mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}(-H) \Leftrightarrow \mathrm{Exp}2H = o \Leftrightarrow H \in \frac{1}{2}\Gamma(G/K)$$

となり、$F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ を得る。

$F(s_o, A) = \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(G/K)$ より $F(s_o, A)$ は有限集合になり、G/K の各極地は $F(s_o, A)$ の点の K 軌道になることがわかる。

例 6.1.8 $U(n)$ の単位元を通る極大トーラス

$$T = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{array} \right] \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

をとる。命題 6.1.7 と [12] の 2.3 節で示したことより

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{g \in U(n)} gF(s_e, T)g^{-1}$$

が成り立つ。$g \in U(n)$ に対して $s_e(g) = g^{-1}$ となることから、

$$F(s_e, T) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{array} \right] \right\}$$

となる。対角線の $+1$ の個数が等しい行列は共役になり、同じ $U(n)$ 軌道に含まれる。$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$G_k(\mathbb{C}^n) \to \left\{ g \left[\begin{array}{cc} 1_k & \\ & -1_{n-k} \end{array} \right] g^{-1} \middle| g \in U(n) \right\};\ V \mapsto 1_V - 1_{V^\perp}$$

は微分同型写像になるので、この写像によって同一視する。$1_V - 1_{V^\perp}$ は V に関する $\mathbb{C}^n$ 内の鏡映変換であり、上の微分同型写像の像は重複度 k の固有値 $+1$ と重複度 $n-k$ の固有値 -1 を持つ $U(n)$ の元の全体と一致する。そこで、$G_0(\mathbb{C}^n)$ は $\{-1_n\}$ と同一視し、$G_n(\mathbb{C}^n)$ は $\{1_n\}$ と同一視すると、

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} G_k(\mathbb{C}^n)$$

が $U(n)$ の極地の全体になる。

例 6.1.9 例 5.1.7 で定めたコンパクト型 Hermite 対称空間 $Sp(n)/U(n)$ の極地を求める。Lie 環の分解

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}$$

の $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$$

によって定める。

$$\exp \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_1 + \sin t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & \cos t_n + \sin t_n j \end{bmatrix}$$

となるので、$\mathfrak{a}$ に対応する $Sp(n)/U(n)$ の極大トーラス $A = \mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ の束は

$$\Gamma(Sp(n)/U(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 j & & \\ & \ddots & \\ & & t_n j \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \dots, t_n \in \pi\mathbb{Z} \right\}$$

である。よって

$$\begin{aligned} F(s_o, A) &= \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(Sp(n)/U(n)) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} U(n) \middle| \ \epsilon_1, \dots, \epsilon_n = 1 \text{ または } j \right\}. \end{aligned}$$

これらの点の $U(n)$ 軌道が極地になる。j と 1 の個数が等しい点の $U(n)$ 軌道は等しくなる。そこで、

$$J_a = \begin{bmatrix} j1_a & \\ & 1_{n-a} \end{bmatrix}, \quad M_a^+ = U(n)J_aU(n) \subset Sp(n)/U(n) \qquad (0 \leq a \leq n)$$

とおくと、$Sp(n)/U(n)$ の極地の全体は $M_0^+, M_1^+, \dots, M_n^+$ である。$g \in U(n)$ に対して

$$\begin{aligned} gJ_aU(n) = J_aU(n) &\Leftrightarrow J_a^{-1}gJ_aU(n) = U(n) \Leftrightarrow J_a^{-1}gJ_a \in U(n) \\ &\Leftrightarrow g \in U(a) \times U(n-a) \end{aligned}$$

となり、$M_a^+ \cong U(n)/U(a) \times U(n-a) \cong G_a(\mathbb{C}^n)$ が成り立つ。したがって、$Sp(n)/U(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, Sp(n)/U(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{C}^n)$$

と書くこともできる。

例 6.1.10 ユニタリ群 $U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(g) = \bar{g} \quad (g \in U(n))$$

によって定める。$F(\sigma, U(n)) = O(n)$ となり、$(U(n), O(n))$ はコンパクト Riemann 対称対になる。σ の誘導する Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の対合的自己同型写像も σ に一致する。これの ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid X \in M_n(\mathbb{R}i)\}$$

である。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$$

によって定める。

$$\exp \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_1 + \sin t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & \cos t_n + \sin t_n i \end{bmatrix}$$

となるので、$\mathfrak{a}$ に対応する $U(n)/O(n)$ の極大トーラス $A = \mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ の束は

$$\Gamma(U(n)/O(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & t_n i \end{bmatrix} \middle| \ t_1, \dots, t_n \in \pi\mathbb{Z} \right\}$$

である。よって

$$\begin{aligned} F(s_o, A) &= \mathrm{Exp}\frac{1}{2}\Gamma(U(n)/O(n)) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} U(n) \middle| \ \epsilon_1, \dots, \epsilon_n = 1 \text{ または } i \right\}. \end{aligned}$$

これらの点の $O(n)$ 軌道が極地になる。i と 1 の個数が等しい点の $O(n)$ 軌道は等しくなる。そこで、

$$I_a = \begin{bmatrix} i1_a & \\ & 1_{n-a} \end{bmatrix}, \quad M_a^+ = O(n) I_a O(n) \subset U(n)/O(n) \qquad (0 \le a \le n)$$

とおくと、$U(n)/O(n)$ の極地の全体は $M_0^+, M_1^+, \dots, M_n^+$ である。$g \in O(n)$ に対して

$$\begin{aligned} g I_a O(n) = I_a O(n) &\Leftrightarrow I_a^{-1} g I_a O(n) = O(n) \Leftrightarrow I_a^{-1} g I_a \in O(n) \\ &\Leftrightarrow g \in O(a) \times O(n-a) \end{aligned}$$

