

山形大学理学部
数理構造特選 F
数理科学特別講義 II

曲線と曲面

田崎博之

2013年度

目次

第1章	曲線と曲面の基礎	1
1.1	平面曲線概念	1
1.2	平面曲線	1
1.3	空間曲線	2
1.4	空間内の曲面概念	3
1.5	第一基本形式と第二基本形式	3
1.6	曲面の曲率	4
第2章	曲率と長さ、面積、体積	5
2.1	曲線に関する長さ、面積と体積	5
2.2	曲面に関する面積、体積	6
2.3	Gauss の基本定理	7
第3章	地図投影法	8
3.1	正積投影図法	8
3.2	共形写像	8
3.3	正角投影図法	10
3.4	三角関数の積分	11

第1章 曲線と曲面の基礎

特に断わらない限り、関数や写像は C^∞ 級のものだけを考える。

1.1 平面曲線の問題

微分しても 0 にならない一次元的な伸びを持つものを曲線と呼びたい。

定義 1.1.1 実数の区間 I から平面 \mathbb{R}^2 への写像 p の微分が I のすべての点で 0 にならないとき、 p の像 $p(I)$ を曲線と呼ぶ。 $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ をこの曲線のパラメータ表示と呼ぶ。

適切な条件のもとで平面の開集合上定義された関数が一定値をとる部分集合は、陰関数定理を使うことにより局所的に曲線の条件を満たすことがわかる。

1.2 平面曲線

定義 1.2.1 パラメータ表示 $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の定める曲線 $C = p(I)$ の長さ $L(C)$ を

$$L(C) = \int_I \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって定める。これはパラメータ表示のとり方に依存しないことがわかる。 $a \in I$ をとり

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって t の関数 $s(t)$ を定めると、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dp}{dt} \right| > 0$ となり、 $s(t)$ は逆関数 $t(s)$ を持つ。 $\bar{p}(s) = p(t(s))$ によって曲線のパラメータ表示を定めると $\frac{d\bar{p}}{ds}$ は単位ベクトルになる。 s を弧長パラメータと呼ぶ。

曲線の弧長パラメータ表示 $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して $e_1(s) = \frac{dp}{ds}$ によって単位ベクトル $e_1(s)$ を定め、 $e_1(s)$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転させたベクトルを $e_2(s)$ で表す。 \mathbb{R}^2 の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。 $\langle e_1(s), e_1(s) \rangle = 1$ を s で微分することにより、 $\frac{de_1(s)}{ds}$ は $e_2(s)$ に比例することがわかり、 $\frac{de_1(s)}{ds} = \kappa(s)e_2(s)$ と書ける。 $\langle e_1(s), e_2(s) \rangle = 0$ と $\langle e_2(s), e_2(s) \rangle = 1$ を s で微分することにより、 $\frac{de_2(s)}{ds} = -\kappa(s)e_1(s)$ を得る。

定義 1.2.2 $\kappa(s)$ を曲線の曲率と呼び、

$$\frac{de_1(s)}{ds} = \kappa(s)e_2(s), \quad \frac{de_2(s)}{ds} = -\kappa(s)e_1(s)$$

を Frenet の公式と呼ぶ。

定理 1.2.3 c と \bar{c} を平面曲線とする。これら二曲線の曲率が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動によって c は \bar{c} に重なることである。実数の区間で定義された滑らかな関数 κ に対して、 s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$ を曲率として持つ平面曲線 $c(s)$ が存在する。

1.3 空間曲線

定義 1.3.1 実数の区間 I から空間 \mathbb{R}^3 への写像 p の微分が I のすべての点で 0 にならないとき、 p の像 $p(I)$ を曲線と呼ぶ。 $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ をこの曲線のパラメータ表示と呼ぶ。

定義 1.3.2 パラメータ表示 $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ の定める曲線 $C = p(I)$ の長さ $L(C)$ を

$$L(C) = \int_I \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって定める。これはパラメータ表示のとり方に依存しないことがわかる。 $a \in I$ をとり

