

数理物質科学研究科

# 幾何学概論 II

---

## 曲面論

田崎博之

2012年度 1, 2 学期

講義のまとめ 4月16日(月)

## 第1章 曲線

特に断わらない限り、関数や写像は  $C^\infty$  級のものだけを考える。

### 1.1 平面曲線

微分しても0にならない一次元的拡がりを持つものを曲線と呼びたい。

定義 1.1.1 実数の区間  $I$  から平面  $\mathbb{R}^2$  への写像  $p$  の微分が  $I$  のすべての点で0にならないとき、 $p$  の像  $p(I)$  を曲線片と呼ぶ。  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  をこの曲線片のパラメータ表示と呼ぶ。

平面上のある条件を満たす点の集まりを曲線として扱いたいこともある。

例 1.1.2 一定点から等しい距離  $a(> 0)$  にある点の全体。一定点を原点にすると

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}.$$

条件を関数の等式で表現できれば、 $\mathbb{R}^2$  の開集合  $O$  上定義された関数  $f(x, y)$  によって条件を満たす点の集まりを

$$C = \{(x, y) \in O \mid f(x, y) = c\}$$

と記述できる。

定理 1.1.3(二変数の陰関数定理)  $f(x, y)$  を平面  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $O$  で定義された二変数関数とする。  $(x_0, y_0) \in O$  において

$$f(x_0, y_0) = a, \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

ならば、 $x_0$  を含む開区間  $I$  と  $I$  上定義された関数  $g(x)$  が存在し

$$y_0 = g(x_0), \quad x \in I \Rightarrow (x, g(x)) \in O, f(x, g(x)) = a$$

が成り立つ。  $g(x)$  を  $f(x, y) = a$  から定まる陰関数と呼ぶ。

命題 1.1.4 定理 1.1.3 の設定のもとで、

$$C = \{(x, y) \in O \mid f(x, y) = c, (f_x(x, y), f_y(x, y)) \neq (0, 0)\}$$

とおくと、 $C$  の各点は曲線片の近傍を持つ。

講義のまとめ 5月7日(月)

定義 1.1.5  $C$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とする。 $C$  の任意の点が  $C$  内で曲線片の近傍を持つとき、 $C$  を平面曲線と呼ぶ。

この節と次の節では平面曲線を単に曲線と呼ぶ。上記定義より命題 1.1.4 の  $C$  は曲線になる。

定義 1.1.6 パラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  の定める曲線片  $C = p(I)$  の長さ  $L(C)$  を

$$L(C) = \int_I \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって定める。これはパラメータ表示のとり方に依存しないことがわかる。連結曲線  $C$  に対して、 $C$  が閉曲線でなければ一つの曲線片で表すことができ、 $L(C)$  が定まる。閉曲線の場合は

$$C = C_1 \cup C_2, \quad C_i: \text{曲線片}, \quad C_1 \cap C_2: \text{二つの曲線片}$$

と分解し、

$$L(C) = L(C_1) + L(C_2) - L(C_1 \cap C_2)$$

によって曲線の長さ  $L(C)$  を定義する。これは曲線片の分割のし方に依存しないことがわかる。

曲線片  $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{dp}{dt} \right| dt = L(p([a, t])) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって  $t$  の関数  $s(t)$  を定めると、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dp}{dt} \right| > 0$  となり、 $s(t)$  は逆関数  $t(s)$  を持つ。 $\bar{p}(s) = p(t(s))$  によって曲線片のパラメータ表示を定めると  $\frac{d\bar{p}}{ds}$  は単位ベクトルになる。

定義 1.1.7 曲線片のパラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  の速度ベクトル  $\frac{dp}{ds}$  が単位ベクトルになるとき、 $s$  を弧長パラメータと呼ぶ。

## 1.2 平面曲線の曲率

曲線片の弧長パラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して  $\mathbf{e}_1(s) = \frac{dp}{ds}$  によって単位ベクトル  $\mathbf{e}_1(s)$  を定め、 $\mathbf{e}_1(s)$  を反時計回りに  $\pi/2$  回転させたベクトルを  $\mathbf{e}_2(s)$  で表す。 $\mathbb{R}^2$  の内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表す。 $\langle \mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_1(s) \rangle = 1$  を  $s$  で微分することにより、 $\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds}$  は  $\mathbf{e}_2(s)$  に比例することがわかり、 $\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s)$  と書ける。 $\langle \mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle = 0$  と  $\langle \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle = 1$  を  $s$  で微分することにより、 $\frac{d\mathbf{e}_2(s)}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s)$  を得る。

定義 1.2.1  $\kappa(s)$  を曲線片の曲率と呼び、

$$\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \quad \frac{d\mathbf{e}_2(s)}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s)$$

を Frenet の公式と呼ぶ。

例 1.2.2 直線の曲率は 0 になり、半径  $R$  の反時計回りの円の曲率は  $1/R$  になる。

講義のまとめ 5月14日(月)

定理 1.2.3(平面曲線の基本定理)  $c$  と  $\bar{c}$  を平面曲線とする。これら二曲線の曲率が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動によって  $c$  は  $\bar{c}$  に重なることである。実数の区間で定義された滑らかな関数  $\kappa$  に対して、 $s$  を弧長パラメータとし  $\kappa(s)$  を曲率として持つ平面曲線  $c(s)$  が存在する。