となり、$M_a^+ \cong O(n)/O(a) \times O(n-a) \cong G_a(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。したがって、$U(n)/O(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, U(n)/O(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{R}^n)$$

と書くこともできる。

命題 6.1.11 対称 R 空間の極地は対称 R 空間になる。コンパクト型 Hermite 対称空間の極地はコンパクト型 Hermite 対称空間になる。

6.2 対蹠集合

Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。[1] これらの概念は Chen-Nagano[3] が導入した。非コンパクト型 Riemann 対称空間の一点の点対称はその点以外に固定点を持たないため、対蹠集合は一点のみになり 2-number は 1 になる。そこで、以下ではコンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合や 2-number を考える。

対蹠集合の例を挙げておく。

例 6.2.1 n 次元単位球面 S^n の点 x における点対称 s_x の不動点集合は例 6.1.2 より $\{x, -x\}$ になる。よって、これは S^n の大対蹠集合になり、逆に S^n の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。特に、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。

例 6.2.2 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとして、Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の対蹠集合について考える。$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に関する点対称 s_V の不動点集合は V の $\mathbb{K}$ 部分空間と $V^\perp$ の $\mathbb{K}$ 部分空間の直和になる r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間の全体になる。このことから、$\mathbb{K}^{n+r}$ のユニタリ基底 $e_1, \ldots, e_{n+r}$ に対して

$$\{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \rangle_{\mathbb{K}} \in G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n+r\}$$

は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合になり、逆に $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。したがって、

$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \binom{n+r}{r}$$

が成り立つ。これは係数体 $\mathbb{K}$ に依存しない。

[1] 大対蹠集合の定義は 2-number が有限でなければ意味がないが、これは命題 6.2.4 で示す。

命題 6.2.3 コンパクト Riemann 対称空間 M とその極地 $M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\#_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

証明　$M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ を点 $o \in M$ に関する極地とする。A を o を含む M の対蹠集合とすると $A \subset F(s_o, M)$ が成り立ち、

$$A = \bigcup_{k=0}^{r} (A \cap M_k^+)$$

となる。各 $A \cap M_k^+$ は M_k^+ の対蹠集合になり次を得る。

$$\#A = \sum_{k=0}^{r} \#(A \cap M_k^+) \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

$\#A$ の上限が $\#_2 M$ だから、問題の不等式を得る。

命題 6.2.4 コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合は有限集合になる。さらに 2-number も有限になる。

証明　A をコンパクト Riemann 対称空間 M の対蹠集合とする。$x \in A$ とすると $A \subset F(s_x, M)$ が成り立つ。x は $F(s_x, M)$ の孤立点だから、x は A の孤立点になる。したがって、A は離散集合になり、特に有限集合になる。

$M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ を M の極地とすると命題 6.2.3 より

$$\#_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+$$

が成り立つ。M_k^+ が極の場合は $\#_2 M_k^+ = 1$ である。この場合は極地をとる操作は終了し、M_k^+ が極ではない場合は $o_k \in M_k^+$ をとり、さらに極地

$$F(s_{o_k}, M_k^+) = \bigcup_{j=0}^{r_k} (M_k^+)_j^+$$

を定める。すると命題 6.2.3 より

$$\#_2 M_k^+ \leq \sum_{j=0}^{r_k} \#_2 (M_k^+)_j^+$$

が成り立つ。Riemann 対称空間に対してその極地は次元が小さいので、このような極地をとる操作を有限回続けると極のみになる。したがって、$\#_2 M < \infty$ がわかる。

例 6.2.5 M_1, M_2 をコンパクト Riemann 対称空間とする。A_i を M_i の対蹠集合とすると、$A_1 \times A_2$ は $M_1 \times M_2$ の対蹠集合になる。さらに、A_i が M_i の大対蹠集合ならば、$A_1 \times A_2$ は $M_1 \times M_2$ の大対蹠集合になる。したがって、$\#_2(M_1 \times M_2) = \#_2 M_1 \cdot \#_2 M_2$ が成り立つ。例 6.2.1 より $\#_2 S^1 = 2$ だから、r 次元トーラス T^r の 2-number は $\#_2 T^r = 2^r$ となる。これより、階数 r のコンパクト Riemann 対称空間 M に対して $2^r \leq \#_2 M$ が成り立つ。

例 6.2.6 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとする。Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の極地は例 6.1.3 より
$$M_k^+ = G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n) \qquad (0 \leq k \leq r)$$
となる。例 6.2.2 と例 6.2.5 より
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+ &= \sum_{k=0}^{r} \#_2(G_k(\mathbb{K}^r) \times G_{r-k}(\mathbb{K}^n)) = \sum_{k=0}^{r} \#_2(G_k(\mathbb{K}^r)) \cdot \#_2(G_{r-k}(\mathbb{K}^n)) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{n}{r-k}.\end{aligned}$$
$(1+x)^{r+n} = (1+x)^r(1+x)^n$ を二項展開して x^r の係数を比較すると
$$\binom{r+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{n}{r-k}$$
を得る。これより
$$\#_2(G_r(\mathbb{K}^{r+n})) = \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+$$
が成り立つ。これは命題 6.2.3 の不等式の等号が成り立つ例になっている。

