

数理物質科学研究科

微分幾何学 IA

Riemann 幾何学
(配付資料)

田崎博之

2014 年度

目次

第1章	テンソル場	1
1.1	テンソル代数	1
1.2	ベクトル束	8
1.3	テンソル場	11
第2章	Riemann 多様体	13
2.1	曲面の微分幾何学	13
2.2	ベクトル束と線形接続	14
2.3	Levi-Civita 接続	16
2.4	共変微分	19
2.5	曲率テンソル	21
2.6	測地線と完備性	25

第1章 テンソル場

1.1 テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間 V に対して、 V から実数 \mathbb{R} への線形写像の全体を V^* で表し、 V の双対ベクトル空間と呼ぶ。 V^* は \mathbb{R} の和と積から自然に定まる演算によってベクトル空間の構造を持つ。 $v \in V$ に対して

$$v(f) = f(v) \quad (f \in V^*)$$

によって、 $v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、 $v \in (V^*)^*$ とみなすことができ、この対応によって $(V^*)^*$ と V を同一視することができる。 δ_j^i を

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

によって定める。 V の基底 $\{u_1, \dots, u_n\}$ に対して、 $f^i(u_j) = \delta_j^i$ によって定まる V^* の元 $\{f^i\}$ は V^* の基底になる。特に $\dim V^* = \dim V$ となる。 $\{f^i\}$ を $\{u_j\}$ の双対基底と呼ぶ。

定義 1.1.2 p 個の実ベクトル空間 V_1, \dots, V_p の積 $V_1 \times \dots \times V_p$ から実ベクトル空間 W への写像 F が V_1 から V_p の各成分について線形写像になるとき、 F を多重線形写像と呼ぶ。有限次元実ベクトル空間 V に対して、 $\overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^p \times \overbrace{V \times \dots \times V}^q$ 上で定義された $p+q$ 変数の実数値多重線形写像を V 上の (p, q) 型テンソルと呼び、その全体を $T^{(p,q)}(V)$ で表す。 $T^{(p,q)}(V)$ を (p, q) 型テンソル空間と呼ぶ。 $T^{(p,q)}(V)$ の元 A, A' と実数 r に対して

$$\begin{aligned} (A + A')(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) \\ &= A(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) + A'(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q), \\ (rA)(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) &= rA(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) \end{aligned}$$

によって $T^{(p,q)}(V)$ の加法とスカラー倍が定まる。この加法とスカラー倍によって $T^{(p,q)}(V)$ は実ベクトル空間になる。 $T^{(p,q)}(V)$ の元 A と $T^{(r,s)}(V)$ の元 B に対して、

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(g^1, \dots, g^{p+r}, v_1, \dots, v_{q+s}) \\ &= A(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) B(g^{p+1}, \dots, g^{p+r}, v_{q+1}, \dots, v_{q+s}) \\ &(g^1, \dots, g^{p+r} \in V^*, v_1, \dots, v_{q+s} \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$A \otimes B : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p+r} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q+s} \longrightarrow \mathbf{R}$$

を定めると、 $A \otimes B$ は V 上の $(p+r, q+s)$ 型テンソルになる。 $A \otimes B$ を A と B のテンソル積と呼ぶ。 $T^{(1,0)}(V) = (V^*)^* = V$ とみなし、 $T^{(0,1)}(V) = V^*$ であることに注意する。 V の元 u_1, \dots, u_p と V^* の元 f^1, \dots, f^q に対して、

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q)(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) \\ &= g^1(u_1) \cdots g^p(u_p) f^1(v_1) \cdots f^q(v_q) \\ & \quad (g^1, \dots, g^p \in V^*, v_1, \dots, v_q \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^p \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^q \longrightarrow \mathbf{R}$$

は定まり、 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q$ は V 上の (p, q) 型テンソルになる。

命題 1.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{aligned} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) &\longrightarrow T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A, B) &\longmapsto A \otimes B \end{aligned}$$

は双線形写像になり、写像

$$\begin{aligned} \overbrace{V \times \cdots \times V}^p \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^q &\longrightarrow T^{(p,q)}(V) \\ (u_1, \dots, u_p, f^1, \dots, f^q) &\longmapsto u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q \end{aligned}$$

は多重線形写像になる。

定義 1.1.4 有限次元実ベクトル空間 V に対して、

$$T(V) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T^{(p,q)}(V)$$

とおく。ただし、 $T^{(0,0)}(V) = \mathbf{R}$ としておく。定義 1.1.2 で定めた双線形写像

$$\begin{aligned} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) &\longrightarrow T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A, B) &\longmapsto A \otimes B \end{aligned}$$

を、 $T(V) \times T(V)$ 全体の双線形写像に拡張し、これを二項演算として $T(V)$ は代数になる。 $T(V)$ を V 上のテンソル代数と呼ぶ。

命題 1.1.5 V を n 次元実ベクトル空間とする。 u_1, \dots, u_n を V の基底とし、 f^1, \dots, f^n をその双対基底とする。すると、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。特に、 $T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になる。

定義 1.1.6 命題 1.1.5 の証明中の $T^{(p,q)}(V)$ の元 A の基底による表示

$$A = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ j_1, \dots, j_q=1}}^n A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}, u_{j_1}, \dots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

を A の成分表示と呼び、 $A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}, u_{j_1}, \dots, u_{j_q})$ を A の成分と呼ぶ。

注意 1.1.7 上の成分表示のように、和 \sum の後で同じ添え字が上下組になって現れ、添え字の動く範囲がわかっているときは、和の記号 \sum を省略する。例えば、上の場合は

$$A = A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}, u_{j_1}, \dots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

と書き表す。この表し方を Einstein の規約という。考えている基底が定まっている場合には

$$A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A(f^{i_1}, \dots, f^{i_p}, u_{j_1}, \dots, u_{j_q})$$

と書くことにする。このとき、 A の成分表示は

$$A = A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_q}$$

となる。さらに、 $A = (A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ と表す。

命題 1.1.8 V を n 次元実ベクトル空間とする。 u_1, \dots, u_n を V の基底とし、 f^1, \dots, f^n をその双対基底とする。 $T^{(p,q)}(V)$ の元 A を

$$A = A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_q}$$

と成分表示する。 V のもう一つの基底 $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ とその双対基底 $\bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n$ をとり、

$$A = \bar{A}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \bar{u}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{k_p} \otimes \bar{f}^{l_1} \otimes \dots \otimes \bar{f}^{l_q}$$