### 1.3 空間曲線

定義 1.3.1 実数の区間  $I$  から空間  $\mathbb{R}^3$  への写像  $p$  の微分が  $I$  のすべての点で 0 にならないとき、 $p$  の像  $p(I)$  を曲線片と呼ぶ。 $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  をこの曲線片のパラメータ表示と呼ぶ。 $C$  を  $\mathbb{R}^3$  の部分集合とする。 $C$  の任意の点が  $C$  内で曲線片の近傍を持つとき、 $C$  を空間曲線と呼ぶ。

定義 1.3.2 パラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  の定める曲線片  $C = p(I)$  の長さ  $L(C)$  を

$$L(C) = \int_I \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって定める。これはパラメータ表示のとり方に依存しないことがわかる。連結曲線  $C$  に対して、平面曲線の場合と同様に曲線の長さ  $L(C)$  を定義する。

曲線片  $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{dp}{dt} \right| dt = L(p([a, t])) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって  $t$  の関数  $s(t)$  を定めると、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dp}{dt} \right| > 0$  となり、 $s(t)$  は逆関数  $t(s)$  を持つ。 $\bar{p}(s) = p(t(s))$  によって曲線片のパラメータ表示を定めると  $\frac{d\bar{p}}{ds}$  は単位ベクトルになる。

定義 1.3.3 曲線片のパラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  の速度ベクトル  $\frac{dp}{ds}$  が単位ベクトルになるとき、 $s$  を弧長パラメータと呼ぶ。

### 1.4 空間曲線の曲率と捩率

曲線片の弧長パラメータ表示  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して  $\mathbf{e}_1(s) = \frac{dp}{ds}$  によって単位ベクトル  $\mathbf{e}_1(s)$  を定める。 $\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} \right|$  によって曲率  $\kappa(s)$  を定める。 $\kappa(s) \neq 0$  と

いう前提のもとで、 $\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s)$  によって単位ベクトル  $\mathbf{e}_2(s)$  を定める。ベクトル積を使って  $\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$  によって  $\mathbf{e}_3(s)$  を定めると、各  $s$  に対して  $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$  は  $\mathbb{R}^3$  の正の向き of 正規直交基底になる。さらにこれらは次の Frenet-Serret の公式を満たす。

$$\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \quad \frac{d\mathbf{e}_2(s)}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s), \quad \frac{d\mathbf{e}_3(s)}{ds} = -\tau(s)\mathbf{e}_2(s).$$

講義のまとめ 5月21日(月)

定理 1.4.1(空間曲線の基本定理)  $c$  と  $\bar{c}$  を空間曲線とする。 $\frac{d^2c}{ds^2} \neq 0, \frac{d^2\bar{c}}{ds^2} \neq 0$  を仮定する。これら二曲線の曲率と捩率が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動によって  $c$  は  $\bar{c}$  に重なることである。実数の区間で定義された滑らかな関数  $\kappa > 0$  と  $\tau$  に対して、 $s$  を弧長パラメータとし  $\kappa(s)$  を曲率  $\tau(s)$  を捩率として持つ空間曲線  $c(s)$  が存在する。

### 1.5 曲線に関する面積と体積

定理 1.5.1 平面曲線片  $C$  の弧長パラメータ表示を  $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  で表し、 $r > 0$  とする。

$$T_r(C) = \{p(s) + te_2(s) \mid s \in I, -r \leq t \leq r\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{|\kappa(s)| \mid s \in I\}$  のとき、 $T_r(C)$  の面積  $A(T_r(C))$  は次の等式を満たす。

$$A(T_r(C)) = 2rL(C).$$

定理 1.5.2 空間曲線片  $C$  の弧長パラメータ表示を  $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  で表し、 $\frac{d^2c}{ds^2} \neq 0, r > 0$  とする。

$$B_r^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq r\},$$

$$T_r(C) = \{p(s) + ue_2(s) + ve_3(s) \mid s \in I, (u, v) \in B_r^2\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{\kappa(s) \mid s \in I\}$  のとき、 $T_r(C)$  の体積  $V(T_r(C))$  は次の等式を満たす。

$$V(T_r(C)) = \pi r^2 L(C).$$

補題 1.5.3 平面曲線片  $C$  の弧長パラメータ表示を  $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  で表し、 $r > 0$  とする。

$$S_r(C) = \{p(s) + te_2(s) \mid s \in I, 0 \leq t \leq r\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{|\kappa(s)| \mid s \in I\}$  のとき、

$$A(S_r(C)) = rL(C) - \frac{r^2}{2} \int_I \kappa(s) ds.$$

定理 1.5.4 平面単純閉曲線  $C$  の時計回りの弧長パラメータ表示を  $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  で表し、 $0 < r \leq 1/\max\{|\kappa(s)|\}$  とすると

$$A(S_r(C)) = rL(C) + \pi r^2.$$

定理 1.5.4 の証明は次回。

講義のまとめ 5月28日(月)

命題 1.5.5  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を平面単純閉曲線の弧長パラメータ表示とする。パラメータが反時計回りのとき、 $\int_I \kappa(s) ds = 2\pi$  であり、パラメータが時計回りのとき、 $\int_I \kappa(s) ds = -2\pi$  である。