竹内 [8] の結果より次が成り立つことがわかる。

定理 6.2.7 対称 R 空間 M とその極地 $M_0^+, M_1^+, \ldots, M_r^+$ に対して次の等式が成り立つ。
$$\#_2 M = \sum_{k=0}^{r} \#_2 M_k^+.$$

[8] の主結果は次の定理である。

定理 6.2.8 M を対称 R 空間とし、その $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群を $H(M; \mathbb{Z}_2)$ で表すと、次の等式が成り立つ。
$$\#_2 M = \dim H(M; \mathbb{Z}_2).$$

定理 6.2.7 を利用して対称 R 空間の 2-number を求める計算例を挙げておく。

例 6.2.9 $Sp(n)$ は対称 R 空間になることが知られている。例 6.1.8 と同様にして $Sp(n)$ の極地の全体は

$$F(s_e, Sp(n)) = \bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbb{H}^n)$$

であることがわかる。よって、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2 Sp(n) = \sum_{k=0}^{n} \#_2 G_k(\mathbb{H}^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

例 6.2.10 コンパクト対称空間 $U(n)/O(n)$ は対称 R 空間であることが知られている。例 6.1.10 より $U(n)/O(n)$ の極地の全体は

$$F(s_o, U(n)/O(n)) = \bigcup_{a=0}^{n} G_a(\mathbb{R}^n)$$

である。よって、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2(U(n)/O(n)) = \sum_{a=0}^{n} \#_2 G_a(\mathbb{R}^n) = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} = 2^n.$$

[12] の 2.3 コンパクト Lie 群でみたようにコンパクト連結 Lie 群は Riemann 対称空間とみなせる。このときの対蹠集合と群構造の関連性についてまとめておく。

G をコンパクト連結 Lie 群とする。[12] の p.27 の 3 行より $x \in G$ における点対称 s_x は $L_x \circ s_e \circ L_{x^{-1}}$ に一致し、

$$s_x(y) = xy^{-1}x \qquad (y \in G)$$

が成り立つ。

等質性より、考える対蹠集合は単位元を含んでいると仮定しても一般性は失われない。A を G の単位元 e を含む対蹠集合とする。すると $x \in A$ に対して $x = s_e(x) = x^{-1}$ となるので、

$$x^2 = e \qquad (x \in A)$$

が成り立つ。さらに $x, y \in A$ に対して $y = s_x(y) = xy^{-1}x = xyx$ となり、

$$(*) \qquad xy = yx \qquad (x, y \in A)$$

が成り立つ。$x, y, z \in A$ に対して

$$s_z(xy) = z(xy)^{-1}z = zy^{-1}x^{-1}z = zyxz = yzzx = yx = xy$$

となるので、$A \cup \{xy\}$ も対蹠集合になる。したがって、A が極大対蹠集合ならば、A は部分群になる。さらに $(*)$ より A は可換部分群になる。有限 Abel 群の基本定理より A は $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積と群として同型になる。特に A が大対蹠集合になるときも同様になり、G の 2-number は 2 の冪乗になる。

例 6.2.11 $U(n)$ の単位元を含む極大対蹠集合 A をとる。上の議論より A は可換部分群になる。したがって、A の元は同時対角化可能になる。すなわち A は標準的な極大トーラス

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} \middle| \theta_a \in \mathbb{R} \right\} \cong U(1) \times \cdots \times U(1)$$

の部分群と共役になる。$U(n)$ の極大対蹠集合を明らかにするためには $A \subset T$ と仮定してもよい。A の各元の位数は 2 であることと極大であることから、

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となって A が確定する。したがって、これは大対蹠集合になり、$\#_2 U(n) = 2^n$ が成り立つ。

上記の議論では $U(n)$ の 2-number だけではなく、大対蹠集合の形まで明らかになったが、2-number を求めるだけなら次のように計算することもできる。例 6.1.8 より $U(n)$ の極地の全体は

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{0 \le k \le n} G_k(\mathbb{C}^n)$$

だから、定理 6.2.7 より次の等式を得る。

$$\#_2 U(n) = \sum_{0 \le k \le n} \#_2 G_k(\mathbb{C}^n) = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

連結コンパクト Lie 群の大対蹠部分群は、一般には極大トーラスに含まれるとはかぎらない。Chen-Nagano [3] の研究のきっかけになった Borel-Serre [1] では次の例を挙げている。

例 6.2.12 3 次回転群 $SO(3)$ の部分群 A を次のように定める。三つの直交軸に関する回転角 π の回転と恒等変換からなる部分集合を A で表す。これらの直交軸を定める正規直交基底による表現行列は対角成分の二つが -1 であり一つが 1 である対角行列三つと単位行列になる。

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

これは $SO(3)$ の大対蹠部分群になることがわかり、$\#_2 SO(3) = 4 = 2^2$ となる。A を含む $SO(3)$ の極大トーラスは存在しない。Riemann 多様体として $SO(3)$ は $\mathbb{R}P^3$ と同型になり、$\mathbb{R}P^3 = G_1(\mathbb{R}^4)$ だから例 6.2.2 からでも $\#_2 SO(3) = 4$ を得る。

6.3 対称 R 空間の対蹠集合

$\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ には G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定めておく。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。定理 5.2.1 より J を通る G 軌道 $G \cdot J$ はコンパクト型 Hermite 対称空間になり、逆にコンパクト型 Hermite 対称空間はこのように表現される。

定理 6.3.1 (Sánchez[6], Tanaka-T.[10]) 上記設定のもとで $M = G \cdot J$ とする。$X \in M$ における M の点対称を s_X で表す。$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ である。さらに以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ 内の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になる。