と成分表示する。 u_1, \dots, u_n から $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ への基底の変換行列を $g = (g_k^i)$ で表し、その逆行列を $\bar{g} = (\bar{g}_j^l)$ で表す。すなわち、

$$\bar{u}_k = g_k^i u_i, \quad \bar{g}_k^i g_j^k = \delta_j^i.$$

このとき、

$$\bar{A}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} = A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \bar{g}_{i_1}^{k_1} \dots \bar{g}_{i_p}^{k_p} g_{l_1}^{j_1} \dots g_{l_q}^{j_q}$$

が成り立つ。

命題 1.1.9 V を有限次元実ベクトル空間とし、 V の基底 u_1, \dots, u_n とその双対基底 f^1, \dots, f^n をとっておく。 $T^{(p,q)}(V)$ の元 $A = (A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ と $T^{(r,s)}(V)$ の元 $B = (B_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r})$ のテンソル積 $A \otimes B$ の成分は、

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s}^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} B_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}$$

で与えられる。

定義 1.1.10 V を有限次元実ベクトル空間とし、基底 u_1, \dots, u_n とその双対基底 f^1, \dots, f^n をとる。 $A \in T^{(p,q)}(V)$ とする。 $1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq q$ となる r, s をとり、写像

$$C^{(r,s)}A : \overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^{p-1} \times \overbrace{V \times \dots \times V}^{q-1} \rightarrow \mathbf{R}$$

を

$$\begin{aligned} (C^{(r,s)}A)(g^1, \dots, g^{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) \\ = A(g^1, \dots, g^{r-1}, f^i, g^r, \dots, g^{p-1}, v_1, \dots, v_{s-1}, u_i, v_s, \dots, v_{q-1}) \end{aligned}$$

によって定める。すると $C^{(r,s)}A \in T^{(p-1,q-1)}(V)$ となる。 $C^{(r,s)}A$ を A の縮約と呼ぶ。

縮約の定義が基底のとり方に依存しないことは命題 1.1.12 で証明する。まず縮約の最も簡単な場合を調べる。

例 1.1.11 定義 1.1.10 において $p = q = 1$ の場合を考える。 V の線形変換の全体を $\text{End}(V)$ で表す。 $A = A_j^i u_i \otimes f^j \in T^{(1,1)}(V)$ に $\text{End}(V)$ の元

$$v \mapsto A_j^i f^j(v) u_i$$

を対応させることにより、 $T^{(1,1)}(V)$ と $\text{End}(V)$ は線形同型になる。これにより両者を同一視する。このとき、

$$C^{(1,1)}A = A_j^i u_i \otimes f^j(f^k, u_k) = A_j^i u_i (f^k) f^j(u_k) = A_j^i \delta_i^k \delta_k^j = A_k^k = \text{tr} A.$$

すなわち、 $T^{(1,1)}(V)$ の元を $\text{End}(V)$ の元と同一視すると、縮約 $C^{(1,1)}$ は線形変換の tr に他ならない。

命題 1.1.12 定義 1.1.10 の縮約の定義は、 V の基底のとり方に依存しない。また、 V の基底 u_1, \dots, u_n とその双対基底 f^1, \dots, f^n に関する成分表示は

$$(C^{(r,s)}A)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = A_{j_1 \dots j_{s-1} i j_s \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{r-1} i i_r \dots i_{p-1}}$$

となる。

命題 1.1.13 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi: \overbrace{V \times \cdots \times V}^p \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^q \rightarrow W$$

を多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_q) = \phi(v_1, \dots, v_p, g_1, \dots, g_q) \quad (v_i \in V, g_j \in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi: T^{(p,q)}(V) \rightarrow W$$

が唯一つ存在する。

例 1.1.14 V を有限次元実ベクトル空間とし、写像

$$\phi : V \times V^* \rightarrow \text{End}(V)$$

を

$$\phi(u, f)(v) = f(v)u \quad (u, v \in V, f \in V^*)$$

によって定めると、 ϕ は双線形写像になる。命題 1.1.13 より、

$$\Phi(u \otimes f) = \phi(u, f) \quad (u \in V, f \in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi : T^{(1,1)}(V) \rightarrow \text{End}(V)$$

が唯一つ存在する。 V の基底 u_1, \dots, u_n とその双対基底 f^1, \dots, f^n をとる。

$$\Phi(u_i \otimes f^j)(u_k) = \phi(u_i, f^j)(u_k) = f^j(u_k)u_i = \delta_k^j u_i$$

となるので、 $\Phi(u_i \otimes f^j)$ は u_j を u_i に写し、他の u_k を 0 に写す線形写像になる。よって

$$\{\Phi(u_i \otimes f^j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

は $\text{End}(V)$ の基底になる。さらに命題 1.1.5 より、 Φ は $T^{(1,1)}(V)$ の基底を $\text{End}(V)$ の基底に写し、線形同型写像になる。この線形同型写像によって、 $T^{(1,1)}(V)$ と $\text{End}(V)$ を同一視する。

$A \in T^{(1,1)}(V)$ の成分を A_j^i とすると、 $A = A_j^i u_i \otimes f^j$ となり、

$$\Phi(A) = A_j^i \Phi(u_i \otimes f^j).$$

よって、

$$\Phi(A)u_k = A_j^i \Phi(u_i \otimes f^j)u_k = A_j^i \delta_k^j u_i = A_k^i u_i$$

となり、 (A_j^i) は $\Phi(A)$ の基底 u_1, \dots, u_n に関する行列表示になる。さらに、

$$C^{(1,1)}A = A_i^i = \text{tr}(\Phi(A))$$

となるので、 $C^{(1,1)}A = \text{tr}(\Phi(A))$ が成り立つ。つまり、 $T^{(1,1)}(V)$ を $\text{End}(V)$ と同一視すると、 $T^{(1,1)}(V)$ での縮約は線形写像のトレースになる。

命題 1.1.15 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、 $F : V \rightarrow W$ を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像

$$F^{(p,0)} : T^{(p,0)}(V) \rightarrow T^{(p,0)}(W)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $v_1, \dots, v_p \in V$ に対して

$$F^{(p,0)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \dots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。また次の条件を満たす線形写像

$$F^{(0,q)} : T^{(0,q)}(W) \longrightarrow T^{(0,q)}(V)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $f^1, \dots, f^q \in W^*$ に対して

$$F^{(0,q)}(f^1 \otimes \dots \otimes f^q) = (f^1 \circ F) \otimes \dots \otimes (f^q \circ F)$$