補題 1.5.3 と命題 1.5.5 を使って定理 1.5.4 を証明できる。

## 第2章 曲面

### 2.1 空間内の曲面

微分しても退化しない二次元的拡がりを持つものを曲面と呼びたい。

定義 2.1.1 平面  $\mathbb{R}^2$  内の領域  $D$  から空間  $\mathbb{R}^3$  への写像  $p$  の微分が  $D$  のすべての点で階数 2 になるとき、 $p$  の像  $p(D)$  を曲面片と呼ぶ。 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  をこの曲面片のパラメータ表示と呼ぶ。

空間内のある条件を満たす点の集まりを曲面として扱いたいこともある。

例 2.1.2 一定点から等しい距離  $a (> 0)$  にある点の全体。一定点を原点にすると

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

条件を関数の等式で表現できれば、 $\mathbb{R}^3$  の開集合  $O$  上定義された関数  $f(x, y, z)$  によって条件を満たす点の集まりを

$$S = \{(x, y, z) \in O \mid f(x, y, z) = c\}$$

と記述できる。

定理 2.1.3 (三変数の陰関数定理)  $f(x, y, z)$  を空間  $\mathbb{R}^3$  の開集合  $O$  で定義された三変数関数とする。 $(x_0, y_0, z_0) \in O$  において

$$f(x_0, y_0, z_0) = a, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

ならば、 $(x_0, y_0)$  を含む領域  $D$  と  $D$  上定義された関数  $g(x, y)$  が存在し

$$z_0 = g(x_0, y_0), \quad (x, y) \in D \Rightarrow (x, y, g(x, y)) \in O, f(x, y, g(x, y)) = a$$

が成り立つ。 $g(x, y)$  を  $f(x, y, z) = a$  から定まる陰関数と呼ぶ。

命題 2.1.4 定理 2.1.3 の設定のもとで、

$$S = \{(x, y, z) \in O \mid f(x, y, z) = c, (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \neq (0, 0, 0)\}$$

とおくと、 $S$  の各点は曲面片の近傍を持つ。

定義 2.1.5  $S$  を  $\mathbb{R}^3$  の部分集合とする。 $S$  の任意の点が  $S$  内で曲面片の近傍を持つとき、 $S$  を曲面と呼ぶ。

定義 2.1.6 パラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  の定める曲面片  $S = p(D)$  の面積  $A(S)$  を

$$A(S) = \int_D |P_u \times P_v| dudv$$

によって定める。

講義のまとめ 6月4日(月)

定義 2.1.7  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  に対して

$$x \times y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ を形式的に展開したもの}$$

としてベクトル積  $x \times y$  を定める。

命題 2.1.8 ベクトル積は次の性質を持つ。

$$(1) \quad \langle x, y \times z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$(2) \quad |x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}.$$

(1) より  $y \times z$  は  $y$  と  $z$  に直交することがわかり、(2) から  $|x \times y|$  は  $x, y$  の張る平行四辺形の面積になることがわかる。

命題 2.1.9 曲面片の面積の定義はパラメータ表示に依存しない。

例 2.1.10  $r > 0$  に対して

$$\phi : S^1(r) \times [-r, r] \rightarrow S^2(r); (x, y, z) \mapsto \left( \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}x, \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}y, z \right)$$

によって  $\phi$  を定める。 $S^1(r) \times [-r, r]$  のパラメータ表示

$$p : [0, 2\pi] \times [-r, r] \rightarrow S^1(r) \times [-r, r]; (\theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

と  $S^2(r)$  のパラメータ表示  $q = \phi \circ p$  によって、これらの面積を計算する。

$$|p_\theta \times p_z| = |q_\theta \times q_z| = r$$

となり、写像  $\phi$  は面積を保つことがわかる。さらに、

$$A(S^1(r) \times [-r, r]) = A(S^2(r)) = 4\pi r^2.$$

## 2.2 曲面の曲率

曲面片のパラメータ表示  $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して  $p_u, p_v$  の張る平面を接平面と呼ぶ。 $p_u \times p_v$  は接平面に直交し

$$\mathbf{e} = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

は単位法ベクトルになる。 $(u_0, v_0) \in D$  における単位法ベクトルを  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(u_0, v_0)$  で表し、関数  $f(u, v)$  を

$$f(u, v) = \langle \mathbf{e}_0, p(u, v) \rangle$$

によって定めると、曲面片は  $(u_0, v_0)$  の近くで  $f(u, v)$  のグラフとみなすことができ、その Hessian によって形を把握できる。

講義のまとめ 6月11日(月)

曲面の接ベクトルは  $\xi p_u + \eta p_v$  ( $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ) と表せ、接ベクトル同士の内積は

$$\langle \xi p_u + \eta p_v, \xi_1 p_u + \eta_1 p_v \rangle = [\xi \ \eta] \begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}.$$