証明の概略　$X \in M$ に関する Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_X + \mathfrak{m}_X, \quad \mathfrak{k}_X = \mathfrak{z}(X), \quad \mathfrak{m}_X = [X, \mathfrak{g}]$$

となる。$\mathrm{ad}X$ は $\mathfrak{m}_X$ の概複素構造を定め、

$$s_X(Y) = e^{\pi \mathrm{ad}X} Y \quad (Y \in M)$$

が成り立つ。これより、$X, Y \in M$ が $[X, Y] = 0$ を満たすならば、$s_X(Y) = Y$ が成り立つことがわかる。逆に $s_X(Y) = Y$ とすると $e^{\pi \mathrm{ad}X} Y = Y$ となり $Y \in \mathfrak{k}_X = \mathfrak{z}(X)$ を得る。これより $[X, Y] = 0$が成り立つ。以上より、$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ であることがわかった。S を M の任意の対蹠集合とする。上で示したことより任意の $X, Y \in S$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つ。S の張る $\mathfrak{g}$ の部分空間を $S_{\mathbb{R}}$ で表すと、$S_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の可換 Lie 部分環になる。そこで、$S_{\mathbb{R}}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ をとる。すると $S \subset M \cap \mathfrak{t}$ が成り立つ。極大可換 Lie 部分環の共役性より、(A) と (B) が成り立つことがわかる。さらに大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ と表現できる。

定理 6.3.2 (Tanaka-T.[10]) $\tau : M \to M$ をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換とし、τ の不動点集合として M の実形 L が定まっているとする。

$$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定する。I_τ から定まる $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ とする。このとき、$L = M \cap \mathfrak{p}$ が成り立つ。さらに L に対して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

L の大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は I_τ から定まる対称対の Weyl 群の軌道になる。

証明の概略　定理 5.3.9 の証明の後半で示したことを利用すると

$$\tau(x) = -dI_\tau(x) \quad (x \in M)$$

がわかる。これより

$$L = \{x \in M \mid \tau(x) = x\} = M \cap \mathfrak{p}$$

を得る。

S を L の任意の対蹠集合とする。任意の $X, Y \in S$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つ。S の張る $\mathfrak{p}$ の部分空間を $S_{\mathbb{R}}$ で表すと、$S_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{p}$ の可換部分空間になる。そこで、$S_{\mathbb{R}}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。すると $S \subset M \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ。極大可換 Lie 部分空間の $F(I_\tau, G)$ による共役性より、(A) と (B) が成り立つことがわかる。さらに大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ と表現できる。

系 6.3.3 (Tanaka-T.[10]) 対称 R 空間の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

証明　定理 5.3.9 より対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になり、定理 6.3.2 より (A) と (B) が成り立つ。

$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合は性質 (A) を満たさないことがわかる ([10])。この概略を以下で説明する。$SU(4)$ の中心 Z は

$$Z = \{\pm 1_4, \pm i 1_4\} \cong \mathbb{Z}_4$$

となる。$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の単位元を e で表すと

$$F(s_e, \mathrm{Ad}(SU(4))) = \{g \in \mathrm{Ad}(SU(4)) \mid g^2 = e\} = \mathrm{Ad}\{x \in SU(4) \mid x^2 \in Z\}.$$

$T = S(U(1)^4)$ とおくと、T は $SU(4)$ の極大トーラスになる。

$$\{x \in SU(4) \mid x^2 \in Z\} = \bigcup_{g \in SU(4)} g\{t \in T \mid t^2 \in Z\} g^{-1}$$

が成り立つ。

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{4}i} & & & \\ & e^{\frac{\pi}{4}i} & & \\ & & e^{\frac{\pi}{4}i} & \\ & & & e^{-\frac{3\pi}{4}i} \end{bmatrix}$$

によって $I, J \in T$ を定めると、I, J の成分を置換したもの全体が $\{t \in T \mid t^2 \in Z\}$ に一致することがわかる。これより

$$\begin{aligned} M_0^+ &= \{e\}, \\ M_1^+ &= \mathrm{Ad}\{gIg^{-1} \mid g \in SU(4)\}, \\ M_2^+ &= \mathrm{Ad}\{gJg^{-1} \mid g \in SU(4)\} \end{aligned}$$

とおくと

$$F(s_e, \mathrm{Ad}(SU(4))) = M_0^+ \cup M_1^+ \cup M_2^+$$

がわかり、これらが $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の極地の全体になる。$SU(4)$ の共役作用に関する I, J の固定部分群を求めることにより、

$$\begin{aligned} M_1^+ &\cong (SU(4)/S(U(2) \times U(2)))/\mathbb{Z}_2 \cong G_2(\mathbb{C}^4)/\mathbb{Z}_2 \cong G_2(\mathbb{R}^6), \\ M_2^+ &\cong SU(4)/S(U(3) \times U(1)) \cong G_1(\mathbb{C}^4) \end{aligned}$$

を得る。これらより

$$\#_2 M_1^+ = \binom{6}{2} = 15, \qquad \#_2 M_2^+ = \binom{4}{1} = 4.$$

M_1^+ の大対蹠集合 A_1 をとると、$\# A_1 = 15$ である。$\{e\} \cup A_1$ は $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合になり

$$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) \geq 1 + \# A_1 = 16.$$

他方、

$$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) \leq \#_2 M_0^+ + \#_2 M_1^+ + \#_2 M_2^+ \leq 1 + 15 + 4 = 20.$$