が成り立つ。

1.2 ベクトル束

定義 1.2.1 $\pi_E : E \rightarrow M$ が次の条件を満たすとき、多様体 M 上のベクトル束と呼ぶ。

- (1) E, M は多様体であり、 $\pi_E : E \rightarrow M$ は多様体の間の C^∞ 級写像である。
- (2) ある自然数 k が存在し、 M の各点 p に対して p の開近傍 U と微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^k$$

が存在し、 $u \in \pi_E^{-1}(U)$ に対して $\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi_E(u)$ に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \quad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、 $x \in U$ に対して $\pi_E^{-1}(x)$ はベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \rightarrow \mathbf{R}^k$$

は線形同型写像になる。

E をベクトル束の全空間、 M を底空間、 π_E を射影、 $\pi_E^{-1}(x)$ を x のファイバーと呼ぶ。 k をベクトル束の階数と呼び、 $\text{rank} E$ で表す。

定義 1.2.2 $\pi : E \rightarrow M$ と $\pi' : E' \rightarrow M$ を多様体 M 上のベクトル束とする。 $x \in M$ に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$, $E'_x = (\pi')^{-1}(x)$ と表す。微分同型写像 $\phi : E \rightarrow E'$ が $\pi = \pi' \circ \phi$ を満たし、各 $x \in M$ に対して

$$\phi|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_x$$

が線形同型写像になるとき、 ϕ をベクトル束の同型写像と呼び、 E と E' は同型であるという。 V をベクトル空間とし、 $M \times V$ から M への射影を考えることによって、 $M \times V$ は M 上のベクトル束になる。 M 上のベクトル束 E が $M \times V$ と同型になるとき、 E を自明ベクトル束と呼ぶ。次の例で扱う M の接ベクトル束 TM が自明であるとき、 M は絶対平行性を持つという。

例 1.2.3 M を多様体とし、各 $x \in M$ における M の接ベクトル空間を $T_x M$ で表す。

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

とおく。 $u \in TM$ に対して $u \in T_x M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、 $\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : TM \rightarrow M$$

が定まる。 M の各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとる。 $\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), \xi^1, \dots, \xi^n) \quad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n$$

を定める。これによって、 $\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$ をとることができる。他の座標近傍系 $(V; y^1, \dots, y^n)$ をとると、各元 $v \in \pi^{-1}(V)$ は

$$v = \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\pi(v)}$$

と表すことができる。 $\pi^{-1}(V)$ の座標は $(y^1, \dots, y^n, \eta^1, \dots, \eta^n)$ になり、

$$\eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

よって、座標変換は、

$$(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n) \rightarrow \left(y^1, \dots, y^n, \xi^j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}, \dots, \xi^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j} \right)$$

となり、 C^∞ 級微分同型写像になる。これによって、 TM は多様体になる。

π の定め方より、

$$\pi(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n) = (x^1, \dots, x^n)$$

となり、 $\pi : TM \rightarrow M$ は C^∞ 級写像になる。 Φ_U の定め方より、 $\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi(u)$ に一致し、

$$\phi_U \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

となるので、各 $x \in U$ に対して $\phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は線形同型写像になる。

以上より、 $\pi : TM \rightarrow M$ がベクトル束になることがわかった。これを多様体 M の接ベクトル束と呼ぶ。

定義 1.2.4 $\pi_E : E \rightarrow M$ を多様体 M 上のベクトル束とする。 C^∞ 級写像 $\sigma : M \rightarrow E$ で $\pi_E \circ \sigma = 1_M$ を満たすものを、ベクトル束 E の断面と呼ぶ。 E の断面の全体を $\Gamma(M, E)$ または単に $\Gamma(E)$ で表す。

例 1.2.5 $\Gamma(M \times \mathbb{R})$ は M 上の C^∞ 級関数全体とみなせ、ベクトル空間 V に対して $\Gamma(M \times V)$ は M 上の V に値を持つ C^∞ 級関数全体とみなせる。

定義 1.2.6 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 $T_p M$ に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ が存在し、 M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y \rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を M 上の Riemann 計量と呼び、 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を Riemann 多様体と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

例 1.2.7 $M = \mathbb{R}^n$ とおくと、各点の接ベクトル空間 $T_x M$ は自然に \mathbb{R}^n と同一視でき、 \mathbb{R}^n の標準的な内積によって、 M は Riemann 多様体になる。

定義 1.2.8 $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ を多様体 M から Riemann 多様体 (\tilde{M}, \tilde{g}) への挿入とする。すなわち M の各点 x での ι の微分写像 $d\iota_x : T_x M \rightarrow T_{\iota(x)} \tilde{M}$ が単射であるとする。このとき、 \tilde{M} 上の Riemann 計量 \tilde{g} の $d\iota$ による引き戻し $g = \iota^* \tilde{g}$ は M 上の Riemann 計量になる。この (M, g) を (\tilde{M}, \tilde{g}) の Riemann 部分多様体と呼ぶ。

注意 1.2.9 定義 1.2.8 では、 \tilde{M} の Riemann 計量から M の Riemann 計量を誘導したが、 M の Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体 (M, g) から (\tilde{M}, \tilde{g}) への C^∞ 級写像 ι が、 M の各点 x に対して $d\iota_x : T_x M \rightarrow T_{\iota(x)} \tilde{M}$ は等長線形写像になるという条件をみたすとき、 ι を等長的挿入と呼び、 (M, g) を (\tilde{M}, \tilde{g}) の Riemann 部分多様体と呼ぶ。

例 1.2.10 $\iota : M \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ を Riemann 多様体 (\tilde{M}, \tilde{g}) の Riemann 部分多様体とする。

$$T\tilde{M}|_M = \bigcup_{x \in M} T_{\iota(x)}\tilde{M}$$

によって $T\tilde{M}|_M$ を定めると、 TM のベクトル束の構造から $T\tilde{M}|_M$ もベクトル束になることがわかる。各 $x \in M$ に対して $d\iota_x(T_x M)$ は $T_{\iota(x)}\tilde{M}$ の部分空間である。各 $x \in M$ に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)}\tilde{M} \mid \langle u, d\iota_x(T_x M) \rangle = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x \in M} T_x^\perp M$$

で $T^\perp M$ を定める。 $u \in T^\perp M$ に対して $u \in T_x^\perp M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、 $\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \rightarrow M$$