補題 2.2.1 2次正定値対称行列  $A$  に対してある2次正定値対称行列  $B$  が存在して次が成り立つ。

$$A = B^2, \quad AB = BA.$$

補題 2.2.2

$$A = \begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix}$$

において  $A$  に補題 2.2.1 を適用し  $B$  を定める。 $\mathbb{R}^2$  から曲面の接平面への写像

$$x \mapsto [p_u \ p_v] B^{-1} x$$

は等長的線形同型写像になる。

$f$  の Hessian  $\text{Hess}(f)$  の接平面の基底  $p_u, p_v$  に関する表現行列は

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_0, p_{uu} \rangle & \langle \mathbf{e}_0, p_{uv} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_0, p_{vu} \rangle & \langle \mathbf{e}_0, p_{vv} \rangle \end{bmatrix}.$$

定義 2.2.3 接平面における  $f$  の Hessian の固有値、すなわち  $B^{-1}\text{Hess}(f)B^{-1}$  の固有値を  $\kappa_1, \kappa_2$  で表し、曲面の主曲率と呼ぶ。主曲率の積  $K = \kappa_1 \kappa_2$  を Gauss 曲率と呼び、平均  $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$  を平均曲率と呼ぶ。

定理 2.2.4 パラメータ表示  $p$  によって定まる曲面片の Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  は次の表示式を持つ。

$$K = \frac{\langle \mathbf{e}_0, p_{uu} \rangle \langle \mathbf{e}_0, p_{vv} \rangle - \langle \mathbf{e}_0, p_{uv} \rangle^2}{\langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2},$$

$$H = \frac{\langle p_u, p_u \rangle \langle \mathbf{e}_0, p_{vv} \rangle - 2 \langle p_u, p_v \rangle \langle \mathbf{e}_0, p_{uv} \rangle + \langle p_v, p_v \rangle \langle \mathbf{e}_0, p_{uu} \rangle}{2(\langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2)}.$$

定理 2.2.5 二変数関数  $g(x, y)$  のグラフ  $\{(x, y, g(x, y))\}$  として定まる曲面片の Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  は次の表示式を持つ。

$$K = \frac{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}{(1 + g_x^2 + g_y^2)^2}, \quad H = \frac{g_{xx}(1 + g_y^2) - 2g_x g_y g_{xy} + g_{yy}(1 + g_x^2)}{2(1 + g_x^2 + g_y^2)^{3/2}}.$$



講義のまとめ 6月18日(月)

### 2.3 回転面

定理 2.3.1  $xz$  平面の  $z$  軸と交わらない曲線

$$x = f(u), \quad z = g(u) \quad (f(u) > 0, (f'(u), g'(u)) \neq 0)$$

を  $z$  軸の回りに回転した回転面の Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  は

$$K = \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))g'(u)}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^2},$$

$$H = \frac{g'(u)}{2f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{1/2}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{2(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{3/2}}$$

となる。主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  は

$$\kappa_1 = \frac{g'(u)}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{1/2}}, \quad \kappa_2 = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{3/2}}$$

となる。 $xz$  平面の曲線  $(f(u), g(u))$  のパラメータ  $u$  を弧長パラメータにすると、

$$K = -\frac{f''}{f}, \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \right), \quad \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \quad \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}.$$

例 2.3.2  $xz$  平面の曲線を

$$(f(u), g(u)) = \left( r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r} \right) \quad \left( -\frac{\pi}{2}r < u < \frac{\pi}{2}r \right)$$

を  $z$  軸の回りに回転して半径  $r$  の球面が得られる。これによって定理 2.3.1 を適用すると次を得る。

$$K = \frac{1}{r^2}, \quad H = \frac{1}{r}, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{r}.$$

例 2.3.3 トーラスは次の  $xz$  平面の曲線を  $z$  軸の回りに回転した回転面である。

$$(f(u), g(u)) = \left( R + r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r} \right).$$

これによって定理 2.3.1 を適用すると次を得る。

$$K = \frac{\cos \frac{u}{r}}{r(R + r \cos \frac{u}{r})}, \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \frac{u}{r}}{R + r \cos \frac{u}{r}} + \frac{1}{r} \right),$$

$$\kappa_1 = \frac{\cos \frac{u}{r}}{R + r \cos \frac{u}{r}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r}.$$

講義のまとめ 9月3日(月)

1.5 曲線に関する面積と体積は1.5 曲線に関する長さ、面積と体積と改題。さらにこの節に次を追加。

命題 1.5.6 定理 1.5.1 または補題 1.5.3 と同じ設定のもとで、

$$C_r(C) = \{p(s) + r\mathbf{e}_2(s) \mid s \in I\}$$

とすると、

$$L(C_r(C)) = L(C) - r \int_I \kappa(s) ds.$$

2.1 空間内の曲面への追加。これは、1.5 曲線に関する長さ、面積と体積に続く内容である。

定理 2.1.11 定理 1.5.2 と同じ設定のもとで、

$$C_r = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = r\},$$

$$S_r(C) = \{p(s) + u\mathbf{e}_2(s) + v\mathbf{e}_3(s) \mid s \in I, (u, v) \in C_r\}$$

とすると、 $S_r(C)$  の面積  $A(S_r(C))$  は次の等式を満たす。

$$A(S_r(C)) = 2\pi r L(C).$$

## 2.4 第一基本形式

定義 2.4.1  $V$  をベクトル空間とする。写像  $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  が第一成分についても第二成分についても線形であるとき、 $\phi$  を  $V$  上の双線形形式という。さらに

$$\phi(x, y) = \phi(y, x) \quad (x, y \in V)$$

が成り立つとき、 $\phi$  を対称という。対称双線形形式  $\phi$  がさらに  $V \ni x \neq 0$  ならば  $\phi(x, x) > 0$  を見たすとき、 $\phi$  を正定値または内積という。