$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4))$ は 2 の冪になるため、$\#_2 \mathrm{Ad}(SU(4)) = 16 = 2^4$ を得る。よって、$\{e\} \cup A_1$ は $\mathrm{Ad}(SU(4))$ の大対蹠集合である。特に極大になり部分群になる。J の対角成分を置換したもの全体の Ad による像を A_2 で表すと、$\# A_2 = 4$ となり A_2 は M_2^+ の大対蹠集合であることがわかる。A_2 の生成する部分群を $\tilde{A}_2$ で表すと、

$$\tilde{A}_2 = \{e\} \cup A_2 \cup \mathrm{Ad} \left\{ \begin{bmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{bmatrix} \right\}$$

となって、$\tilde{A}_2$ は対蹠的部分群になる。$\mathrm{Ad}(J)$ の中心化部分群は $\mathrm{Ad}(S(U(3)\times U(1))$ になることがわかり、A_2 の中心化部分群は T に一致することがわかる。これより $\tilde{A}_2$ の中心化部分群も T に一致する。$\tilde{A}_2$ を含む対蹠集合 A が存在すれば、A は $\tilde{A}_2$ の中心化部分群に含まれるので T に含まれる。$\#_2 T = 2^3 = 8$ であり、$\#\tilde{A}_2 = 8$ だから、$\tilde{A}_2 = A$ となって、$\tilde{A}_2$ は極大対蹠集合になる。特に $\tilde{A}_2$ を含む大対蹠集合は存在しない。よって条件 (A) は成り立たない。$\mathrm{Ad}(SU(4))$ に対して条件 (B) は成り立つことがわかる。

6.4 コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉

この節の内容はおもに Tanaka-T.[9] に基づいている。

定義 6.4.1 多様体 X の部分多様体 Y_1, Y_2 に対して、任意の $x \in Y_1 \cap Y_2$ について $T_xX = T_xY_1 + T_xY_2$ が成り立つとき、Y_1 と Y_2 は**横断的に交わる**という。

定理 6.4.2 ([9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

証明の概略 定理 5.1.12 よりコンパクト型 Hermite 対称空間の正則断面曲率は正になる。命題 5.3.6 より L_1 と L_2 は交わる。$o \in L_1 \cap L_2$ と仮定しても一般性は失われない。o 以外の $p \in L_1 \cap L_2$ に対して、o, p は L_1 と L_2 において対蹠点になることを証明すれば十分である。

o, p を含む L_i の極大トーラス A_i をとる。さらに、A_i を含む M の極大トーラス A_i' をとる。M の制限ルート系によって $A_1' \cap A_2'$ を記述でき、さらに A_i が実形の極大トーラスであることから、o, p は対蹠点の関係にあることがわかる。したがって、L_1, L_2 においても対蹠点の関係にある。

定理 6.4.2 をもとにして、実形の交叉を詳しく調べるために準備をする。

補題 6.4.3 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L を原点 o を通る M の実形とする。M の o に関する極地 M^+ が $L \cap M^+ \neq \emptyset$ を満たすならば、$L \cap M^+$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 M^+ の実形になる。[2]

証明の概略 実形 L を定める M の対合的反正則等長変換を τ で表すと、$\tau \circ s_o = s_o \circ \tau$ が成り立つ。任意の $x \in F(s_o, M)$ に対して、$s_o(\tau(x)) = \tau(s_o(x)) = \tau(x)$ となり、$\tau(F(s_o, M)) = F(s_o, M)$ を得る。$p \in L \cap M^+$ をとる。$\tau(p) = p$ となり $\tau(M^+) = M^+$ が成り立つ。したがって、τ は M^+ の対合的反正則等長変換を誘導し、$L \cap M^+$ は M^+ の実形になる。

次の補題はコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉の性質を各極地の実形の交叉の性質に帰着できることを示している。

[2] M^+ がコンパクト型 Hermite 対称空間であることは、命題 6.1.11 より従う。

補題 6.4.4 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、M の原点 o に関する極地を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

と表す。

(1) L を M の原点 o を通る実形とすると、L の極地は

$$F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

となり、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) L_1, L_2 を M の原点 o を通り横断的に交わる実形とすると、次の等式が成り立つ。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}.$$

証明　(1) L は o を通る全測地的部分多様体だから、

$$F(s_o, L) = L \cap F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

となる。補題 6.4.3 より各 $L \cap M_j^+$ は空でなければ M_j^+ の実形になり、特に連結になる。よって $L \cap M_j^+$ は L の極地になる。定理 5.3.9 より L は対称 R 空間になり、定理 6.2.7 より次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) 定理 6.4.2 より $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。$L_1 \cap L_2$ は M の対蹠集合でもあるので、$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$ が成り立つ。したがって、次の等式を得る。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}.$$

定理 6.4.5 ([9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2, L_1', L_2' を M の実形とする。さらに、L_1, L_1' は合同であり、L_2, L_2' も合同であると仮定する。L_1, L_2 が横断的に交わり、L_1', L_2' も横断的に交わるならば、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1' \cap L_2')$ が成り立つ。

証明の概略 定理の証明は次の主張の証明に帰着する。

(I) L_1, L_2 を M の実形とし、$g \in I_0(M)$ とする。L_1, L_2 は横断的に交わり、L_1, gL_2 も横断的に交わるとき、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap gL_2)$ が成り立つ。

さらに (I) の証明は次の主張の証明に帰着する。

(II) L_1, L_2 を M の実形とし、$o \in L_1 \cap L_2$ をとる。$k \in K = \{\phi \in I_0(M) \mid \phi(o) = o\}$ とする。L_1, L_2 は横断的に交わり、L_1, kL_2 も横断的に交わるとき、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$ が成り立つ。

