新潟大学理学部

構造数理特別講義 I

凸体の付値

田崎博之

2013 年度

はしがき

この講義ノートは新潟大学で行った集中講義の内容である。基本的には 2009 年度と 2011 年度に筑波大学で行った講義のノートに基づいているが、いくつかの部分ではより詳しい説明に差し替えた。さらにこれらの講義ノートは以下の文献を参考にした。

- H. Groemer, On the extension of additive functionals on classes of convex sets, Pacific J. Math., 75 (1978), 397–410.
- D. Klain and G.-C. Rota, Introduction to geometric probability, Cambridge University Press, 1997.
- R. Schneider, Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory, Cambridge Univ. Press, 1993

また講義中に印南信宏先生から指摘を受けた不十分な部分も修正した。これらのご指摘と集中講義の機会をいただいたこと、および新潟滞在中にいろいろとお世話になったことについて印南先生に感謝したい。

この講義では、平面や空間の線分、凸多角形、凸多面体の長さ、面積、体積などの幾何学的量に関する解説をした。より詳しく言うと、これらの図形の有限個の合併について定まる付値と呼ばれる有限加法的な測度を扱った。単体複体の Euler 数もその例の一つである。さらにこれらの図形の量が積分を通していろいろな関係を持っていることも解説した。

なお、講義では各種 Groemer の定理の詳しい証明は与えなかったが、この講義ノートには詳しい証明を掲載した。また、付値としての Euler 数と単体複体の Euler 数の関係について講義では大まかな説明にとどめたが、この講義ノートには詳しい説明を掲載した。

目 次

第1章　付値と積分

1.1　付値

定義 1.1.1 集合 S の部分集合全体を $P(S)$ で表す。$L \subset P(S)$ が空集合を含み有限個の合併と共通部分に関して閉じているとき、L を**束**と呼ぶ。束 L 上定義された実数値関数 μ が次の条件を満たすとき、L 上の**付値**と呼ぶ。

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad (A, B \in L), \tag{1.1.1}$$

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{1.1.2}$$

例 1.1.2 集合 S の有限部分集合全体を $P_0(S)$ で表す。$P_0(S) \subset P(S)$ となり、$P_0(S)$ は束になることもわかる。さらに、$A \in P_0(S)$ に対して A の元の個数 $\#A$ を対応させる関数は $P_0(S)$ 上の付値になる。

例 1.1.3 $\mathbb{R}$ の有界閉区間の有限個の合併全体を $I(1)$ で表す。$I(1)$ の元 A は互いに素な有界閉区間の合併で一意的に表される。これら有界閉区間の長さの和を $\mu_1(A)$ で表すと、μ_1 は $I(1)$ 上の付値になる。

命題 1.1.4 束 L 上の付値 μ は次の等式を満たす。

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \quad (A_i \in L). \tag{1.1.3}$$

この等式を**包除原理**または**包除公式**と呼ぶ。

上の命題はすべての自然数 n とすべての $A_1, \ldots, A_n \in L$ について上の等式が成り立つことを主張している。さらに右辺は $k=1$ から n の各 k について $\{1, \ldots, n\}$ から k 個とりだした元を $i_1 < \cdots < i_k$ と並べて $\mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ をすべての k 個のとりだし方について和をとり、それをさらにすべての k について和をとっている。各自然数 n についてこの等式を詳しくみてみよう。$n = 1$ のときは、任意の $A_1 \in L$ に対して

$$\mu(A_1) = \mu(A_1)$$

であり、これは自明である。$n = 2$ のときは、任意の $A_1, A_2 \in L$ に対して

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$$

であり、これは (1.1.1) に一致する。$n=3$ のときは、任意の $A_1, A_2, A_3 \in L$ に対して右辺の $k=1$ の和は

$$\mu(A_1)+\mu(A_2)+\mu(A_3).$$

$k=2$ の和は

$$-\mu(A_1\cap A_2)-\mu(A_1\cap A_3)-\mu(A_2\cap A_3).$$

$k=3$ の和は

$$\mu(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

以上より、

$$\begin{aligned}&\mu(A_1\cup A_2\cup A_3)\\ =&\mu(A_1)+\mu(A_2)+\mu(A_3)-\mu(A_1\cap A_2)-\mu(A_1\cap A_3)-\mu(A_2\cap A_3)\\ &+\mu(A_1\cap A_2\cap A_3)\end{aligned}$$

である。$n\geq 3$ のときに等式を証明する必要がある。

包除公式の左辺は集合の合併の付値の値であり、右辺は集合の共通部分の付値の値だけの和と差になっていることに注意しておく。

証明　$n=3$ のときは、最初に $A_1\cup A_2\in L$ と $A_3\in L$ に (1.1.1) を適用する。

$$\begin{aligned}&\mu(A_1\cup A_2\cup A_3)=\mu(A_1\cup A_2)+\mu(A_3)-\mu((A_1\cup A_2)\cap A_3)\\ =&\mu(A_1)+\mu(A_2)-\mu(A_1\cap A_2)+\mu(A_3)-\mu((A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3))\\ =&\mu(A_1)+\mu(A_2)-\mu(A_1\cap A_2)+\mu(A_3)\\ &-\{\mu(A_1\cap A_3)+\mu(A_2\cap A_3)-\mu(A_1\cap A_2\cap A_3)\}\\ =&\mu(A_1)+\mu(A_2)+\mu(A_3)-\mu(A_1\cap A_2)-\mu(A_1\cap A_3)-\mu(A_2\cap A_3)\\ &+\mu(A_1\cap A_2\cap A_3)\end{aligned}$$

となり (1.1.3) は成り立つ。一般の n のときは、n に関する帰納法で等式 (1.1.3) を証明する。n のとき成り立つと仮定して $n+1$ の場合も成り立つことを示そう。

$$\begin{aligned}&\mu(A_1\cup\cdots\cup A_{n+1})\\ =&\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)+\mu(A_{n+1})-\mu((A_1\cup\cdots\cup A_n)\cap A_{n+1})\\ =&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\mu(A_{n+1})\\ &-\mu((A_1\cap A_{n+1})\cup\cdots\cup(A_n\cap A_{n+1}))\\ =&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\mu(A_{n+1})\\ &-\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\sum_{j_1<\cdots<j_l}\mu(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_l}\cap A_{n+1})\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

定義 1.1.5 集合 S の部分集合族 $G \subset P(S)$ が有限個の共通部分に関して閉じていると仮定する。ただし、共通部分が空集合でなければ G の元になるときに、G は "有限個の共通部分に関して閉じている" ということにする。$G \cup \{\emptyset\}$ 上の実数値関数 ν が、$A, B, A \cup B \in G$ を満たすすべての A, B に対して (1.1.1) と (1.1.2) を満たすとき、ν を G 上の**付値**と呼ぶ。

注意 1.1.6 付値の定義 (定義 1.1.5) において G は合併について閉じているわけではないので、すべての $A, B \in G$ について (1.1.1) が意味を持つとは限らないことに注意しておく。

この講義の主な対象である $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト凸集合すなわち**凸体**の全体は有限個の共通部分に関しては閉じているが、有限個の合併に関しては閉じていない。その凸体全体上で付値を考えるため、束ではない部分集合族上の付値を定義している。凸体の全体を距離空間として考えるときは空集合を含めないが、付値を考えるときには付値の定義域に空集合を含める必要があるので上のように付値を定義した。

補題 1.1.7 集合 S の部分集合族 G が有限個の共通部分に関して閉じていると仮定する。G の元の有限個の合併全体 L は束になる。

証明 L が有限個の合併に関して閉じていることは定め方からわかる。L が有限個の共通部分に関して閉じていることを示す。L が二つの元の共通部分に関して閉じていることを示せば十分である。$A_i, B_j \in G$ に対して

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{l} B_j \right) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

となり、各 $A_i \cap B_j$ は G に含まれるかまたは空集合になるため、上記共通部分は L に含まれる。

定義 1.1.8 補題 1.1.7 における G は L を**生成する**といい、$L = [G]$ と表す。

注意 1.1.9 有限個の共通部分に関して閉じている G 上の付値が、束 $[G]$ 上の付値に拡張できるかどうかが問題になる。そのための必要十分条件を与えるのが次の節の主題である。次の例 1.1.10 は、有限個の共通部分に関して閉じている G 上の付値が束 $[G]$ 上の付値に拡張できない例を与えている。

例 1.1.10 $S = \{1, 2, 3\},\ G = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \subset P(S)$ として、

$$\lambda(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset), \\ 1 & (X \neq \emptyset) \end{cases}$$

によって $G \cup \{\emptyset\}$ 上の関数 λ を定める。このとき、以下が成り立つ。

(1) G は有限個の共通部分に関して閉じている。

(2) λ は G 上の付値になる。

(3) $[G] = P(S)$ が成り立つ。

(4) λ を $[G]$ 上の付値には拡張できない。

問題 1.1.11 S を一つの集合とし、$L \subset P(S)$ を束とする。L 上の付値の全体 $\mathrm{Val}(L)$ は自然な加法と実数倍に関して実ベクトル空間になることを示せ。

問題 1.1.12 S を一つの集合とする。このとき、以下を示せ。

(1) $P_0(S)$ は束になる (例 1.1.2)。

(2) f を S 上定義された実数値関数とする。

$$\lambda_f(X) = \sum_{x \in X} f(x) \quad (X \in P_0(S))$$

によって λ_f を定めると、λ_f は $P_0(S)$ 上の付値になる。f が恒等的に 1 の場合は、λ_f は例 1.1.2 で定めた元の個数 $\#$ に一致する。

(3) S 上の実数値関数全体の成す実ベクトル空間を $F(S)$ で表す。このとき

$$\Lambda : F(S) \to \mathrm{Val}(P_0(S)) \ ; \ f \mapsto \lambda_f$$

は線形同型写像になる。

1.2 Groemer の積分定理

定義 1.2.1 集合 S の部分集合 A に対して、A の**特性関数** I_A を

$$I_A(s) = \begin{cases} 1 & (s \in A) \\ 0 & (s \notin A) \end{cases}$$

によって定める。S の部分集合からなる束 L の元の特性関数の線形結合

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i} \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R},\ A_i \in L) \tag{1.2.4}$$

を L **単純関数**、または単に**単純関数**と呼ぶ。

命題 1.2.2 特性関数は次の性質を持つ。

$$I_{A\cap B} = I_A I_B, \tag{1.2.5}$$

$$I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_A I_B = 1-(1-I_A)(1-I_B). \tag{1.2.6}$$

L を束とすると、L 単純関数の全体は代数の構造を持つ。

証明 (1.2.5) は特性関数の定め方よりわかる。

$$I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B} = I_A + I_B - I_A I_B$$

となり、$S - A\cup B$ の特性関数を考えると、

$$1 - I_{A\cup B} = (1-I_A)(1-I_B).$$

これらより、(1.2.6) もわかる。

(1.2.5) と (1.2.6) より、L 単純関数の積と和はまた L 単純関数になる。さらに、定義より L 単純関数の実数倍も L 単純関数になる。したがって、L 単純関数の全体は代数の構造を持つ。

命題 1.2.3 特性関数は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} I_{A_1\cup\cdots\cup A_n} =& 1-(1-I_{A_1})(1-I_{A_2})\cdots(1-I_{A_n}) \\ =& \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k} I_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

これも**包除公式**と呼ぶ。

証明 (1.2.5) と (1.2.6) を繰り返し使うことにより (1.2.7) を得る。(1.2.7) は $n=1$ のときは自明な等式になり、$n=2$ のときは (1.2.6) に一致する。一般の n については、

$$S - A_1\cup\cdots\cup A_n = (S-A_1)\cap\cdots\cap(S-A_n)$$

の特性関数を考えることによって、

$$1 - I_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = (1-I_{A_1})(1-I_{A_2})\cdots(1-I_{A_n})$$

が成り立つことがわかる。これより

$$I_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1-(1-I_{A_1})\cdots(1-I_{A_n})(1-I_{A_{n+1}}).$$

もう一つの等式は

$$\begin{aligned} &1-(1-I_{A_1})\cdots(1-I_{A_n}) \\ =&1-\left\{1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k} I_{A_{i_1}}\cdots I_{A_{i_k}}\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} I_{A_{i_1}} \cdots I_{A_{i_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} I_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}
\end{aligned}
$$

よりわかる。

定理 1.2.4 (Groemer の積分定理) 集合 S の部分集合族 G は有限個の共通部分に関して閉じていて、μ は G 上の付値であるとする。このとき、次の条件は同値になる。

(1) μ は $[G]$ 上の付値に一意的に拡張できる。

(2) μ は次の包除等式を満たす。すべての $n \geq 2$ と $B_i, B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \in G$ を満たす B_i に対して

$$
\mu(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}). \tag{1.2.8}
$$

(3) $[G]$ 単純関数の μ に関する**積分**を次のように定めることができる。$[G]$ 単純関数 $f = \alpha_1 I_{A_1} + \cdots + \alpha_k I_{A_k}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R},\ A_i \in G$) に対して

$$
\int f d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \tag{1.2.9}
$$

によって積分を定める。

証明　(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) の順序で証明する。

(1) ⇒ (2)　μ は $[G]$ 上の付値に拡張できるので、(1.1.1) より (1.1.3) を得る。したがって、(2) が成り立つ。

(2) ⇒ (3)　(1.2.9) による積分の定め方が $[G]$ 単純関数の表示に依存しないことを証明する。空ではなく互いに異なる $K_1, \ldots, K_m \in G$ と 0 ではない実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ が存在し、

$$
\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i} = 0, \tag{1.2.10}
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) \neq 0 \tag{1.2.11}
$$

が成り立つと仮定する。$L_1 = K_1, \ldots, L_m = K_m$ とおき、$L_{m+1} = K_1 \cap K_2, L_{m+2} = K_1 \cap K_3, \ldots$ と二つの共通部分、三つの共通部分、... と K_i のすべての組合せの共