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{dp}{dt} \right| dt$$

によって t の関数 $s(t)$ を定めると、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dp}{dt} \right| > 0$ となり、 $s(t)$ は逆関数 $t(s)$ を持つ。 $\bar{p}(s) = p(t(s))$ によって曲線のパラメータ表示を定めると $\frac{d\bar{p}}{ds}$ は単位ベクトルになる。 s を弧長パラメータと呼ぶ。

曲線の弧長パラメータ表示 $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して $e_1(s) = \frac{dp}{ds}$ によって単位ベクトル $e_1(s)$ を定める。 $\kappa(s) = \left| \frac{de_1(s)}{ds} \right|$ によって曲率 $\kappa(s)$ を定める。 $\kappa(s) \neq 0$ という前提のもとで、 $\frac{de_1(s)}{ds} = \kappa(s)e_2(s)$ によって単位ベクトル $e_2(s)$ を定める。ベクトル積を使って $e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s)$ によって $e_3(s)$ を定めると、各 s に対して $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ は \mathbb{R}^3 の正の向きに正規直交基底になる。さらにこれらは次の Frenet-Serret の公式を満たす。

$$\frac{de_1(s)}{ds} = \kappa(s)e_2(s), \quad \frac{de_2(s)}{ds} = -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s), \quad \frac{de_3(s)}{ds} = -\tau(s)e_2(s).$$

定理 1.3.3 c と \bar{c} を空間曲線とする。 $\frac{d^2c}{ds^2} \neq 0$, $\frac{d^2\bar{c}}{ds^2} \neq 0$ を仮定する。これら二曲線の曲率と捩率が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動によって c は \bar{c} に重なることである。実数の区間で定義された滑らかな関数 $\kappa > 0$ と τ に対して、 s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$ を曲率 $\tau(s)$ を捩率として持つ空間曲線 $c(s)$ が存在する。

1.4 空間内の曲面の概念

微分しても退化しない二次元的拡がりを持つものを曲面と呼びたい。

定義 1.4.1 平面 \mathbb{R}^2 の座標を u, v で表す。 \mathbb{R}^2 内の領域 D から空間 \mathbb{R}^3 への写像 p の偏微分 p_u, p_v が D のすべての点で線型独立になるとき、 p の像 $p(D)$ を曲面と呼ぶ。 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ をこの曲面のパラメータ表示と呼ぶ。

適切な条件のもとで空間の開集合上定義された関数が一定値をとる部分集合は、陰関数定理を使うことにより局所的に曲面の条件を満たすことがわかる。

1.5 第一基本形式と第二基本形式

曲面のパラメータ表示 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して p_u, p_v の張る平面を接平面と呼ぶ。 \mathbb{R}^3 の内積を接平面に制限したものを第一基本形式という。接平面の基底 p_u, p_v に関する第一基本形式の表現行列は

$$\begin{bmatrix} \langle p_u, p_u \rangle & \langle p_u, p_v \rangle \\ \langle p_v, p_u \rangle & \langle p_v, p_v \rangle \end{bmatrix}$$

となる。そこで $E = \langle p_u, p_u \rangle$, $F = \langle p_u, p_v \rangle = \langle p_v, p_u \rangle$, $G = \langle p_v, p_v \rangle$ とおくと、第一基本形式の表現行列は $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ となる。 p_u, p_v の双対基底を du, dv で表すと、第一基本形式は $Edu + 2Fdudv + Gdv$ と表せる。

$p_u \times p_v$ は接平面に直交し

$$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

は単位法ベクトルになる。 $(u_0, v_0) \in D$ における単位法ベクトルを $e_0 = e(u_0, v_0)$ で表し、関数 $f(u, v)$ を

$$f(u, v) = \langle e_0, p(u, v) \rangle$$

によって定めると、曲面片は (u_0, v_0) の近くで $f(u, v)$ のグラフとみなすことができ、その Hessian によって形を把握できる。この Hessian を第二基本形式という。接平面の基底 p_u, p_v に関する第一基本形式の表現行列は

$$\begin{bmatrix} \langle e, p_{uu} \rangle & \langle e, p_{uv} \rangle \\ \langle e, p_{vu} \rangle & \langle e, p_{vv} \rangle \end{bmatrix}$$