以下で $\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$ を示す。

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

を極地とする。補題 6.4.4 の (2) より

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$
$$L_1 \cap kL_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+) \right\}$$

となり

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$
$$\#(L_1 \cap kL_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+) \right\}.$$

$kM_j^+ = M_j^+$ だから、$k(L_2 \cap M_j^+) = kL_2 \cap M_j^+$ となり、$L_2 \cap M_j^+$ と $kL_2 \cap M_j^+$ は各 j について同時に空になるか同じ一点になるかまたは M_j^+ 内の合同な実形になる。一番目、二番目の場合は $L_2 \cap M_j^+ = kL_2 \cap M_j^+$ となり、

$$(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) = (L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+).$$

したがって、

$$\#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} = \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (kL_2 \cap M_j^+)\}.$$

三番目の場合はコンパクト型 Hermite 対称空間 M_j^+ において極地をとることにより上記の議論を続ける。この操作を有限回繰り返すと、極地の次元は必ず小さくなるので、一番目、二番目の場合だけになり (I) の結論

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1 \cap kL_2)$$

が成り立つことがわかる。

系 6.4.6 ([10]) 定理 6.4.5 の設定にさらに $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ という条件を加えると、$L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同になる。

後で述べる定理 6.5.1 の (2) は上の系の条件を満たしている。

定理 6.4.7 ([9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

証明の概略　定理 6.4.2 より、$L_1 \cap L_2$ は L_1, L_2 の対蹠集合になるので、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ を示せばよい。

$o \in L_1 \cap L_2$ としても一般性は失われない。補題 6.4.4 の (2) より

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$
$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}$$

となる。L_i の極地は補題 6.4.4 の (1) より

$$F(s_o, L_i) = \bigcup_{j=0}^{r} L_i \cap M_j^+$$

となり、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L_i = \sum_{j=0}^{r} \#_2 (L_i \cap M_j^+).$$

L_1 と L_2 は合同だから $\#_2 L_1 = \#_2 L_2$ であり、各 j について $L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ も M_j^+ 内で合同になる。よって、$L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ は各 j について同時に空になるか、同じ一点になるか、または M_j^+ 内の合同な実形になる。一番目の場合は、

$$\# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\} = 0 = \#(L_i \cap M_j^+) = \#_2 (L_i \cap M_j^+).$$

二番目の場合は、

$$\#\left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\} = 1 = \#(L_i \cap M_j^+) = \#_2(L_i \cap M_j^+).$$

三番目の場合はコンパクト型 Hermite 対称空間 M_j^+ において極地をとることにより上記の議論を続ける。この操作を有限回繰り返すと、極地の次元は必ず小さくなるので、一番目、二番目の場合だけになり

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$$

が成り立つことがわかる。

6.5　既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉

この節の内容もおもに Tanaka-T.[9] に基づいている。

定理 6.5.1 ([9]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

証明の概略　二つの実形が合同な場合は定理 6.4.7 によって、交叉は実形の大対蹠集合になることがわかっているので、実形が合同ではない場合を考えればよい。既約コンパクト型 Hermite 対称空間と合同ではない二つの実形の組合せは以下のとおりであることが、Leung [5], Takeuchi [7] からわかる。

M	L_1	L_2
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$
$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$	$G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T \cdot E_6$	$T \cdot (E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

これらについて個別に定理の主張が成り立つことを確かめる。

定理 6.5.2 $0 \leq k \leq l \leq [n/2]$ とする。$Q_n(\mathbb{C})$ 内の $S^{k,n-k}$ と合同な実形 L_1 と $S^{l,n-l}$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm e_1 \wedge e_{k+2}, \ldots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。したがって、$L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2(k+1) \leq 2(l+1) = \#_2 L_2.$$

さらに $k = l = [n/2]$ ならば、$L_1 \cap L_2$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の大対蹠集合になる。

定理 6.5.3 $G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$ 内の $G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$ と合同な実形 L_1 と $G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \binom{m+q}{q} \leq \binom{2m+2q}{2q} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.4 $G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ 内の $U(n)$ と合同な実形 L_1 と $G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^n \leq \binom{2n}{n} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.5 $G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ 内の $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同な実形 L_1 と $U(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m, \qquad \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\} = \binom{2m}{m}$$

これより、$m = 1$ のとき $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ が成り立ち、$m \geq 2$ のとき $\#(L_1 \cap L_2) < \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ が成り立つ。

定理 6.5.6 $Sp(2m)/U(2m)$ 内の $Sp(m)$ と合同な実形 L_1 と $U(2m)/O(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^m \leq 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.7 $SO(4m)/U(2m)$ 内の $U(2m)/Sp(m)$ と合同な実形 L_1 と $SO(2m)$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2^m \leq 2^{2m-1} = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.8 $EIII = E_6/T \cdot Spin(10)$ 内の $FII = F_4/Spin(9)$ と合同な実形 L_1 と $G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 3 < 27 = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.9 $EVII = E_7/T \cdot E_6$ 内の $(T \times EIV)/\mathbb{Z}_3$ と合同な実形 L_1 と $AII(4)/\mathbb{Z}_2$ と合同な実形 L_2 が横断的に交わるならば、その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 8 < 56 = \#_2 L_2.$$

定理 6.5.2 の証明の概略　$Q_n(\mathbb{C})$ の極地は

$$F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\} \cup Q_{n-2}(\mathbb{C})$$