通部分を L_i で表し、そのすべてを $L_1, \ldots, L_p\,(p = 2^m - 1)$ とする。G は有限個の共通部分に関して閉じているという前提から、すべての i について $L_i \in G$ が成り立つ。さらに $\{L_1, \ldots, L_p\}$ も i, j について $\max\{i, j\} \leq k$ が存在して $L_i \cap L_j = L_k$ が成り立ち、共通部分に関して閉じていることに注意しておく。

$$C := \left\{ (c_1, \ldots, c_p) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} c_i I_{L_i} = 0,\ \sum_{i=1}^{p} c_i \mu(L_i) \neq 0 \right\}$$

について考える。$L_1 = K_1, \ldots, L_k = K_k$ だから $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots, 0)$ は C に含まれ、C は空ではない。

$$q := \max_{(c_i) \in C} \min\{i \mid c_i \neq 0\}$$

とおいて、q を与える $(c_i) \in C$ をとる。すると

$$\sum_{i=q}^{p} c_i I_{L_i} = 0, \quad c_q \neq 0, \tag{1.2.12}$$

$$\sum_{i=q}^{p} c_i \mu(L_i) \neq 0 \tag{1.2.13}$$

が成り立つ。このとき、$q = p$ とはならないことがわかる。なぜならば、q の定め方より $c_1 = \cdots = c_{q-1} = 0$ となるので、(1.2.12) は

$$c_q I_{L_q} + \cdots + c_p I_{L_p} = 0$$

と書ける。もし $q = p$ ならば、$c_p I_{L_p} = 0$ が成り立つ。さらに (1.2.13) より $c_p \mu(L_p) \neq 0$ となって矛盾する。よって $q < p$ となる。次に

$$L_q \subset L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p$$

となることを示す。もしそうならないとすると、ある $x \in L_q - (L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p)$ が存在することになる。このとき、$I_{L_q}(x) = 1,\ I_{L_i}(x) = 0\,(i > q)$ が成り立ち、(1.2.12) に x を代入すると $c_q = 0$ となり矛盾。よって、$L_q \subset L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p$ となり、

$$\begin{aligned} L_q &= L_q \cap (L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p) \\ &= (L_q \cap L_{q+1}) \cup \cdots \cup (L_q \cap L_p) \end{aligned}$$

を得る。μ と特性関数はともに包除等式を満たすので、上記等式より

$$\begin{aligned} \mu(L_q) &= \sum_{q < i \leq p} \mu(L_q \cap L_i) - \sum_{q < i < j \leq p} \mu(L_q \cap L_i \cap L_j) + - \cdots, \\ I_{L_q} &= \sum_{q < i \leq p} I_{L_q \cap L_i} - \sum_{q < i < j \leq p} I_{L_q \cap L_i \cap L_j} + - \cdots \end{aligned}$$

が成り立つ。右辺に現れる $L_q, L_{q+1}, \ldots,$ の共通部分はいずれもある $s > q$ によって L_s と表される。よってある係数 d_s が存在して

$$I_{L_q} = \sum_{s>q} d_s I_{L_s}, \tag{1.2.14}$$

$$\mu(L_q) = \sum_{s>q} d_s \mu(L_s) \tag{1.2.15}$$

が成り立つ。(1.2.14) と (1.2.15) を (1.2.12) と (1.2.13) に代入すると、$c_1 = \cdots = c_{q-1} = 0$ であることから、(1.2.12) と (1.2.13) と同じ形であって添字が q より大きい式が得られる。これは q の最大性に矛盾する。したがって、

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = 0$$

が成り立つ。

単純関数が

$$a_1 I_{X_1} + a_2 I_{X_2} + \cdots + a_m I_{X_m} = b_1 I_{Y_1} + b_2 I_{Y_2} + \cdots + b_n I_{Y_n}$$

と二通りに表現されるとすると、

$$a_1 I_{X_1} + a_2 I_{X_2} + \cdots + a_m I_{X_m} - b_1 I_{Y_1} - b_2 I_{Y_2} - \cdots - b_n I_{Y_n} = 0$$

となり、

$$a_1\mu(X_1) + a_2\mu(X_2) + \cdots + a_m\mu(X_m) - b_1\mu(Y_1) - b_2\mu(Y_2) - \cdots - b_n\mu(Y_n) = 0$$

すなわち、

$$a_1\mu(X_1) + a_2\mu(X_2) + \cdots + a_m\mu(X_m) = b_1\mu(Y_1) + b_2\mu(Y_2) + \cdots + b_n\mu(Y_n)$$

を得る。これより μ は $[G]$ 上の積分を定め、(3) が成り立つ。

(3) $\Rightarrow$ (1)　μ は $[G]$ 単純関数の空間上の積分を定めるので

$$\tilde{\mu}(A) = \int I_A d\mu \qquad (A \in L)$$

によって $\tilde{\mu}$ の $[G]$ 上の値を定めることができる。$A \in G$ に対して

$$\tilde{\mu}(A) = \int I_A d\mu = \mu(A)$$

となり、$\tilde{\mu}$ は μ の $[G]$ への拡張になっている。(1.2.5)、(1.2.6) と積分の線形性より $A, B \in [G]$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A \cup B) &= \int I_{A\cup B} d\mu = \int (I_A + I_B - I_{A\cap B}) d\mu \\ &= \int I_A d\mu + \int I_B d\mu - \int I_{A\cap B} d\mu \\ &= \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B) - \tilde{\mu}(A \cap B)\end{aligned}$$

となって $\tilde{\mu}$ は $[G]$ 上の付値になる。包除公式 (1.1.3) より拡張は一意的になり、(1) が成り立つ。

第2章　閉区間塊の内在的体積

2.1　閉区間塊

定義 2.1.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R},\, a_i \leq b_i)$$

を $\mathbb{R}^n$ の**閉区間**と呼ぶ。$\mathbb{R}^n$ の閉区間全体を $I_0(n)$ で表す。閉区間の**次元**を

$$\dim([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \#\{i \mid a_i \neq b_i\}$$

によって定める。$\mathbb{R}$ の閉区間 I_i, J_i に対して

$$(I_1 \times \cdots \times I_n) \cap (J_1 \times \cdots \times J_n) = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_n \cap J_n)$$

となるので、$I_0(n)$ は有限個の共通部分に関して閉じている。閉区間の有限個の合併を**閉区間塊**と呼ぶ。$\mathbb{R}^n$ の閉区間塊全体を $I(n)$ で表すと、$I(n)$ は $I_0(n)$ の生成する束 $[I_0(n)]$ になる。

定理 2.1.2 ($I(n)$ に関する Groemer の拡張定理) $I_0(n)$ 上の付値は $I(n)$ 上の付値に一意的に拡張できる。

証明　μ を $I_0(n)$ 上の付値とする。定理 1.2.4 より、μ に関する積分が存在することを示せばよい。これを次元 n に関する帰納法で証明する。$n = 0$ の場合は明らかに定理は成り立つ。そこで、$n \geq 1$ として $n - 1$ 次元以下の場合に定理は成り立つと仮定する。μ に関する積分が存在しないと仮定して矛盾を導く。ある $P_1, \ldots, P_m \in I_0(n)$ と $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i} = 0, \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i) = C \neq 0 \tag{2.1.2}$$

を満たすとする。

$$k = \#\{i \mid \dim P_i = n\}$$

とおく。(2.1.1) と (2.1.2) を満たす $P_1, \ldots, P_m \in I_0(n)$ のうちで、k が最小になるようにとっておく。

$k = 0$ とする。これは (2.1.1) と (2.1.2) を満たす $P_1, \ldots, P_m \in I_0(n)$ を $\dim P_i \leq n-1$ となるようにとれることを意味する。そこでさらに、(2.1.1) と (2.1.2) を満たす $P_1, \ldots, P_m$ を含む超平面の個数が最小になるように $P_1, \ldots, P_m$ を選び、これらを含む超平面の個数を l とする。定め方より $l \geq 1$ である。

$l = 1$ とすると、$n-1$ 次元の帰納法の仮定に矛盾するので、$l > 1$ となる。$P_1, \ldots, P_m$ を含む超平面を $H_1, \ldots, H_l$ とする。すなわち

$$P_i \subset H_1 \cup \cdots \cup H_l \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

となっている。ここで、各 H_j は閉区間 P_i を含むので、座標軸に垂直になるようにとれることに注意しておく。$I_{P_i} \cdot I_{H_1} = I_{P_i \cap H_1}$ に注意して、(2.1.1) に I_{H_1} をかけると

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H_1} = 0 \tag{2.1.3}$$

を得る。$P_i \cap H_1$ は $n-1$ 以下の次元の閉区間になるので、$n-1$ 次元の帰納法の仮定より

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H_1) = 0 \tag{2.1.4}$$

が成り立つ。(2.1.1) − (2.1.3) は

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H_1} = 0. \tag{2.1.5}$$

(2.1.2) − (2.1.4) は

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H_1) = C. \tag{2.1.6}$$

(2.1.5) と (2.1.6) において $P_i \subset H_1$ となる i が存在しなければ、

$$P_i \subset H_2 \cup \cdots \cup H_l \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

となって l の最小性に反するので、$P_{i_0} \subset H_1$ となる i_0 が存在する。このとき、$P_{i_0} \cap H_1 = P_{i_0}$ が成り立ち、(2.1.5) において $\alpha_{i_0} I_{P_{i_0}} - \alpha_{i_0} I_{P_{i_0} \cap H_1} = 0$ が成り立ち、(2.1.6) において $\alpha_{i_0}\mu(P_{i_0}) - \alpha_{i_0}\mu(P_{i_0} \cap H_1) = 0$ が成り立つ。そこで、

$$N_1 = \{1, \ldots, m\} - \{i \mid P_i \subset H_1\}$$

とおくと、$i \in N_1$ に対して P_i は $H_2, \ldots, H_l$ に含まれる。さらに (2.1.5) と (2.1.6) は

$$\sum_{i \in N_1} \alpha_i I_{P_i} + \sum_{i \in N_1} (-\alpha_i) I_{P_i \cap H_1} = 0,$$

$$\sum_{i \in N_1} \alpha_i \mu(P_i) + \sum_{i \in N_1} (-\alpha_i) \mu(P_i \cap H_1) = C \neq 0.$$

と書くことができ、$P_i,\ P_i \cap H_1\ (i \in N_1)$ は $H_2, \ldots, H_l$ に含まれるため l の最小性に反する。これは $k = 0$ という仮定から矛盾が起こったので、$k \geq 1$ が成り立つ。

$k \geq 1$ は、(2.1.1) と (2.1.2) を満たす $P_1, \ldots, P_m$ には n 次元のものが存在することを意味する。必要なら順番を変えて、$P_1, \ldots, P_k$ は n 次元で、$P_{k+1}, \ldots, P_m$ は n より低い次元になるようにしておく。超平面 H を $P_1 \cap H$ が P_1 の面になり、H が定める閉半空間 H^+, H^- のうち $P_1 \subset H^+$ となるようにする。(2.1.1) に I_H をかけると次の等式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H} = 0.$$

同様に (2.1.1) に I_{H^+} と I_{H^-} をかけると次の等式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H^+} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H^-} = 0.$$

μ が付値であることから

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu((P_i \cap H^+) \cup (P_i \cap H^-)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H). \end{aligned}$$

$n-1$ 次元の帰納法の仮定と

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H} = 0$$

より

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H) = 0$$

を得る。

$P_1 \cap H$ は P_1 の面になっていて $P_1 \subset H^+$ だから、$\dim P_1 = n$ に注意すると、$\dim(P_1 \cap H^-) = n - 1$ となり、

$$\#\{i \mid \dim(P_i \cap H^-) = n\} \leq k - 1.$$

さらに

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H^-} = 0$$

が成り立っているので、k の最小性より

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H^-) = 0$$

を得る。以上より

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H^+) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i) = C.$$

改めて $2n$ 個の超平面 $H_1, \ldots, H_{2n}$ を

$$P_1 = \bigcap_{i=1}^{2n} H_i^+$$

を満たすようにとる。$H_1, \ldots, H_{2n}$ について上記の超平面 H に関する議論を繰り返すと

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_{2n}^+) = C$$

を得る。すなわち

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap P_1) = C$$

となる。(2.1.1) に I_{P_1} をかけると

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap P_1} = 0$$

を得る。n 次元の閉区間 $P_2, \ldots, P_k$ についても同様の操作を繰り返すと

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap P_1 \cap \cdots \cap P_k} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap P_1 \cap \cdots \cap P_k) = C.$$

$D = P_1 \cap \cdots \cap P_k$ とおくと $D \in I_0(n)$ となる。上の等式は

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap D} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap D) = C$$

となる。$1 \leq i \leq k$ のとき $P_i \cap D = D$ となるので、$k \geq 2$ ならば k の最小性に反する。よって $k = 1$ となる。このとき、(2.1.1) は

$$\alpha_1 I_{P_1} + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i I_{P_i} = 0$$

となる。左辺の第二項は $n-1$ 次元以下の閉区間の単純関数になり、これが $-\alpha_1 I_{P_1}$ と等しくなることはないので、矛盾が起こる。したがって、(2.1.1) と (2.1.2) を同時に満たす閉区間は存在しないことになり、μ に関する積分が存在することがわかる。

2.2 Hausdorff 距離

$x, y \in \mathbb{R}^n$ について

$$d(x,y) = |x-y|$$

によって $\mathbb{R}^n$ に距離を定める。$x \in \mathbb{R}^n$ と部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

によって x と A の距離を定める。

補題 2.2.1 $x \in \mathbb{R}^n$ と $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$d(x,A) = 0$ の必要十分条件は $x \in \bar{A}$ である。

証明　$x \in \bar{A}$ であることと任意の $\epsilon > 0$ に対して $d(x,y) < \epsilon$ を満たす $y \in A$ が存在することは同値になる。さらに、これは