となる。そこで、 $L = \langle e, p_{uu} \rangle$, $M = \langle e, p_{uv} \rangle = \langle e, p_{vu} \rangle$, $N = \langle e, p_{vv} \rangle$ とおくと、第二基本形式の表現行列は $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ となる。第二基本形式は $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ と表せる。

$\langle e, e \rangle = 1$ より e_u, e_v は曲面の接ベクトルになることがわかる。よって e_u, e_v は p_u, p_v の線形結合になる。線形結合の係数を求めることができ、

$$\begin{aligned} e_u &= \frac{-GL + FM}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v, \\ e_v &= \frac{-GM + FN}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v \end{aligned}$$

を得る。

1.6 曲面の曲率

定義 1.6.1 曲面の第二基本形式の固有値を κ_1, κ_2 で表し、曲面の主曲率と呼ぶ。主曲率の積 $K = \kappa_1 \kappa_2$ を Gauss 曲率と呼び、平均 $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ を平均曲率と呼ぶ。

定理 1.6.2 パラメータ表示 p によって定まる曲面片の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は次の表示式を持つ。

$$\begin{aligned} K &= \frac{\langle e, p_{uu} \rangle \langle e, p_{vv} \rangle - \langle e, p_{uv} \rangle^2}{\langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2}, \\ H &= \frac{\langle p_u, p_u \rangle \langle e, p_{vv} \rangle - 2\langle p_u, p_v \rangle \langle e, p_{uv} \rangle + \langle p_v, p_v \rangle \langle e, p_{uu} \rangle}{2(\langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2)}. \end{aligned}$$

前節の E, F, G, L, M, N を使って表示すると

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

第2章 曲率と長さ、面積、体積

2.1 曲線に関する長さ、面積と体積

定理 2.1.1 平面曲線 C の弧長パラメータ表示を $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で表し、 $r > 0$ とする。

$$T_r(C) = \{p(s) + te_2(s) \mid s \in I, -r \leq t \leq r\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{|\kappa(s)| \mid s \in I\}$ のとき、 $T_r(C)$ の面積 $A(T_r(C))$ は次の等式を満たす。

$$A(T_r(C)) = 2rL(C).$$

ただし、 $T_r(C)$ に自己交叉がある場合、 $A(T_r(C))$ は交叉の回数だけ数える。

以下の面積、体積に関する主張でも、考えている図形に自己交叉がある場合は交叉の回数だけ面積、体積を数えることにする。

補題 2.1.2 平面曲線 C の弧長パラメータ表示を $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で表し、 $r > 0$ とする。

$$S_r(C) = \{p(s) + te_2(s) \mid s \in I, 0 \leq t \leq r\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{|\kappa(s)| \mid s \in I\}$ のとき、

$$A(S_r(C)) = rL(C) - \frac{r^2}{2} \int_I \kappa(s) ds.$$

命題 2.1.3 $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ を平面単純閉曲線の弧長パラメータ表示とする。パラメータが反時計回りのとき、 $\int_I \kappa(s) ds = 2\pi$ であり、パラメータが時計回りのとき、 $\int_I \kappa(s) ds = -2\pi$ である。

