広島大学集中講義

コンパクト対称空間の幾何学

田崎博之

2014年度

広島大学集中講義
授業概要

コンパクト対称空間の基礎的事項を複素射影空間を軸に解説する。

目 次

第1章　準備

1.1　回転群とユニタリ群

体 K の元を成分に持つ n 次正方行列全体を $M_n(K)$ で表す。$M_n(K)$ 内の単位行列を 1_n で表す。

定義 1.1.1 n 次直交行列全体

$$O(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tXX = 1_n\}$$

は行列の積に関して群になる。$O(n)$ を n **次直交群**と呼ぶ。

$$SO(n) = \{X \in O(n) \mid \det X = 1_n\}$$

は $O(n)$ の部分群になる。$SO(n)$ を n **次回転群**と呼ぶ。

定義 1.1.2 n 次ユニタリ行列全体

$$U(n) = \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t\bar{X}X = 1_n\}$$

は行列の積に関して群になる。$U(n)$ を n **次ユニタリ群**と呼ぶ。

$$SU(n) = \{X \in U(n) \mid \det X = 1_n\}$$

は $U(n)$ の部分群になる。$SU(n)$ を n **次特殊ユニタリ群**と呼ぶ。

定義 1.1.3 多様体 G が群構造を持ち、群の演算から定まる写像

$$G \times G \to G\ ;\ (g,h) \mapsto gh, \quad G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**という。

定理 1.1.4 直交群、回転群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群は Lie 群になる。

証明　n 次実対称行列全体を $S_n(\mathbf{R})$ で表す。$S_n(\mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間であり、

$$\dim M_n(\mathbf{R}) = n^2, \quad \dim S_n(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

が成り立つ。

$$\Phi : M_n(\mathbf{R}) \to S_n(\mathbf{R})\ ;\ X \mapsto {}^t XX$$

によって写像 Φ を定める。$X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$${}^t(\Phi(X)) = {}^t({}^t XX) = {}^t XX = \Phi(X)$$

となり、$\Phi(X) \in S_n(\mathbf{R})$ となることがわかる。$\Phi(X)$ は X の成分の二次式で表されるため、C^∞ 級写像であることもわかる。$O(n) = \Phi^{-1}(1_n)$ である。陰関数定理を適用するため、Φ の 1_n における微分 $d\Phi_{1_n}$ を求める。$X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} d\Phi_{1_n}(X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi(1_n + sX) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} {}^t(1_n + sX)(1_n + sX) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX + s\,{}^t X + s^2\,{}^t XX) = X + {}^t X. \end{aligned}$$

線形写像

$$d\Phi_{1_n} : M_n(\mathbf{R}) \to S_n(\mathbf{R})\ ;\ X \mapsto X + {}^t X$$

は全射になる。これより、1_n の $M_n(\mathbf{R})$ における開近傍 U が存在して、$x \in U$ に対して $d\Phi_x : M_n(\mathbf{R}) \to S_n(\mathbf{R})$ も全射になる。したがって、陰関数定理より

$$O(n) \cap U = \Phi^{-1}(1_n) \cap U$$

は $M_n(\mathbf{R})$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である。$V = O(n) \cap U$ とおくと、$M_n(\mathbf{R})$ の位相から定まる $O(n)$ の部分位相に関して V は $O(n)$ の単位元を含む開近傍になる。

$$O(n) = \bigcup_{g \in O(n)} gV$$

により、$O(n)$ 全体は $M_n(\mathbf{R})$ の位相から定まる部分位相に関して $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元部分多様体であることがわかる。さらに、行列の積は $M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R})$ から $M_n(\mathbf{R})$ への C^∞ 級写像であり、行列の逆行列を対応させる写像は $M_n(\mathbf{R})$ 内の正則行列全体からそれ自身への C^∞ 級写像になるので、その $O(n)$ への制限も C^∞ 級写像になる。したがって、$O(n)$ は Lie 群である。