が定まる。このとき、 $\pi : T^\perp M \rightarrow M$ はベクトル束になる。 $\pi : T^\perp M \rightarrow M$ を、Riemann 部分多様体 M の法ベクトル束と呼ぶ。法ベクトル束 $T^\perp M$ の断面を M 上の法ベクトル場と呼ぶ。

定義 1.2.11 E を多様体 M 上のベクトル束とする。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E の各ファイバーの内積を定めていて、 E の任意の断面 s, t に対して

$$\langle s, t \rangle(x) = \langle s(x), t(x) \rangle \quad (x \in M)$$

によって定まる M 上の関数 $\langle s, t \rangle$ が C^∞ 級になるとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をベクトル束 E の計量といい、 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を計量ベクトル束と呼ぶ。

例 1.2.12 定義 1.2.6 で定めた多様体の Riemann 計量は、接ベクトル束の計量に他ならない。また、Riemann 多様体の Riemann 部分多様体の法ベクトル束にも、全体の Riemann 多様体の計量から自然に定まる計量が入る。

1.3 テンソル場

定義 1.3.1 多様体 M の各点 $x \in M$ の接ベクトル空間 $T_x M$ 上の (p, q) 型テンソル空間 $T^{(p,q)}(T_x M)$ を $T_x^{(p,q)} M$ で表す。

$$T^{(p,q)} M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)} M$$

とおくと、 $T^{(p,q)} M$ は M 上のベクトル束になる (命題 1.3.2)。 $T^{(p,q)} M$ 上の C^∞ 級断面を (p, q) 型テンソル場と呼ぶ。テンソル場の和、関数倍、テンソル積は、多様体の各点の接ベクトル空間上のテンソル空間における演算で定める。

命題 1.3.2 $T^{(p,q)}M$ は M 上のベクトル束になる。

例 1.3.3 Riemann 計量は $(0, 2)$ 型テンソル場になる。

第2章 Riemann 多様体

2.1 曲面の微分幾何学

この節では第1章の知識をもとにして曲面論の簡単な復習をしておく。 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を \mathbb{R}^2 の領域 D で定義された \mathbb{R}^3 への挿入とする。このとき、 p の像を曲面とみなし \mathbb{R}^2 の直交座標の D への制限 u, v をこの曲面の座標とみなす。

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_v = \frac{\partial p}{\partial v}$$

と表すことにする。 p が挿入になることは p_u, p_v が線形独立になることと同値になる。曲面の2次元多様体としての接ベクトル空間は、 $\frac{\partial}{\partial u}$ と p_u を同一視し $\frac{\partial}{\partial v}$ と p_v を同一視することによって、 \mathbb{R}^3 内の p_u, p_v の張る2次元部分ベクトル空間、すなわち接平面と同一視することができる。通常 dp の内積

$$I = \langle dp, dp \rangle$$

として定義される曲面の第一基本形式 I は曲面上の $(0, 2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X, Y に対して $I(X, Y) = \langle dp(X), dp(Y) \rangle$ によって値が定まる。 dp は線形単射だから I は正定値になり曲面の Riemann 計量になる。 $dp = p_u du + p_v dv$ となるので、

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \langle p_u, p_u \rangle du \otimes du(X, Y) + \langle p_u, p_v \rangle (du \otimes dv + dv \otimes du)(X, Y) \\ &\quad + \langle p_v, p_v \rangle dv \otimes dv(X, Y). \end{aligned}$$

そこで $(0, 1)$ 型テンソル ϕ, ψ に対して

$$\phi \bullet \psi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi)$$

によって $(0, 2)$ 型対称テンソル $\phi \bullet \psi$ を定める。すると

$$I = \langle p_u, p_u \rangle du \bullet du + 2\langle p_u, p_v \rangle du \bullet dv + \langle p_v, p_v \rangle dv \bullet dv$$

と第一基本形式 I を書き表すことができる。通常、曲面論では

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

と書いて第一基本形式、すなわち、Riemann 計量を次のように表す。

$$I = Edu \bullet du + 2Fdu \bullet dv + Gdv \bullet dv.$$

曲面の接ベクトル空間の基底 p_u, p_v のベクトル積 $p_u \times p_v$ は接平面に直交するので、 $e = p_u \times p_v / |p_u \times p_v|$ とおくと、 e は曲面の単位法ベクトルになる。

$$II = -\langle dp, de \rangle$$

として定義される曲面の第二基本形式 II は曲面上の $(0, 2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X, Y に対して $II(X, Y) = -\langle dp(X), de(Y) \rangle$ によって値が定まる。 $de = e_u du + e_v dv$ となるので、

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= -\langle p_u, e_u \rangle du(X)du(Y) - \langle p_u, e_v \rangle du(X)dv(Y) \\ &\quad - \langle p_v, e_u \rangle dv(X)du(Y) - \langle p_v, e_v \rangle dv(X)dv(Y). \end{aligned}$$

e は p_u, p_v と直交するので

$$\begin{aligned} II &= -\langle p_u, e_u \rangle du \bullet du - 2\langle p_u, e_v \rangle du \bullet dv - \langle p_v, e_v \rangle dv \bullet dv \\ &= \langle p_{uu}, e \rangle du \bullet du + 2\langle p_{uv}, e \rangle du \bullet dv + \langle p_{vv}, e \rangle dv \bullet dv \end{aligned}$$

と第二基本形式 II を書き表すことができる。通常、曲面論では

$$L = \langle p_{uu}, e \rangle, \quad M = \langle p_{uv}, e \rangle, \quad N = \langle p_{vv}, e \rangle$$

と書いて第二基本形式を次のように表す。

$$II = Ldu \bullet du + 2Mdu \bullet dv + Ndv \bullet dv.$$

曲面の一点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ を固定し、そこでの単位法ベクトルを e_0 で表す。曲面上の関数

$$f(u, v) = \langle p(u, v), e_0 \rangle.$$

の Hessian を調べることによって曲面の p_0 の近傍の概形がわかる。

2.2 ベクトル束と線形接続

多様体上のベクトル束の線形接続の定義と基本事項について解説する。多様体 M 上の C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(M)$ で表す。

定義 2.2.1 M を多様体とし、 E を M 上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E); (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、 ∇ を E 上の線形接続と呼ぶ。

$$(1) \nabla_{X+Y} \phi = \nabla_X \phi + \nabla_Y \phi, \quad (X, Y \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E))$$

$$(2) \nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X \phi + \nabla_X \psi, \quad (X \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

$$(3) \nabla_{fX} \phi = f \nabla_X \phi, \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M))$$

$$(4) \nabla_X(f\phi) = f \nabla_X \phi + (Xf)\phi. \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M))$$