定理 2.1.4 平面単純閉曲線 C の時計回りの弧長パラメータ表示を $p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で表し、 $0 < r \leq 1/\max\{|\kappa(s)|\}$ とすると

$$A(S_r(C)) = rL(C) + \pi r^2.$$

命題 2.1.5 定理 2.1.1 または補題 2.1.2 と同じ設定のもとで、

$$C_r(C) = \{\mathbf{p}(s) + r\mathbf{e}_2(s) \mid s \in I\}$$

とすると、

$$L(C_r(C)) = L(C) - r \int_I \kappa(s) ds.$$

定理 2.1.6 空間曲線 C の弧長パラメータ表示を $\mathbf{p}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で表し、 $\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \neq 0$, $r > 0$ とする。

$$B_r^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq r\},$$

$$T_r(C) = \{\mathbf{p}(s) + u\mathbf{e}_2(s) + v\mathbf{e}_3(s) \mid s \in I, (u, v) \in B_r^2\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{\kappa(s) \mid s \in I\}$ のとき、 $T_r(C)$ の体積 $V(T_r(C))$ は次の等式を満たす。

$$V(T_r(C)) = \pi r^2 L(C).$$

2.2 曲面に関する面積、体積

定理 2.2.1 $\mathbf{p}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲面 S のパラメータ表示とする。 $r > 0$ に対して

$$T_r(S) = \{\mathbf{p}(u, v) + t\mathbf{e}(u, v) \mid (u, v) \in D, -r \leq t \leq r\}$$

とすると、 $r \leq 1/\max\{|\kappa_1(u, v)|, |\kappa_2(u, v)| \mid (u, v) \in D\}$ のとき、 $T_r(S)$ の体積は次の等式を満たす。

$$V(T_r(S)) = 2rA(S) + \frac{2}{3}r^3 \int_S K dA.$$

ここで、 $dA = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| du dv$ である。

定理 2.2.2 定理 2.2.1 と同じ設定のもとで、

$$T_r^+(S) = \{\mathbf{p}(u, v) + t\mathbf{e}(u, v) \mid (u, v) \in D, 0 \leq t \leq r\}$$

とすると、 $T_r^+(S)$ の体積は次の等式を満たす。

$$V(T_r^+(S)) = rA(S) - r^2 \int_S H dA + \frac{1}{3}r^3 \int_S K dA.$$

定理 2.2.3 定理 2.2.1 と同じ設定のもとで、

$$S_r(S) = \{\mathbf{p}(u, v) + r\mathbf{e}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

とすると、 $S_r(S)$ の面積は次の等式を満たす。

$$A(S_r(S)) = A(S) - 2r \int_S H dA + r^2 \int_S K dA.$$

2.3 Gauss の基本定理

定理 2.3.1 曲面の Gauss 曲率は第一基本形式から定まり、第二基本形式には依存しない。

証明の概略 $p_{uu}, p_{uv} = p_{vu}, p_{vv}$ を \mathbb{R}^3 の基底 p_u, p_v, e による線形結合で表し、

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L e, \\ p_{uv} &= \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + M e = p_{vu} = \Gamma_{21}^1 p_u + \Gamma_{21}^2 p_v + M e, \\ p_{vv} &= \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + N e \end{aligned}$$

によって Γ_{ij}^k を定めと、

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$

となつて、 Γ_{ij}^k を E, F, G とこれらの微分によって表現できる。次に p_{uuv} と p_{uvu} が等しいことを利用して、

$$K = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

を得る。したがって、 K は E, F, G とこれらの微分によって表現できることがわかる。

第3章 地図投影法

地図投影法とは地球の表面の一部を平面の一部に対応させる方法である。数学的には球面の開集合と平面の開集合の間の微分同型写像を考える。球面の Gauss 曲率は正の一定値であるのに対して、平面の Gauss 曲率は0だから、この微分同型写像を等長的にすることはできない。等長的にはできなくても微分同型写像が球面の図形のいずれかの幾何学的特徴を保つようにしたい。ここでは面積を保つものと角度を保つものについて説明する。面積を保つものを正積投影図法、角度を保つものを正角投影図法と呼ぶ。

3.1 正積投影図法

球面と平面の間の面積を保つ写像は古代ギリシャの数学者 Archimedes にまで遡る。これは地図投影法の分野では Lambert 正積円筒図法と呼ばれている。

$r > 0$ に対して

$$\phi : S^1(r) \times [-r, r] \rightarrow S^2(r) ; (x, y, z) \mapsto \left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}x, \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}y, z \right)$$