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) = 0$$

と同値になる。

定義 2.2.2 有界部分集合 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ に対して **Hausdorff 距離** $\delta(K,L)$ を

$$\delta(K,L) = \max\left(\sup_{a \in K} d(a,L), \sup_{b \in L} d(b,K)\right) \tag{2.2.7}$$

によって定める。

補題 2.2.3 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトのとき、$\delta(K,L) = 0$ の必要十分条件は $K = L$ である。

証明　$\delta(K,L)$ の定め方より $\delta(K,L) = 0$ の必要十分条件は

$$\sup_{a \in K} d(a,L) = \sup_{b \in L} d(b,K) = 0$$

である。さらにこれは任意の $a \in K$ について $d(a,L) = 0$、すなわち $a \in \bar{L} = L$、かつ、任意の $b \in L$ について $d(b,K) = 0$、すなわち $b \in \bar{K} = K$ と同値になる。よってこれは $K = L$ を意味しているので、補題の結論が得られる。

$\mathbb{R}^n$ の単位球体を B^n で表す。コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ と $\epsilon \geq 0$ に対して

$$K + \epsilon B^n = \{x + \epsilon u \mid x \in K,\ u \in B^n\}$$

によって $K + \epsilon B^n$ を定める。

補題 2.2.4 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト部分集合とする。このとき、

$$K + \epsilon B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \epsilon\}$$

が成り立つ。さらに、$\delta(K, L) \leq \epsilon$ の必要十分条件は、$K \subset L + \epsilon B^n, L \subset K + \epsilon B^n$ が成り立つことである。

証明　まず最初の等式を証明する。任意の $x \in K + \epsilon B^n$ は $y \in K$ と $u \in B^n$ によって $x = y + \epsilon u$ と表せる。これより $|x - y| \leq \epsilon$ となり $d(x, K) \leq \epsilon$ を得る。よって、$x \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z, K) \leq \epsilon\}$ が成り立つ。逆に $x \in \mathbb{R}^n$ が $d(x, K) \leq \epsilon$ を満たすと仮定する。任意の自然数 m について $|x - y_m| \leq \epsilon + 1/m$ を満たす $y_m \in K$ が存在する。K はコンパクトだらか収束部分列 y'_m をとることができ、その極限 y は K に含まれる。このとき、$|x - y| \leq \epsilon$ が成り立ち、$x - y = \epsilon u$ によって $u \in B^n$ を定めると、$x \in K + \epsilon B^n$ が成り立つ。以上で

$$K + \epsilon B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \epsilon\}$$

が成り立つことがわかった。

後半の主張は次のようにわかる。

$$\begin{aligned}
&\delta(K, L) \leq \epsilon \\
\Leftrightarrow &\sup_{a \in K} d(a, L) \leq \epsilon, \quad \sup_{b \in L} d(b, K) \leq \epsilon \\
\Leftrightarrow &\forall a \in K\ d(a, L) \leq \epsilon, \quad \forall b \in L\ d(b, K) \leq \epsilon \\
\Leftrightarrow &K \subset L + \epsilon B^n, \quad L \subset K + \epsilon B^n.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合全体を $\mathcal{C}^n$ で表す。

定理 2.2.5 δ は $\mathcal{C}^n$ 上の距離になる。

証明　任意の $K, L \in \mathcal{C}^n$ に対して

$$\delta(K, L) = \delta(L, K) \geq 0$$

が成り立つことは定義より直接わかる。

補題 2.2.4 より

$$\delta(K, L) = 0 \Leftrightarrow K \subset L,\ L \subset K \Leftrightarrow K = L.$$

最後に三角不等式を示す。$K, L, M \in \mathcal{C}^n$ をとる。$\delta(K, L) = \alpha,\ \delta(L, M) = \beta$ とおく。このとき、補題 2.2.4 より $K \subset L + \alpha B^n$ と $L \subset M + \beta B^n$ が成り立つ。これらより

$$K \subset M + \alpha B^n + \beta B^n = M + (\alpha + \beta)B^n$$

となる。また、$M \subset L + \beta B^n$ と $L \subset K + \alpha B^n$ が成り立つ。これらより

$$M \subset K + \alpha B^n + \beta B^n = K + (\alpha + \beta)B^n$$

となる。再び補題 2.2.4 より

$$\delta(K, M) \le \alpha + \beta = \delta(K, L) + \delta(L, M)$$

を得る。

以上で Hausdorff 距離 δ は $\mathcal{C}^n$ の距離になることがわかった。

2.3 閉区間塊の不変連続付値

$\{1, \ldots, n\}$ の置換全体からなる群を $\mathrm{Sym}(n)$ で表す。$\mathbb{R}^n$ の標準的正規直交基底を $e_1, \ldots, e_n$ で表す。$\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ に対して $p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ となるように直交変換 p_σ を定める。さらに $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$p_{\sigma,v}(x) = p_\sigma(x) + v \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

によって $p_{\sigma,v}$ を定める。

$$\tilde{T}_n = \{p_{\sigma,v} \mid \sigma \in \mathrm{Sym}(n),\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

は合成に関して群になることがわかる。$g \in \tilde{T}_n, P \in I_0(n)$ に対して $gP \in I_0(n)$ となり、$I_0(n)$ は $\tilde{T}_n$ 不変になる。よって、$I(n)$ も $\tilde{T}_n$ 不変になる。$I(n)$ 上の付値 μ が

$$\mu(gP) = \mu(P) \qquad (g \in \tilde{T}_n, P \in I(n)) \tag{2.3.8}$$

を満たすとき、μ を $\tilde{T}_n$ **不変**という。

$I(n)$ 上の付値 μ を $I_0(n)$ に制限して Hausdorff 距離に関して連続になるときに、μ は**連続**であるという。これは $I(n)$ 上の関数としての連続性とは異なるので、注意する必要がある。このように付値の連続性を定義するのは、幾何学的に重要な付値が $I_0(n)$ 上は連続であっても、$I(n)$ 上連続ではないためである。

$I(n)$ 上の付値 μ が**増加**であるとは、$P, Q \in I(n)$ に対して $P \subset Q$ ならば $\mu(P) \le \mu(Q)$ が成り立つことをいう。μ が**減少**であるとは、$P, Q \in I(n)$ に対して $P \subset Q$ ならば $\mu(P) \ge \mu(Q)$ が成り立つことをいう。μ が増加または減少のとき、μ を**単調**という。

まず $\mathbb{R}^1$ の場合を考える。$I(1)$ の元は有限個の有界閉区間の合併になる。$A \in I(1)$ に対して

$$\mu_0^1(A) = A \text{ の連結成分の個数},$$
$$\mu_1^1(A) = A \text{ の長さ}$$

によって、μ_0^1, μ_1^1 を定める。

補題 2.3.1 μ_0^1, μ_1^1 は $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値になる。

証明　$A, B, A \cup B \in I_0(1)$ のとき、これらはすべて有界閉区間であり、$A \cup B \in I_0(1)$ より $A \cap B$ も有界閉区間になる。よって

$$\mu_0^1(A \cup B) = 1,$$
$$\mu_0^1(A) + \mu_0^1(B) - \mu_0^1(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

したがって、μ_0^1 は $I_0(1)$ 上で付値になる。定理 2.1.2 より、μ_0^1 は $I(1)$ 上の付値 μ に一意的に拡張される。$A \in I(1)$ に対して

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$$

かつ $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たすように有界閉区間 $A_1, \ldots, A_k$ をとることができる。このとき、包除等式より

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu_0^1(A_j) = k = \mu_0^1(A)$$

となる。よって $I(1)$ 上で $\mu = \mu_0^1$ が成り立ち、μ_0^1 は $I(1)$ 上の付値になる。

μ_0^1 は $\tilde{T}_1$ の作用に関して不変になる。μ_0^1 は $I_0(1)$ 上恒等的に 1 だから、μ_0^1 の $I_0(1)$ への制限は連続になる。以上より μ_0^1 は $\tilde{T}_1$ 不変連続付値になる。

次に μ_1^1 も $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値であることを示す。$A, B, A \cup B \in I_0(1)$ のとき、

$$\mu_1^1(A \cup B) = \mu_1^1(A) + \mu_1^1(B) - \mu_1^1(A \cap B)$$

が成り立ち、μ_1^1 は $I_0(1)$ 上で付値になる。定理 2.1.2 より、μ_1^1 は $I(1)$ 上の付値 μ に一意的に拡張される。$A \in I(1)$ に対して

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$$

かつ $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たすように有界閉区間 $A_1, \ldots, A_k$ をとることができる。このとき、包除等式より

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu_0^1(A_j) = A \text{ の長さ} = \mu_1^1(A)$$

となる。よって $I(1)$ 上で $\mu=\mu_1^1$ が成り立ち、μ_1^1 は $I(1)$ 上の付値になる。

μ_1^1 は $\tilde{T}_1$ の作用に関して不変になる。最後に μ_1^1 が $I_0(1)$ 上連続であることを示す。閉区間 $[a,b],[c,d]$ に対して

$$\delta([a,b],[c,d])=\max(|a-c|,|b-d|)$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned}&|\mu_1^1([a,b])-\mu_1^1([c,d])|=|(b-a)-(d-c)|=|(b-d)-(a-c)|\\ \leq&|b-d|+|a-c|\leq 2\max(|a-c|,|b-d|)=2\delta([a,b],[c,d]).\end{aligned}$$

したがって、μ_1^1 は $I_0(1)$ 上 Hausdorff 距離に関して連続になる。以上より μ_1^1 は $\tilde{T}_1$ 不変連続付値になる。

問題 2.3.2 以下を示せ。

(1) $P_i=\{0\}\cup[1/i,1]\in I(1)$ は Hausdorff 距離に関して $[0,1]$ に収束する。

(2) $\mu_0^1(P_i)=2,\ \mu_0^1([0,1])=1.$

これらより、μ_0^1 は $I(1)$ 上 Hausdorff 距離に関して連続ではない。

定理 2.3.3 $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値全体は自然な和と実数倍によって実ベクトル空間になり、μ_0^1,μ_1^1 はその基底になる。

証明　$I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値全体は自然な和と実数倍によって実ベクトル空間になることは、不変性と連続性の定義からわかる。

$c_0,c_1\in\mathbb{R}$ が $c_0\mu_0^1+c_1\mu_1^1=0$ を満たすとする。$\{0\}\in I(1)$ を代入すると

$$0=c_0\mu_0^1(\{0\})+c_1\mu_1^1(\{0\})=c_0$$

となる。よって $c_1\mu_1^1=0$ が成り立つ。これに $[0,1]$ を代入すると

$$0=c_1\mu_1^1([0,1])=c_1$$

となり、μ_0^1,μ_1^1 は線形独立である。

次にこれらが $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値全体の空間の生成系になることを示す。μ を $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値とする。$c=\mu(\{0\})$ とおく。$\mu'=\mu-c\mu_0^1$ とすると、μ' もまた $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値になる。任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mu'(\{x\})=\mu(\{x\})-c\mu_0^1(\{x\})=\mu(\{x\})-\mu(\{0\})=0.$$

最後の等式は μ の平行移動に関する不変性による。関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\mu'([0,x])\qquad(x\in[0,\infty))$$

によって定める。

$$\delta([0,x],[0,y]) = |x-y|$$

だから、μ の連続性より f は連続関数になる。μ の $\tilde{T}_1$ 不変性から、長さ $x \geq 0$ の閉区間 A に対して $\mu'(A) = f(x)$ が成り立つ。長さ $y \geq 0$ の閉区間 B を $A \cap B$ が一点になるようにとると、$A \cup B$ は長さ $x+y$ の閉区間になり、

$$f(x+y) = \mu'(A \cup B) = \mu'(A) + \mu'(B) - \mu'(A \cap B) = \mu'(A) + \mu'(B) = f(x) + f(y)$$

を得る。自然数 p について

$$f(1) = f\left(\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right)p.$$

よって

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1)\frac{1}{p}$$

を得る。さらに任意の自然数 q について

$$\begin{aligned} f\left(\frac{q}{p}\right) &= f\left(\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= f(1)\frac{1}{p} + \cdots + f(1)\frac{1}{p} = f(1)\frac{q}{p} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、任意の正の有理数 x について $f(x) = f(1)x$ が成り立つ。任意の正の実数 x に対して x に収束する正の有理数の列 x_n が存在する。f の連続性より

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)x_n = f(1)x.$$

よって、$\mu' = f(1)\mu_1^1$ となり、$\mu = c\mu_0^1 + f(1)\mu_1^1$ を得る。したがって、μ_0^1, μ_1^1 は $I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値全体の空間の生成系になり、さらに基底になることがわかる。

$x_1, \ldots, x_n$ の基本対称式を次のように定める。

$$\begin{aligned} &e_0 = 1, \\ &e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}. \end{aligned}$$

たとえば、

$$\begin{aligned} &e_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n, \\ &e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ &e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4. \end{aligned}$$

定理 2.3.4 $0 \le k \le n$ に対して $I(n)$ 上のただ一つの $\tilde{T}_n$ 不変連続付値 μ_k が存在し、辺の長さが $x_1, \ldots, x_n$ の $P \in I_0(n)$ に対して

$$\mu_k(P) = e_k(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つ。

証明　$t \in \mathbb{R}$ に対して $\mu_t^1 = \mu_0^1 + t\mu_1^1$ によって、$I(1)$ 上の $\tilde{T}_1$ 不変連続付値を定める。$I_i \in I_0(1), P = I_1 \times \cdots \times I_n \in I_0(n)$ に対して

$$\mu_t^n(P) = \mu_t^1(I_1) \cdots \mu_t^1(I_n)$$

によって μ_t^n を定める。μ_t^n が $I_0(n)$ 上の付値になることを示す。$A, B, A \cup B \in I_0(n)$ とする。

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n, \qquad B = B_1 \times \cdots \times B_n$$