任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して $\nabla_X \phi = 0$ を満たす $\phi \in \Gamma(E)$ を平行な断面という。

定義 2.2.2 \langle , \rangle を多様体 M 上のベクトル束 E の計量とする。すなわち \langle , \rangle は E の各ファイバーの内積を定めているとする。 E 上の線形接続 ∇ が

$$X\langle\phi, \psi\rangle = \langle\nabla_X\phi, \psi\rangle + \langle\phi, \nabla_X\psi\rangle \quad (X \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、線形接続 ∇ は計量 \langle , \rangle を保つという。

命題 2.2.3 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の接続とする。 $X, Y \in \Gamma(TM)$ と $\phi \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = \nabla_X\nabla_Y\phi - \nabla_Y\nabla_X\phi - \nabla_{[X, Y]}\phi$$

によって E の断面 $R^\nabla(X, Y)\phi$ を定めると、 R^∇ はベクトル束 $A^2(TM, \text{End}(E))$ の C^∞ 級断面を定める。ここで、 $A^2(U, V)$ は $U \times U$ から V への交代多重線形写像の全体を表す。

証明の概略 $X, Y \in \Gamma(TM)$ と $\phi \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = -R^\nabla(Y, X)\phi$$

となることは、定め方より明らか。

M 上の C^∞ 級関数 f に対して、

$$\begin{aligned} R^\nabla(fX, Y)\phi &= fR^\nabla(X, Y)\phi, \\ R^\nabla(X, fY)\phi &= fR^\nabla(X, Y)\phi, \\ R^\nabla(X, Y)f\phi &= fR^\nabla(X, Y)\phi. \end{aligned}$$

が成り立ち、 $R^\nabla(X, Y)\phi$ は X, Y, ϕ の一点での値で定まることがわかる。よって R^∇ は $A^2(TM, \text{End}(E))$ の C^∞ 級断面になる。

定義 2.2.4 命題 2.2.3 で定めた R^∇ を接続 ∇ の曲率テンソルと呼ぶ。考えている接続が明らか場合は、単に R と書くこともある。

補題 2.2.5 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の線形接続とする。さらに、 E が計量 \langle , \rangle を持ち、 ∇ が \langle , \rangle を保つとき、

$$\langle R^\nabla(X, Y)\phi, \psi\rangle + \langle\phi, R^\nabla(X, Y)\psi\rangle = 0 \quad (X, Y \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

が成り立つ。

2.3 Levi-Civita 接続

定理 2.3.1 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の接ベクトル束には、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

を満たし、Riemann 計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を保つ線形接続が、一意に存在する。

証明の概略 まず、条件を満たす線形接続 ∇ が存在すると仮定する。条件から、 M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle) \end{aligned}$$

を得る。これより、この接続の一意性がわかる。

逆に上の等式で ∇ を定める。すると、 ∇ が TM の線形接続になることがわかる。さらに ∇ は Riemann 計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を保ち、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が成り立つこともわかる。

定義 2.3.2 定理 2.3.1 で定めた接続 ∇ を Riemann 多様体の Levi-Civita 接続と呼ぶ。また、 $\nabla_X Y$ を Y の X による共変微分という。

系 2.3.3 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は、ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle) \end{aligned}$$

を満たす。

今後、多様体の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ におけるベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ を簡単に ∂_i で表すことにする。

命題 2.3.4 Riemann 多様体 (M, g) の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において、 $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ によって U 上の C^∞ 級関数 Γ_{ij}^k を定めると、ベクトル場 $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$ に対して、 $\nabla_X Y$ の局所表示は

$$\nabla_X Y = (XY^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_k$$

となる。Riemann 計量の局所表示を $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ とし、行列 (g_{ij}) の逆行列の成分を g^{ij} で表すと、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

が成り立つ。もう一つの局所座標近傍 $(V; y^1, \dots, y^n)$ において、 $\frac{\partial}{\partial y^p}$ を $\bar{\partial}_p$ で表し、 $\nabla_{\bar{\partial}_p} \bar{\partial}_q = \bar{\Gamma}_{pq}^r \bar{\partial}_r$ とする。このとき、 $U \cap V$ において、

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q} \frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

が成り立つ。

定義 2.3.5 命題 2.3.4 で定めた Γ_{ij}^k を Christoffel の記号と呼ぶ。

注意 2.3.6 今後、Riemann 多様体の局所的な議論では、局所座標近傍を明示しなくても、Riemann 計量の成分、Christoffel の記号等は上で定めた記号を使うことにする。

命題 2.3.7 Riemann 多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の曲線 c に沿って定義されたベクトル場 X に対して、

$$\nabla_{c'(t)} X = \left(c'(t) X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j \right) \partial_k$$

によって c に沿ったベクトル場 $\nabla_{c'(t)} X$ を定めると、これは局所座標近傍のとり方に依存しない。

曲線 $c(t)$ に沿って定義されたベクトル場とは、 $X(t) \in T_{c(t)}M$ を満たすものである。 X は

$$X(t) = X^i(t)\partial_i$$

と局所表示できる。速度ベクトル $c'(t)$ による微分は

$$c'(t)X^k = \frac{dX^k(t)}{dt}$$

である。

定義 2.3.8 命題 2.3.7 で定まる $\nabla_{c'(t)}X$ を X の曲線に沿った共変微分と呼ぶ。 $\nabla_{c'(t)}X = 0$ を満たすベクトル場 X を曲線に沿った平行ベクトル場と呼ぶ。

定義 2.3.8 の補足 曲線に沿った共変微分を X に関する常微分方程式とみなすと、局所表示は、

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j(t) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

となり、未知関数 X^k に関する連立線形常微分方程式系になる。したがって、曲線 c が定義されている区間では、任意の初期条件に対して平行ベクトル場が一意に存在する。特に、曲線 c の定義区間が $[a, b]$ のとき、 $u \in T_{c(a)}M$ に対して $X(a) = u$ を満たす平行ベクトル場 X が一意に存在し、 u に $X(b) \in T_{c(b)}M$ を対応させると、 $T_{c(a)}M$ から $T_{c(b)}M$ への線形同型写像になる。この線形同型写像を曲線に沿った平行移動と呼び、 τ_c で表す。

命題 2.3.9 Riemann 多様体の曲線に沿った平行移動は等長線形写像になる。

命題 2.3.10 Riemann 多様体上のベクトル場 X, Y と点 x に対して、 $c(0) = x$ と $c'(0) = X_x$ を満たす曲線 c をとる。曲線 c に沿った $c(t)$ から $c(0)$ までの平行移動を τ_0^t で表すと、