となる。ただし、$F(s_o, Q_1(\mathbb{C})) = \{o\} \cup \{\bar{o}\}$ であり、

$$F(s_o, Q_2(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_2, \pm e_3 \wedge e_4\}$$

である。L を o を通る $Q_n(\mathbb{C})$ の実形とする。L が $S^{0,n}$ と合同ならば、

$$L \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o, \bar{o}\}$$

となり、L が $S^{k,n-k}$ $(1 \leq k \leq [n/2])$ と合同ならば

$$L \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{o, \bar{o}\} \cup L'$$

となり、L' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{k-1,n-k-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になることがわかる。

上記の交叉の情報を利用して、定理を k に関する帰納法で証明する。命題 5.3.6 より $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ となる。そこで $o = e_1 \wedge e_{k+2} \in L_1 \cap L_2$ としても一般性は失われない。$k = 0$ の場合は

$$L_1 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_2\}$$

となる。定理 6.4.2 より $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合になり $L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, Q_n(\mathbb{C}))$ が成り立つ。

$$L_2 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) \supset \{\pm e_1 \wedge e_2\}$$

となり、

$$L_1 \cap L_2 = \{\pm e_1 \wedge e_2\}.$$

$k-1$ の場合に定理の主張が成り立つと仮定して、k の場合にも成り立つことを示す。

$$L_1 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_{k+2}\} \cup L_1'$$

となり、L_1' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{k-1,n-k-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になる。L_2 についても

$$L_2 \cap F(s_o, Q_n(\mathbb{C})) = \{\pm e_1 \wedge e_{k+2}\} \cup L_2'$$

となり、L_2' は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{l-1,n-l-1}$ と $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で合同になる。帰納法の仮定より $L_1' \cap L_2'$ は $Q_{n-2}(\mathbb{C})$ 内で

$$\{\pm e_2 \wedge e_{k+3}, \dots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。したがって、$L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm e_1 \wedge e_{k+2}, \dots, \pm e_{k+1} \wedge e_{2k+2}\}$$

と合同になる。これは $S^{k,n-k}$ の大対蹠集合になるので、$L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2(k+1) \leq 2(l+1) = \#_2 L_2.$$

さらに $k = l = [n/2]$ ならば、$L_1 \cap L_2$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の大対蹠集合になる。

注意 6.5.10 複素二次超曲面の実形の交叉に関する論文 [11] を書いた時点では二つの実形の交叉が対蹠集合になることはあらかじめわかっていなかったため、複素二次超曲面の二つの極に関する最小軌跡の交叉が極地になるという特殊性を利用して定理 6.5.2 を証明した。それに対して上記の証明は実形の交叉の対蹠性があらかじめわかっているので、議論を数学的帰納法にのせる部分が [11] の証明よりも簡単になっている。

例 6.1.3 でみたように、既約コンパクト型 Hermite 対称空間の極地は一般には既約にはならない。実形の交叉を極地における実形の交叉に帰着させるためには、たとえ既約コンパクト型 Hermite 対称空間を対象とする場合でも、極地に現れる既約ではないコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する情報が必要になる。それらを扱うために次の補題 6.5.11 と命題 6.5.12 を準備しておく。

補題 6.5.11 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、$\tau : M \to M$ を対合的反正則等長変換とする。$(x, y) \mapsto (\tau(y), \tau(x))$ は $M \times M$ の対合的反正則等長変換になり、不動点集合である実形は次で与えられる。

$$D_\tau(M) = \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}.$$

コンパクト型 Hermite 対称空間 M は $M \times M$ の実形になることを補題 6.5.11 は示している。Leung [5] の 4. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces と Sánchez [6] の Proposition 3 では補題 6.5.11 の実形を想定していないように思われる。

命題 6.5.12 (1) M_1, M_2 をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_1' を M_1 の二つの実形、L_2, L_2' を M_2 の二つの実形とする。このとき、$L_1 \times L_2$ と $L_1' \times L_2'$ は $M_1 \times M_2$ の二つの実形になり、$(L_1 \times L_2) \cap (L_1' \times L_2') = (L_1 \cap L_1') \times (L_2 \cap L_2')$ が成り立つ。L_1, L_1' が横断的に交わり L_2, L_2' が横断的に交わるならば、$L_1 \times L_2$ と $L_1' \times L_2'$ も横断的に交わり $\#\{(L_1 \times L_2) \cap (L_1' \times L_2')\} = \#(L_1 \cap L_1')\#(L_2 \cap L_2')$ が成り立つ。

(2) L_1, L_2 をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の実形とし、$\tau : M \to M$ を対合的反正則等長変換とすると、次が成り立つ。

$$(L_1 \times L_2) \cap D_\tau(M) = \{(x, \tau(x)) \mid x \in L_1 \cap \tau^{-1}(L_2)\}.$$

$M \times M$ 内の実形 $L_1 \times L_2$ と $D_\tau(M)$ が横断的に交わることと L_1 と $\tau^{-1}(L_2)$ が横断的に交わることは同値になり、このとき

$$\#\{(L_1 \times L_2) \cap D_\tau(M)\} = \#\{L_1 \cap \tau^{-1}(L_2)\}.$$

ここで、$L_2 = (\tau_2, M)$ とすると、$\tau^{-1}(L_2) = F(\tau\tau_2\tau^{-1}, M)$ となり $\tau^{-1}(L_2)$ も M の実形である。