と表したとき、$A \cup B \in I_0(n)$ という条件から、A, B の一方が他方を含むかまたはある i 以外の j について $A_j = B_j$ かつ $A_i \cup B_i \in I_0(1)$ が成り立つ。一方が他方を含む場合は

$$\begin{aligned}\mu_t^n(A \cup B) &= \max(\mu_t^n(A), \mu_t^n(B)) = \mu_t^n(A) + \mu_t^n(B) - \min(\mu_t^n(A), \mu_t^n(B)) \\ &= \mu_t^n(A) + \mu_t^n(B) - \mu_t^n(A \cap B).\end{aligned}$$

ある i 以外の j について $A_j = B_j$ かつ $A_i \cup B_i \in I_0(1)$ が成り立つ場合は

$$\begin{aligned}\mu_t^n(A \cup B) &= \mu_t^n(A_1 \times \cdots \times (A_i \cup B_i) \times \cdots \times A_n) \\ &= \mu_t^1(A_1) \cdots \mu_t^1(A_i \cup B_i) \cdots \mu_t^1(A_n) \\ &= \mu_t^1(A_1) \cdots (\mu_t^1(A_i) + \mu_t^1(B_i) - \mu_t^1(A_i \cap B_i)) \cdots \mu_t^1(A_n) \\ &= \mu_t^n(A) + \mu_t^n(B) - \mu_t^n(A \cap B)\end{aligned}$$

となり、μ_t^n が $I_0(n)$ 上の付値であることがわかる。Groemer の拡張定理 2.1.2 より、μ_t^n は $I(n)$ 上の付値に一意的に拡張できる。$I(n)$ 上に拡張した付値も同じ記号 μ_t^n で表すことにする。$P = I_1 \times \cdots \times I_n$ に対して I_i の長さを x_i とすると $\mu_t^1(I_i) = 1 + tx_i$ となり、

$$\begin{aligned}\mu_t^n(P) &= \mu_t^1(I_1) \cdots \mu_t^1(I_n) = (1 + tx_1) \cdots (1 + tx_n) \\ &= e_0 + e_1(x_1, \ldots, x_n)t + e_2(x_1, \ldots, x_n)t^2 + \cdots + e_n(x_1, \ldots, x_n)t^n.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

したがって、μ_t^n の $I_0(n)$ における値は、t の n 次多項式になる。$Q \in I(n)$ に対して

$$Q = P_1 \cup \cdots \cup P_m$$

と $P_i \in I_0(n)$ によって表すと、包除等式より

$$\mu_t^n(Q) = \sum_i \mu_t^n(P_i) - \sum_{i<j} \mu_t^n(P_i \cap P_j) \pm \cdots .$$

右辺の各項は t の n 次多項式だから、これを t のべきにまめることができる。

$$\mu_t^n(Q) = \mu_0(Q) + \mu_1(Q)t + \mu_2(Q)t^2 + \cdots + \mu_n(Q)t^n. \tag{2.3.10}$$

μ_t^n は $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値になり、各 μ_i も $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値になる。特に (2.3.10) において $Q = P$ とすると、(2.3.9) と (2.3.10) を比較することにより、μ_i は $e_i(x_1, \ldots, x_n)$ の拡張になっていることもわかる。

命題 2.3.5 $I(n)$ 上の付値 μ_i は n に依存しない。

これは $P \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ のときに、$\mu_i^m(P) = \mu_i^n(P)$ が成り立つことを意味する。これは定義よりわかる。

μ_k を k **次内在的体積**と呼ぶ。μ_0 は **Euler 数**とも呼ぶ。

例 2.3.6 $a, b > 0$ に対して $I(2)$ の元 P を $P = \partial([0,a] \times [0,b])$ によって定めると、P は長方形の 4 辺の合併になる。これに包除公式を適用すると、

$$\mu_0(P) = 4 - 4 = 0, \quad \mu_1(P) = 2a + 2b.$$

$I = \{a/2\} \times [0,b]$ とおくと包除公式より

$$\begin{aligned}
\mu_0(P \cup I) &= \mu_0(P) + \mu_0(I) - \mu_0(P \cap I) = 0 + 1 - 2 = -1, \\
\mu_1(P \cup I) &= \mu_1(P) + \mu_1(I) - \mu_1(P \cap I) = 2a + 2b + b = 2a + 3b.
\end{aligned}$$

$P \cup I$ を別の形で表示することもできる。

$$P_1 = \partial([0,a/2] \times [0,b]), \quad P_2 = \partial([a/2,a] \times [0,b])$$

とおくと $P \cup I = P_1 \cup P_2$ が成り立つ。これに包除公式を適用すると、

$$\begin{aligned}
\mu_0(P_1 \cup P_2) &= \mu_0(P_1) + \mu_0(P_2) - \mu_0(P_1 \cap P_2) = 0 + 0 - 1 = -1, \\
\mu_1(P_1 \cup P_2) &= \mu_1(P_1) + \mu_1(P_2) - \mu_1(P_1 \cap P_2) = a + 2b + a + 2b - b = 2a + 3b.
\end{aligned}$$

もちろんどのように $I(2)$ の有限個の元の合併で表示しても、包除公式によって求めた μ_0, μ_1 の値が一致することは定理 2.1.2 によって保証されている。

命題 2.3.7

$$H_1 = \{(x_1, \ldots, x_h, 0, \ldots, 0)\}, \quad H_2 = \{(0, \ldots, 0, x_{h+1}, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$$

とおく。$P_a \in I(H_a)$ に対して $(a = 1, 2)$ 次の等式が成り立つ。

$$\mu_i(P_1 \times P_2) = \sum_{r+s=i} \mu_r(P_1)\mu_s(P_2).$$

証明　まず閉区間の場合に等式を証明する。$P_1 \in I_0(H_1)$ の辺の長さを $x_1, \ldots, x_h$ とし、$P_2 \in I_0(H_2)$ の辺の長さを $x_{h+1}, \ldots, x_n$ とする。このとき

$$\begin{aligned}&\sum_{r+s=i} \mu_r(P_1)\mu_s(P_2)\\&= \sum_{r+s=i}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le h} x_{j_1}\cdots x_{j_r}\right)\cdot\left(\sum_{h+1\le j_{r+1}<\cdots<j_i\le n} x_{j_{r+1}}\cdots x_{j_i}\right).\end{aligned}$$

ここで、添字集合に関する等式

$$\begin{aligned}&\bigcup_{r=0}^{i}\{(j_1,\ldots,j_r)\mid 1\le j_1<\cdots<j_r\le h\}\\&\quad\times\{(j_{r+1},\ldots,j_i)\mid h+1\le j_{r+1}<\cdots<j_i\le n\}\\=&\{(j_1,\ldots,j_i)\mid 1\le j_1<\cdots<j_i\le h\}\end{aligned}$$

より次の等式を得る。

$$\begin{aligned}&\sum_{r+s=i}\mu_r(P_1)\mu_s(P_2)\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n} x_{j_1}\cdots x_{j_i} = \mu_i(P_1\times P_2)\end{aligned}$$

となり問題の等式が成り立つ。

次に

$$\tilde{P} = \bigcup_k P_k \quad (P_k \in I_0(H_1)), \qquad Q \in I_0(H_2)$$

の場合に

$$\mu_i(\tilde{P}\times Q) = \sum_{r+s=i}\mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q)$$

が成り立つことを示す。包除公式より

$$\begin{aligned}\mu_i(\tilde{P}\times Q) &= \mu_i\left(\left(\bigcup_k P_k\right)\times Q\right) = \mu_i\left(\bigcup_k (P_k\times Q)\right)\\&=\sum_k \mu_i(P_k\times Q) - \sum_{k_1<k_2}\mu_i((P_{k_1}\times Q)\cap(P_{k_2}\times Q))\\&\quad+\sum_{k_1<k_2<k_3}\mu_i((P_{k_1}\times Q)\cap(P_{k_2}\times Q)\cap(P_{k_3}\times Q))\pm\cdots\\&=\sum_k\sum_{r+s=i}\mu_r(P_k)\mu_s(Q) - \sum_{k_1<k_2}\mu_i((P_{k_1}\cap P_{k_2})\times Q)\\&\quad+\sum_{k_1<k_2<k_3}\mu_i((P_{k_1}\cap P_{k_2}\cap P_{k_3})\times Q)\pm\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k} \sum_{r+s=i} \mu_r(P_k)\mu_s(Q) - \sum_{k_1<k_2} \sum_{r+s=i} \mu_r(P_{k_1} \cap P_{k_2})\mu_s(Q) \\
&\quad + \sum_{k_1<k_2<k_3} \sum_{r+s=i} \mu_r(P_{k_1} \cap P_{k_2} \cap P_{k_3})\mu_s(Q) \pm \cdots \\
&= \sum_{r+s=i} \left\{ \sum_{k} \mu_r(P_k) - \sum_{k_1<k_2} \mu_r(P_{k_1} \cap P_{k_2}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k_1<k_2<k_3} \mu_r(P_{k_1} \cap P_{k_2} \cap P_{k_3}) \pm \cdots \right\} \mu_s(Q) \\
&= \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q)
\end{aligned}
$$

となり問題の等式が成り立つ。

最後に

$$
\tilde{P} \in I(H_1), \quad \tilde{Q} = \bigcup_{l} Q_l \quad (Q_l \in I_0(H_2))
$$

の場合にも

$$
\mu_i(\tilde{P} \times \tilde{Q}) = \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(\tilde{Q})
$$

が成り立つことを示す。包除公式より

$$
\begin{aligned}
\mu_i(\tilde{P} \times \tilde{Q}) &= \mu_i\left(\tilde{P} \times \left(\bigcup_{l} Q_l\right)\right) = \mu_i\left(\bigcup_{l} (\tilde{P} \times Q_l)\right) \\
&= \sum_{l} \mu_i(\tilde{P} \times Q_l) - \sum_{l_1<l_2} \mu_i((\tilde{P} \times Q_{l_1}) \cap (\tilde{P} \times Q_{l_2})) \\
&\quad + \sum_{l_1<l_2<l_3} \mu_i((\tilde{P} \times Q_{l_1}) \cap (\tilde{P} \times Q_{l_2}) \cap (\tilde{P} \times Q_{l_3})) \pm \cdots \\
&= \sum_{l} \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q_l) - \sum_{l_1<l_2} \mu_i(\tilde{P} \times (Q_{l_1} \cap Q_{l_2})) \\
&\quad + \sum_{l_1<l_2<l_3} \mu_i(\tilde{P} \times (Q_{l_1} \cap Q_{l_2} \cap Q_{l_3})) \pm \cdots \\
&= \sum_{l} \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q_l) - \sum_{l_1<l_2} \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q_{l_1} \cap Q_{l_2}) \\
&\quad + \sum_{l_1<l_2<l_3} \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(Q_{l_1} \cap Q_{l_2} \cap Q_{l_3}) \pm \cdots \\
&= \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P}) \left\{ \sum_{l} \mu_s(Q_l) - \sum_{l_1<l_2} \mu_s(Q_{l_1} \cap Q_{l_2}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l_1<l_2<l_3} \mu_s(Q_{l_1} \cap Q_{l_2} \cap Q_{l_3}) \pm \cdots \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{r+s=i} \mu_r(\tilde{P})\mu_s(\tilde{Q})$$

となり問題の等式が成り立つ。

$I(n)$ 上の付値 μ に対して、$P \in I_0(n), \dim P < n$ ならば $\mu(P) = 0$ となるとき、μ を**単純**という。μ_n は単純になる。

定理 2.3.8 ($I(n)$ の体積定理) 平行移動で不変な $I(n)$ 上の単純付値 μ がさらに連続または単調ならば、ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して次の等式が成り立つ。

$$\mu(P) = c\mu_n(P) \qquad (P \in I(n)).$$

証明　$c = \mu([0,1]^n)$ とおく。正整数 k に対して $[0,1]^n$ を $[0,1/k]^n$ と平行移動で写る k^n 個の閉区間

$$[0,1/k]^n + (i_1/k, \ldots, i_n/k) \qquad (0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq k-1)$$

の合併で表すことができる。μ が平行移動に関して不変であることから、これら閉区間の μ の値はすべて等しい。μ が単純であることからこれら閉区間の共通部分の μ の値は 0 になる。よって、包除公式より

$$c = \mu([0,1]^n) = k^n \mu([0,1/k]^n)$$

となることがわかる。これより

$$\mu([0,1/k]^n) = \frac{c}{k^n} = c\mu_n([0,1/k]^n)$$

となり、さらに、すべての辺の長さが有理数である P に対し

$$\mu(P) = c\mu_n(P) \qquad (P \in I_0(n))$$

が成り立つ。μ が連続のとき、$P \in I_0(n)$ に対して辺の長さがすべて有理数になる $P_i \in I_0(n)$ が存在して $P_i \to P$ $(i \to \infty)$ が成り立ち、

$$\mu(P) = \lim_{i\to\infty} \mu(P_i) = \lim_{i\to\infty} c\mu_n(P_i) = c\mu_n(P).$$

μ が単調のとき、$P \in I_0(n)$ に対して辺の長さがすべて有理数になる $B_i, D_i \in I_0(n)$ が存在して $B_i \subset P \subset D_i$ と $\lim_{i\to\infty} \mu_n(D_i) = \lim_{i\to\infty} \mu_n(B_i)$ が成り立ち、

$$c\mu_n(B_i) = \mu(B_i) \underset{(\geq)}{\leq} \mu(P) \underset{(\geq)}{\leq} \mu(D_i) = c\mu_n(D_i).$$