　$g \in O(n)$ に対して

$$1 = \det 1_n = \det({}^t gg) = \det({}^t g) \det g = (\det g)^2$$

となるので、$\det g = \pm 1$ が成り立つ。

$g, h \in SO(n)$ に対して

$$\det(gh) = \det g \det h = 1, \quad \det(g^{-1}) = (\det g)^{-1} = 1$$

だから、$gh, g^{-1} \in SO(n)$ となり、$SO(n)$ は $O(n)$ の部分群である。$\mathbf{R}_+ = \{r \in \mathbf{R} \mid r > 0\}$ とおくと、$\mathbf{R}_+$ は $\mathbf{R}$ の開集合である。$\det : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ は n 次正方行列の成分の n 次多項式になり連続関数である。これらより $O(n) \cap \det^{-1}(\mathbf{R}_+)$ は $O(n)$ の開集合になり、特に同じ次元の部分多様体になる。他方、

$$O(n) \cap \det^{-1}(\mathbf{R}_+) = SO(n)$$

だから $SO(n)$ も $M_n(\mathbf{R})$ の部分多様体になる。$O(n)$ と同様、$SO(n)$ も Lie 群になる。

$U(n)$ および $SU(n)$ についても同様に Lie 群であることがわかる。

定義 1.1.5 G を Lie 群とし、M を多様体とする。G の単位元を e で表す。C^∞ 級写像 $\rho : G \times M \to M$ が存在し

$$\rho(e, x) = x, \quad \rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x)) \qquad (g_1, g_2 \in G,\ x \in M)$$

を満たすとき、G を M の **Lie 変換群**と呼ぶ。このとき、G は M に**作用**するという。簡単に $\rho(g, x) = \rho(g)x = gx$ と書くこともある。任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在し $y = gx$ が成り立つとき、G は M に**推移的**に作用するという。

例 1.1.6 $\mathbf{R}^{n+1}$ に通常の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ とノルム $|\quad|$ を定める。n 次元単位球面 S^n を

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

によって定める。

$$\Phi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto |x|^2 = \langle x, x \rangle$$

によって写像 Φ を定める。$\Phi(x)$ は x の成分の二次式で表されるため、C^∞ 級写像であることもわかる。$S^n = \Phi^{-1}(1)$ である。陰関数定理を利用するため、Φ の $x \in S^n$ における微分 $d\Phi_x$ を求める。$X \in \mathbf{R}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} d\Phi_x(X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi(x + sX) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \langle x + sX, x + sX \rangle \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\langle x, x \rangle + 2s\langle x, X \rangle + s^2 \langle X, X \rangle) = 2\langle x, X \rangle. \end{aligned}$$

線形写像

$$d\Phi_x : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}\ ;\ X \mapsto 2\langle x, X \rangle$$

は全射になる。これより、x における開近傍 U_x が存在して、$y \in U_x$ に対して $d\Phi_y : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ も全射になる。したがって、陰関数定理より

$$S^n \cap U_x = \Phi^{-1}(1) \cap U_x$$

は $\mathbf{R}^{n+1}$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は $(n+1)-1=n$ である。$V_x = S^n \cap U_x$ とおくと、S^n の開被覆 $\{V_x \mid x \in S^n\}$ は S^n の n 次元多様体構造を定める。

写像

$$(*) \quad O(n+1) \times S^n \to S^n \ ; \ (g, x) \mapsto gx$$

により $O(n+1)$ は S^n の Lie 変換群になることを以下で示す。この写像は、行列と縦ベクトルに対してその積を対応させる写像

$$M_{n+1}(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ (g, x) \mapsto gx$$

の制限である。この写像の像は行列と縦ベクトルの成分の二次式で表されるため、C^∞ 級であることがわかる。$g \in O(n+1)$, $x \in S^n$ に対して

$$\langle gx, gx \rangle = {}^t(gx)gx = {}^tx{}^tggx = {}^tx1_{n+1}x = \langle x, x \rangle = 1$$

となり、$gx \in S^n$ が成り立つ。写像 $(*)$ は C^∞ 級写像になることがわかる。さらに、$O(n+1)$ は S^n の Lie 変換群であることもわかる。

$O(n+1)$ は S^n に推移的に作用することを示す。第 1 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である縦ベクトルを $e_1 \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ で表す。任意の $x \in S^n$ に対して、x を $\mathbf{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ に延長する。$g_x = (x_1 \cdots x_{n+1}) \in O(n+1)$ とおくと、$g_x e_1 = x$ が成り立つ。さらに任意の $y \in S^n$ に対して $g_y e_1 = y$ となる $g_y \in O(n+1)$ をとると、$y = g_y e_1 = g_y(g_x)^{-1}x$ が成り立つ。$g_y(g_x)^{-1} \in O(n+1)$ だから、$O(n+1)$ は S^n に推移的に作用する。

