数学類

微分幾何学

Morse理論
(配付資料)

田崎博之

2014年度

目 次

第1章　Morse関数

特に断らないかぎり考える多様体と関数はすべて C^∞ 級とする。

1.1　Morse関数

定義 1.1.1 多様体 M の点 p における接ベクトル空間を T_pM で表し、多様体間の C^∞ 級写像 $F: M \to N$ の p での微分写像を $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ で表す。

$f: M \to \mathbf{R}$ を多様体 M 上の C^∞ 級関数とする。f の $p \in M$ における微分写像 $df_p: T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R} = \mathbf{R}$ が 0 になるとき、p を f の**臨界点**と呼ぶ。また、実数 $f(p)$ を f の**臨界値**と呼ぶ。すなわち、実数 a が f の特異値であるとは、f の特異点 p が存在し $a = f(p)$ となることである。

注意 1.1.2 多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f: M \to \mathbf{R}$ を考える。$p \in M$ のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ をとると、

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i$$

と表せ、$dx_p^1, \ldots, dx_p^n$ は余接ベクトル空間 T_p^*M (T_pM の双対空間) の基底になるので、p が f の臨界点であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

が成り立つことである。

注意 1.1.3 多様体がコンパクトならば、その上の関数は最大値と最小値を持つので、臨界点を持つ。

補題 1.1.4 多様体 M 上の関数 $f: M \to \mathbf{R}$ が臨界点 $p \in M$ を持っていると仮定する。接ベクトル $X, Y \in T_pM$ を p のまわりのベクトル場 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ に拡張し、

$$(\nabla^2 f)_p(X, Y) = (\tilde{X}\tilde{Y}f)(p)$$

によって $(\nabla^2 f)_p(X, Y)$ を定めると、これは X, Y の拡張のとり方によらずに定まり、

$$(\nabla^2 f)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

は対称二次形式になる。

定義 1.1.5 点 $p \in M$ を多様体 M 上の関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の臨界点とする。補題 1.1.4 の $(\nabla^2 f)_p$ を f の p における **Hessian** または**二階微分**と呼ぶ。$(\nabla^2 f)_p$ が非退化のとき、p を f の**非退化臨界点**と呼ぶ。すべての臨界点が非退化である関数を **Morse 関数**という。

注意 1.1.6 多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ が臨界点 $p \in M$ を持つと仮定する。p のまわりの局所座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ をとると、注意 1.1.2 より、

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

が成り立つ。接ベクトル $X, Y \in T_pM$ を

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

と表す。Y を p のまわりのベクトル場に拡張したものを

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で表す。このとき、

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 f)_p(X, Y) = X(\tilde{Y} f) &= \sum_{i=1}^n X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \sum_{j=1}^n \tilde{Y}^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial \tilde{Y}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p).
\end{aligned}$$

これより、行列 $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right]$ は、基底 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ に関する $(\nabla^2 f)_p$ の表現行列になる。したがって、p が f の非退化特異点になるための必要十分条件は、行列 $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right]$ が非退化行列になることである。

例 1.1.7 球面上の高さ関数の臨界点は非退化である。以下でこれを示す。球面 S^2 は

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

によって定め、高さ関数は

$$f(x, y, z) = z$$

によって定める。S^2 における f の臨界点は $(0, 0, \pm 1)$ のみである。そこで $\varepsilon = \pm 1$ とおいて、f の臨界点を $(0, 0, \varepsilon)$ で表す。$(0, 0, \varepsilon)$ の近傍において、(x, y) は局所座標になる。(x, y) によって f を表現すると

$$f(x, y) = z = \varepsilon \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

となる。f に一階微分を計算すると、$(0,0)$ が臨界点であることがわかる。これは $(0,0,\varepsilon)$ に対応している。f に二階微分を計算すると、(x,y) における f の二階微分の表現行列は

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

となり

$$(\nabla^2 f)_x((x,y),(x,y)) = -\varepsilon(x^2+y^2)$$

を得る。特に、これは非退化である。したがって、f は S^2 上の Morse 関数である。

例 1.1.8 退化臨界点を持つ関数を構成することは簡単である。たとえば退化二次形式の 0 における二階微分はその二次形式自身である。さらに、$x \mapsto x^3$ のような高次の多項式は退化臨界点を持つ。

定義 1.1.9 V を n 次元多様体 M の部分集合とする。V の各点 x に対して x の M における座標近傍 (U,ϕ) が存在し、

$$\phi(U \cap V) = \phi(U) \cap \mathbf{R}^d \quad (\mathbf{R}^d = \{(u_1,\ldots,u_d,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^n \mid u_i \in \mathbf{R}\})$$

を満たすとき、V を M の d 次元**部分多様体**と呼ぶ。ϕ の逆写像を $\phi(U)\cap\mathbf{R}^d$ に制限した写像を V の局所的な**パラメータ表示**と呼ぶ。

定義より d 次元部分多様体は d 次元多様体であることがわかる。

命題 1.1.10 $V \subset \mathbf{R}^n$ を部分多様体とする。ほとんどすべての $p \in \mathbf{R}^n$ について

$$f_p : V \to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \|x-p\|^2$$

は Morse 関数になる。

部分多様体 V の**法ベクトル束** $N(V)$ を

$$N(V) = \{(x,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid x \in V,\ v \perp T_xV\}$$

によって定め、写像 E を

$$E : N(V) \to \mathbf{R}^n\ ;\ (x,v) \mapsto x+v$$

によって定める。

定義 1.1.11 等しい次元を持つ多様体の間の写像 $f : M \to N$ の $x \in M$ における微分写像 $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ が線形同型ではないとき、x を f の**臨界点**と呼ぶ。f の臨界点の f による像を f の**臨界値**と呼ぶ。

補題 1.1.12 V の法ベクトル束 $N(V)$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の n 次元部分多様体になる。$(x,v) \in N(V)$ が E の臨界点であるための必要十分条件は、$p = E(x,v) = x+v$ とおくと

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - 2\left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle.$$

を (i,j) 成分に持つ行列が退化することである。

補題 1.1.12 の証明の概略　$x_0 \in V$ について、部分多様体の定義から定まる x_0 の $\mathbf{R}^n$ における開近傍 U と C^∞ 級写像 $\phi : U \to \mathbf{R}^n$ をとる。$\phi : U \to \phi(U)$ の逆写像を ψ で表し、ψ の変数を $(u_1, \ldots, u_n)$ で表す。ψ は微分同型写像だから、

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \tag{1.1}$$

は $\phi(U)$ の各点で線形独立である。特に $\phi(U \cap V)$ においても線形独立である。したがって、

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial u_d} \tag{1.2}$$

は $U \cap V$ の各点で接ベクトル空間の基底になる。U の各点 x で (1.1) に Gram-Schmidt の直交化法を施し、得られたものを $(e_1)_x, \ldots, (e_n)_x$ とすると、

$$[(e_1)_x \cdots (e_n)_x] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(x) \cdots \frac{\partial \psi}{\partial u_n}(x)\right] \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \cdots & \cdots & a_n^1(x) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^n(x) \end{bmatrix}$$

となる。$\mathbf{R}^n$ の基底 $(e_1)_x, \ldots, (e_n)_x$ の双対基底を $(f_1)_x, \ldots, (f_n)_x$ で表す。$(x_0, v_0) \in N(V)$ をとると、$U \times \mathbf{R}^n$ は (x_0, v_0) の開近傍になる。

$$\Phi : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ ; \ (x, v) \mapsto (\phi(x), (f_1)_x(v), \ldots, (f_n)_x(v))$$

によって写像 Φ を定める。すると

$$\Phi((U \times \mathbf{R}^n) \cap N(V)) = \Phi(U \times \mathbf{R}^n) \cap (\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}) = \Phi(U \times \mathbf{R}^n) \cap \mathbf{R}^n$$

が成り立つ。したがって、$N(V)$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の n 次元部分多様体になる。

上記の Φ より

$$\begin{aligned} &(u_1, \ldots, u_d, t_{d+1}, \ldots, t_n) \\ &\mapsto \left(\psi(u_1, \ldots, u_d, 0, \ldots, 0), \sum_{k=d+1}^{n} t_k (e_k)_{\psi(u_1, \ldots, u_d, 0, \ldots, 0)}\right) \end{aligned}$$

は $N(V)$ の局所的なパラメータ表示になる。ここで、$(e_1)_\psi, \ldots, (e_d)_\psi$ は $T_\psi V$ の直交補空間の正規直交基底であることに注意しておく。よって、$(u_1, \ldots, u_d, t_{d+1}, \ldots, t_n)$ は $N(V)$ の局所座標系になる。この局所座標系に関する写像 E の表示は

$$E(u_1, \ldots, u_d, t_{d+1}, \ldots, t_n) = \psi(u_1, \ldots, u_d, 0, \ldots, 0) + \sum_{k=d+1}^{n} t_k (e_k)_{\psi(u_1, \ldots, u_d, 0, \ldots, 0)}$$

となり、局所座標系 $(u_1, \dots, u_d, t_{d+1}, \dots, t_n)$ による偏微分は

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \sum_{k=d+1}^{n} t_k \frac{\partial e_k}{\partial u_i}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t_j} = e_j$$

である。非退化性を調べるために次の補題を準備する。

補題 1.1.13 $Y_1, \dots, Y_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基底とする。$\mathbf{R}^n$ の元 $X_1, \dots, X_n$ が線形独立であるための必要十分条件は、行列 $[\langle X_i, Y_j \rangle]$ が非退化になることである。

dE の階数が最大階数であることの必要十分条件は、$\frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial E}{\partial t_k}$ と $\mathbf{R}^n$ の基底