したがって、挟み撃ちの原理より次の等式を得る。

$$\mu(P) = \lim_{i\to\infty} c\mu_n(B_i) = c\mu_n(P).$$

定理 2.3.8 において付値の連続性または単調性の仮定がないと、μ_n の定数倍になるとは限らない。そのような例を挙げておく。

例 2.3.9 実数全体 $\mathbb{R}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなし、$\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ と書く。$\mathbb{R}$ の濃度は $\mathbb{Q}$ の濃度より真に大きいので、$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \infty$ となる。その双対空間 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^*$ も無限次元になる。よって、$\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^*$ の 0 ではない元 f をとることができる。f は $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ から $\mathbb{Q}$ への $\mathbb{Q}$ 線形写像である。必要なら有理数倍して $f(1) = 1$ としてよい。f を使って $I_0(1)$ 上の関数 η を

$$\eta([a,b]) = f(b-a)$$

によって定める。定め方より η は平行移動に関して不変になる。$a \leq c \leq b \leq d$ を満たす a, b, c, d をとると $[a,b] \cup [c,d] = [a,d]$ となり、

$$\begin{aligned}
&\eta([a,b] \cup [c,d]) + \eta([a,b] \cap [c,d]) = \eta([a,d]) + \eta([c,b]) = f(d-a) + f(b-c) \\
&= f((d-b) + (b-a)) + f(b-c) = f(d-b) + f(b-a) + f(b-c) \\
&= f(b-a) + f(d-c) = \eta([a,b]) + \eta([c,d]).
\end{aligned}$$

したがって、η は $I_0(1)$ 上の付値になる。定理 2.1.2 より、η は $I(1)$ 上の付値に一意に拡張できる。拡張した付値も η で表すことにする。η は $I(1)$ 上の平行移動で不変な付値になる。さらに単純付値であることもわかる。しかしながら、η は有理数値になるので、μ_1 の定数倍にはなり得ない。この μ の積を利用すると $I(n)$ でも同様の付値を構成できる。

定理 2.3.10 $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ は $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値全体の空間の基底になる。

証明 $n = 1$ の場合は定理 2.3.3 よりすでにわかっている。

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ が生成系になることを n に関する帰納法で証明する。$I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値 μ をとる。

$$H_j = \{(x_1, \ldots, \overset{j}{\breve{0}}, \ldots, x_n)\}$$

によって $\mathbb{R}^n$ の超平面 H_j を定める。μ を $I(H_j)$ に制限すると、これは $\tilde{T}_{n-1}$ 不変連続付値になる。帰納法の仮定よりある $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在し、

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i(A) \qquad (A \in I(n),\ A \subset H_j)$$

が成り立つ。係数 c_i は j に依存して定まるが、μ が $\tilde{T}_n$ 不変であることから各 c_i は j に依存しないことがわかる。よって、$A \in I(n)$ がある j について $A \subset H_j$ を満たせば、

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i(A)$$

が成り立つ。そこで、

$$\mu' = \mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i$$

とおくと、μ' は $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値になる。さらに上で示したことより $P \in I_0(n)$ が $\dim P < n$ を満たせば P は平行移動によってある H_j に含まれ $\mu'(P) = 0$ が成り立つ。すなわち、μ' は $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続単純付値になる。よって、定理 2.3.8 よりある $c_n \in \mathbb{R}$ が存在して $\mu' = c_n\mu_n$ が成り立つ。したがって、次の等式を得る。

$$\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i.$$

次に $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ が線形独立系になることを示す。

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i = 0$$

と仮定する。$\{(0, \ldots, 0)\}$ を代入すると $c_0 = 0$ を得る。よって

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i = 0$$

となり、これに $[0,1] \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ を代入すると $c_1 = 0$ を得る。よって

$$\sum_{i=2}^{n} c_i\mu_i = 0$$

となり、これに $[0,1]^2$ を代入すると $c_2 = 0$ を得る。この操作を続けることで

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

を得る。したがって、$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ は線形独立系になる。

以上より $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ は $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値全体の空間の基底になることがわかる。

$I(n)$ 上の付値 μ が

$$\mu(\alpha P) = \alpha^k\mu(P) \qquad (\alpha \geq 0,\ P \in I_0(n))$$

を満たすとき、μ を**次数** k の**同次付値**と呼ぶ。各 μ_k は次数 k の同次付値になっている。

系 2.3.11 μ を $I(n)$ 上の $\tilde{T}_n$ 不変連続付値であって、次数 k の同次付値であるとすると $(0 \leq k \leq n)$、ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $\mu = c\mu_k$ が成り立つ。

証明　定理 2.3.10 より

$$\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

と表示できる。任意の $\alpha \geq 0,\ P \in I_0(n)$ に対して

$$\alpha^k\mu(P) = \mu(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i\alpha^i\mu_i(P)$$

となるので、$i \neq k$ ならば $c_i = 0$ が成り立つ。したがって、$\mu = c_k\mu_k$ を得る。

第3章　多重凸体

3.1　凸集合と凸結合

$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

によって**閉線分**を定め、

$$(x, y) = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 < \lambda < 1\}$$

によって**開線分**を定める。部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ \lambda A &= \{\lambda a \mid a \in A\} \end{aligned}$$

によって **Minkowski 和** $A + B$ と λA を定める。

定義 3.1.1 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が**凸**であるとは、任意の $x, y \in A$ に対して $[x, y] \subset A$ が成り立つことである。

線形写像 $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $u \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) = g(x) + u \qquad (x \in \mathbb{R}^m)$$

によって定まる写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を**アフィン写像**と呼ぶ。

問題 3.1.2 アフィン写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $x, y \in \mathbb{R}^m$ に対して次が成り立つ。

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)].$$

命題 3.1.3 凸集合の共通部分は凸になり、凸集合のアフィン写像による像や逆像も凸になる。A, B が凸ならば $A + B$ も凸になり、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λA も凸になる。

証明　$A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ $(\lambda \in \Lambda)$ を凸とする。任意の $x, y \in \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ に対して、各 $\lambda \in \Lambda$ について $x, y \in A_\lambda$ より $[x, y] \subset A_\lambda$ が成り立つ。よって、$[x, y] \subset \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ となり、$\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も凸になる。

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ をアフィン写像とし、$A \subset \mathbb{R}^m$ を凸集合とする。任意の $u, v \in f(A) \subset \mathbb{R}^n$ をとる。ある $x, y \in A$ が存在して $u = f(x), v = f(y)$ が成り立つ。問題 3.1.2 より $[u, v] = [f(x), f(y)] = f([x, y]) \subset f(A)$ となって、$f(A)$ は凸集合になる。

$B \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする。任意の $x, y \in f^{-1}(B)$ に対して $f(x), f(y) \in B$ が成り立つ。問題 3.1.2 より $f([x, y]) = [f(x), f(y)] \subset B$ となって、$[x, y] \subset f^{-1}(B)$、すなわち、$f^{-1}(B)$ は凸集合になる。

$A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ の任意の二元 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ と $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(a_1, b_1) + \lambda(a_2, b_2) &= ((1-\lambda)a_1 + \lambda a_2, (1-\lambda)b_1 + \lambda b_2) \\ &\in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]\end{aligned}$$

となるので、$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \subset [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset A \times B$ となって、$A \times B$ は凸になる。

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; ; \; (x, y) \mapsto x + y$$

によって写像 f を定めると、f は線形写像になる。特に、f はアフィン写像になる。$A + B = f(A \times B)$ だから、$A + B$ も凸になる。

命題 3.1.4 $A \subset \mathbb{R}^n$ と $\lambda, \mu > 0$ に対して、$(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ が成り立つ。A が凸ならば、$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ が成り立つ。

証明 $x \in (\lambda + \mu)A$ に対して $x = (\lambda + \mu)a$ を満たす $a \in A$ をとることができる。

$$x = (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \in \lambda A + \mu A$$

となるので、$(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ を得る。

A が凸であるとする。$x \in \lambda A + \mu A$ は $a, b \in A$ によって $x = \lambda a + \mu b$ と表すことができる。$\lambda, \mu > 0$ だから

$$x = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}a + \frac{\mu}{\lambda + \mu}b\right) \in (\lambda + \mu)A$$

が成り立つ。したがって $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ が成り立つ。

定義 3.1.5 $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ と $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad (\lambda_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, k)), \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

を $x_1, \ldots, x_k$ の**凸結合**と呼ぶ。部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、A の元の凸結合の全体を $\mathrm{conv}A$ で表し A の**凸包**と呼ぶ。

定理 3.1.6 $A \subset \mathbb{R}^n$ が凸ならば、$\mathrm{conv}A = A$ が成り立つ。任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathrm{conv}A = \cap\{K \mid K \text{ は凸}, A \subset K\}$$

が成り立つ。任意の部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

が成り立つ。

証明　A が凸と仮定する。凸包の定義より $A \subset \mathrm{conv}A$ が成り立つ。逆の包含関係を示すために、A の k 個の元の凸結合が A に含まれることを k に関する帰納法で示す。$k=1$ の場合は A の元が A に含まれることをであり成り立つ。$k-1$ 以下の個数の A の元の凸結合が A に含まれると仮定して、k 個の A の元の凸結合も A に含まれることを示そう。$x_1, \dots, x_k \in A$ と $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ を満たす $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ に関する凸結合 $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ について考える。$\lambda_k = 1$ のときは $x = x_k \in A$ となるので、$\lambda_k < 1$ と仮定しても一般性は失われない。

$$x = (1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i + \lambda_k x_k$$

となり、

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} = 1, \quad \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} \geq 0$$

だから帰納法の仮定より

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i \in A.$$

したがって、上の x の表示より $x \in A$ が成り立つ。以上より A の元の凸結合は A に含まれることになり $\mathrm{conv}A \subset A$ を得る。したがって、$\mathrm{conv}A = A$ が成り立つ。

任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{conv}A$ が凸になることをまず示しておく。任意の $x, y \in \mathrm{conv}A$ は A の元の凸結合

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i, \quad y = \sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j \qquad \left(a_i, b_j \in A,\ \lambda_i, \mu_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \sum_{j=1}^{l}\mu_j = 1\right)$$

で表され、$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i + \lambda\sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j = \sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{l}\lambda\mu_j b_j$$

となり、係数は

$$\begin{gathered}(1-\lambda)\lambda_i \geq 0, \quad \lambda\mu_j \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)\lambda_i + \sum_{j=1}^{l}\lambda\mu_j = (1-\lambda)+\lambda = 1\end{gathered}$$

を満たすので、$(1-\lambda)x+\lambda y$ は A の元の凸結合で表され、$(1-\lambda)x+\lambda y \in \mathrm{conv}A$ が成り立つ。したがって、$\mathrm{conv}A$ は凸になる。

$$D(A) = \cap\{K \mid K \text{ は凸}, A \subset K\}$$

とおく。$A \subset \mathrm{conv}A$ であり、$\mathrm{conv}A$ は凸だから、$D(A) \subset \mathrm{conv}A$ が成り立つ。次に $A \subset K$ を満たす任意の凸集合 K に対して $\mathrm{conv}A \subset \mathrm{conv}K = K$ となるので、$\mathrm{conv}A \subset D(A)$ を得る。したがって、

$$\mathrm{conv}A = D(A) = \cap\{K \mid K \text{ は凸}, A \subset K\}$$

が成り立つ。

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ とする。任意の $x \in \mathrm{conv}(A+B)$ は

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(a_i+b_i) \quad \left(a_i \in A,\ b_i \in B,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1\right)$$

と表現できる。よって

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_i \in \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

となり $\mathrm{conv}(A+B) \subset \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ を得る。逆に任意の $x \in \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$ は

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j \quad \left(a_i \in A,\ b_j \in B,\ \lambda_i, \mu_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \sum_{j=1}^{l}\mu_j = 1\right)$$

と表現できる。このとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\mu_j(a_i+b_j) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\mu_j a_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\mu_j b_j \\ &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{l}\mu_j b_j = x\end{aligned}$$

となり

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\mu_j = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{j=1}^{l}\mu_j = 1$$

かつ $\lambda_i\mu_j \geq 0$ だから、x は $A+B$ の元 a_i+b_j の凸結合になる。よって $x \in \mathrm{conv}(A+B)$ となり $\mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B \subset \mathrm{conv}(A+B)$ を得る。以上より

$$\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B$$

が成り立つ。

定義 3.1.7 有限集合の凸包を**凸多面体**と呼ぶ。

3.2　多重凸体

$\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合を**凸体**と呼び、その全体を $\mathcal{K}^n$ で表す。$\mathcal{K}^n$ は有限個の共通部分に関して閉じている。$\mathcal{K}^n$ の元の有限個の合併を**多重凸体**と呼ぶ。第 1.1 節の用語と記号を使うと、多重凸体の全体は $[\mathcal{K}^n]$ で表され、$\mathcal{K}^n$ は $[\mathcal{K}^n]$ を生成し、$[\mathcal{K}^n]$ は束になる。$\mathbb{R}^n$ の閉区間は凸体になるので、$I_0(n) \subset \mathcal{K}^n$ と $I(n) \subset [\mathcal{K}^n]$ が成り立つ。$n = 1$ の場合は、$I_0(1) = \mathcal{K}^1$ と $I(1) = [\mathcal{K}^1]$ が成り立つ。

凸多面体は凸体になる。凸多面体に関して次の定理が知られている。

定理 3.2.1 $\mathcal{K}^n$ 内において凸多面体全体は Hausdorff 距離に関して稠密になる。

命題 3.2.2 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ とする。

(1) A, B がコンパクトならば、$A + B$ もコンパクトである。

(2) $A, B \in \mathcal{K}^n$ ならば、$A + B \in \mathcal{K}^n$ である。

(3) A, B が凸多面体ならば、$A + B$ も凸多面体である。

証明　(1) 写像 $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $S(x, y) = x + y$ によって定める。S は連続写像になる。A, B がコンパクトならば、積位相に関して $A \times B$ はコンパクトになり、$S(A \times B) = A + B$ もコンパクトになる。

(2) 定理 3.1.6 と (1) より、$A, B \in \mathcal{K}^n$ ならば、$A + B \in \mathcal{K}^n$ である。