$V$  を 2次元ベクトル空間とし、 $\phi$  を  $V$  上の双線形形式とする。 $V$  の基底  $u, v$  をとる。 $x = x_1u + x_2v, y = y_1u + y_2v \in V$  に対して

$$\phi(x, y) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \phi(u, u) & \phi(u, v) \\ \phi(v, u) & \phi(v, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

となる。この 2次正方行列を  $\phi$  の基底  $u, v$  に関する表現行列と呼ぶ。 $V$  の双対空間  $V^*$  の元  $\alpha, \beta$  に対して

$$\alpha \otimes \beta(x, y) = \alpha(x)\beta(y) \quad (x, y \in V)$$

によって  $\alpha \otimes \beta$  を定めると、 $\alpha \otimes \beta$  は  $V$  上の双線形形式になる。

講義のまとめ 9月10日(月)

$u, v$  の双対基底を  $u^*, v^*$  で表すと、

$$\phi = \phi(u, u)u^* \otimes u^* + \phi(u, v)u^* \otimes v^* + \phi(v, u)v^* \otimes u^* + \phi(v, v)v^* \otimes v^*.$$

$V$  の双対空間  $V^*$  の元  $\alpha, \beta$  に対して  $\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$  によって  $\alpha\beta$  を定めると、 $\alpha\beta$  は  $V$  上の対称双線形形式になる。さらに  $\alpha\beta = \beta\alpha$  と  $\alpha\alpha = \alpha \otimes \alpha$  が成り立つ。 $\alpha\alpha$  を  $\alpha^2$  とも書く。 $\phi$  が対称双線形形式のときは、

$$\phi = \phi(u, u)u^*u^* + 2\phi(u, v)u^*v^* + \phi(v, v)v^*v^*.$$

定義 2.4.2  $\mathbb{R}^3$  の通常の内積を曲面の接平面に制限したものをその曲面の第一基本形式と呼ぶ。これは、正定値対称双線形形式になる。

$p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面のパラメータ表示とすると、接平面の基底  $p_u, p_v$  に関する第一基本形式の表現行列は

$$\begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix}$$

となる。そこで  $E = \langle p_u, p_u \rangle$ ,  $F = \langle p_u, p_v \rangle = \langle p_v, p_u \rangle$ ,  $G = \langle p_v, p_v \rangle$  とおくと、第一基本形式の表現行列は  $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$  となる。 $p_u, p_v$  の双対基底を  $du, dv$  で表すと、第一基本形式は  $Edudu + 2Fdudv + Gdv dv$  と表せる。曲面上の曲線  $p(u(t), v(t))$  の長さは

$$\int_I \left( E \frac{du(t)}{dt} \frac{du(t)}{dt} + 2F \frac{du(t)}{dt} \frac{dv(t)}{dt} + G \frac{dv(t)}{dt} \frac{dv(t)}{dt} \right)^{1/2} dt.$$

## 2.5 第二基本形式

曲面のパラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  から定まる単位法ベクトル  $\mathbf{e} = p_u \times p_v / |p_u \times p_v|$  の変化が曲面の曲り方を表現している。これは接平面の変化と対応し、これらの間には  $\langle \mathbf{e}, p_{uu} \rangle = -\langle \mathbf{e}_u, p_u \rangle$ ,  $\langle \mathbf{e}, p_{uv} \rangle = -\langle \mathbf{e}_v, p_u \rangle$ ,  $\langle \mathbf{e}, p_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{e}_u, p_v \rangle$ ,  $\langle \mathbf{e}, p_{vv} \rangle = -\langle \mathbf{e}_v, p_v \rangle$  という関係がある。 $(u, v) \mapsto \langle \mathbf{e}_0, p(u, v) \rangle$  の Hessian を曲面の第二基本形式という。 $p_u, p_v$  に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}, p_{uu} \rangle & \langle \mathbf{e}, p_{uv} \rangle \\ \langle \mathbf{e}, p_{vu} \rangle & \langle \mathbf{e}, p_{vv} \rangle \end{bmatrix}$$

となる。そこで、 $L = \langle \mathbf{e}, p_{uu} \rangle$ ,  $M = \langle \mathbf{e}, p_{uv} \rangle = \langle \mathbf{e}, p_{vu} \rangle$ ,  $N = \langle \mathbf{e}, p_{vv} \rangle$  とおくと、第二基本形式の表現行列は  $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$  となる。第一基本形式は  $Ldudu + 2Mdudv + Ndv dv$  と表せる。定理 2.2.4 より Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  は次で与えられる。

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

講義のまとめ 9月24日(月)

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$  より  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  は曲面の接ベクトルになることがわかる。よって  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  は  $p_u, p_v$  の線形結合になる。

$$\mathbf{e}_u = \alpha p_u + \beta p_v, \quad \mathbf{e}_v = \gamma p_u + \delta p_v$$

とおく。これらの係数は

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ -M \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ -N \end{bmatrix}$$

を満たす。これらを解いて

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{-GL + FM}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v, \\ \mathbf{e}_v &= \frac{-GM + FN}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v \end{aligned}$$