によって ϕ を定める。 $S^1(r) \times [-r, r]$ のパラメータ表示

$$p : [0, 2\pi] \times [-r, r] \rightarrow S^1(r) \times [-r, r] ; (\theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

と $S^2(r)$ のパラメータ表示 $q = \phi \circ p$ によって、 ϕ の性質を調べることができる。

$$|p_\theta \times p_z| = |q_\theta \times q_z| = r$$

となり、写像 ϕ は面積を保つことがわかる。すなわち、円筒 $S^1(r) \times [-r, r]$ の任意の領域と ϕ によって対応する球面 $S^2(r)$ の領域の面積は等しい。特に、

$$A(S^1(r) \times [-r, r]) = A(S^2(r)) = 4\pi r^2.$$

3.2 共形写像

曲面の間の接ベクトルの角度を保つ写像を考えるため、まず内積を持つベクトル空間の間のベクトルの角度を保つ線形写像について考える。

定義 3.2.1 内積を持つベクトル空間の 0 ではない元 u, v に対して Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left| \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} \right| \leq 1$$

が成り立ち

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}$$

を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ がただ一つ定まる。この θ を u, v の間の角度と呼び $\angle(u, v)$ で表す。

命題 3.2.2 U, V を内積を持つベクトル空間とする。線形写像 $f: U \rightarrow V$ がベクトルの角度を保つことと f による V の内積の引き戻しが U の内積の正の定数倍になることは同値である。これは、ある正の定数 c が存在して

$$\langle f(u), f(v) \rangle = c \langle u, v \rangle \quad (u, v \in U)$$

が成り立つことを意味する。

定義 3.2.3 曲面の間の写像の微分写像が接ベクトルの角度を保つとき、この写像を共形写像と呼ぶ。

曲面 S から S' への写像 f が共形写像であるとは、曲線 $c_1, c_2: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ が $c_1(0) = c_2(0)$ を満たすとき、

$$\angle((f \circ c_1)'(0), (f \circ c_2)'(0)) = \angle(c_1'(0), c_2'(0))$$

が成り立つことを意味する。命題 3.2.2 より、 S の各点の接平面の第一基本形式と f によって対応する S' の接平面の第一基本形式はスカラー倍になる。このスカラーは S の点に依存して変化し S 上の関数になる。

定義 3.2.4 曲面 S のパラメータ表示 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が、 D の曲面とみなして共形写像になるとき、 S の点に対して p によって定まる D の点の u, v 座標を対応させる u, v を等温座標系と呼ぶ。

一般の第一基本形式は $Edu + 2Fdu + Gdv$ であるが、これが uv 平面の通常の内積のスカラー倍になるためには $E = G, F = 0$ が必要十分である。したがって、第一基本形式が $E(du + dv)$ となる座標系が等温座標系であるということもできる。

xz 平面の z 軸と交わらない曲線

$$x = u, \quad z = g(u)$$

を z 軸の回りに回転した回転面はパラメータ表示

$$\mathbf{p}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, g(u))$$

を持つ。このパラメータ表示を利用して回転面に等温座標系が存在することを証明できる。第一基本形式は

$$(1 + g'(u)^2)du^2 + u^2dv^2 = u^2 \left(\left(\frac{\sqrt{1 + g'(u)^2}}{u} du \right)^2 + dv^2 \right)$$

となり、 u の関数 w を

$$\frac{dw}{du} = \frac{\sqrt{1 + g'(u)^2}}{u}$$

を満たすようにとれば、上記計量は $u^2(dw^2 + dv^2)$ となる。したがって、 w, v は回転面の等温座標系である。

3.3 正角投影図法

前節の最後に求めた回転面の等温座標系を球面の場合に具体的に求める。これにより、正角投影図法が得られる。

原点中心、半径 r の球面の回転面としての母線は $g(u) = \pm\sqrt{r^2 - u^2}$ によって定まる。問題の座標 w は

$$w = r \int \frac{du}{u\sqrt{r^2 - u^2}}.$$

$u = r \cos \theta$ と変換して積分を計算する。

$$w = r \int \frac{-r \sin \theta d\theta}{r \cos \theta \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \theta}} = - \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = - \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