(3) A, B は凸多面体だから、ある有限集合 C, D が存在して $A = \mathrm{conv}C, B = \mathrm{conv}D$ が成り立つ。定理 3.1.6 より

$$A + B = \mathrm{conv}C + \mathrm{conv}D = \mathrm{conv}(C + D).$$

ここで、$C + D$ は有限集合になり、$A + B$ は凸多面体になる。

$\mathbb{R}^n$ の正則線形変換の全体を $GL(n, \mathbb{R})$ で表し**一般線形群**と呼ぶ。群構造は合成により定まる。$g \in GL(n, \mathbb{R})$ と $u \in \mathbb{R}^n$ に対して定まるアフィン変換

$$(g, u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ;\ x \mapsto gx + u$$

の全体は合成に関して群構造を持つことが次のようにしてわかる。$g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ と $u, v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}(g,u) \circ (h,v)(x) &= (g,u)(hx+v) = g(hx+v)+u = ghx + (gv+u) \\ &= (gh, gv+u)(x).\end{aligned}$$

したがって、

$$(g,u) \circ (h,v) = (gh, gv+u)$$

が成り立ち、合成もアフィン変換であることがわかる。直積集合 $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ に上記の合成により積を定めると群になる。この群を $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ と書き、$GL(n, \mathbb{R}^n)$ と $\mathbb{R}^n$ の**半直積**と呼ぶ。部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ に対して $G \ltimes \mathbb{R}^n$ は $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群になる。

$GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の単位元は $(1, 0)$ であり、$(g, u)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}u)$ である。

$$GL(n, \mathbb{R}) \times \{0\}, \qquad \{1\} \times \mathbb{R}^n$$

はどちらも $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群になる。

$$\begin{aligned}&(g,u) \circ (h,0) \circ (g,u)^{-1} = (g,u) \circ (h,0) \circ (g^{-1}, -g^{-1}u) \\ &= (gh, u) \circ (g^{-1}, -g^{-1}u) = (ghg^{-1}, -ghg^{-1}u + u)\end{aligned}$$

より、$GL(1, \mathbb{R}) \times \{0\}$ は $GL(1, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}$ の正規部分群になるが、$n \geq 2$ のとき $GL(n, \mathbb{R}) \times \{0\}$ は $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の正規部分群にはならない。これに対して

$$\begin{aligned}&(g,u) \circ (1,v) \circ (g,u)^{-1} = (g,u) \circ (1,v) \circ (g^{-1}, -g^{-1}u) \\ &= (g, gv+u) \circ (g^{-1}, -g^{-1}u) = (1, gv)\end{aligned}$$

より、すべての n について $\{1\} \times \mathbb{R}^n$ は $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の正規部分群になる。これを理解していると、半直積の記号 $\ltimes$ はわかりやすい。

E_n で $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ または $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ を表す。これらは $\mathbb{R}^n$ に等長変換として作用する。μ を $[\mathcal{K}^n]$ 上の付値とする。μ が

$$\mu(gA) = \mu(A) \qquad (g \in E_n,\ A \in [\mathcal{K}^n])$$

を満たすとき、μ を E_n **不変**という。μ を $\mathcal{K}^n$ に制限し Hausdorff 距離に関して連続になるときに、μ は**連続**であるという。閉区間塊の付値の連続性と同様、$[\mathcal{K}^n]$ 上の付値の連続性は $[\mathcal{K}^n]$ 上の関数としての連続性とは異なるので、注意する必要がある。

定理 3.2.3 (多重凸体に関する Groemer の拡張定理) $\mathcal{K}^n$ 上の連続付値は $[\mathcal{K}^n]$ 上の連続付値に一意的に拡張できる。

証明　実数直線 $\mathbb{R}$ 上では凸体と閉区間は同一になる。$n=1$ の場合は、定理 2.1.2 より $\mathcal{K}^1 = I_0(1)$ 上の付値は一意的に $[\mathcal{K}^1] = I(1)$ 上の付値に拡張できる。

定理 1.2.4 より $\mathcal{K}^n$ 上の連続付値に関する積分が存在することを証明すればよい。これを n に関する帰納法で証明する。$n-1$ 次元の場合に主張が成り立つと仮定して、n 次元の場合に主張が成り立つことを証明する。μ を $\mathcal{K}^n$ 上の連続付値とする。μ に関する積分が存在しないと仮定して矛盾を導く。μ に関する積分が存在しないということは、$K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i} = 0, \tag{3.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i) = 1 \tag{3.2.2}$$

を満たすことになる。これらを満たす m が最小になるように $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ をとっておく。H を $\mathbb{R}^n$ の超平面であって $K_1 \subset \mathrm{int} H^+$ を満たすようにとる。(3.2.1) に I_{H^+} をかけると次の等式を得る。

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i \cap H^+} = 0$$

同様に、次の等式も得る。

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i \cap H} = 0, \qquad \sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i \cap H^-} = 0.$$

付値の性質より

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu((K_i \cap H^+) \cup (K_i \cap H^-)) \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i \cap H).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i \cap H} = 0$$

と $n-1$ 次元の帰納法の仮定より

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(K_i \cap H) = 0$$

が成り立つ。また、$K_1 \cap H^- = \emptyset$ であり、

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i I_{K_i \cap H^-} = \sum_{i=1}^m \alpha_i I_{K_i \cap H^-} = 0$$

だから、m の最小性より

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap H^-)=\sum_{i=2}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap H^-)=0$$

が成り立つ。以上より

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap H^+)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i)=1$$

を得る。

定理 3.2.1 より $\mathcal{K}^n$ 内で凸多面体全体は Hausdorff 距離に関して稠密になることから、ある超平面の列 $H_1,H_2,\ldots$ が存在して $K_1\subset \mathrm{int}H_j^+$ と

$$K_1=\bigcap_{j=1}^{\infty}H_j^+=\lim_{k\to\infty}\bigcap_{j=1}^{k}H_j^+$$

が成り立つ。上の操作を $H=H_1,H_2,\ldots$ について繰り返すと

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap H_1^+\cap\cdots\cap H_j^+)=1$$

を得る。μ の連続性より、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap K_1)&=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu\left(K_i\cap\lim_{k\to\infty}\bigcap_{j=1}^{k}H_j^+\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu\left(K_i\cap\bigcap_{j=1}^{k}H_j^+\right)=1\end{aligned}$$

が成り立つ。[1]

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_{K_i\cap H_1^+\cap\cdots\cap H_j^+}=0$$

も成り立つ。さらに

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_{K_i\cap K_1}=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_{K_i\cap H_1^+\cap\cdots\cap H_j^+}=0.$$

上記の操作を $K_2,K_3,\ldots$ について繰り返すと

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_{K_i\cap K_1\cap\cdots\cap K_m}=0,\qquad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(K_i\cap K_1\cap\cdots\cap K_m)=1.$$

[1]閉区間塊の場合にこの操作は有限回で済むため、定理 2.1.2 では付値の連続性は必要なかった。一般の凸体の場合は可算列の極限をとるため、付値の連続性が必要になる。

各 i について $K_i \cap K_1 \cap \cdots \cap K_m = K_1 \cap \cdots \cap K_m$ となるので、

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\right) I_{K_1\cap\cdots\cap K_m} = 0, \qquad \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\right) \mu(K_1 \cap \cdots \cap K_m) = 1.$$

となり、矛盾が起こる。したがって、μ に関する積分は存在する。

3.3 Euler 数

補題 3.3.1 $K, L, K \cup L$ が $\mathbb{R}^n$ の凸閉集合ならば、$x \in K$ と $y \in L$ を結ぶ閉線分 $[x, y]$ は $K \cap L$ と交わる。特に、$K \cap L$ は空集合ではない。

証明 $K \cup L$ は凸集合だから $[x, y] \subset K \cup L$ が成り立つ。$[x, y] \cap K$ は x を含み、$[x, y]$ 内の凸閉集合になるので、ある $z \in K$ によって $[x, y] \cap K = [x, z]$ と表すことができる。$z \in L$ を示すために、$z \notin L$ と仮定して矛盾を導く。L は閉集合だから、z のある近傍が存在して L と共通部分を持たない。これより、$(z, y) \ni z_1 \notin L$ が存在する。$z_1 \in [x, y] \subset K \cup L$ だから $z_1 \in K$ となる。したがって、$[x, z] \subsetneq [x, z_1] \subset K$ となり z のとり方に矛盾する。よって $z \in L$ となって $z \in K \cap L$ が成り立ち、$[x, y]$ は $K \cap L$ と交わる。

定理 3.3.2 (Euler 数の存在) $[\mathcal{K}^n]$ 上の E_n 不変連続付値 μ_0^n で、次の条件を満たすものがただ一つ存在する。

$$\mu_0^n(K) = 1 \qquad (K \in \mathcal{K}^n).$$

証明 $\mu : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(K) = 1 \qquad (K \in \mathcal{K}^n)$$

によって定める。$A, B, A \cup B \in \mathcal{K}^n$ ならば、補題 3.3.1 より $A \cap B \in \mathcal{K}^n$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} &\mu(A \cup B) = 1, \\ &\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

となり、μ は $\mathcal{K}^n$ 上の付値になる。定理 3.2.3 より μ は $[\mathcal{K}^n]$ 上の付値に一意的に拡張される。拡張された $[\mathcal{K}^n]$ 上の付値が μ_0^n である。

$P \in [\mathcal{K}^n]$ が $P \subset \mathbb{R}^k$ $(k < n)$ を満たすとき、$P \in [\mathcal{K}^k]$ となり、$\mu_0^n(P), \mu_0^k(P)$ を考えることができる。

$$P = \bigcup_{i=1}^m P_i \qquad (P_i \in \mathcal{K}^k)$$

とすると、包除公式と凸体に対して μ_0^n, μ_0^k の値は 1 になるということから、

$$\begin{aligned}\mu_0^k(P) &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sum_{i_1<\cdots<i_j} \mu_0^k(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}) \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sum_{i_1<\cdots<i_j} \mu_0^n(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}) = \mu_0^n(P).\end{aligned}$$

これより μ_0^n の n を省略して μ_0 と書いても混乱は起きない。これは閉区間塊の Euler 数 μ_0 の拡張になっている。

μ_0 は $[\mathcal{K}^1]$ 上では補題 2.3.1 の μ_0^1 に一致し、連結成分の個数を対応させる関数になる。一般の $[\mathcal{K}^n]$ の場合はそうなるとは限らない。$[\mathcal{K}^n]$ 上の μ_0 の値について考えておく。その前に問題 1.1.12 の類似の次の補題を準備しておく。

補題 3.3.3 束 L 上の付値 μ に関する L 単純関数の積分は、L 単純関数全体の成す空間 $SF(L)$ 上の線形汎関数になる。さらにこの対応は束 L 上の付値全体 $\mathrm{Val}(L)$ と $SF(L)$ 上の線形汎関数全体の間の一対一対応を与える。

証明　$SF(L)$ 上の線形汎関数 T に対して

$$\mu(A) = T(I_A) \qquad (A \in L)$$

によって、L 上の実数値関数 μ を定める。$A, B \in L$ に対して (1.2.6) と T の線形性より

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= T(I_{A\cup B}) = T(I_A + I_B - I_{A\cap B}) = T(I_A) + T(I_B) - T(I_{A\cap B}) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、μ は L 上の付値になる。さらに、L 単純関数

$$f = \sum_{i=1}^m a_i I_{A_i} \qquad (a_i \in \mathbb{R},\ A_i \in L)$$

に対して T の線形性より

$$T(f) = T\left(\sum_{i=1}^m a_i I_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^m a_i T(I_{A_i}) = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) = \int f d\mu$$

が成り立つ。

逆に L 上の付値 μ に対して μ に関する L 単純関数の積分は $SF(L)$ 上の線形汎関数になり、これに対応する L 上の付値は μ に一致する。このように、束 $\mathrm{Val}(L)$ と $SF(L)$ 上の線形汎関数全体は一対一に対応する。

補題 3.3.4 $\mathcal{K}^n$ 単純関数 f に対して、μ_0 に関する積分の等式

$$\int f d\mu_0 = \int \left(\int f(x_1, \dots, x_n) d\mu_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) d\mu_0(x_n)$$

が成り立つ。

$$\pi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;;\; (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$$

によって第 n 成分への射影 π_n を定める。このとき次の等式が成り立つ。

$$\mu_0(K) = \int \mu_0(K \cap \pi_n^{-1}(x)) d\mu_0(x) \qquad (K \in [\mathcal{K}^n]).$$

証明 $K \in \mathcal{K}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int \left(\int I_K(x_1, \dots, x_n) d\mu_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) d\mu_0(x_n) \\
&= \int \left(\int I_{K \cap \pi_n^{-1}(x_n)}(x_1, \dots, x_{n-1}) d\mu_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) d\mu_0(x_n) \\
&= \int \mu_0(K \cap \pi_n^{-1}(x_n)) d\mu_0(x_n) = \int I_{\pi_n(K)}(x_n) d\mu_0(x_n) \\
&= \mu_0(\pi_n(K)) = 1 = \mu_0(K) = \int I_K d\mu_0.
\end{aligned}$$

積分の線形性より、$\mathcal{K}^n$ の元の特性関数の線形結合である $\mathcal{K}^n$ 単純関数 f に対して

$$\int f d\mu_0 = \int \left(\int f(x_1, \dots, x_n) d\mu_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) d\mu_0(x_n)$$

が成り立つ。$K \in [\mathcal{K}^n]$ の特性関数 I_K に上記積分等式を適用すると次の等式を得る。

$$\begin{aligned}
\mu_0(K) &= \int I_K d\mu_0 = \int \left(\int I_K(x_1, \dots, x_n) d\mu_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) d\mu_0(x_n) \\
&= \int \left(\int I_{K \cap \pi_n^{-1}(x)} d\mu_0 \right) d\mu_0(x) = \int \mu_0(K \cap \pi_n^{-1}(x)) d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