を得る。

## 2.6 曲面に関する面積、体積

定理 2.6.1  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面片  $S$  のパラメータ表示とする。  $r > 0$  に対して

$$T_r(S) = \{p(u, v) + t\mathbf{e}(u, v) \mid (u, v) \in D, -r \leq t \leq r\}$$

とすると、  $r \leq \max\{|\kappa_1(u, v)|, |\kappa_2(u, v)| \mid (u, v) \in D\}$  のとき、  $T_r(S)$  の体積は次の等式を満たす。

$$V(T_r(S)) = 2rA(S) + \frac{2}{3}r^3 \int_S K dA.$$

ここで、  $dA = |p_u \times p_v| dudv$  は  $S$  の面積素である。

証明の概略 写像  $\phi: D \times [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$\phi(u, v, t) = p(u, v) + t\mathbf{e}(u, v)$$

によって定めると、

$$V(T_r(S)) = \int_{D \times [-r, r]} |\det(\phi_u \phi_v \phi_t)| dudvdt.$$

$\phi_u = p_u + t\mathbf{e}_u$ ,  $\phi_v = p_v + t\mathbf{e}_v$ ,  $\phi_t = \mathbf{e}$  となり、  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  の計算結果を利用すると、

$$\begin{aligned} \phi_u \times \phi_v &= (1 - 2tH + t^2K)p_u \times p_v = (1 - \kappa_1 t)(1 - \kappa_2 t)p_u \times p_v, \\ \det(\phi_u \phi_v \phi_t) &= (1 - 2tH + t^2K)|p_u \times p_v|. \end{aligned}$$

これと  $r$  に関する仮定より  $|t| < r$  のとき  $\phi_u \times \phi_v \neq 0$  となり、次を得る。

$$V(T_r(S)) = \int_{D \times [-r, r]} |\det(\phi_u \phi_v \phi_t)| dudvdt.$$

講義のまとめ 10月1日(月)

定理 2.6.2 定理 2.6.1 と同じ設定のもとで、

$$T_r^+(S) = \{p(u, v) + te(u, v) \mid (u, v) \in D, 0 \leq t \leq r\}$$

とすると、 $T_r^+(S)$  の体積は

$$V(T_r^+(S)) = rA(S) - r^2 \int_S HdA + \frac{1}{3}r^3 \int_S KdA.$$

定理 2.6.2 定理 2.6.1 と同じ設定のもとで、

$$S_r(S) = \{p(u, v) + re(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

とすると、 $S_r(S)$  の面積は

$$A(S_r(S)) = A(S) - 2r \int_S HdA + r^2 \int_S KdA.$$

## 2.7 Gauss の基本定理

定理 2.7.1 曲面の Gauss 曲率は第一基本形式から定まり、第二基本形式には依存しない。

証明の概略 曲面のパラメータ表示を  $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  とする。

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + Le, \\ p_{uv} &= \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + Me = p_{vu} = \Gamma_{21}^1 p_u + \Gamma_{21}^2 p_v + Me, \\ p_{vv} &= \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + Ne \end{aligned}$$

によって  $\Gamma_{ij}^k$  を定める。第一基本形式の成分  $E, F, G$  の偏微分の計算と 2.5 節の最後に求めた  $e_u, e_v$  の  $p_u, p_v$  の線形結合による表示より

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$

を得ることができる。すなわち、 $\Gamma_{ij}^k$  を  $E, F, G$  とこれらの微分によって表現できる。

さらに Gauss 曲率を  $\Gamma_{ij}^k$  とその微分によって表現することによって定理を証明する。続きは次回。

講義のまとめ 10月15日(月)

$p_{uv}$  と  $p_{vu}$  を計算すると

$$\begin{aligned} p_{uv} &= \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L \frac{-GM + FN}{EG - F^2} \right) p_u \\ &\quad + \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L \frac{FM - EN}{EG - F^2} \right) p_v \\ &\quad + (\Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v) \mathbf{e}, \\ p_{vu} &= \left( \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + M \frac{-GL + FM}{EG - F^2} \right) p_u \\ &\quad + \left( \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + M \frac{FL - EM}{EG - F^2} \right) p_v \\ &\quad + (\Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u) \mathbf{e} \end{aligned}$$

となり、これらが等しいことから  $p_v$  の係数を比較し

$$K = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

を得る。よって、 $K$  は  $E, F, G$  とこれらの微分によって表現できることがわかった。

## 2.8 曲面上の曲線

曲面のパラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  の像に含まれている弧長パラメータ  $s$  を持つ曲線  $c(s)$  は、

$$c(s) = p(u(s), v(s))$$

と表示できる。

定義 2.8.1 上記曲線  $c(s)$  の二階微分の接成分を  $\kappa_g(s)$  で表し、測地的曲率ベクトルと呼ぶ。その法成分を  $\kappa_n(s)$  で表し、法曲率ベクトルと呼ぶ。 $\mathbf{e}_1(s) = \frac{dc(s)}{ds}$  によって単位ベクトル  $\mathbf{e}_1(s)$  を定め、その曲面のパラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  から定まる  $p_u, p_v$  と  $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)$  が同じ向きになるように単位接ベクトル  $\mathbf{e}_2(s)$  を定める。

$$\kappa_g(s) = \kappa_g(s) \mathbf{e}_2(s), \quad \kappa_n(s) = \kappa_n(s) \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$$