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

2.4 共変微分

命題 2.4.1 Riemann 多様体上のベクトル場 X に対してテンソル場 T に $\nabla_X T$ を対応させる対応で、次の条件を満たすものが一意的に存在する。

- (1) ∇_X はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場 S, T に対して

$$\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T.$$

- (2) C^∞ 級関数 f に対して $\nabla_X f = Xf$ となり、ベクトル場 Y に対しては $\nabla_X Y$ は Levi-Civita 接続による共変微分に一致する。

証明の概略 まず、条件を満たす ∇_X が存在すると仮定する。(0, 1) 型テンソル場 ω と (1, 0) 型テンソル場 Y に対して、 $\omega \otimes Y$ の縮約は $C^{(1,1)}(\omega \otimes Y) = \omega(Y)$ となる。これより

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)(Y) &= C^{(1,1)}(\nabla_X \omega \otimes Y) = C^{(1,1)}(\nabla_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes \nabla_X Y) \\ &= \nabla_X C^{(1,1)}(\omega \otimes Y) - \omega(\nabla_X Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

よって、

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

となり、これによって $\nabla_X \omega$ が一意的に定まることがわかる。以上より、 $(0,0)$ 型テンソル場、 $(1,0)$ 型テンソル場、 $(0,1)$ 型テンソル場への ∇_X の作用が一意的に定まる。

(p,q) 型テンソル場 T の場合を考える。 $(0,1)$ 型テンソル場 $\omega^1, \dots, \omega^p$ と $(1,0)$ 型テンソル場 X_1, \dots, X_q をとる。 C で全成分に関する縮約を表すと、

$$C(T \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_q) = T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & \quad - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_q). \end{aligned}$$

これによって $\nabla_X T$ が一意的に定まることがわかる。

逆に、一意性を示した等式で ∇_X の作用を定めることにより、対応 $T \mapsto \nabla_X T$ を定める。この対応が条件を満たすことを確かめることができる。

系 2.4.2 (p,q) 型テンソル場 T に対して、

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & \quad - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_q) \end{aligned}$$

が成り立つ。

系 2.4.3 命題 2.4.1 で定めた写像

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^{(p,q)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(p,q)}M); (X, T) \mapsto \nabla_X T$$

は $T^{(p,q)}M$ 上の線形接続になる。

系 2.4.4 (p, q) 型テンソル場 T に対して ∇T を

$$\begin{aligned} (\nabla T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q; X) &= (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ &\quad (\omega^i \in \Gamma(T^{(0,1)}M), X_j, X \in \Gamma(T^{(1,0)}M)) \end{aligned}$$

によって定めると、 ∇T は $(p, q+1)$ 型テンソル場になる。

定義 2.4.5 $\nabla T = 0$ となるテンソル場 T を平行テンソル場と呼ぶ。

例 2.4.6 Riemann 多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続 ∇ は、

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

を満たすので、 $\nabla g = 0$ となり、Riemann 計量は平行テンソル場になる。

命題 2.4.7 (p, q) 型テンソル場 T の局所表示を

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla T &= T_{j_1 \dots j_q; k}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \\ &= \nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes dx^k \end{aligned}$$

の成分は、

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{a=1}^p \Gamma_{kl}^{i_a} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots l \dots i_p} - \sum_{b=1}^q \Gamma_{kj_b}^m T_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

で与えられる。ここで、 l は a 番目であり、 m は b 番目である。

2.5 曲率テンソル

注意 2.5.1 実ベクトル空間 V, W に対して、 V の q 個の積 $V \times \dots \times V$ から W への多重線形写像の全体の成す実ベクトル空間を $L^q(V, W)$ で表す。 M を多様体とし、

$$L^q(TM, TM) = \bigcup_{x \in M} L^q(T_x M, T_x M)$$

とおくと、命題 1.3.2 の証明と同様に M 上のベクトル束になる。 $L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面 T に対して、

$$\tilde{T}(\omega, X_1, \dots, X_q) = \omega(T(X_1, \dots, X_q)) \quad (\omega \in \Gamma(T^{(0,1)}M), X_j \in \Gamma(T^{(1,0)}M))$$

によって \tilde{T} を定めると、 \tilde{T} は M 上の $(1, q)$ 型テンソル場になる。逆に M 上の $(1, q)$ 型テンソル場に対して、上の等式によって $L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面を定めることができる。これより、 $L^q(TM, TM)$ の C^∞ 級断面と M 上の $(1, q)$ 型テンソル場を同一視することができる。

T の局所表示を $T(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}) = T_{j_1 \dots j_q}^i \partial_i$ とすると、 $(1, q)$ 型テンソル場 \tilde{T} の成分は、

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^i &= \tilde{T}(dx^i, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}) = dx^i(T(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})) \\ &= dx^i(T_{j_1 \dots j_q}^k \partial_k) = T_{j_1 \dots j_q}^i \end{aligned}$$

となり、 T の成分に一致する。

今後、 \tilde{T} も単に T と表すことにする。

定義 2.5.2 Riemann 多様体 M の Levi-Civita 接続に関する曲率テンソルを単に R で表し、Riemann 多様体の曲率テンソルと呼ぶことにする。曲率テンソルは $L^3(TM, TM)$ の C^∞ 級断面になるので、注意 2.5.1 より、 M 上の $(1, 3)$ 型テンソル場とみなすことができる。

定理 2.5.3 Riemann 多様体の曲率テンソル R は、ベクトル場 X, Y, Z, W に対して、次の (1) から (4) を満たす。

- (1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$,
- (2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle Z, R(X, Y)W \rangle = 0$,
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

(2) は第 1 Bianchi の恒等式と呼ばれる。

補題 2.5.4 V を内積を持つ実ベクトル空間とする。 V 上の $(1, 3)$ 型テンソル R が

- (1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$,
- (2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle Z, R(X, Y)W \rangle = 0$

をみたすとき、 R は

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$$

を満たす。

注意 2.5.5 この節で得た結果の局所表示を与えておく。Riemann 多様体の曲率テンソルの局所表示を

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$$

で表す。

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_k \\ &= \nabla_{\partial_i} (\Gamma_{jk}^m \partial_m) - \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ik}^m \partial_m) \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^m) \partial_m + \Gamma_{jk}^m \nabla_{\partial_i} \partial_m - (\partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m - \Gamma_{ik}^m \nabla_{\partial_j} \partial_m \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^l) \partial_l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l \partial_l - (\partial_j \Gamma_{ik}^l) \partial_l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \partial_l \end{aligned}$$