定理 3.3.5 n を正整数とし、P を n 次元凸多面体とすると、$\partial P \in [\mathcal{K}^n]$ となり、次の等式が成り立つ。

$$\mu_0(\partial P) = 1 - (-1)^n.$$

証明 $\dim P = n$ だから、$P \subset \mathbb{R}^n$ としてよい。定理を n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ の場合、

$$\mu_0(\partial P) = \mu_0(P \text{ の二端点}) = 2 = 1 - (-1)^1.$$

$n > 1$ の場合、$n-1$ 次元では定理の主張が成り立つと仮定する。補題 3.3.4 より

$$(*) \qquad \mu_0(\partial P) = \int \mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) d\mu_0(x).$$

そこで、$x \in \mathbb{R}$ に対する $\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x))$ について考える。$x \in \pi_n(P)$ かつ $x \notin \partial(\pi_n(P))$ のとき、帰納法の仮定より

$$\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) = \mu_0(\partial(P \cap \pi_n^{-1}(x))) = 1 - (-1)^{n-1}.$$

$x \in \partial(\pi_n(P))$ のときは、$\partial P \cap \pi_n^{-1}(x) = P \cap \pi_n^{-1}(x) \in \mathcal{K}^n$ となって

$$\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) = 1.$$

$x \notin \pi_n(P)$ のときは、

$$\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) = 0.$$

$\pi_n(P) \in \mathcal{K}^1$ だから $\pi P = [a, b]$ とおくことができる。上で示したことより

$$\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & (x < a), \\ 1 & (x = a), \\ 1 - (-1)^{n-1} & (a < x < b), \\ 1 & (x = b), \\ 0 & (b < x) \end{cases}$$

となる。これを $\mathcal{K}^1$ 単純関数で表現すると

$$\mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) = (1 - (-1)^{n-1}) I_{[a,b]}(x) + (-1)^{n-1} I_{\{a\}}(x) + (-1)^{n-1} I_{\{b\}}(x).$$

したがって、$(*)$ より

$$\begin{aligned} \mu_0(\partial P) &= \int \mu_0(\partial P \cap \pi_n^{-1}(x)) d\mu_0(x) \\ &= \int \left\{ (1 - (-1)^{n-1}) I_{[a,b]} + (-1)^{n-1} I_{\{a\}} + (-1)^{n-1} I_{\{b\}} \right\} d\mu_0 \\ &= (1 - (-1)^{n-1}) + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} = 1 - (-1)^n. \end{aligned}$$

S を集合とし、$L \subset P(S)$ を束とする。有限個の合併、有限個の共通部分、差集合に関して閉じている L を含む最小の S の部分集合族を $B(L)$ で表す。

(3.3.3) $$I_{A-B} = I_{A-A\cap B} = I_A - I_A I_B$$

が成り立つことに注意しておく。L に含まれる集合の特性関数の有限個の和、積と差によって生成される単純関数からなる代数を $\mathcal{I}(L)$ とする。(1.2.5)、(1.2.6) と (3.3.3) より、すべての $C \in B(L)$ に対して $I_C \in \mathcal{I}(L)$ が成り立つ。

補題 3.3.6 束 L 上定義された付値 μ は $B(L)$ 上の付値に一意的拡張を持つ。

証明 定理 1.2.4 より、μ は $\mathcal{I}(L)$ 上の積分を定める。

$$\mu(C) = \int I_C d\mu \qquad (C \in B(L))$$

によって μ を $B(L)$ 上に拡張すると、積分の線形性と (1.2.7) よりこの拡張は $B(L)$ 上の付値になる。

P を $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元凸多面体とすると、ある k 次元アフィン部分空間 $A \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $P \subset A$ が成り立つ。A の位相に関する P の内部を P の**相対内部**と呼び、relint$P$ で表す。relint$P = P - \partial P$ が成り立つ。

定理 3.3.7 P を $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元凸多面体とすると次の等式が成り立つ。

$$\mu_0(\mathrm{relint}P) = (-1)^k.$$

証明 定理 3.3.5 より、

$$\mu_0(\mathrm{relint}P) = \mu_0(P) - \mu_0(\partial P) = 1 - (1 - (-1)^k) = (-1)^k.$$

凸多面体の有限個の合併を**多面体**と呼ぶ。P を多面体とする。F が次の条件を満たすとき、F は P の**面族**であるという。

(1) F は凸多面体の有限族、

(2) $\displaystyle\bigcup_{Q \in F} \mathrm{relint}Q = P$,

(3) $Q, Q' \in F$, $Q \neq Q'$ ならば、$\mathrm{relint}Q \cap \mathrm{relint}Q' = \emptyset$.

これは幾何学的単体複体よりも弱い概念になっている。次の定理は位相幾何学で定義する Euler 数と μ_0 が一致することを示している。

定理 3.3.8 (Euler-Schläfli-Poincaré の公式) F を多面体 P の面族とし

$$f_i = \#\{Q \in F \mid \dim Q = i\}$$

とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\mu_0(P) = \sum_i (-1)^i f_i.$$

証明 面族の定義より

$$P = \bigcup_{Q \in F} \mathrm{relint}Q$$

は互いに素な合併になっているので、包除公式と定理 3.3.7 より

$$\mu_0(P) = \sum_{Q \in F} \mu_0(\mathrm{relint}Q) = \sum_{Q \in F} (-1)^{\dim Q} = \sum_i (-1)^i f_i.$$

3.4　平面多重凸体の不変連続付値

前節で任意の次元の $\mathbb{R}^n$ の多重凸体の付値 μ_0 を定めた。付値 μ_n は n 次元Lebesgue測度によって定めることができる。$0 < k < n$ に対する付値 μ_k を定めるためには、Grassmann 多様体上の不変測度による積分が必要になる。ここでは 2 次元の場合に限って μ_1 を定義し、平面の多重凸体の不変連続付値を扱う。

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して、方程式

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 0$$

の定める $\mathbb{R}^2$ の直線を l_θ で表す。部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ を直線 l_θ に直交射影した像を $A|_{l_\theta}$ で表す。A が凸体ならば $A|_{l_\theta}$ は直線内の閉区間になり、2.3 節で定義した閉区間の 1 次内在的体積 μ_1 を使ってその長さ $\mu_1(A|_{l_\theta})$ を考えることができる。

補題 3.4.1 $P \in I_0(2)$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_0^\pi \mu_1(P|_{l_\theta})d\theta = 2\mu_1(P).$$

証明　$\mathbb{R}$ 内の長さ $a \geq 0$ の閉区間を I_a で表し、$P = I_a \times I_b$ とする。

$$\mu_1(P|_{l_\theta}) = a|\sin\theta| + b|\cos\theta|$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mu_1(P|_{l_\theta})d\theta &= \int_0^\pi \{a|\sin\theta| + b|\cos\theta|\}d\theta = (a+b)\int_0^\pi |\sin\theta|d\theta \\ &= 2(a+b) = 2\mu_1(P).\end{aligned}$$

補題 3.4.1 の右辺は $\mathbb{R}^2$ 内の閉区間に対して定義したが、左辺の積分は P が凸体でも意味を持つ。そこで左辺によって凸体の付値を定義することを考える。この左辺が付値の性質を満たすことを示すために、凸体に関する若干の準備をしておく。

補題 3.4.2 $K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^2$ ならば、$(K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta}) = (K \cap L)|_{l_\theta}$ が成り立つ。

証明　$K|_{l_\theta} \supset (K \cap L)|_{l_\theta}$ と $L|_{l_\theta} \supset (K \cap L)|_{l_\theta}$ より $(K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta}) \supset (K \cap L)|_{l_\theta}$ を得る。逆の包含関係を示すために、任意の $z \in (K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta})$ をとる。ある $x \in K$ と $y \in L$ によって $z = x|_{l_\theta} = y|_{l_\theta}$ と表すことができる。このとき、$[x, y]|_{l_\theta} = \{z\}$ が成り立つ。さらに、補題 3.3.1 より $\tilde{z} \in [x, y] \cap (K \cap L)$ が存在する。よって $z = \tilde{z}|_{l_\theta} \in (K \cap L)|_{l_\theta}$ となり、$(K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta}) \subset (K \cap L)|_{l_\theta}$ もわかる。以上より $(K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta}) = (K \cap L)|_{l_\theta}$ が成り立つ。

定理 3.4.3 $\mathcal{K}^2$ 上の関数 β を

$$\beta(K) = \int_0^\pi \mu_1(K|_{l_\theta})d\theta \qquad (K \in \mathcal{K}^2)$$

によって定めると、β は $\mathcal{K}^2$ 上の E_2 不変連続付値になる。

証明 $K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^2$ ならば

$$\begin{aligned}\beta(K \cup L) &= \int_0^\pi \mu_1((K \cup L)|_{l_\theta})d\theta = \int_0^\pi \mu_1((K|_{l_\theta}) \cup (L|_{l_\theta}))d\theta \\ &= \int_0^\pi \left\{\mu_1((K|_{l_\theta})) + \mu_1((L|_{l_\theta})) - \mu_1((K|_{l_\theta}) \cap (L|_{l_\theta}))\right\} d\theta \\ &\quad (\text{補題 } 3.4.2 \text{ より}) \\ &= \int_0^\pi \left\{\mu_1((K|_{l_\theta})) + \mu_1((L|_{l_\theta})) - \mu_1((K \cap L)|_{l_\theta})\right\} d\theta \\ &= \beta(K) + \beta(L) - \beta(K \cap L)\end{aligned}$$

が成り立ち、β は $\mathcal{K}^2$ 上の付値になる。

$K \in \mathcal{K}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の平行移動で動かしても $\mu_1(K|_{l_\theta})$ の値は不変だから、β は $\mathbb{R}^2$ の平行移動に関して不変になる。K を $\mathbb{R}^2$ の回転で移動しても $\mu_1(K|_{l_\theta})$ を θ で積分した値は不変になる。したがって、β は E_2 の作用に関して不変であることがわかる。

$K, L \in \mathcal{K}^2$ が $K \subset L$ を満たすとき、

$$\beta(K) = \int_0^\pi \mu_1(K|_{l_\theta})d\theta \leq \int_0^\pi \mu_1(L|_{l_\theta})d\theta = \beta(L)$$

となり、β は増加付値になる。$\epsilon \geq 0$ に対して

$$\mu_1((K + \epsilon B^2)|_{l_\theta}) = \mu_1(K|_{l_\theta}) + 2\epsilon.$$

これより

$$\beta(K + \epsilon B^2) = \int_0^\pi \mu_1((K + \epsilon B^2)|_{l_\theta})d\theta = \int_0^\pi \{\mu_1(K|_{l_\theta}) + 2\epsilon\}d\theta = \beta(K) + 2\pi\epsilon.$$

補題 2.2.4 より、$K, L \in \mathcal{K}^2$ が $\delta(K, L) \leq \epsilon$ を満たすならば、$K \subset L + \epsilon B^2, L \subset K + \epsilon B^2$ が成り立つ。

$$\beta(K) \leq \beta(L + \epsilon B^2) = \beta(L) + 2\pi\epsilon, \quad \beta(L) \leq \beta(K + \epsilon B^2) = \beta(K) + 2\pi\epsilon$$

となり、$|\beta(K) - \beta(L)| \leq 2\pi\epsilon$ を得る。すなわち、

$$K, L \in \mathcal{K}^2,\ \delta(K, L) \leq \epsilon \Rightarrow |\beta(K) - \beta(L)| \leq 2\pi\epsilon.$$

したがって、β は Hausdorff 距離に関して連続になる。特に $\epsilon = \delta(K, L)$ とすると

$$|\beta(K) - \beta(L)| \leq 2\pi\delta(K, L)$$

が成り立つことがわかる。

補題 3.4.1 と定理 3.4.3 より

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \mu_1(K|_{l_\theta})d\theta \qquad (K \in \mathcal{K}^2)$$

は $\mathcal{K}^2$ 上の E_2 不変連続付値であり、$I_0(2)$ 上の 1 次内在的体積 μ_1 の拡張になる。この $\mathcal{K}^2$ 上の付値も μ_1 で表し、$\mathcal{K}^2$ の 1 **次内在的体積**と呼ぶ。$\mathcal{K}^2$ 上の μ_1 の定義は

$$\mu_1(K) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mu_1(K|_{l_\theta})d\theta \qquad (K \in \mathcal{K}^2)$$

となる。定理 3.4.3 の証明中示した不等式から次の系を得る。

系 3.4.4

$$|\mu_1(K) - \mu_1(L)| \le \pi\delta(K, L) \qquad (K, L \in \mathcal{K}^2).$$

次の定理が成り立つことが知られている。

定理 3.4.5 (Hadwiger) μ_0, μ_1, μ_2 は $[\mathcal{K}^2]$ 上の E_2 不変連続付値全体の空間の基底になる。

この定理の 1 次元の場合は、$[\mathcal{K}^1] = I(1)$ だから、定理 2.3.3 に他ならない。一般の n についても、$0 < k < n$ について $\mathcal{K}^n$ 上の E_n 不変連続付値 μ_k を定めることができ、μ_k $(0 \le k \le n)$ は $[\mathcal{K}^n]$ 上の E_n 不変連続付値全体の空間の基底になる (Hadwiger の定理) ことが知られている。