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial u_d}, e_{d+1}, \dots, e_n$$

との内積を並べた正方行列

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, e_l \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial E}{\partial t_k}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial E}{\partial t_k}, e_l \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, e_l \right\rangle \\ 0 & 1_{n-d} \end{bmatrix}$$

が非退化になることである。さらにこの条件は、d 次正方行列

$$\left[\left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle \right]$$

が非退化であることと同値である。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \sum_{k=d+1}^{n} t_k \frac{\partial e_k}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=d+1}^{n} t_k \left\langle \frac{\partial e_k}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle . \end{aligned}$$

ここで、$d + 1 \leq k \leq n$ に対して

$$\left\langle \frac{\partial e_k}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle e_k, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = 0$$

を得る。そこで

$$v = \sum_{k=d+1}^{n} t_k e_k, \quad p = x + v$$

とすると、$x - p = -v$ となり

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - 2 \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial E}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle .$$

これより、(x, v) が E の臨界点ではないための必要十分条件は、上記成分を持つ行列が正則になることである。

命題 1.1.10 の証明の続き 補題 1.1.12 より $x \in V$ が関数 $f_p : V \to \mathbf{R}$ の臨界点であり、二階微分が退化するための必要十分条件は、$p = x + v$, $v \in T_x^{\perp}V$ となり、$(x, v) \in N(V)$ が E の臨界点になることである。これより、p が E の臨界値でなければ f_p の臨界点はすべて非退化になり、Morse 関数になる。次の定理 1.1.14 を $E : N(V) \to \mathbf{R}^n$ に適用すると、ほとんどすべての $\mathbf{R}^n$ の点 p は E の臨界値ではないので、f_p は Morse 関数になる。

定理 1.1.14 (Sard) 等しい次元を持つ多様体の間の写像 $f : M \to N$ に対して、ほとんどすべての N の点は f の臨界値ではない。

1.2 Morse の補題

Morse の補題とは非退化臨界点の近傍における関数の局所座標表示の標準形である。次の補題を準備しておく。

補題 1.2.1 $\mathbf{R}$ の 0 を含む開区間で定義された C^∞ 級関数 f に対して、同じ定義域の C^∞ 級関数 g が存在して、次が成り立つ。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + g(x)x^2, \quad f''(0) = 2g(0).$$

定理 1.2.2 p を多様体 V 上の関数 $f : V \to \mathbf{R}$ の非退化臨界点とする。このとき、p のまわりの局所座標近傍 (U, ϕ) と i が存在して、次が成り立つ。

$$\phi(p) = 0, \quad f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2.$$

証明の概略 定理の結論は局所的なので、$V = \mathbf{R}^n$ としても差し支えない。さらに $p = 0$ とする。$(\nabla^2 f)_0$ は対称だから、$\mathbf{R}^n$ の座標変換により $(\nabla^2 f)_0$ を対角化できる。そこで、最初から $(\nabla^2 f)_0$ は $\mathbf{R}^n$ の標準的な座標に関して対角化されているとして議論できる。

次元 n に関する数学的帰納法で証明する。$n = 1$ の場合、補題 1.2.1 を適用することにより結論が得られる。

$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ とみなして、$\mathbf{R}^n$ の点を $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ によって (x, y) と表すことにする。

$$F(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

とおくと、$F(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ であり、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

が成り立つ。よって陰関数定理を適用でき、$\mathbf{R}^{n-1}$ における 0 の近傍で定義された関数 ϕ が存在して

$$F(\phi(y), y) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

が成り立つ。

定理 1.2.2 証明の概略の続き　ϕ が陰関数であることから $d\phi_0 = 0$ がわかる。$\mathbf{R}^n$ の $(0,0)$ の近傍で定義された写像

$$\Phi(x,y) = (x + \phi(y), y)$$

を定めると、$d\Phi_{(0,0)}$ は単位行列になり、逆写像定理より Φ は $(0,0)$ の近傍で座標変換になる。さらに

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ \Phi)(0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(y), y) = F(\phi(y), y) = 0$$

と

$$\nabla^2 (f \circ \Phi)_{(0,0)} = \nabla^2 f_{(0,0)}$$

が成り立つ。

上記の座標変換により問題の関数 f はさらに

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$$

を満たすとしてよい。関数 f を $f(x,y) = f_y(x)$ と表し、f_y をパラメータ $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ 付き一変数関数として扱う。f_y に補題 1.2.1 を適用すると同じ定義域の C^∞ 級関数 g_y が存在して、

$$f_y(x) = f_y(0) + f_y'(0)x^2 + g_y(x)x^2$$

が成り立つ。上記の前提により

$$f_y'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$$

である。よって

$$f_y(x) = f_y(0) + g_y(x)x^2$$

が成り立つ。さらに、0 の近傍において $f_y''(0) \neq 0$ である。なぜならば、もし $f_0''(0) = 0$ ならば、$(\nabla^2 f)_0$ の表現行列は対角行列なので、0 が f の非退化臨界点であることに反する。よって $f_0''(0) \neq 0$ であり、0 の近傍において $f_y''(0) \neq 0$ である。$n = 1$ の場合を利用すると、$x_1 = \sqrt{\epsilon g_y(x)}x$ とおけば、

$$f = \epsilon x_1^2 + f_y(0) = \epsilon x_1^2 + f(0,y)$$

となる。$y \mapsto f(0,y)$ は $\mathbf{R}^{n-1}$ の 0 の開近傍で定義された 0 を非退化臨界点に持つ関数である。これにより、定理を n に関する帰納法で証明できる。

定義 1.2.3 定理 1.2.2 が成り立つ座標系を **Morse 座標系**と呼ぶ。定理 1.2.2 における i をこの非退化臨界点の**指数**と呼ぶ。

系 1.2.4 関数の非退化臨界点は臨界点の中で孤立する。

注意 1.2.5 n 次元多様体上の関数 f の指数 i の臨界点は、$-f$ の指数 $n-i$ の臨界点である。極小値をとる非退化臨界点の指数は 0 であり、極大値をとる非退化臨界点の指数は n である。2 変数関数の指数 1 の臨界点は**鞍型**と呼ばれる。

命題 1.2.6 $f : M \to \mathbf{R}$ と $g : N \to \mathbf{R}$ を多様体上の関数とする。

$$f + g : M \times N \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto f(x) + g(y)$$

によって $M \times N$ 上の関数 $f+g$ を定める。このとき、$(x, y) \in M \times N$ が $f+g$ の臨界点であるための必要十分条件は、x が f の臨界点でありかつ y が g の臨界点であることである。よって、$f+g$ の臨界点全体は f の臨界点と g の臨界点の組全体に一致する。さらに、$(x, y) \in M \times N$ が $f+g$ の非退化臨界点であるための必要十分条件は、x が f の非退化臨界点でありかつ y が g の非退化臨界点であることである。よって、$f+g$ が Morse 関数であるための必要十分条件は、f が Morse 関数でありかつ g が Morse 関数であることである。

命題 1.2.6 の補足　(x, y) が $f+g$ の非退化臨界点であるとき、$f+g$ に関する (x, y) の指数は f に関する x の指数と g に関する y の指数の和に一致する。

例 1.2.7 $\mathbf{R}$ 上の関数

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \cos(2\pi x)$$

は $T^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の関数を誘導する。f の臨界点を求めるために f の微分を求める。

$$df = -2\pi \sin(2\pi x) dx$$

となるため、臨界点は $\mathbf{R}^2$ で考えると $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ であり、T^1 で考えると臨界点の代表元は

$$0, \quad \frac{1}{2}$$

である。cos の Taylor 展開の形より、f の臨界点は非退化であり、f は Morse 関数になる。臨界点 0 の指数は 1 であり、臨界点 $\frac{1}{2}$ の指数は 0 である。

T^1 の n 個の積を $T^n = T^1 \times \cdots \times T^1$ と表す。命題 1.2.6 を繰り返し適用することにより

$$f + \cdots + f : T^n \to \mathbf{R}$$

は Morse 関数であり、その臨界点の全体は

$$\left\{ (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \middle| \epsilon_i = 0, \frac{1}{2} \right\}$$

である。臨界点 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ の指数は、$\#\{i \mid \epsilon_i = 0\}$ に一致する。

第2章　勾配ベクトル場

2.1　一径数変換群と単位の分割

定義 2.1.1 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。開区間 I で定義された M の曲線 $c : I \to M$ が $\dfrac{dc}{dt}(t) = X_{c(t)} \quad (t \in I)$ を満たすとき、c を X の**積分曲線**と呼ぶ。

定義 2.1.2 M を多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。X の任意の積分曲線が $\mathbf{R}$ 上定義された積分曲線に拡張できるとき、X を**完備**という。

定理 2.1.3 コンパクト多様体上の任意のベクトル場は完備である。

コンパクト多様体 M 上のベクトル場 X と $p \in M$ に対して、X の積分曲線 $c_p : \mathbf{R} \to M$ であり $c_p(0) = p$ を満たすものをとる。このとき、$\phi_t(p) = c_p(t)$ によって写像 $\phi_t : M \to M$ が定まる。

定理 2.1.4 上記の設定のもとで、任意の $t \in \mathbf{R}$ について $\phi_t : M \to M$ は微分同型写像になる。さらに次の (1) から (3) が成り立つ。

(1) $\phi_0 = 1_M$

(2) 任意の $s, t \in \mathbf{R}$ について $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$