定義 1.1.7 Lie 群の部分群が部分多様体でもあるとき、**Lie 部分群**と呼ぶ。Lie 部分群が閉集合になっているとき、**閉 Lie 部分群**と呼ぶ。

定理 1.1.8 G を Lie 群、H を G の閉 Lie 部分群とする。H の剰余類の全体 G/H に多様体構造が存在して、G は G/H の Lie 変換群になり、その作用は推移的になる。

G を多様体 M の Lie 変換群とする。$x \in M$ に対して

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

は M の部分多様体になる。

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

とおくと、G_x は G の閉 Lie 部分群になり、$G(x)$ は G/G_x に微分同型である。特に G の M への作用が推移的な場合は、任意の $x \in M$ に対して M は G/G_x に微分同型である。

1.2 Riemann 多様体

定義 1.2.1 多様体 M の各点 x の接ベクトル空間 T_xM に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定まっていて、M 上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**といい、Riemann 計量を持つ多様体を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle_M)$ の微分同型写像 ϕ が

$$\langle d\phi_x(X), d\phi_x(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \quad (x \in M,\ X, Y \in T_xM)$$

を満たすとき、ϕ を M の**等長変換**と呼ぶ。

例 1.2.2 $\mathbf{R}^n$ は n 次元多様体であり、各点の接ベクトル空間は自然に $\mathbf{R}^n$ 自身と同一視できる。これにより、$\mathbf{R}^n$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^n$ の Riemann 計量を定め、$\mathbf{R}^n$ は Riemann 多様体になる。さらに $\mathbf{R}^n$ の部分多様体の接ベクトル空間は自然に $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間になり、$\mathbf{R}^n$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を制限すると、部分多様体は Riemann 計量を持ち Riemann 多様体になる。

定義 1.2.3 M を Riemann 多様体とし、$c : [a, b] \to M$ を C^∞ 級曲線とする。

$$L(c) = \int_a^b \left| \frac{dc}{dt}(t) \right| dt$$

によって c の**長さ** $L(c)$ を定める。ただし、被積分関数の絶対値の記号は Riemann 計量から定まるノルムである。区間 i で定義された C^∞ 級曲線 $\gamma : I \to M$ が、局所的に二点を結ぶ最短曲線になっているとき、γ を**測地線**と呼ぶ。M の任意の点 x と $X \in T_xM$ に対してある $\epsilon > 0$ と

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : [0, \epsilon] \to M$ が存在することが知られている。

定義 1.2.4 連結 Riemann 多様体 M の任意の点 x と $X \in T_xM$ に対して、

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : \mathbf{R} \to M$ が存在するとき、M を**測地的完備**という。

定理 1.2.5 (Hopf-Rinow) 測地的完備な連結 Riemann 多様体の任意の二点は最短測地線で結べる。

1.3 Riemann等質空間

定理 1.3.1 Riemann多様体Mの等長変換の全体の成す群を$I(M)$で表すと、$I(M)$はMのLie変換群になる。

定義 1.3.2 Riemann多様体Mの等長変換の全体$I(M)$がMに推移的に作用するとき、Mを**Riemann等質空間**という。

例 1.3.3 例1.1.6より$O(n+1)$はS^nに推移的に作用するLie変換群である。さらに例1.2.2より、$O(n+1)$のS^nへの作用は等長的である。したがって、S^nはRiemann等質空間である。

1.4 実射影空間

定義 1.4.1 $\mathbf{R}^{n+1}$内の1次元部分空間全体を$\mathbf{R}P^n$で表し、n次元実射影空間と呼ぶ。

命題 1.4.2 $\mathbf{R}P^n$はn次元多様体になる。

証明 $x \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$に対して$x$の生成する$\mathbf{R}^{n+1}$内の1次元部分空間を$p(x) \in \mathbf{R}P^n$で表すと、写像$p : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{R}P^n$が定まる。この写像$p$により$\mathbf{R}P^n$に$\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$からの商位相を定める。$1 \leq i \leq n+1$に対して

$$U_i = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}, \quad V_i = p(U_i)$$