例 3.4.6 $\mu_0(B^2) = 1,\ \mu_1(B^2) = \pi,\ \mu_2(B^2) = \pi$ が成り立つ。

命題 3.4.7 $K, L, M, K \cup L \in \mathcal{K}^n$ が成り立つならば、次の等式が成り立つ。

$$(K \cup L) + M = (K + M) \cup (L + M), \tag{3.4.4}$$

$$(K \cap L) + M = (K + M) \cap (L + M) \tag{3.4.5}$$

証明　(3.4.4) は任意の部分集合 $K, L, M \subset \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。以下で (3.4.5) を示す。包含関係

$$(*) \qquad (K \cap L) + M \subset (K + M) \cap (L + M)$$

は任意の部分集合 $K, L, M \subset \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことを示す。$x \in (K \cap L) + M$ とすると、ある $y \in K \cap L$ と $m \in M$ が存在して

$$x = y + m$$

が成り立つ。これより、$x \in K + M$ かつ $x \in L + M$ が成り立ち、

$$x \in (K + M) \cap (L + M).$$

これより $(*)$ が成り立つ。

逆に $x \in (K+M)\cap(L+M)$ をとる。すると

$$x = a + m_1 = b + m_2 \qquad (a \in K,\, b \in L,\, m_1, m_2 \in M)$$

となる。$K \cup L$ は凸だから、a, b を結ぶ線分 l に補題 3.3.1 を適用すると $K \cap L \cap l \neq \emptyset$ が成り立つ。$K \cap L \cap l$ の元 y は a, b を結ぶ線分上にあり

$$y = (1-t)a + tb \in K \cap L \qquad (0 \le t \le 1)$$

と書ける。

$$m = (1-t)m_1 + tm_2 \in M$$

とおく。

$$\begin{aligned} y + m &= (1-t)a + tb + (1-t)m_1 + tm_2 = (1-t)(a+m_1) + t(b+m_2) \\ &= (1-t)x + tx = x. \end{aligned}$$

したがって、$x = y + m \in (K \cap L) + M$ となり $(*)$ と逆の包含関係

$$(K \cup L) + M \supset (K+M) \cup (L+M)$$

も成り立ち (3.4.5) を得る。

系 3.4.8 μ を $\mathcal{K}^n$ 上の付値とし、$M \in \mathcal{K}^n$ とする。

$$\mu_M(K) = \mu(K+M) \qquad (K \in \mathcal{K}^n)$$

とおくと、μ_M も $\mathcal{K}^n$ 上の付値になる。

証明　$K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^n$ のとき、命題 3.4.7 より

$$\begin{aligned} &\mu_M(K \cup L) + \mu_M(K \cap L) = \mu((K \cup L) + M) + \mu((K \cap L) + M) \\ =&\mu((K+M) \cup (L+M)) + \mu((K+M) \cap (L+M)) \\ =&\mu(K+M) + \mu(L+M) - \mu((K+M) \cap (L+M)) + \mu((K+M) \cap (L+M)) \\ =&\mu(K+M) + \mu(L+M) = \mu_M(K) + \mu_M(L) \end{aligned}$$

となり、μ_M が付値であることがわかる。

定理 3.4.9 (Steiner の公式) $K \in \mathcal{K}^2$ と $\epsilon \ge 0$ に対して

$$\mu_2(K + \epsilon B^2) = \mu_2(K) + 2\mu_1(K)\epsilon + \pi\epsilon^2.$$

証明

$$\eta(K) = \mu_2(K + B^2) \qquad (K \in \mathcal{K}^2)$$

によって η を定めると、命題 3.4.8 より η は付値になる。さらに定め方より E_2 不変連続付値であることがわかる。したがって、定理 3.4.5 よりある $c_i \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\eta = c_0\mu_0 + c_1\mu_1 + c_2\mu_2$$

が成り立つ。これより、$\epsilon > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \mu_2(K + \epsilon B^2) &= \epsilon^2 \mu_2\left(\frac{1}{\epsilon}K + B^2\right) \\
&= \epsilon^2 \left\{ c_0\mu_0\left(\frac{1}{\epsilon}K\right) + c_1\mu_1\left(\frac{1}{\epsilon}K\right) + c_2\mu_2\left(\frac{1}{\epsilon}K\right) \right\} \\
&= \epsilon^2 c_0\mu_0(K) + \epsilon c_1\mu_1(K) + c_2\mu_2(K)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで $K = B^2$ とおくと

$$\mu_2(B^2 + \epsilon B^2) = \mu_2((1+\epsilon)B^2) = (1+\epsilon)^2\mu_2(B^2) = \pi(\epsilon^2 + 2\epsilon + 1).$$

他方 $(*)$ と例 3.4.6 より

$$\mu_2(B^2 + \epsilon B^2) = c_0\epsilon^2 + \pi c_1\epsilon + \pi c_2.$$

ϵ の係数を比較することにより、$c_0 = \pi,\ c_1 = 2,\ c_2 = 1$ を得る。これを $(*)$ に代入すると次の等式を得る。この等式は $\epsilon = 0$ の場合も成立する。

$$\mu_2(K + \epsilon B^2) = \mu_2(K) + 2\mu_1(K)\epsilon + \pi\epsilon^2.$$

問題 3.4.10 例 3.4.6 を確認せよ。

問題 3.4.11 凸多角形 (2 次元凸多面体)$K \in \mathcal{K}^2$ に対して $\mu_1(\partial K) = 2\mu_1(K)$ が成り立つことを示せ。

問題 3.4.12 凸多角形に対して Steiner の公式を直接証明せよ。

3.5　平面多重凸体の交叉積分公式

$\mathbb{R}^2$ の角度 θ の回転を $R(\theta)$ で表す。$\mathbb{R}^2$ の合同変換は $\theta \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^2$ によって

$$x \mapsto R(\theta)x + v$$

と表すことができる。これによって (θ, v) は E_2 の局所座標になり、$\theta \in \mathbb{R}$ と $v \in \mathbb{R}^2$ に関する Lebesgue 測度の積測度 $\dfrac{1}{\pi}d\theta dv$ を E_2 に導入できる。この E_2 上の測度は

群の左移動、右移動、逆元をとる操作に関して不変であることがわかる。この測度に関する積分を $\int_{E_2} dg$ で表す。$[\mathcal{K}^2]$ 上の E_2 不変連続付値 μ に対して

$$k(\mu)(K,L) = \int_{E_2} \mu(K \cap gL)dg \qquad (K, L \in [\mathcal{K}^2])$$

によって $k(\mu)$ を定める。

命題 3.5.1 $[\mathcal{K}^2]$ 上の E_2 不変連続付値 μ に対してある $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(0 \leq i,j \leq 2)$ が存在して、次の等式が成り立つ。

$$k(\mu)(K,L) = \sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}\mu_i(K)\mu_j(L) \qquad (K, L \in [\mathcal{K}^2]).$$

さらに $c_{ij} = c_{ji}$ が成り立つ。

証明 $K, L \in [\mathcal{K}^2]$ に対して

$$\begin{aligned} k(\mu)(K,L) &= \int_{E_2} \mu(K \cap gL)dg = \int_{E_2} \mu(g^{-1}(K \cap gL))dg \\ &= \int_{E_2} \mu(g^{-1}K \cap L)dg = \int_{E_2} \mu(L \cap gK)dg = k(\mu)(L,K) \end{aligned}$$

となることに注意しておく。

$L \in [\mathcal{K}^2]$ を固定して

$$[\mathcal{K}^2] \to \mathbb{R}\,;\ K \mapsto k(\mu)(K,L)$$

について考える。$K_1, K_2 \in [\mathcal{K}^2]$ について

$$\begin{aligned} & k(\mu)(K_1 \cup K_2, L) = \int_{E_2} \mu((K_1 \cup K_2) \cap gL)dg \\ &= \int_{E_2} \mu((K_1 \cap gL) \cup (K_2 \cap gL))dg \\ &= \int_{E_2} \mu(K_1 \cap gL)dg + \int_{E_2} \mu(K_2 \cap gL)dg - \int_{E_2} \mu((K_1 \cap gL) \cap (K_2 \cap gL))dg \\ &= \int_{E_2} \mu(K_1 \cap gL)dg + \int_{E_2} \mu(K_2 \cap gL)dg - \int_{E_2} \mu((K_1 \cap K_2) \cap gL)dg \\ &= k(\mu)(K_1, L) + k(\mu)(K_2, L) - k(\mu)(K_1 \cap K_2, L) \end{aligned}$$

が成り立つので、$k(\mu)(\cdot, L)$ は $[\mathcal{K}^2]$ 上の付値になる。さらに、$k(\mu)(L, \cdot)$ も $[\mathcal{K}^2]$ 上の付値になる。

$L \in \mathcal{K}^2$ のとき $k(\mu)(\cdot, L)$ は $\mathcal{K}^2$ 上の連続関数になることを示す。定理 3.4.5 よりある $c_i \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mu = c_0\mu_0 + c_1\mu_1 + c_2\mu_2$$

が成り立つ。$K_j \in \mathcal{K}^2$ が $\lim_{j\to\infty} K_j = K \in \mathcal{K}^2$ を満たすと仮定する。このときある $M \in \mathcal{K}^2$ が存在して $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset M$ が成り立つ。任意の $g \in E_2$ に対して

$$|\mu(K_j \cap gL)| \leq \left|\sum_{i=0}^{2} c_i\mu_i(K_j \cap gL)\right| \leq \sum_{i=0}^{2} |c_i|\mu_i(K_j \cap gL) \leq \sum_{i=0}^{2} |c_i|\mu_i(M).$$

さらに $C = \sum_{i=0}^{2} |c_i|\mu_i(M)$, $\tilde{M} = \{g \in E_2 \mid M \cap gL \neq \emptyset\}$ とおく。$\tilde{M}$ はコンパクトになる。E_2 上の関数

$$E_2 \to \mathbb{R}\,;\ g \mapsto \mu(K_j \cap gL)$$

は j によらず一様な評価 $|\mu(K_j \cap gL)| \leq CI_{\tilde{M}}(g)$ を満たす。μ の連続性より

$$\lim_{j\to\infty} \mu(K_j \cap gL) = \mu(K \cap gL)$$

が成り立つ。したがって、Lebesgue の有界収束定理より、

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} k(\mu)(K_j, L) &= \lim_{j\to\infty} \int_{E_2} \mu(K_j \cap gL)dg = \int_{E_2} \lim_{j\to\infty} \mu(K_j \cap gL)dg \\ &= \int_{E_2} \mu(K \cap gL)dg = k(\mu)(K, L)\end{aligned}$$

となり、$K \mapsto k(\mu)(K, L)$ は $\mathcal{K}^2$ 上連続になる。

任意の $h \in E_2$ について

$$\begin{aligned}k(\mu)(hK, L) &= \int_{E_2} \mu(hK \cap gL)dg = \int_{E_2} \mu(h(K \cap h^{-1}gL))dg \\ &= \int_{E_2} \mu(K \cap h^{-1}gL)dg = \int_{E_2} \mu(K \cap gL)dg = k(\mu)(K, L).\end{aligned}$$

したがって、$k(\mu)(\cdot, L)$ は E_2 不変になる。定理 3.4.5 より L に依存して定まる係数 $c_i(L)$ が存在して

$$k(\mu)(K, L) = c_0(L)\mu_0(K) + c_1(L)\mu_1(K) + c_2(L)\mu_2(K) \qquad (K, L \in \mathcal{K}^2)$$

が成り立つ。この等式の両辺は $K \in [\mathcal{K}^2]$ に関して付値になるため、包除公式より $K \in [\mathcal{K}^2]$ に対して上記等式が成り立つ。

各 $L \mapsto c_i(L)$ も $\mathcal{K}^2$ 上の E_2 不変連続付値になることがわかる。以上よりある $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(0 \leq i, j \leq 2)$ が存在して、

$$k(\mu)(K, L) = \sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}\mu_i(K)\mu_j(L) \qquad (K, \in [\mathcal{K}^2],\ L \in \mathcal{K}^2)$$

が成り立つ。この等式の両辺は $L \in [\mathcal{K}^2]$ に関して付値になるため、包除公式より $L \in [\mathcal{K}^2]$ に対して上記等式が成り立つ。さらに $c_{ij} = c_{ji}$ が成り立つ。

定理 3.5.2 (主交叉積分公式) $K, L \in [\mathcal{K}^2]$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{E_2} \mu_0(K \cap gL)dg = \mu_0(K)\mu_2(L) + \frac{2}{\pi}\mu_1(K)\mu_1(L) + \mu_2(K)\mu_0(L).$$

証明　命題 3.5.1 よりある $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(0 \le i, j \le 2)$ が存在して、

$$k(\mu_0)(K, L) = \sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}\mu_i(K)\mu_j(L) \qquad (K, L \in [\mathcal{K}^2])$$

が成り立つ。$K = aB^2,\ L = bB^2$ として係数 c_{ij} を決定する。

$$\begin{aligned}
&k(\mu_0)(aB^2, bB^2) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{E_2} \mu_0(aB^2 \cap gbB^2)dg = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mu_0(aB^2 \cap (R(\theta)bB^2 + v))dvd\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mu_0(aB^2 \cap (bB^2 + v))dvd\theta = \int_{\mathbb{R}^2} \mu_0(aB^2 \cap (bB^2 + v))dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} I_{(a+b)B^2}(v)dv = \pi(a+b)^2 = \pi(a^2 + 2ab + b^2).
\end{aligned}$$

これは a, b に関する同次多項式になっている。他方、

$$k(\mu_0)(aB^2, bB^2) = \sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}\mu_i(aB^2)\mu_j(bB^2) = \sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}a^i b^j \mu_i(B^2)\mu_j(B^2).$$

これらの a, b の係数を比較すると $i + j \neq 2$ のとき $c_{ij} = 0$ となり、$i + j = 2$ のとき

$$\pi = \pi c_{20} = \pi c_{02}, \quad 2\pi = \pi^2 c_{11}.$$

すなわち、

$$c_{20} = c_{02} = 1, \quad c_{11} = \frac{2}{\pi}$$

を得る。したがって、$K, L \in [\mathcal{K}^2]$ に対して

$$\int_{E_2} \mu_0(K \cap gL)dg = \mu_0(K)\mu_2(L) + \frac{2}{\pi}\mu_1(K)\mu_1(L) + \mu_2(K)\mu_0(L)$$

が成り立つ。