(3) 任意の $t \in \mathbf{R}$ について $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$

定義 2.1.5 M を多様体とする。$t \in \mathbf{R}$ に対して微分同型写像 $\phi_t : M \to M$ が定まり、$\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ が定理 2.1.4 の (1) から (3) を満たすとき、$\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ を M の**一径数変換群**という。

多様体 M 上の一径数変換群 $\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ に対して $\left.\dfrac{d}{dt}\phi_t(p)\right|_{t=0} = X_p \in T_pM$ によって M 上のベクトル場 X を定めると、X は完備ベクトル場になり、X から定まる一径数変換群は元の $\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ に一致する。したがって、コンパクト多様体においてはベクトル場と一径数変換群は一対一に対応する。

定義 2.1.6 X を集合とし、$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合族とする。$X = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が成り立つとき、$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**被覆**という。Λ が有限集合のとき、$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**有限被覆**という。

定義 2.1.7 位相空間 X 上の連続関数 f に対して、$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ を f の**台**と呼ぶ。

定理 2.1.8 コンパクト多様体 M 上の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して、次の (1) から (3) を満たす M 上の有限個の関数 $\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ が存在する。

(1) $0 \le \phi_i \le 1 \quad (1 \le i \le N).$

(2) 任意の $1 \le i \le N$ に対してある $\alpha \in A$ が存在して、$\mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_\alpha$ が成り立つ。

(3) M 全体で $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi_i = 1$ が成り立つ。

定義 2.1.9 定理 2.1.8 の $\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ を開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に属する**単位の分割**という。条件 (3) より $\{\mathrm{supp}(\phi_i)\}_{1\le i\le N}$ は M の有限被覆になる。

2.2 勾配ベクトル場と擬勾配ベクトル場

f が $\mathbf{R}^n$ 上で定義された関数ならば、f の勾配ベクトル場 $\mathrm{grad} f$ は

$$\mathrm{grad}_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

によって定義される。$\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と f の微分 df を使って

$$\langle \mathrm{grad}_x f, Y\rangle = (df)_x(Y) \quad (Y \in \mathbf{R}^n)$$

によっても定まる。関数の勾配ベクトル場の定義では $\mathbf{R}^n$ 全体で定義された座標系を利用しているが、上の $\mathbf{R}^n$ の内積と関数の微分による関係式は、各接ベクトル空間の内積があれば関数の勾配ベクトル場を定義できることを示唆している。そこで Riemann 計量の概念を導入し、それを利用して関数の勾配ベクトル場の定義を拡張する。

定義 2.2.1 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ が存在し、M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

定義 2.2.2 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ 上の関数 f の**勾配ベクトル場** $\mathrm{grad} f$ を

$$\langle \mathrm{grad}_x f, Y_x\rangle = (df)_x(Y_x) \quad (x \in M,\ Y \in T_xM)$$

によって定義する。

命題 2.2.3 Riemann多様体上定義された関数の勾配ベクトル場は次の性質を持つ。

(1) 関数の勾配ベクトル場の零点と関数の臨界点は一致する。

(2) Riemann多様体がコンパクトのとき、多様体上定義された関数 f と $-\mathrm{grad} f$ の定める一径数変換群 ϕ_t に対して

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = -\|\mathrm{grad}_{\phi_t(x)}f\|^2 < 0$$

が成り立ち、関数 f は $\phi_t(x)$ に沿って減少する。

定義 2.2.4 $f : M \to \mathbf{R}$ を多様体 M 上の Morse 関数とする。次の条件を満たす M 上のベクトル場 X を f の**擬勾配ベクトル場**という。

(1) $(df)_x(X_x) \leq 0$ であり、等号成立の必要十分条件は x が f の臨界点になることである。

(2) f の臨界点のある近傍の Morse 座標系において、X は $\mathbf{R}^n$ の標準的な内積に関する f の勾配ベクトル場の -1 倍に一致する。

例 2.2.5 関数の非退化臨界点における Morse 座標系による表示

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(p)-\sum_{j=1}^{i}x_j^2+\sum_{j=i+1}^{n}x_j^2$$

を利用して、擬勾配ベクトル場から定まる一径数変換群を求める。

$$\mathrm{grad}f=(-2x_1,\dots,-2x_i,2x_{i+1},\dots,2x_n)$$

となり、

$$-\mathrm{grad}f=(2x_1,\dots,2x_i,-2x_{i+1},\dots,-2x_n)$$

を得る。$-\mathrm{grad}f$ の積分曲線は

$$\frac{dx(t)}{dt}=-\mathrm{grad}_{x(t)}f=(2x_1(t),\dots,2x_i(t),-2x_{i+1}(t),\dots,-2x_n(t))$$

を満たす。これより

$$x(t)=(x_1(0)e^{2t},\dots,x_i(0)e^{2t},x_{i+1}(0)e^{-2t},\dots,x_n(0)e^{-2t})$$

となる。したがって、$-\mathrm{grad}f$ が定める一径数変換群 ϕ_t は

$$\phi_t=\mathrm{diag}(e^{2t},\dots,e^{2t},e^{-2t},\dots,e^{-2t})$$

である。これより

$$\phi_t(x)=(e^{2t}x_1,\dots,e^{2t}x_i,e^{-2t}x_{i+1},\dots,e^{-2t}x_n).$$

定理 2.2.6 コンパクト多様体上の Morse 関数の擬勾配ベクトル場は存在する。

証明 M をコンパクト多様体とし、$f:M\to\mathbf{R}$ を Morse 関数とする。f の臨界点は孤立し、M はコンパクトだから、f の臨界点全体は有限集合である。そこで、f の臨界点全体を $c_1,\dots,c_r$ とする。これら臨界点における Morse 座標系を $(U_1,\phi_1),\dots,(U_r,\phi_r)$ とする。$U_1,\dots,U_r$ は互いに素である。これらに局所座標近傍 (U_j,ϕ_j) $(r+1\le j\le N)$ を追加して、$(U_j)_{1\le j\le N}$ が M の有限開被覆であり、c_i $(1\le i\le r)$ は U_i にのみ含まれるようにできる。

各 $1\le j\le N$ について U_j 上のベクトル場 X_j を次のように定める。$f\circ\phi_j^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\phi_j(U_j)$ 上の関数である。$\mathbf{R}^n$ の標準的な内積に関する $f\circ\phi_j^{-1}$ の勾配ベクトル場を $\mathrm{grad}(f\circ\phi_j^{-1})$ で表す。$\mathrm{grad}(f\circ\phi_j^{-1})$ を ϕ_j^{-1} の微分写像で写したものの -1 倍を X_j とする。すなわち

$$(X_j)_x=-d(\phi_j^{-1})_{\phi_j(x)}(\mathrm{grad}_{\phi_j(x)}(f\circ\phi_j^{-1}))\quad(x\in U_j)$$

である。すると

$$\begin{aligned} df_x((X_j)_x) &= -df_x(d(\phi_j^{-1})_{\phi_j(x)}(\mathrm{grad}_{\phi_j(x)}(f\circ\phi_j^{-1}))) \\ &= -d(f\circ\phi_j^{-1})_{\phi_j(x)}(\mathrm{grad}_{\phi_j(x)}(f\circ\phi_j^{-1})) \\ &= -\|\mathrm{grad}_{\phi_j(x)}(f\circ\phi_j^{-1})\|^2 \le 0. \end{aligned}$$

さらに、X_j の零点は f の U_j における臨界点に一致する。

次に $(U_j)_{1\le j\le N}$ に属する単位の分割 $(\psi_j)_{1\le j\le N}$ をとる。

$$\tilde{X}_j(x) = \begin{cases} \psi_j(x)X_j(x) & (x\in U_j) \\ 0 & (x\notin U_j) \end{cases}$$

によって M 上のベクトル場 $\tilde{X}_j$ を定め、

$$X = \sum_{j=1}^{N} \tilde{X}_j$$

によって M 上のベクトル場 X を定める。以下で X が f の擬勾配ベクトル場であることを示す。各点 $x\in M$ において

$$df_x(X_x) = \sum_{j=1}^{N} df_x((\tilde{X}_j)_x) \le 0.$$

等号成立の必要十分条件は、任意の j について $df_x((\tilde{X}_j)_x)=0$ が成り立つことである。さらに任意の j について $\psi_j(x)X_j(x)=0$ が成り立つことと同値である。これは x が f の臨界点であるか、または任意の j について $\psi_j(x)=0$ であることと同値である。しかし、$\{\psi_j\}_j$ は単位の分割だから後半は起こらない。すなわち、等号成立の必要十分条件は x が f の臨界点になることである。

X の臨界点 c_i のある近傍において X は X_i に一致し、f の Morse 座標系に関して $\mathbf{R}^n$ の標準的な内積に関する f の負の勾配ベクトル場に一致する。以上より X は f の擬勾配ベクトル場であることがわかる。

定義 2.2.7 a をコンパクト多様体上 M の関数 f の臨界点とする。ϕ_t を f の擬勾配ベクトル場から定まる一径数変換群とする。a の**安定多様体**を

$$W^s(a) = \left\{ x\in M \;\middle|\; \lim_{t\to+\infty}\phi_t(x) = a \right\}$$

によって定め、**不安定多様体**を

$$W^u(a) = \left\{ x\in M \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty}\phi_t(x) = a \right\}$$