と定めると、$\{V_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$は$\mathbf{R}P^n$の開被覆になる。

$$\phi_i : V_i \to \mathbf{R}^n \ ; \ p(x) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

によって写像ϕ_iを定めると、$\{(V_i, \phi_i)\}_i$は$\mathbf{R}P^n$のn次元多様体構造を定める。ただし、$\widehat{\ }$は$\cdot$を除くことを意味する。

別証明 写像pのS^nへの制限は2対1のC^∞級写像であり、S^nの開半球面

$$S^n_x = \{y \in S^n \mid \langle y, x \rangle > 0\} \quad (x \in S^n)$$

に制限するとpは全単射である。これにより、S^nのn次元多様体構造から$\mathbf{R}P^n$のn次元多様体構造が定まり、$p : S^n \to \mathbf{R}P^n$は二重被覆写像になる。

定理 1.4.3 n次元実射影空間$\mathbf{R}P^n$には二重被覆写像$p : S^n \to \mathbf{R}P^n$からRiemann計量が定まり、$\mathbf{R}P^n$はRiemann等質空間になる。

証明　二重被覆写像 $p: S^n \to \mathbf{R}P^n$ の被覆変換は

$$a: S^n \to S^n \ ; \ x \mapsto -x$$

であり、これは S^n の等長変換である。$p \circ a = p$ だから、各 $x \in S^n$ について

$$dp_x : T_x S^n \mapsto T_{p(x)} \mathbf{R}P^n$$

が等長的線形写像になるように $T_{p(x)}\mathbf{R}P^n$ に内積を定めることができる。これにより、$\mathbf{R}P^n$ は Riemann 多様体になる。

$O(n+1)$ の S^n への作用は $\mathbf{R}^{n+1}$ への線形作用の制限だから、a の作用と可換になる。したがって、$O(n+1)$ の S^n への作用は、$p: S^n \to \mathbf{R}P^n$ を通して $O(n+1)$ の $\mathbf{R}P^n$ への作用を定め、その作用は等長的になる。さらに、例 1.1.6 より $O(n+1)$ は S^n に推移的に作用するので、$O(n+1)$ は $\mathbf{R}P^n$ にも推移的に作用し、$\mathbf{R}P^n$ は Riemann 等質空間であることがわかる。

1.5　複素射影空間

定義 1.5.1 $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の複素 1 次元部分空間全体を $\mathbf{C}P^n$ で表し、n 次元複素射影空間と呼ぶ。

命題 1.5.2 $\mathbf{C}P^n$ は n 次元複素多様体になる。

証明　$x \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に対して x の生成する $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の 1 次元複素部分空間を $p(x) \in \mathbf{C}P^n$ で表すと、写像 $p: \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{C}P^n$ が定まる。この写像 p により $\mathbf{C}P^n$ に $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ からの商位相を定める。$1 \leq i \leq n+1$ に対して

$$U_i = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}, \quad V_i = p(U_i)$$

と定めると、$\{V_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ は $\mathbf{C}P^n$ の開被覆になる。

$$\phi_i : V_i \to \mathbf{C}^n \ ; \ p(x) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

によって写像 ϕ_i を定めると、$\{(V_i, \phi_i)\}_i$ は $\mathbf{C}P^n$ の n 次元複素多様体構造を定める。

補題 1.5.3 ユニタリ群 $U(n+1)$ は

$$S^{2n+1} = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

に推移的かつ等長的に作用する。

証明　$U(n+1)$ が S^{2n+1} に推移的に作用することは、$O(n+1)$ が S^n に推移的に作用することの証明と同様にできる。

$U(n+1)$ の $\mathbf{C}^{n+1}$ への作用は、$\mathbf{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 内積を不変に保ち、標準的 Hermite 内積の実部は $\mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{R}^{2n+2}$ の標準的実内積に一致する。よって、$U(n+1)$ の $\mathbf{C}^{n+1}$ への作用は、$\mathbf{C}^{n+1}$ の標準的実内積も不変に保つ。すなわち、$U(n+1)$ の $\mathbf{C}^{n+1}$ への作用は等長変換になり、$U(n+1)$ の S^{2n+1} への作用も等長変換になる。