によって  $\kappa_g(s), \kappa_n(s)$  を定め、それぞれ測地的曲率、法曲率と呼ぶ。

定義 2.8.2 曲面のパラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  が  $E = G, F = 0$  を満たすとき、パラメータ  $u, v$  を等温パラメータと呼ぶ。

定理 2.8.3 曲面の各点の近傍で等温パラメータによるパラメータ表示が存在する。

定理 2.8.4 等温パラメータ  $u, v$  による曲面のパラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して、この曲面上の曲線  $c(s) = p(u(s), v(s))$  の測地的曲率  $\kappa_g(s)$  は次のように表示される。

$$\kappa_g(s) = \frac{E_u v'(s) - E_v u'(s)}{2E} + \frac{d\phi(s)}{ds}.$$

ただし、 $\phi(s)$  は  $\mathbf{e}_1(s)$  の  $p_u$  からの反時計回りの角度である。

講義のまとめ 10月22日(月)

定理 2.8.4 の証明の概略  $u, v$  が等温パラメータであることから、

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{p_u}{|p_u|} = \frac{p_u}{\sqrt{E}}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{p_v}{|p_v|} = \frac{p_v}{\sqrt{E}}$$

は曲面の接平面の正規直交基底になる。 $\phi$  の定め方より曲線上で

$$[\mathbf{e}_1(s) \ \mathbf{e}_2(s)] = [\bar{\mathbf{e}}_1(s) \ \bar{\mathbf{e}}_2(s)] \begin{bmatrix} \cos \phi(s) & -\sin \phi(s) \\ \sin \phi(s) & \cos \phi(s) \end{bmatrix}$$

が成り立つ。これより

$$\kappa_g(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds}, \mathbf{e}_2(s) \right\rangle = \frac{d\phi(s)}{ds} + \left\langle \frac{d\bar{\mathbf{e}}_1(s)}{ds}, \bar{\mathbf{e}}_2(s) \right\rangle.$$

さらに

$$\left\langle \frac{d\bar{\mathbf{e}}_1(s)}{ds}, \bar{\mathbf{e}}_2(s) \right\rangle = \frac{E_u v'(s) - E_v u'(s)}{2E}$$

となり、定理の等式を得る。

## 2.9 局所的 Gauss-Bonnet の定理

定理 2.9.1 曲面の等温パラメータ  $u, v$  によって Gauss 曲率  $K$  は次のように表せる。

$$K = -\frac{1}{2E} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{E_u}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{E} \right) \right\} = -\frac{1}{2E} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log E.$$

証明の概略 定理 2.7.1 の証明中に示した Gauss 曲率の表示式を等温パラメータであることを使って計算する。

定理 2.9.2 パラメータ表示  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  から定まる曲面片上の三つの曲線  $c_1, c_2, c_3$  が単純閉曲線  $\partial\Delta$  を成しそれが囲む領域を  $\Delta$  とする。 $c_i$  の終点における速度ベクトルから  $c_{i+1}$  の始点における速度ベクトルへの反時計回りの角度を  $\theta_i$  で表す。ただし、 $c_4 = c_1$  とする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\int_{\Delta} K dA + \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i.$$

証明の概略 今までに得た結果から

$$\int_{\Delta} K dA = -\frac{1}{2} \int_{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{E_u}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{E} \right) \right\} dudv.$$

右辺に Green の公式を適用すると、右辺は定理 8.2.4 より

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial\Delta} \frac{E_u}{E} dv - \frac{E_v}{E} du = - \int_{\partial\Delta} \left( \kappa_g(s) - \frac{d\phi(s)}{ds} \right) ds$$

に一致する。 $\phi$  の定め方より

$$\int_{\partial\Delta} \frac{d\phi(s)}{ds} ds = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i$$

となり、定理の等式を得る。

講義のまとめ 10月29日(月)

例 2.9.3 平面上の三角形  $\Delta$  に定理を適用すると、Gauss 曲率は 0 になり線分の測地的曲率も 0 になるので、 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$  を得る。これは、平面三角形の外角の和が  $2\pi$  であることを示しているにほかならない。

2.8 節に次の二つの例を追加。

例 2.8.5(立体射影) 単位球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  の点  $(0, 0, -1)$  を始点として  $xy$  平面の点  $(u, v, 0)$  を通る直線と  $S^2$  との二交点を  $(0, 0, -1), p(u, v)$  とすると、

$$p(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, -u^2 - v^2 + 1).$$

$p(u, v)$  の偏微分とそれらの内積を計算すると、 $u, v$  が等温パラメータであることを確認できる。

例 2.8.6 定理 2.3.1 の設定のもとで、

$$(u, v) \mapsto (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

によって定まるパラメータ  $u, v$  のうち  $u$  を

$$w = \int \frac{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}{f(u)} du$$