によって定める。擬勾配ベクトル場とその一径数変換群が存在すれば、安定多様体と不安定多様体を定義できる。

命題 2.2.8 コンパクト多様体 M 上の Morse 関数の臨界点 a の安定多様体 $W^s(a)$ と不安定多様体 $W^u(a)$ は V の開円板と微分同型な部分多様体になる。さらに、a の指数を $\mathrm{Ind}(a)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$\dim W^u(a) = \mathrm{codim} W^s(a) = \mathrm{Ind}(a).$$

証明の概要 M 上の Morse 関数 f の非退化臨界点 a における Morse 座標系 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ をとる。M の開集合 U と局所座標系による像である $\mathbf{R}^n$ の開集合を同一視する。簡単のため $i = \mathrm{Ind}(a)$ と書く。$f - f(a)$ を改めて f とすると $f(a) = 0$ としてよい。f の U における局所表示は

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2$$

である。

$$V_- = \{(x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0) \mid x_j \in \mathbf{R}\,(1 \leq j \leq i)\},$$
$$V_+ = \{(0, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbf{R}\,(i+1 \leq j \leq n)\}$$

とおく。$\mathbf{R}^n$ の元 x を

$$x = x_- + x_+ \quad (x_- \in V_-,\, x_+ \in V_+)$$

と表す。$f(x) = -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2$ であることに注意しておく。次の $U(\epsilon, \eta)$ が U に含まれるように十分小さい $\epsilon, \eta > 0$ をとる。

$$U(\epsilon, \eta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid -\epsilon < f(x) < \epsilon,\, \|x_-\|^2\|x_+\|^2 \leq \eta(\epsilon + \eta)\}$$

ここで

$$\partial_\pm U = \{x \in U \mid f(x) = \pm\epsilon,\, \|x_\mp\|^2 \leq \eta\}$$

とおくと、$\partial_\pm U \subset \partial U(\epsilon, \eta)$ である。次に

$$\partial_0 U = \{x \in \partial U \mid \|x_-\|^2\|x_+\|^2 = \eta(\epsilon + \eta)\}$$

とおくと、$\partial_0 U \subset \partial U(\epsilon, \eta)$ であり

$$\partial U(\epsilon, \eta) = \partial_+ U \cup \partial_- U \cup \partial_0 U$$

が成り立つ。V_+, V_- の定め方より

$$W^s(a) \cap U = V_+ \cap U, \quad W^u(a) \cap U = V_- \cap U$$

が成り立つ。f の擬勾配ベクトル場の定める一径数変換群を ϕ_t とする。

$$\Phi_+ : (\partial_+ U \cap V_+) \times \mathbf{R} \to M\ ;\ (x, t) \mapsto \phi_t(x)$$

によって Φ_+ を定める。$\partial_+ U \cap V_+$ は V_+ 内の超球面だから、$n-i-1$ 次元球面である。さらに、$W^s(a)$ は Φ_+ の像と $\{a\}$ の合併に一致し、$n-i$ 次元円板と微分同型になる部分多様体であることがわかる。

安定多様体の場合と同様に $W^u(a)$ は i 次元円板と微分同型になる部分多様体であることもわかる。

命題 2.2.9 M をコンパクト多様体とし、f を M 上定義された Morse 関数とする。f の擬勾配ベクトル場の積分曲線 γ に対して、f の臨界点 c, d が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = c, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = d.$$

証明 γ の像が f の臨界点を含む場合は、γ の像はその臨界点のみになり命題の主張は成り立つ。そこで、γ の像が f の臨界点を含まない場合を考える。

f の臨界点全体を $\mathrm{Crit}(f)$ で表すと、$\mathrm{Crit}(f)$ は離散的になり、特に有限集合である。各 $x \in \mathrm{Crit}(f)$ に対して f の Morse 座標系を持つ開近傍を $U(x)$ で表す。

擬勾配ベクトル場の定義より $f(\gamma(t))$ は単調減少関数である。γ の像がある $x \in \mathrm{Crit}(f)$ の $U(x)$ と交わりを持つとき、

$$\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)) = x$$

が成り立つか、または、$U(x) \cap \gamma(\mathbf{R}) = \gamma(I)$ となる有限開区間 I が存在する。後者の場合は $\gamma(t)$ は I において $U(x)$ に入り出ていく。$f(\gamma(t))$ は単調減少であることから、$\gamma(t)$ は $U(x)$ と二度と交わることはない。もし、$\gamma(t)$ がどの臨界点にも収束しないとすると、各 $x \in \mathrm{Crit}(f)$ に対して γ は $U(x)$ と高々一回交わる。したがって、ある t_0 が存在して $t \geq t_0$ のとき $\gamma(t)$ は

$$U = \bigcup_{x\in\mathrm{Crit}(f)} U(x)$$

には含まれない。γ を定める f の擬勾配ベクトル場を X で表すと、$M-U$ はコンパクトだから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$df_x(X_x) \leq -\delta \quad (x \in M-U)$$

が成り立つ。これより $t \geq t_0$ のとき

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = \int_{t_0}^{t} df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_{t_0}^{t} df_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})dt \\ &\leq -\delta(t-t_0) \end{aligned}$$

となり

$$\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)) = -\infty.$$

これは f がコンパクト多様体 M 上の関数であることに矛盾する。

以上よりある臨界点 $d \in \mathrm{Crit}(f)$ が存在して $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = d$ が成り立つ。ある臨界点 c が存在して $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = c$ が成り立つことも同様にわかる。

多様体 M 上の関数 f と実数 a に対して

$$M^a = f^{-1}((-\infty, a])$$

とおく。

定理 2.2.10 f をコンパクト多様体 M 上の関数とする。a, b は実数であり、閉区間 $[a, b]$ は f の臨界値を持たないとする。このとき、M^a は M^b と微分同型である。

系 2.2.11 (Reeb) M をコンパクト多様体とする。二つの臨界点のみ持つ M 上の Morse 関数が存在すれば、M は球面に位相同型である。

証明 問題の Morse 関数を f とする。f の二つの臨界点は最大値と最小値を与える点である。必要なら f を一次式によって変換することにより、$f(M) = [0, 1]$ とできる。f の最大値と最小値を与える臨界点は Morse 座標系を持つので、ある $\epsilon > 0$ が存在して $f^{-1}([0, \epsilon]) = M^\epsilon$ と $f^{-1}([1-\epsilon, 1])$ は n 次元単位閉円板 D^n と微分同型になる。定理 2.2.10 より $M^{1-\epsilon}$ は M^ϵ と微分同型になり、M^ϵ は D^n と微分同型である。これより $M^{1-\epsilon}$ も D^n と微分同型である。さらに

$$M = M^{1-\epsilon} \cup f^{-1}([1-\epsilon, 1]), \quad M^{1-\epsilon} \cap f^{-1}([1-\epsilon, 1]) = \partial M^{1-\epsilon} = \partial f^{-1}([1-\epsilon, 1]).$$

ここで、$\partial M^{1-\epsilon}$ と $\partial f^{-1}([1-\epsilon, 1])$ はどちらも S^{n-1} と微分同型である。そこで、S^{n-1} の点を $\partial M^{1-\epsilon}$ の点、$\partial f^{-1}([1-\epsilon, 1])$ の点、S^{n-1} の点を対応させる写像を ϕ で表すと、$\phi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ は位相同型である。M は、二つの D^n の境界 S^{n-1} を ϕ によって対応する点を同一視した位相空間と位相同型になる。したがって、M は S^n と位相同型である。

定義 2.2.12 X, Y を位相空間とし、$f, g : X \to Y$ を連続写像とする。次の条件 (1) と (2) を満たす連続写像 $F : X \times [0, 1] \to Y$ が存在するとき、$f \sim g$ と書き、f, g は**ホモトピック**であるという。

(1) $F(x, 0) = f(x)$ $(x \in X)$,

(2) $F(x, 1) = g(x)$ $(x \in X)$.

定義 2.2.13 位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対してある連続写像 $f' : Y \to X$ が存在し

$$f' \circ f \sim 1_X, \quad f \circ f' \sim 1_Y$$

を満たすとき、f を**ホモトピー同値**と呼び、X と Y は**ホモトピー同値**である、または同じ**ホモトピー型**を持つという。

n 次元閉円板 D^n と一点 $\{0\}$ がホモトピー同値であることを示す。$f : D^n \to \{0\}$; $x \mapsto 0$ と $f' : \{0\} \to D^n$; $0 \mapsto 0$ によって連続写像 f, f' を定める。$f \circ f' = 1_{\{0\}}$ である。

$$F(x,t) = tx \quad ((x,t) \in D^n \times [0,1])$$

によって連続写像 $F : D^n \times [0,1] \to \{0\}$ を定めると、

$$F(x,0) = 0 = f' \circ f(x), \quad F(x,1) = x = 1_{D^n}(x)$$

となり、$f' \circ f$ と 1_{D^n} はホモトピックになる。したがって、D^n と一点 $\{0\}$ はホモトピー同値である。

定義 2.2.14 M を境界 ∂M を持つ多様体とし、連続写像 $\phi : S^{k-1} \to \partial M$ が存在するとき、$x \in S^{k-1}$ と $\phi(x) \in \partial M$ を同一視することによって位相空間 $M \cup B^k$ の同値関係を定め、商集合 $M \cup_\phi B^k$ に商位相を入れたものを、M に B^k を**境界で接着した位相空間**と呼ぶ。

定理 2.2.15 f を多様体 M 上の関数とする。p を f の指数 λ の非退化臨界点とする。$f(p)=c$ とおき、ある $\epsilon>0$ に対して $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ はコンパクトであり、p 以外の f の特異点を含まないと仮定する。このとき、さらに十分小さな $\epsilon>0$ に対して $M^{c+\epsilon}$ は $M^{c-\epsilon}$ に B^λ を境界で接着した位相空間 $M^{c-\epsilon}\cup B^\lambda$ と同じホモトピー型を持つ。