となるので、

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$$

を得る。さらに、(0, 4) 型テンソル場 $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ の成分を

$$\langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l \rangle = R_{ijkl}$$

で定めると、

$$R_{ijkl} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l \rangle = \langle R_{ijk}^m \partial_m, \partial_l \rangle = g_{lm} R_{ijk}^m.$$

定理 2.5.3 を成分で表すと、

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l + R_{jik}^l &= 0, \\ R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l &= 0, \\ R_{ijkl} + R_{ijlk} &= 0 \\ R_{ijkl} &= R_{klij}. \end{aligned}$$

補題 2.5.6 次元が2以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 $T_p M$ 内の2次元部分空間 σ に対して、

$$\frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2} \quad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

は基底のとり方に依存しない。ただし、 $|X \wedge Y|$ は X, Y の張る平行四辺形の面積である。

定義 2.5.7 次元が2以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 $T_p M$ 内の2次元部分空間 σ に対して、

$$K_\sigma = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2} \quad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

とおき、 K_σ を σ の断面曲率と呼ぶ。 M のすべての点 p における接ベクトル空間 $T_p M$ 内のすべての2次元部分空間 σ に対して K_σ が一定になるとき、 M を定曲率空間と呼ぶ。

注意 2.5.8 任意の 1 次元 Riemann 多様体の曲率テンソルは、定理 2.5.3 の (1) より 0 になるので、曲率を考える意味がない。2 次元以上の場合、接ベクトル空間の 2 次元部分空間 σ に対して σ の正規直交基底 e_1, e_2 をとれば、 $|e_1 \wedge e_2| = 1$ となるので $K_\sigma = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle$ が成り立つ。

命題 2.5.9 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M が定曲率空間になるための必要十分条件は、ある実数 K が存在し、任意の点 $p \in M$ の任意の接ベクトル $X, Y, Z \in T_p M$ に対して

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

が成り立つことである。このとき、 K は断面曲率の一定値に一致する。

定義 2.5.10 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の接ベクトル X, Y に対して、

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

によって M 上の $(0, 2)$ 型テンソル場 Ric を定める。 Ric を Ricci テンソルと呼ぶ。単位接ベクトル X に対して $\text{Ric}(X, X)$ を X の Ricci 曲率と呼ぶ。Ricci 曲率が一定値をとるとき、 M を Einstein 多様体と呼ぶ。

補題 2.5.11 Riemann 多様体の Ricci テンソルは対称になり、接ベクトル空間の正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとると、

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

と表すことができる。

注意 2.5.12 Riemann 多様体 M の単位接ベクトル X に対して、 X, e_2, \dots, e_n が正規直交基底になるようにすると、

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^n \langle R(e_i, X)X, e_i \rangle$$

となり、Ricci 曲率は断面曲率の和になる。特に、定曲率空間は Einstein 多様体になる。

補題 2.5.13 Riemann 多様体 (M, g) が Einstein 多様体になるための必要十分条件は、ある実数 c が存在し、 $\text{Ric} = cg$ が成り立つことである。このとき、 c は Ricci 曲率の一定値に一致する。

命題 2.5.14 (Schur の補題) M を次元が3以上の連結 Riemann 多様体とする。

- (1) M の各点 p における断面曲率 K_σ が、 $T_p M$ 内の2次元部分空間 σ に依存せず一定値 K_p をとるとき、 M は定曲率空間になる。
- (2) M の各点 p における Ricci 曲率 $\text{Ric}(X, X)$ が、単位接ベクトル X に依存せず一定値 c_p をとるとき、 M は Einstein 多様体になる。

定義 2.5.15 次元が2以上の Riemann 多様体 M 上の関数

$$\tau = \text{tr}(\text{Ric})$$

を M のスカラー曲率と呼ぶ。 M の接ベクトル空間の正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとれば、

$$\tau = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i)$$

となる。

2.6 測地線と完備性

定義 2.6.1 M を Riemann 多様体とし、 I を \mathbb{R} の区間とする。曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ が測地線であるとは、 γ の速度ベクトル $\gamma'(t)$ が γ に沿った平行ベクトル場になることである。

命題 2.6.2 測地線の速度ベクトルの長さは一定である。

一般に曲線 $c: I \rightarrow M$ と $t_0 \in I$ に対して、

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt$$

によって c の弧長関数 $s(t)$ を定める。

$$L(c) = \int_I \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt$$

を曲線 c の長さという。命題 2.6.2 により測地線の弧長関数はパラメータの一次関数になる。

命題 2.6.3 Riemann 多様体の局所座標系 $(U; x^1, \dots, x^n)$ において曲線を $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ と局所表示したとき、 $\gamma(t)$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

が成り立つことである。

命題 2.6.3 の等式は、未知関数 $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ に関する連立二階常微分方程式である。常微分方程式の一般論より次の補題を得る。

補題 2.6.4 Riemann 多様体 M の任意の点 x_0 に対して x_0 の開近傍 U と $\epsilon > 0$ が存在して次が成り立つ。 $x \in U$ と $\|v\| < \epsilon$ を満たす $v \in T_x M$ に対して、ただ一つ測地線

$$\gamma_v : (-2, 2) \rightarrow M$$

が存在し

$$\gamma_v(0) = x, \quad \gamma'_v(0) = v$$

を満たす。

定義 2.6.5 Riemann 多様体 M の点 x と $v \in T_x M$ に対して

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma'(0) = v$$

を満たす測地線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ が存在するとき、 $\exp_x(v) = \gamma(1)$ と表す。補題 2.6.4 より十分小さい v に対して $\exp_x(v)$ が存在することがわかる。 $T_x M$ の 0 の近傍で定義される写像 $v \mapsto \exp_x(v)$ を指数写像と呼ぶ。

補題 2.6.6 Riemann 多様体 M の点 x と $v \in T_x M$ に対して $\exp_x(v)$ が定まるとき、 $t \mapsto \exp_x(tv)$ は

$$(*) \quad \exp_x(0v) = x, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_x(tv) = v$$

を満たす測地線になる。

補題 2.6.7 Riemann 多様体 M の任意の点 x_0 に対して、 x_0 のある開近傍 W と $\epsilon > 0$ が存在して次の (1) から (3) が成り立つ。