の逆関数によって変数変換することにより、

$$(w, v) \mapsto (f(u(w)) \cos v, f(u(w)) \sin v, g(u))$$

によって定まるパラメータ  $w, v$  は等温パラメータになる。

## 2.10 曲面の向き

命題 2.10.1 実 2 次正方行列全体を  $M_2(\mathbb{R})$  で表す。2 次直交群

$$O(2) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = 1\}$$

は二つの連結成分を持ち、単位元を含む連結成分は回転群

$$SO(2) = \{g \in O(2) \mid \det g = 1\}$$

に一致する。

命題 2.10.2 2 次実一般線形群

$$GL(2, \mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\}$$

は二つの連結成分を持ち、単位元を含む連結成分は

$$GL_+(2, \mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$$

に一致する。



講義のまとめ 11月5日(月)

定義 2.10.3  $V$  を実 2 次元ベクトル空間とする。 $V$  は  $\mathbb{R}^2$  と線形同型になり、これによって位相が定まる。 $B(V)$  を  $V$  の基底の全体とする。 $B(V) \subset V \times V$  とみなすことができ、これにも自然に位相が定まる。 $V$  の二つの基底が  $B(V)$  の同じ連結成分に含まれるとき、これらの基底は同じ向きであるという。

$B(V)$  は  $GL(2, \mathbb{R})$  と対応し、位相同型になる。よって  $B(V)$  は二つの連結成分を持つ。したがって、 $V$  の向きは二種類になる。

定義 2.10.4 曲面  $S$  を定める曲面片のパラメータ表示  $p_\alpha : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $(p_\alpha)_u, (p_\alpha)_v$  がすべて接平面の同じ向きになるようにとることができるとき、曲面  $S$  を向き付け可能という。さらに向き付け可能曲面に対して定まる接平面の向きをこの曲面の向きと呼ぶ。

定義から向き付け可能曲面の向きは、各連結成分に対して二つ存在することがわかる。曲面の向きを定める曲面片のパラメータ表示  $p_\alpha : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して、

$$\mathbf{e} = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

によって単位法ベクトル  $\mathbf{e}$  を定めると、これは曲面全体で定まる。逆に曲面全体に単位法ベクトルが定まるとき、曲面は向き付け可能になる。

## 2.11 Euler 数

曲面内の有限個の曲線に囲まれた領域も曲面と呼ぶ。このときに、領域を囲む曲線の合併をその曲面の境界と呼ぶ。

定義 2.11.1 曲面内の一つの曲面片に含まれる三本の曲線で囲まれた図形を曲面の三角形と呼ぶ。通常の三角形に対する用語、辺、頂点を曲面の三角形にも流用する。曲面  $S$  の三角形の集まり  $\{\Delta_\alpha\}$  の合併が  $S$  に一致し、異なる  $\Delta_\alpha, \Delta_\beta$  の共通部分は、両者の辺、頂点または空集合であるときに、 $\{\Delta_\alpha\}$  を  $S$  の三角形分割という。コンパクト曲面には有限個の三角形分割が存在することがわかる。コンパクト曲面  $S$  の三角形分割をとり

$$\chi(S) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) - (\text{面の数})$$

によって  $\chi(S)$  を定める。面とは三角形と同じことである。この  $\chi(S)$  を  $S$  の Euler 数と呼ぶ。

例 2.11.2 曲面の三角形  $\Delta$  自身の Euler 数は

$$\chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1.$$

球面  $S^2$  を北半球と南半球は三角形とみなすことができ、

$$\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2.$$

定理 2.11.3 コンパクト曲面の Euler 数は三角形分割に依存しない。

講義のまとめ 11月12日(月)

定義 2.11.4 境界のないコンパクト曲面を閉曲面という。

定理 2.11.5 コンパクト曲面  $S$  の三角形分割の内部の頂点の個数を  $c_{0,0}$ 、境界の頂点の個数を  $c_{0,1}$ 、面の個数を  $c_2$  とすると、

$$\chi(S) = c_{0,0} + \frac{1}{2}c_{0,1} - \frac{1}{2}c_2$$

が成り立つ。特に  $S$  が閉曲面の場合は次の等式が成り立つ。

$$\chi(S) = c_{0,0} - \frac{1}{2}c_2.$$

## 2.12 大域的 Gauss-Bonnet の定理

定理 2.12.1 向き付け可能コンパクト曲面  $S$  の境界を  $\partial S$  で表すとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} \kappa_g ds = 2\pi\chi(S).$$

特に  $S$  が閉曲面の場合は次の等式が成り立つ。

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

証明の概略 曲面を三角形分割し、その三角形に局所的 Gauss-Bonnet の定理を適用し、それを加えて定理 2.11.5 を使うことで定理の結論を得る。

命題 2.12.2 単位球面  $S^2$  上の単純閉曲線  $c$  が  $S^2$  の面積を二等分するための必要十分条件は、 $\int_c \kappa_g = 0$  である。

証明の概略  $c$  が囲む領域の一つ  $D$  に大域的 Gauss-Bonnet の定理を適用すると、

$$\int_D dA + \int_c \kappa_g ds = 2\pi\chi(D) = 2\pi.$$

$c$  が  $S^2$  の面積を二等分するための必要十分条件は  $\int_D dA = 2\pi$  だから、上の等式よりこれは  $\int_c \kappa_g = 0$  と同値になる。

定理 2.12.3 1.3 節の設定のもとで、さらに空間曲線  $c(s)$  は閉曲線であり、 $e_2(s)$  の像が  $S^2$  を二つの領域に分割するとき、この二つの領域の面積は等しい。