2.3 Smale の条件

定義 2.3.1 多様体 M 内の部分多様体 X と Y が

$$x\in X\cap Y \Rightarrow T_xX+T_xY=T_xM$$

が成り立つとき、X と Y は**横断的に交わる**といい、$X \pitchfork Y$ と表す。特に交わらない二つの部分多様体は横断的に交わるという。

命題 2.3.2 多様体 M 内の部分多様体 X と Y が横断的に交わるとき、$X\cap Y$ は M の部分多様体になり、次が成り立つ。

$$\begin{gathered}T_x(X\cap Y)=T_xX\cap T_xY \quad (x\in X\cap Y),\\ \dim(X\cap Y)=\dim X+\dim Y-\dim M.\end{gathered}$$

定義 2.3.3 コンパクト多様体上の Morse 関数 f の擬勾配ベクトル場が **Smale の条件**を満たすとは、すべての臨界点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることである。

いくつかの場合にはいつでも安定多様体と不安定多様体が横断的に交わる。

補題 2.3.4 コンパクト多様体 M 上の Morse 関数 f の任意の擬勾配ベクトル場に対して、以下が成り立つ。

(1) 同じ臨界点 a に対して $W^u(a)\pitchfork W^s(a)$ である。

(2) 臨界点 a と b は異なり $f(a)\le f(b)$ ならば、$W^u(a)\cap W^s(b)=\emptyset$ が成り立つ。特に $W^u(a)$ と $W^s(b)$ は横断的である。

証明 一般的にコンパクト多様体 M 上の Morse 関数 f の臨界点 a に対して

$$f(W^s(a))\subset[f(a),\infty), \qquad f(W^u(a))\subset(-\infty,f(a)]$$

が成り立つ。さらに

$$f(W^s(a)-\{a\})\subset(f(a),\infty), \qquad f(W^u(a)-\{a\})\subset(-\infty,f(a))$$

が成り立つ。これより $(W^s(a)-\{a\})\cap(W^u(a)-\{a\})=\emptyset$ となり、$W^s(a)\cap W^u(a)=\{a\}$ が成り立つ。a において

$$T_a(W^s(a))+T_a(W^u(a))=V_+ + V_- = T_aM$$

となり、$W^s(a)$ と $W^u(a)$ は横断的に交わる。さらに

$$f(W^u(a)-\{a\})\subset(-\infty,f(a)),\qquad f(W^s(b)-\{b\})\subset(f(b),\infty)$$

だから、$(W^u(a)-\{a\})\cap(W^s(b)-\{b\})=\emptyset$ となり、$a\neq b$ だから $W^u(a)\cap W^s(b)=\emptyset$ が成り立つ。特に $W^u(a)$ と $W^s(b)$ は横断的である。

命題 2.3.5 f をコンパクト多様体 M 上の Morse 関数とし、f の擬勾配ベクトル場 X が Smale の条件を満たしていると仮定する。f の臨界点 a, b であって $W^u(a)$ と $W^s(b)$ が交わるものをとり、$\mathcal{M}(a,b) = W^u(a) \cap W^s(b)$ とおく。これらに対して以下が成り立つ。

(1) $f(a) > f(b)$.

(2) $\mathcal{M}(a,b)$ は M の部分多様体であり、

$$\mathcal{M}(a,b) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = a,\ \lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = b \right\},$$
$$\dim(\mathcal{M}(a,b)) = \mathrm{Ind}(a) - \mathrm{Ind}(b)$$

が成り立つ。特に $\mathrm{Ind}(a) > \mathrm{Ind}(b)$ である。

(3) X から定まる M の一径数変換群 ϕ_t は $\mathcal{M}(a,b)$ にも作用する。この作用は自由である。

(4) ϕ_t の $\mathcal{M}(a,b)$ への作用による商空間を $\mathcal{L}(a,b)$ で表すと、$\mathcal{L}(a,b)$ は a から b への X の積分曲線全体とみなすことができる。さらに多様体になり

$$\dim \mathcal{L}(a,b) = \mathrm{Ind}(a) - \mathrm{Ind}(b) - 1.$$

(5) $f(a) > \alpha > f(b)$ を満たす f の正則値 α に対して、$\mathcal{M}(a,b) \cap f^{-1}(\alpha)$ は M の部分多様体になり、$\mathcal{L}(a,b)$ と微分同型である。

証明の概略 (1) 補題 2.3.4 の (2) の対偶。
(2) $W^u(a)$ と $W^s(b)$ の定義から

$$\mathcal{M}(a,b) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = a,\ \lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = b \right\}$$

が従う。Smale の条件より、$W^u(a)$ と $W^s(b)$ は横断的に交わり、命題 2.3.2 より $\mathcal{M}(a,b) = W^u(a) \cap W^s(b)$ は M の部分多様体になる。

$$\dim W^u(a) + \dim W^s(b) = n + \dim(W^u(a) \cap W^s(b))$$

が成り立つ。定義より $\dim W^u(a) = \mathrm{Ind}(a)$ と $\dim W^s(b) = n - \mathrm{Ind}(b)$ となるので、

$$\mathrm{Ind}(a) - \mathrm{Ind}(b) = \dim(W^u(a) \cap W^s(b)) = \dim(\mathcal{M}(a,b))$$

を得る。$\dim(\mathcal{M}(a,b)) \geq 1$ だから $\mathrm{Ind}(a) > \mathrm{Ind}(b)$ である。

補題 2.3.6 コンパクト多様体上の Morse 関数 f を任意に近い Morse 関数に置き換えることにより、その臨界点の関数の値はすべて異なるようにできる。

証明 f の各臨界点において Morse 座標系を持つ開近傍全体の合併を U で表す。$M-U$ はコンパクトであり $M-U$ 上 $df(X)<0$ だから、ある $\epsilon_0>0$ が存在して $M-U$ 上では $df(X)<-\epsilon_0$ が成り立つ。M 上の次の条件を満たす関数 h をとることができる。

(1) f の各臨界点の Morse 座標系を持つ開近傍において定数である。

(2) $M-U$ において $|dh(X)|<\frac{1}{2}\epsilon_0$ が成り立つ。

(3) f の異なる臨界点 c と c' に対して

$$f(c)+h(c)\neq f(c')+h(c').$$

このとき、$f+h$ も Morse 関数であり、次を満たす。

(1) $f+h$ の臨界点の全体は f の臨界点全体に一致する。

(2) X は $f+h$ の擬勾配ベクトル場である。

(3) $f+h$ の臨界点における値はすべて異なる。

定理 2.3.7 (Smale) M をコンパクト多様体とし、f を M 上の臨界点での値がすべて異なる Morse 関数とする。このとき、X に近い f の擬勾配ベクトル場 X' が存在して、X' は Smale の条件を満たす。

第3章　Morse複体

この章を通して以下を前提とする。M をコンパクト多様体、f を M 上の Morse 関数であり、臨界点での値はすべて異なるとする。さらに X を f の擬勾配ベクトル場とし、Smale の条件を満たすとする。これらの条件を満たすものが存在することは前章までに示している。

3.1　Morse複体

Morse 関数 f の二つの臨界点 a と b に対して、積分曲線の折れ線の集合

$$\overline{\mathcal{L}}(a,b) = \bigcup_{c_i \in \mathrm{Crit}(f)} \mathcal{L}(a,c_1) \times \mathcal{L}(c_1,c_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{q-1},b)$$

を定める。命題2.3.5 より、$f(c_i) \leq f(c_{i+1})$ の場合は $\mathcal{L}(c_i,c_{i+1}) = \emptyset$ であり、$f(c_i) > f(c_{i+1})$ の場合は $\mathrm{Ind}(c_i) > \mathrm{Ind}(c_{i+1})$ であることに注意しておく。

定理 3.1.1 $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ はコンパクトである。

系 3.1.2 $\mathrm{Ind}(a) = \mathrm{Ind}(b) + 1$ ならば、$\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ は有限集合である。

定理 3.1.3 $\mathrm{Ind}(a) = \mathrm{Ind}(b) + 2$ ならば、$\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ は境界を持つコンパクト 1 次元多様体である。

定理 3.1.4 1 次元コンパクト連結多様体は、S^1 または $[0,1]$ に微分同型である。

整数環 $\mathbf{Z}$ の極大イデアル $2\mathbf{Z}$ による剰余環 $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は体になる。f の指数 k の臨界点全体を $\mathrm{Crit}_k(f)$ で表し、$\mathrm{Crit}_k(f)$ の生成する $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間を $C_k(F)$ で表す。f の擬勾配ベクトル場 X から定まる $\partial_X : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ を定義するには、$a \in \mathrm{Crit}_k(f)$ に対して $\partial_X(a)$ を定めれば十分である。系 3.1.2 より各 $b \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)$ について $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ は有限集合になるので、$\#\mathcal{L}(a,b) = \#\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ に対応する $\mathbf{Z}_2$ の元を $n_X(a,b)$ で表すことができる。

$$\partial_X(a) = \sum_{b \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a,b)b$$