- (1) W 内の任意の二点は長さが ϵ より小さいただ一つの測地線で結ばれる。
- (2) 上の測地線は二点に対して滑らかに定まる。
- (3) 任意の $x \in W$ について \exp_x は $T_x M$ の半径 ϵ の開円板 U_x から開集合 $\exp_x(U_x)$ への微分同型写像になり、 $W \subset \exp_x(U_x)$ が成り立つ。

証明 補題 2.6.4 より $(x, v) \in TM$ に $\exp_x(v)$ を対応させる写像は $(x_0, 0)$ のある開近傍 $V \subset TM$ で定まる。

$$F : V \rightarrow M \times M ; (x, v) \mapsto (x, \exp_x(v))$$

により写像 F を定める。 x_0 を含む座標近傍系 $(U; x^1, \dots, x^n)$ をとる。例 1.2.3 で示したように $v \in T_x M$ を

$$v = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$$

と表示すると、 $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$ は $\pi^{-1}(U) \subset TM$ における局所座標系になる。 U における局所座標系 x^1, \dots, x^n を二つ並べて $x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n$ を $U \times U \subset M \times M$ の局所座標系とする。このとき、

$$\begin{aligned} dF_{(x_0, 0)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{\partial}{\partial x_2^i}, \\ dF_{(x_0, 0)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2^j} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、上記の局所座標系から定まる接ベクトル空間の基底に関する $dF_{(x_0, 0)}$ の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 1_n & 1_n \end{bmatrix}$$

である。よって $dF_{(x_0, 0)}$ は線形同型写像になり、逆写像定理より TM における $(x_0, 0)$ のある開近傍 V' が存在して、 $F : V' \rightarrow F(V') \subset M \times M$ は微分同型写像になる。 $F(x_0, 0) = (x_0, x_0)$ だから $F(V')$ は (x_0, x_0) の開近傍である。 x_0 の開近傍 U' と $\epsilon > 0$ を

$$V'' = \{(x, v) \in TM \mid x \in U', \|v\| < \epsilon\} \subset V'$$

が成り立つようにとる。 $F(V'')$ も (x_0, x_0) の開近傍になるので、 $W \times W \subset F(V'')$ を満たす x_0 の開近傍 W をとることができる。このとき、補題の (1) から (3) が成り立つことを示す。

(1) $x, y \in W$ をとると $(x, y) \in W \times W \subset F(V'')$ となり、 $(x, y) = F(x, v) = (x, \exp_x(v))$ を満たす $(x, v) \in V''$ がただ一つ存在する。 $[0, 1] \rightarrow M ; t \mapsto \exp_x(tv)$

は x と y を結ぶただ一つの測地線になる。この測地線の長さは $\|v\|$ に一致し、 ϵ よりも小さい。

(2) 上の (x, y) に対応する (x, v) は微分同型写像 F の逆写像によって対応するので、 (x, y) に対して滑らかに定まる。

(3) 任意の $x \in W$ について $\{x\} \times U_x \subset V''$ であり、 F は $\{x\} \times U_x$ から $\{x\} \times \exp_x(U_x)$ への微分同型写像になる。よって、 \exp_x は U_x から $\exp_x(U_x)$ への微分同型写像になる。(1) より $W \subset \exp_x(U_x)$ が成り立つ。

定理 2.6.8 補題 2.6.7 の設定のもとで、 $x, y \in W$ に対して長さが ϵ より小さい x と y を結ぶ測地線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ をとる。 $c : I \rightarrow M$ を x と y を結ぶ区分的に滑らかな曲線とすると、

$$L(\gamma) \leq L(c)$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つのは c は像を二重に通らず $c(I) = \gamma([0, 1])$ となるときに限る。

定理 2.6.8 の証明のために二つの補題を準備する。

補題 2.6.9 Riemann 多様体 M の点 x における指数写像の定義域に含まれる $v \in T_x M$ に対して、 $T_x M$ の曲線 $t \mapsto v(t)$ で

$$v(0) = v, \quad \|v(t)\| = \|v\|$$

を満たすものに対して定まる曲線 $t \mapsto \exp_x(v(t))$ と測地線 $s \mapsto \exp_x(sv)$ は $\exp_x v$ において直交する。

補題 2.6.10 補題 2.6.7 の設定のもとで、 $x \in W$ に対する U_x をとる。 $c : [a, b] \rightarrow \exp_x(U_x) - \{x\}$ を区分的に滑らかな曲線とする。 $c(t)$ は

$$c(t) = \exp_x(s(t)v(t)), \quad 0 < s(t) < 1, \quad v(t) \in T_x M, \quad \|v(t)\| = 1$$

という形に一意的に表される。このとき

$$|s(b) - s(a)| \leq L(c)$$

が成り立つ。さらに等号が成り立つのは、 $s(t)$ が単調であり、 $v(t)$ が一定であるときに限る。

系 2.6.11 $c : [0, l] \rightarrow M$ を Riemann 多様体 M の弧長をパラメータとする曲線とする。 $c(0)$ と $c(l)$ を結ぶ曲線の長さの最小値を c が与えるならば、 c は測地線である。

定理 2.6.12 M を連結 Riemann 多様体とする。 $x, y \in M$ に対して

$$d(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ は } x, y \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線}\}$$

によって $d : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ を定めると、 (M, d) は距離空間になる。さらに、距離 d が定める M の位相は M の多様体構造を定める位相と一致する。

定義 2.6.13 Riemann 多様体 M の測地線 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ の長さが、 $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ を結ぶ任意の区分的に滑らかな曲線の長さよりも短いとき、 γ を最短という。

系 2.6.14 定理 2.6.12 の設定のもとで、コンパクト部分集合 $K \subset M$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して、 K との距離が ϵ より小さい二点は長さが ϵ より小さい一意な最短測地線で結ばれる。

定義 2.6.15 Riemann 多様体 M の任意の点 x と任意の $v \in T_x M$ に対して $\exp_x(v)$ が定まるとき、 M を測地的完備という。

Riemann 多様体が測地的完備であることは、任意の測地線の定義域を実数全体に拡張できることと同値である。

定理 2.6.16 (Hopf-Rinow) 連結 Riemann 多様体 M に対して次の条件は同値である。

- (1) Riemann 多様体 M は測地的完備である。
- (2) M の任意の有界閉集合はコンパクトである。
- (3) 距離空間 (M, d) は完備である。すなわち、任意の Cauchy 列は収束列である。

さらにこれらが成り立つとき、 M の任意の二点は最短測地線で結べる。