上の $1/\cos \theta$ の積分を含めた三角関数の積分については次の節で扱うことにして、ここではこの座標系を調べる。球面の点 $(r \cos \theta \cos v, r \cos \theta \sin v, r \sin \theta)$ すなわち、緯度 θ 経度 v の点に

$$\left(v, - \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

を対応させる座標系は球面の等温座標系になる。これより、

$$\left(v, \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

も等温座標系になる。この等温座標系によって定まる地図投影法は Mercator 図法と呼ばれている。

Mercator 図法について詳しく調べてみよう。対応のし方より、緯度 θ または経度 v が一定の球面上の曲線は、Mercator 図法によって直線に対応する。関数

$$\phi(\theta) = \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

の挙動について考える。

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

より、 $(-\pi/2, \pi/2)$ において $\phi(\theta)$ は単調増加になる。さらに $\phi : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ は微分同型写像になり、Mercator 図法の像は $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ になる。

球面から $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ への Mercator 図法による写像 Φ が共形写像であることを直接確かめることもできる。

$$p(v, \theta) = (r \cos \theta \cos v, r \cos \theta \sin v, r \sin \theta)$$

とおくと、 $p(v, \theta)$ は経度 v 、緯度 θ の球面の点である。

$$\Phi(p(v, \theta)) = \left(v, \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

となる。

$$\begin{aligned} p_v &= (-r \cos \theta \sin v, r \cos \theta \cos v, 0), \\ p_\theta &= (-r \sin \theta \cos v, -r \sin \theta \sin v, r \cos \theta) \end{aligned}$$

は球面の接平面の基底になり、

$$d\Phi(p_v) = (1, 0), \quad d\Phi(p_\theta) = \left(0, \frac{1}{\cos \theta} \right).$$

これらの内積の関係から、球面の接ベクトル X, Y に対して

$$r^2 \cos^2 \theta \langle d\Phi(X), d\Phi(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

となり、 Φ は共形写像であることがわかる。

3.4 三角関数の積分

この節では、前節で後回しにした $1/\cos \theta$ の積分を三種類の方法で行う。後にいくほどより適用範囲の広い計算方法で行う。

その一 積分の変数変換をすることなく、被積分関数の形に強く依存した計算方法である。

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sin(\theta + \pi/2)} = \int_0^\phi \frac{d\theta}{2 \sin(\theta/2 + \pi/4) \cos(\theta/2 + \pi/4)} \\ &= \int_0^\phi \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos(\theta/2 + \pi/4)}{\sin(\theta/2 + \pi/4)} + \frac{\sin(\theta/2 + \pi/4)}{\cos(\theta/2 + \pi/4)} \right\} d\theta \\ &= [\log \sin(\theta/2 + \pi/4) - \log \cos(\theta/2 + \pi/4)]_0^\phi = [\log \tan(\theta/2 + \pi/4)]_0^\phi \\ &= \log \tan(\phi/2 + \pi/4). \end{aligned}$$

その二 $t = \sin \theta$ と変数変換する計算方法。 $dt = \cos \theta d\theta$ となるため、被積分関数の形によってはうまく働く。

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \int_0^\phi \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\phi \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \int_0^{\sin \phi} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \dots = \log \tan(\phi/2 + \pi/4). \end{aligned}$$

その三 一般的に三角関数の分数関数の積分の計算は、 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換し、

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

を利用することにより、分数関数の積分に帰着する。

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \int_0^{\tan \frac{\phi}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan \frac{\phi}{2}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \dots = \log \tan(\phi/2 + \pi/4). \end{aligned}$$