によって $\partial_X(a)$ を定める。

命題 3.1.5 $\partial_X \circ \partial_X = 0$ が成り立つ。

$(C_k(f), \partial_X)$ を M 上の Morse 関数とその擬勾配ベクトル場 X から定まる **Morse 複体**という。命題 3.1.5 より $C_{k+1}(f)$ において $\partial_X \circ \partial_X = 0$ が成り立つので、$C_k(f)$ において $\mathrm{im}\partial_X \subset \ker \partial_X$ となる。したがって、これらから定まる商空間

$$H_k(f,X) = \ker \partial_X / \mathrm{im}\partial_X$$

を考えることができる。$H_k(f,X)$ を上記複体 $(C_k(f), \partial_X)$ の**ホモロジー**という。

3.2 Morse 複体の例

例 3.2.1 n 次元球面

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

上の高さ関数

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1} \quad ((x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n)$$

を定める。f の臨界点は

$$n = (0, \ldots, 0, 1), \quad s = (0, \ldots, 0, -1)$$

であり、これらは非退化であることがわかる。したがって、f は S^n 上の Morse 関数である。$\mathrm{Ind}(n) = n$, $\mathrm{Ind}(s) = 0$ であり、

$$C_n(f) = \mathbf{Z}_2 n, \quad C_0(f) = \mathbf{Z}_2 s, \quad C_k(f) = \{0\} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

が成り立つ。f の任意の擬勾配ベクトル場に対して、$n \geq 2$ のとき、すべての境界作用素は 0 になる。したがって、

$$H_n = \mathbf{Z}_2 n \cong \mathbf{Z}_2, \quad H_0 = \mathbf{Z}_2 s \cong \mathbf{Z}_2, \quad H_k = \{0\} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

$n = 1$ のとき、$\mathcal{L}(n, s)$ は二点からなるので、$\partial : C_1(f) \to C_0(f)$ は 0 になる。よって、すべてのすべての境界作用素は 0 になる。したがって、

$$H_1 = \mathbf{Z}_2 n \cong \mathbf{Z}_2, \quad H_0 = \mathbf{Z}_2 s \cong \mathbf{Z}_2.$$

例 3.2.2 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は n 次元球面 S^n からの二重被覆写像 $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$ を持つ。

$$S^n \to S^n \ ; \ x \mapsto -x$$

が被覆変換になる。$\mathbf{R}^{n+1}$ の座標をここでは $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ で表す。$\mathbf{R}^{n+1}$ 上の関数 f を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} k x_k^2 \quad (x \in \mathbf{R}^{n+1})$$

によって定める。f は被覆変換 $x \mapsto -x$ によって不変なので、$\mathbf{R}P^n$ 上の関数を誘導する。これも同じ記号 f で表す。$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ の開集合を

$$U_i^+ = \{x \in S^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{x \in S^n \mid x_i < 0\}$$

によって定める。このとき

$$(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$

は $U_i^\pm$ における局所座標系になり、$U_i^\pm$ の全体は S^n の多様体構造を定める。$U_i^\pm$ における関数 f の局所座標表示は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} kx_k^2 = \sum_{k\neq i} kx_k^2 + i\left(1 - \sum_{k\neq i} x_k^2\right) = i + \sum_{k\neq i}(k-i)x_k^2$$

である。これより、f の $U_i^\pm$ における臨界点は原点に対応する

$$p_i^\pm = (0, \dots, 0, \overset{i}{\breve{\pm 1}}, 0, \dots, 0)$$

だけである。f の局所座標表示より、$p_i^\pm$ は非退化臨界点であり

$$\mathrm{Ind}(p_i^\pm) = \#\{k \mid 0 \leq k \leq n,\ k - i < 0\} = i$$

であることがわかる。したがって、f は S^n 上の Morse 関数である。さらに $U_i^\pm$ において

$$f(x) = i - \sum_{k<i}\left(\sqrt{i-k}x_k\right)^2 + \sum_{k>i}\left(\sqrt{k-i}x_k\right)^2$$

となることから

$$y_k = \sqrt{i-k}x_k\ (k < i), \quad y_k = \sqrt{k-i}x_k\ (k > i)$$

は f の Morse 座標系である。この Morse 座標系に関する f の勾配ベクトル場の -1 倍は

$$-\mathrm{grad} f = 2y_0\frac{\partial}{\partial y_0} + \cdots + 2y_{i-1}\frac{\partial}{\partial y_{i-1}} - 2y_{i+1}\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} + \cdots + 2y_n\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

したがって、これの定める一径数変換群 ϕ_t は

$$\phi_t(y) = (e^{2t}y_0, \dots, e^{2t}y_{i-1}, e^{-2t}y_{i+1}, \dots, e^{-2t}y_n)$$

となり、元の座標系 x_k についても

$$\phi_t(x) = (e^{2t}x_0, \dots, e^{2t}x_{i-1}, e^{-2t}x_{i+1}, \dots, e^{-2t}x_n)$$

が成り立つ。したがって、f の擬勾配ベクトル場 X が $p_i^\pm$ の近傍 $V_i^\pm \subset U_i^\pm$ において f の Morse 座標系に関する勾配ベクトル場の -1 倍に一致するとき、

$$\begin{aligned}
W^s(p_i^\pm) \cap V_i^\pm &= \{(0, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in V_i^\pm\} \\
&= \{(0, \dots, 0, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in S^n\} \cap V_i^\pm, \\
W^u(p_i^\pm) \cap V_i^\pm &= \{(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0) \in V_i^\pm\} \\
&= \{(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) \in S^n\} \cap V_i^\pm.
\end{aligned}$$

ただし、

$$W^u(p_0^\pm) = \{p_0^\pm\}, \quad W^s(p_n^\pm) = \{p_n^\pm\} \quad (\text{複号同順})$$

である。

各 $0 \leq i \leq n$ について

$$C_i(\bar{f}) = \mathbf{Z}_2\pi(p_i^+)$$

が成り立ち、

$$\partial(\pi(p_i^+)) = \pi(p_{i-1}^+) + \pi(p_{i-1}^-) = 2\pi(p_{i-1}^+) = 0.$$

したがって、

$$H_i = C_i(\bar{f}) = \mathbf{Z}_2\pi(p_i^+) \cong \mathbf{Z}_2.$$

例 3.2.3 $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の 1 次元複素部分空間全体を n **次元複素射影空間**と呼び、$\mathbf{C}P^n$ で表す。$\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ の元 z に対して、z の張る 1 次元複素部分空間 $\mathbf{C}z$ は $\mathbf{C}P^n$ の元である。この対応を

$$\pi : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{C}P^n \ ; \ z \mapsto \mathbf{C}z$$

と表す。π によって $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ の通常の位相から $\mathbf{C}P^n$ に商位相を定める。$\mathbf{C}^{n+1}$ の座標は

$$\mathbf{C}^{n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbf{C}\}$$

と定める。$0 \leq i \leq n$ について

$$U_i = \{\pi(z) \mid z \in \mathbf{C}^{n+1},\, z_i \neq 0\}$$

とおくと、U_i は $\mathbf{C}P^n$ の開集合になり、

$$\mathbf{C}P^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

が成り立つ。U_i において

$$w_k(\pi(z)) = \frac{z_k}{z_i} \quad (0 \leq k \leq n)$$

によって w_k を定めると、

$$(w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)$$

が U_i の座標になる n 次元複素多様体の構造が $\mathbf{C}P^n$ に定まる。$w_i = 1$ であり、これは除いていることに注意しておく。

$\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n} k|z_k|^2}{\sum_{k=0}^{n} |z_k|^2} \quad (z \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\})$$

によって定める。$\alpha \in \mathbf{C} - \{0\}$ に対して $f(\alpha z) = f(z)$ が成り立つので、$\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の関数 f は $\mathbf{C}P^n$ 上の関数を誘導する。それも同じ記号 f で表す。すなわち $f(\pi(z)) = f(z)$ である。

以下で f の臨界点とその指数をすべて求める。U_i における f の座標表示は

$$(*) \quad f(\pi(z)) = f(\pi(w)) = \frac{\sum_{k=0}^{n} k|w_k|^2}{\sum_{k=0}^{n} |w_k|^2} = \frac{i + \sum_{k\neq i} k|w_k|^2}{1 + \sum_{k\neq i} |w_k|^2}$$

となり、U_i における f の臨界点は $w = 0$ だけである。対応する $\mathbf{C}P^n$ の点は

$$p_i = \pi(0, \ldots, 0, \overset{i}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0)$$

である。p_i の近傍における f の座標表示の計算を進めると

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(i + \sum_{k\neq i} k|w_k|^2\right)\left(1 - \sum_{k\neq i}|w_k|^2 + \left(\sum_{k\neq i}|w_k|^2\right)^2 - \cdots\right) \\
&= i + \sum_{k\neq i} k|w_k|^2 - i\sum_{k\neq i}|w_k|^2 + (4\text{ 次以上の項}) \\
&= i + \sum_{k\neq i}(k-i)|w_k|^2 + (4\text{ 次以上の項}) \\
&= i - \sum_{k<i}(i-k)|w_k|^2 + \sum_{k>i}(k-i)|w_k|^2 + (4\text{ 次以上の項}).
\end{aligned}$$

これより、p_i は f の非退化臨界点になり、その指数は

$$\mathrm{Ind}(p_i) = 2\#\{k \mid 0 \leq k \leq n,\, k < i\} = 2i$$

である。さらに $f(p_i) = i$ が成り立つ。よって

$$C_{2i}(f) = \mathbf{Z}_2 p_i, \quad C_j(f) = \{0\} \quad (j\text{ はそれ以外}).$$

これより f の任意の擬勾配ベクトル場に対して境界作用素 ∂ は 0 になり、Morse 複体 $(C_i(f), \partial)$ のホモロジーは

$$H_{2i} = C_{2i}(f) = \mathbf{Z}_2 p_i \cong \mathbf{Z}_2, \quad H_j = \{0\} \quad (j\text{ はそれ以外}).$$