(3) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、$\tau_1, \tau_2 : M \to M$ を M の正則等長変換全体の単位連結成分の元によって共役な対合的反正則等長変換とすると、$D_{\tau_1}(M)$ と $D_{\tau_2}(M)$ は合同になる。さらに、$D_{\tau_1}(M)$ と $D_{\tau_2}(M)$ が横断的に交われば、$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2}(M)) = \#_2 M$ が成り立つ。

既約コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉を調べる際に、極地における実形の交叉は命題 6.5.12 の (1) と (2) の場合しか現れないが、今後一般のコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉を調べるために必要になる (3) も掲載した。

定理 6.5.3 の証明 q, m に関する帰納法で証明する。$q = m = 1$ のとき、$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ は複素二次超曲面 $Q_4(\mathbb{C})$ に同型であり、$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ 内の実形 $G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$ と $G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ はそれぞれ $Q_4(\mathbb{C})$ 内の実形 $S^{0,4}$ と $S^{2,2}$ と同型になる。したがって、定理 6.5.2 より $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になり、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2 < 6 = \#_2 L_2.$$

次に一般の q, m について考える。$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2q}) \times G_{2q-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \le j \le 2q)$$

となる。さらに、$0 \le j \le 2q$ について

$$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q}) \cap M_j^+ = \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^q) \times G_{q-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases}$$

$$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q}) \cap M_j^+ = G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2q}) \times G_{2q-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m}).$$

したがって、帰納法の仮定より

$$\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \binom{q}{k}\binom{m}{q-k}.$$

補題 6.4.4 と例 6.2.6 で示した二項係数の関係式より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{q} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m}{q-k} \\ &= \binom{m+q}{q} = \#_2 L_1 < \binom{2m+2q}{2q} = \#_2 L_2.\end{aligned}$$

定理 6.5.4 の証明　$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \qquad (0 \leq j \leq n)$$

となる。$G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ と $G_{n-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ は正則等長的であることに注意する。$0 \leq j \leq n$ について

$$\begin{aligned}U(n) \cap M_j^+ &= D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)) \\ G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) \cap M_j^+ &= G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

したがって、補題 6.5.11 と定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} &= \#\{(G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \times G_{n-j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)) \cap D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n))\} \\ &= \#_2 G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{j}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{j=0}^{n} \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n \\ &= \#_2 U(n) \leq \binom{2n}{n} = \#_2 G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}).\end{aligned}$$

定理 6.5.5 の証明　$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \times G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \leq j \leq 2m)$$

である。$G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})$ と $G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})$ は正則等長的であることに注意する。$0 \leq j \leq 2m$ について

$$\begin{aligned}G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) \cap M_j^+ &= \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \times G_{m-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases} \\ U(2m) \cap M_j^+ &= D_{\tau_j}(G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m})).\end{aligned}$$

したがって、補題 6.5.11 と定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} &= \#\{(G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \times G_{m-k}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m)) \cap D_{\tau_{2k}}(G_{2k}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}))\} \\ &= \#_2 G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) = \binom{m}{k}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{m} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \\ &\leq \binom{2m}{m} = \#_2 G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) \leq 2^{2m} = \#_2 U(2m).\end{aligned}$$

ここで、$m = 1$ のときは

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^1 = \binom{2}{1} = \#_2 G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2) < 2^2 = \#_2 U(2).$$

$m \geq 2$ のときは

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}) < 2^{2m} = \#_2 U(2m).$$

定理 6.5.6 の証明　$Sp(2m)/U(2m)$ の極地は

$$M_j^+ = G_j^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \times G_{2m-j}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m}) \qquad (0 \leq j \leq 2m)$$

である。$0 \leq j \leq 2m$ について

$$Sp(m) \cap M_j^+ = \begin{cases} \emptyset & (j : \text{奇数}) \\ G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) & (j = 2k) \end{cases}$$

$$(U(2m)/O(2m)) \cap M_j^+ = G_j^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m}).$$

したがって、定理 6.4.7 より

$$\begin{aligned}\#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} &= \#\{G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) \cap G_{2k}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m})\} \\ &= \#_2 G_k^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^m) = \binom{m}{k}.\end{aligned}$$

補題 6.4.4 と例 6.2.9、6.2.10 より

$$\begin{aligned}\#(L_1 \cap L_2) &= \sum_{k=0}^{m} \#\{(L_1 \cap M_{2k}^+) \cap (L_2 \cap M_{2k}^+)\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \\ &= \#_2 Sp(m) \leq 2^{2m} = \#_2 U(2m)/O(2m).\end{aligned}$$

定理 6.5.7 を証明するために、$SO(4m)/U(2m)$ の極地を求めると、これらの極地はすべて複素 Grassmann 多様体になり、定理 6.5.3、6.5.4、6.5.5 の結果を適用できる。これによって、今までと同様な手法で定理 6.5.7 を証明できる。

定理 6.5.8 と 6.5.9 を証明するためには、極地を求めそれらの性質を調べる準備が必要になるので、ここではその詳細は省略する。

参考文献

[1] A. Borel and J. P. Serre, Sur certains sousgroupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 128–139.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Duke Math. J. **44** (1977), 745–755.

[3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, preprint.

[5] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom. **14** (1979), 179–185.

[6] C. U. Sánchez, The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 893–900.

[7] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J., (2) **36**, 293–314 (1984)

[8] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115** (1989), 43–46

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. Japan

[10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, to appear in Osaka J. Math.

[11] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J., **62** no.3 (2010), 375–382.

[12] 田崎博之、対称空間入門、対称空間入門 (第 2 回) 大阪市立大学数学研究所連続講義、2010 年度、`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln2010/osaka_cu.html`