レポート問題 $S^2 \times S^2$ 上に Morse 関数を構成し、Morse 複体とそのホモロジーを計算しなさい。〆切 8 月 6 日提出先 B720

第4章　Morseホモロジー

4.1　ホモロジーの基本的性質

コンパクト多様体 M の Morse 複体のホモロジー $H_*(f,X)$ は M にのみ依存することが知られているので、これを $HM_*(M;\mathbf{Z}_2)$ と書き、M の**法 2 の Morse ホモロジー**と呼ぶ。

4.1.1　Künnethの公式

Künneth の公式とは、二つの多様体の積のホモロジーをそれぞれの多様体のホモロジーで表現する公式である。そのために Morse 複体のテンソル積を利用する。そこで、複体のテンソル積を定義してその基本的性質を解説する。

U, V を $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間とし、u_i と v_j をそれぞれ U と V の基底とする。このとき

$$U \otimes V = \bigoplus_{i,j} \mathbf{Z}_2 u_i \otimes v_j$$

によって U と V の**テンソル積**を定める。この時点では右辺の $u_i \otimes v_j$ は単なる記号である。$U \otimes V$ には自然に $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間の構造が定まり、$\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V$ である。対応 $(u_i, v_j) \mapsto u_i \otimes v_j$ を $\mathbf{Z}_2$ 上双線形になるように一意的に

$$U \times V \to U \otimes V$$

に拡張できる。この写像に関する $(u,v) \in U \times V$ の像を $u \otimes v$ で表す。$\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間の間の $\mathbf{Z}_2$ 線形写像

$$\phi : U \to U', \quad \psi : V \to V'$$

に対して、$\mathbf{Z}_2$ 線形写像

$$\phi \otimes \psi : U \otimes V \to U' \otimes V'$$

であって

$$(\phi \otimes \psi)(u \otimes v) = \phi(u) \otimes \psi(v) \quad (u \in U,\, v \in V)$$

を満たすものが一意的に存在する。

$C = (C_*, \partial^C)$ が**複体**であるとは、各 C_i は $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間であり、$\mathbf{Z}_2$ 線形写像 $\partial_i^C C_i \to C_{i-1}$ が定まっていて、$\partial_i^C \circ \partial_{i+1}^C = 0$ を満たすことである。この性質より

$$\ker \partial_i^C \supset \mathrm{im} \partial_{i+1}^C$$

となる。そこで、商ベクトル空間

$$H_i(C) = \ker \partial_i^C / \mathrm{im} \partial_{i+1}^C$$

が定まる。$H_*(C) = (H_i(C))$ を複体 C の**ホモロジー**という。

次に複体のテンル積を定める。$C = (C_*, \partial^C)$ と $D = (D_*, \partial^D)$ を複体とする。$\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間の系列を

$$(C \otimes D)_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j$$

によって定める。さらに

$$\partial_k^{C \otimes D} = \bigoplus_{i+j=k} \left(\partial_i^C \otimes 1 + 1 \otimes \partial_j^D \right) : (C \otimes D)_k \to (C \otimes D)_{k-1}$$

によって $\mathbf{Z}_2$ 線形写像を定める。

$$\left(\partial_i^C \otimes 1 + 1 \otimes \partial_j^D \right) (C_i \otimes D_j) \subset C_{i-1} \otimes D_j + C_i \otimes D_{j-1} \subset (C \otimes D)_{k-1}$$

が成り立つ。さらに $(C \otimes D, d^{C \otimes D})$ が複体になることを確認する。$c \in C_i$ と $d \in D_j$ に対して

$$\begin{aligned} (d^{C \otimes D})^2 (c \otimes d) &= d^{C \otimes D} (\partial_i^C(c) \otimes d + c \otimes \partial_j^D(d)) \\ &= \partial_{i-1}^C \partial_i^C(c) \otimes d + 2 \partial_i^C(c) \otimes \partial_j^D(d) + c \otimes \partial_{j-1}^D \partial_j^D(d) = 0. \end{aligned}$$

複体のテンソル積のホモロジーをもとの複体のホモロジーで記述できる。

命題 4.1.1 $\mathbf{Z}_2$ 上の有限個のベクトル空間からなる複体 C, D に対して

$$H_k(C \otimes D) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_i(C) \otimes H_j(D)$$

が成り立つ。

命題 4.1.1 の証明の概略　複体の長さ

$$l(D) = \max\{j \mid D_j \neq \{0\}\} - \min\{j \mid D_j \neq \{0\}\} + 1$$

に関する帰納法で証明する。$l(D) = 1$ の場合は、ある j_0 が存在して $D_{j_0} \neq \{0\}$ であり、他の D_j はすべて $\{0\}$ である。このとき、

$$H_k(C \otimes D) = H_{k-j_0}(C) \otimes D_{j_0} = H_{k-j_0}(C) \otimes H_{j_0}(D)$$

が成り立ち、$l(D) = 1$ の場合に命題の主張が証明される。

$l(D) = 2$ の場合は、ある j_0 が存在して $D_{j_0} \neq \{0\}$ かつ $D_{j_0-1} \neq \{0\}$ であり、他の D_j はすべて $\{0\}$ である。$\partial^D = 0$ の場合、$\partial^D = 0$ が同型の場合、一般の場合に分けて考える。

$\partial^D = 0$ の場合、$\partial^{C\otimes D} = \partial^C \otimes 1$ だから

$$\begin{aligned} H_k(C \otimes D) &= H_{k-j_0}(C) \otimes D_{j_0} \oplus H_{k-j_0+1}(C) \otimes D_{j_0-1} \\ &= H_{k-j_0}(C) \otimes H_{j_0}(D) \oplus H_{k-j_0+1}(C) \otimes H_{j_0-1}(D) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$\partial^D_{j_0} : D_{j_0} \to D_{j_0-1}$ が同型写像の場合を考える。このとき、$H_*(D) = 0$ が成り立つ。命題の主張を示すためには $H_*(C \otimes D) = 0$ を示せばよい。そのために

$$\partial^{C\otimes D}_{i+j_0} : C_i \otimes D_{j_0} \oplus C_{i+1} \otimes D_{j_0-1} \to C_{i-1} \otimes D_{j_0} \oplus C_i \otimes D_{j_0-1}$$

の核 $\ker \partial^{C\otimes D}_{i+j_0}$ が、

$$\partial^{C\otimes D}_{i+j_0+1} : C_{i+1} \otimes D_{j_0} \oplus C_{i+2} \otimes D_{j_0-1} \to C_i \otimes D_{j_0} \oplus C_{i+1} \otimes D_{j_0-1}$$

の像に一致することを示す。$\mathrm{im}\partial^{C\otimes D}_{i+j_0+1} \subset \ker \partial^{C\otimes D}_{i+j_0}$ はすでにわかっているので、$\ker \partial^{C\otimes D}_{i+j_0} \subset \mathrm{im}\partial^{C\otimes D}_{i+j_0+1}$ を示せばよい。$C_i \otimes D_{j_0} \oplus C_{i+1} \otimes D_{j_0-1}$ の元が

$$\partial^{C\otimes D}_{i+j_0}\left(\sum_a x^i_a \otimes y^{j_0}_a, \sum_b u^{i+1}_b \otimes v^{j_0-1}_b\right) = 0$$

を満たすとする。これは

$$\sum_a \partial^C_i(x^i_a) \otimes y^{j_0}_a = 0$$

かつ

$$\sum_a x^i_a \otimes \partial^D_{j_0}(y^{j_0}_a) + \sum_b \partial^C_{i+1}(u^{i+1}_b) \otimes v^{j_0-1}_b = 0$$

と同値である。二番目の関係式に $1 \otimes (\partial^D_{j_0})^{-1}$ を作用させると

$$\sum_a x^i_a \otimes y^{j_0}_a + \sum_b \partial^C_{i+1}(u^{i+1}_b) \otimes (\partial^D_{j_0})^{-1}(v^{j_0-1}_b) = 0$$

を得る。よって

$$\sum_a x_a^i \otimes y_a^{j_0} = \sum_b \partial_{i+1}^C(u_b^{i+1}) \otimes (\partial_{j_0}^D)^{-1}(v_b^{j_0-1}).$$

これより

$$\partial_{i+j_0+1}^{C\otimes D}\left(\sum_b u_b^{i+1} \otimes (\partial_{j_0}^D)^{-1}(v_b^{j_0-1}), 0\right) = \left(\sum_a x_a^i \otimes y_a^{j_0}, \sum_b u_b^{i+1} \otimes v_b^{j_0-1}\right).$$

以上より $\ker \partial_{i+j_0}^{C\otimes D} \subset \mathrm{im}\partial_{i+j_0+1}^{C\otimes D}$ となり、$H_*(C\otimes D) = 0$ が成り立つ。

次に $l(D) = 2$ を満たす一般の複体 D の場合を考える。D_{j_0} と D_{j_0-1} を直和

$$D_{j_0} = \ker \partial_{j_0}^D \oplus D'_{j_0}, \qquad D_{j_0-1} = \mathrm{im}\partial_{j_0}^D \oplus D'_{j_0-1}$$

に分解する。これらによって、複体

$$0 \to D_{j_0} \to D_{j_0-1} \to 0$$

は二つの複体

$$E: 0 \to \ker \partial_{j_0}^D \xrightarrow{0} D'_{j_0-1} \to 0, \qquad F: 0 \to D'_{j_0} \xrightarrow{\cong} \mathrm{im}\partial_{j_0}^D \to 0$$

の直和になる。すなわち $D = E \oplus F$ である。$C\otimes D = C\otimes(E\oplus F) = C\otimes E \oplus C\otimes F$ となり、$C\otimes D$ のホモロジーはこれら二つの複体 $C\otimes E, C\otimes F$ のホモロジーの直和と同型になり、これらのホモロジーは先に示したことより命題の主張を満たす。したがって、$C\otimes D$ のホモロジーも命題の主張を満たす。

D の長さが k のときに命題の主張が成り立つことを仮定して、D の長さが $k+1$ のときに命題の主張が成り立つことを示す。D を次のように表す。

$$0 \to D_{k+1} \xrightarrow{\partial} D_k \to \cdots \to D_1 \to 0$$

D_{k+1} と D_k を

$$D_{k+1} = \ker \partial \oplus D'_{k+1}, \qquad D_k = \mathrm{im}\partial \oplus D'_k$$

と直和に分解する。これにより、D は次の三つの複体の直和に分解される。

$$\begin{array}{ccll}
0 & \to & \ker \partial & \to 0 \\
0 & \to & D'_{k+1} & \xrightarrow{\cong} \mathrm{im}\partial \to 0 \\
 & & 0 & \to D'_k \to D_{k-1} \to \cdots \to D_1 \to 0
\end{array}$$

これらの複体の長さは k 以下なので、命題の主張が成り立つ。よって、D についても命題 4.1.1 の主張が成り立つ。

M と N をコンパクト多様体とし、Morse 関数 f と g が定義されていてそれらの擬勾配ベクトル場 X と Y が Smale の条件を満たしているとする。このとき、$f+g$ は積多様体 $M\times N$ 上の Morse 関数になり、(X,Y) は Smale の条件を満たす $f+g$ の擬勾配ベクトルになる。

$$\mathrm{Crit}(f+g)=\mathrm{Crit}(f)\times\mathrm{Crit}(g)$$

が成り立つ。$(a,a')\in\mathrm{Crit}(f+g)=\mathrm{Crit}(f)\times\mathrm{Crit}(g)$ に対して

$$\mathrm{Ind}(a,a')=\mathrm{Ind}(a)+\mathrm{Ind}(a')$$

となり

$$\mathrm{Crit}_k(f+g)=\bigcup_{i+j=k}\mathrm{Crit}_i(f)\times\mathrm{Crit}_j(g)$$

を得る。$(b,b')\in\mathrm{Crit}_{k-1}(f+g)$ をとり、(a,a') と (b,b') が (X,Y) の積分曲線で結ばれていると仮定する。(X,Y) の積分曲線は X と Y の積分曲線の積で表されるので、

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))\cong\mathcal{L}_X(a,b)\times\mathcal{L}_Y(a',b')$$

が成り立つ。$a\neq b$ かつ $a'\neq b'$ ならば $\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))$ が空になることを示す。もし $\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))$ が空ではないとすると、$\mathcal{L}_X(a,b)$ と $\mathcal{L}_Y(a',b')$ も空ではなく、

$$\mathrm{Ind}(a)\geq\mathrm{Ind}(b)+1,\quad \mathrm{Ind}(a')\geq\mathrm{Ind}(b')+1$$

が成り立つ。これより

$$\mathrm{Ind}(a,a')=\mathrm{Ind}(a)+\mathrm{Ind}(a')\geq\mathrm{Ind}(b)+\mathrm{Ind}(b')+2=\mathrm{Ind}(b,b')+2$$

となり、$\mathrm{Ind}(a,a')=k$, $\mathrm{Ind}(b,b')=k-1$ に矛盾する。したがって、$a\neq b$ かつ $a'\neq b'$ ならば $\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))=\emptyset$ である。(a,a') と (b,b') が (X,Y) の積分曲線で結ばれているという前提のもとでは、$a=b$ または $a'=b'$ が成り立つ。それぞれの場合、

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))=\begin{cases}\{a\}\times\mathcal{L}_Y(a',b') & (a=b)\\ \mathcal{L}_Y(a,b)\times\{a'\} & (a'=b')\end{cases}$$

となり、

$$n_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))=\begin{cases}n_Y(a',b') & (a=b)\\ n_X(a,b) & (a'=b')\\ 0 & (\text{他の場合})\end{cases}$$

を得る。

写像

$$\Phi:\bigoplus_{i+j=k}C_i(f)\otimes C_j(g)\to C_k(f+g)$$

を

$$\Phi(a \otimes a') = (a, a')$$

によって定めると、Φ は $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間の同型写像になる。

命題 4.1.2 Φ は複体の間の同型写像

$$(C_*(f) \otimes C_*(g), \partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y) \to (C_*(f+g), \partial_{(X,Y)})$$

を与える。

証明 複体の間の同型写像とは、複体を構成する各ベクトル空間の間の同型を導き、境界作用素と可換になるものである。$a \in \mathrm{Crit}_i(f)$ と $a' \in \mathrm{Crit}_j(g)$ に対して

$$\begin{aligned}
\Phi \circ (\partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y)(a \otimes a') &= \Phi(\partial_X(a) \otimes a' + a \otimes \partial_Y(a')) \\
&= \Phi\left(\sum_{b \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a,b) b \otimes a' + \sum_{b' \in \mathrm{Crit}_{j-1}(g)} a \otimes n_Y(a',b') b'\right) \\
&= \sum_{b \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a,b)(b,a') + \sum_{b' \in \mathrm{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a',b')(a,b').
\end{aligned}$$

他方、先の $\mathcal{L}_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))$ と $n_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))$ に関する考察により

$$\begin{aligned}
\partial_{(X,Y)} \circ \Phi(a \otimes a') &= \sum_{(b,b') \in \mathrm{Crit}_{i+j-1}(f+g)} n_{(X,Y)}((a,a'),(b,b'))(b,b') \\
&= \sum_{b \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a,b)(b,a') + \sum_{b' \in \mathrm{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a',b')(a,b').
\end{aligned}$$

したがって、

$$\Phi \circ (\partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y)(a \otimes a') = \partial_{(X,Y)} \circ \Phi(a \otimes a')$$

となり、Φ は複体の間の同型写像である。

系 4.1.3 (Künneth の公式) M と N をコンパクト多様体とする。このとき、次は同型になる。

$$HM_k(M \times N; \mathbf{Z}_2) \to \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M; \mathbf{Z}_2) \otimes HM_j(M; \mathbf{Z}_2).$$

4.1.2 Poincaré 双対性

n 次元コンパクト多様体上の Morse 関数 f の指数 k の臨界点は、$-f$ の指数 $n-k$ の臨界点になる。さらに、X が f の擬勾配ベクトル場ならば、$-X$ は f の擬勾配ベクトル場になる。

$a \in \mathrm{Crit}_k(f)$ に対して、同じ点を $-f$ の臨界点とみなしたものを a^* で表す。$a^* \in \mathrm{Crit}_{n-k}(-f)$ が成り立つ。$\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間 V の双対空間を V^* で表すと、$C_k(f)^*$ は双対基底の対応により $C_{n-k}(-f)$ と同型になる。他方、境界作用素 $\partial_X : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ の双対写像 ${}^t\partial_X : C_{k-1}(f)^* \to C_k(f)^*$ を

$$ {}^t\partial_X(\alpha)(c) = \alpha(\partial_X(c)) \quad (\alpha \in C_{k-1}(f)^*,\, c \in C_k(f)) $$

によって定めると、この写像は ${}^t\partial_X : C_{n-k+1}(-f) \to C_{n-k}(-f)$ を誘導する。これは添字を逆転させた複体になり、次のホモロジーの同型を与える。

命題 4.1.4 (Poincaré 双対性) n 次元コンパクト多様体 M に対して $HM_{n-k}(M;\mathbf{Z}_2)$ は $HM_k(M;\mathbf{Z}_2)$ と同型である。

4.2 Euler 数と Poincaré 多項式

系 4.2.1 コンパクト多様体で定義された Morse 関数の臨界点の個数の偶奇は多様体には依存するが関数には依存しない。

n 次元コンパクト多様体 M の **Euler 数** $\chi(M)$ を次で定義する。

$$ \chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim HM_k(M;\mathbf{Z}_2). $$

すると次が成り立つ。

$$ \begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim HM_k(M;\mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\dim\ker\partial_k - \dim \mathrm{im}\partial_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\dim\ker\partial_k + \dim \mathrm{im}\partial_{k}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim HM_k(M;\mathbf{Z}_2). \end{aligned} $$

命題 4.2.2 (Morse の不等式) コンパクト多様体 M 上定義された Morse 関数 f に対して

$$ c_k(f) = \#\mathrm{Crit}_k(f), \quad \beta_k = \dim HM_k(M;\mathbf{Z}_2) $$

とすると、$k \geq 0$ に対して $c_k(f) \geq \beta_k$ が成り立つ。特に $n = \dim M$ とすると、次の不等式が成り立つ。

$$ \#\mathrm{Crit}(f) \geq \sum_{k=0}^{n} \beta_k. $$

n 次元コンパクト多様体 M の **Poincaré 多項式**を

$$P_M(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k$$

によって定義する。すると

$$P_M(1) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k, \quad P_M(-1) = \chi(M)$$

が成り立つ。

レポート問題

(1) 具体例の Poincaré 多項式を求めなさい。

(2) コンパクト多様体 M, N に対して $P_{M\times N}(t) = P_M(t)P_N(t)$ が成り立つことを証明しなさい。

〆切 11月17日提出先 B720