定理 1.5.4 写像 $p : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{C}P^n$ は C^∞ 級写像になり、S^{2n+1} への制限も C^∞ 級写像になる。これにより $\mathbf{C}P^n$ に Riemann 計量が定まり、$\mathbf{C}P^n$ は Riemann 等質空間になる。

証明　$p : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{C}P^n$ が C^∞ 級写像になることは、$\mathbf{C}P^n$ の座標系の定め方からわかる。$\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ の部分多様体 S^{2n+1} に p を制限しても C^∞ 級写像である。$\mathbf{C}P^n$ の元は S^{2n+1} のある元によって生成されるので、$p : S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ は全射である。$x \in S^{2n+1}$ に対して

$$p^{-1}(p(x)) = S^{2n+1} \cap \mathbf{C}x = U(1)x$$

が成り立つ。さらに $T_x S^{2n+1} = (\mathbf{C}x)^\perp \oplus \mathbf{R}\sqrt{-1}x$ が成り立ち、$\ker dp_x = \mathbf{R}\sqrt{-1}x$ となる。$dp_x : (\mathbf{C}x)^\perp \to T_{p(x)}\mathbf{C}P^n$ は線形同型写像になり、これによって $(\mathbf{C}x)^\perp$ の内積を $T_{p(x)}\mathbf{C}P^n$ に導入する。任意の $y \in p^{-1}(p(x))$ に対してある $e^{\sqrt{-1}\theta} \in U(1)$ が存在し $y = e^{\sqrt{-1}\theta}x$ となる。$e^{\sqrt{-1}\theta}$ の作用は等長的になるため、線形同型写像 $dp_y : (\mathbf{C}y)^\perp \to T_{p(y)}\mathbf{C}P^n = T_{p(x)}\mathbf{C}P^n$ によって導入する内積も x に対して定めた内積と同じになる。したがって、$\mathbf{C}P^n$ の各点の接ベクトル空間に内積が定まり、$\mathbf{C}P^n$ は Riemann 多様体になる。S^{2n+1} の Riemann 計量から $\mathbf{C}P^n$ の Riemann 計量が定まっているので、$U(n+1)$ の $\mathbf{C}P^n$ への自然な作用は等長変換になる。したがって、$\mathbf{C}P^n$ は Riemann 等質空間である。

第2章　Riemann対称空間

2.1　実射影空間その2

例 2.1.1 n 次元球面 S^n の各点 x について

$$s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x \quad (y \in \mathbf{R}^{n+1})$$

によって $\mathbf{R}^{n+1}$ の線形変換 s_x を定める。$s_x(x) = x$ であり、x と直交する $y \in \mathbf{R}^{n+1}$ について $s_x(y) = -y$ が成り立つ。これより

$$s_x = 1_{\mathbf{R}x} - 1_{(\mathbf{R}x)^\perp}$$

と記述できる。よって、s_x は ± 1 を固有値に持ち、$+1$ の固有空間は $\mathbf{R}x$ であり、-1 の固有空間は $(\mathbf{R}x)^\perp$ である。特に、$s_x \in O(n+1)$ であり、$\det s_x = (-1)^n$ がわかる。さらに $s_x^2 = 1_{n+1}$ もわかる。s_x は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内のベクトルの長さを保つので、s_x の作用は $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を保つ。さらに次が成り立つ。

$$F(s_x, S^n) = \{y \in S^n \mid s_x(y) = y\} = \{\pm x\}.$$

上記の状況を一般化して次の定義を得る。

定義 2.1.2 連結 Riemann 多様体 M の各点 $x \in M$ に対して M の等長変換 s_x が定まり、次の条件を満たすとき M を **Riemann 対称空間**という。

(1) $s_x^2 = 1_M$.

(2) x は s_x の孤立固定点である。

s_x を x における**点対称**と呼ぶ。

命題 2.1.3 上の例と定義より、n 次元球面 S^n は Riemann 対称空間である。$p(x) \in \mathbf{R}P^n$ $(x \in S^n)$ に対して

$$s_{p(x)}(p(y)) = p(s_x(y)) \quad (x \in S^n)$$

によって $p(x) \in \mathbf{R}P^n$ における点対称 $s_{p(x)}$ を定めると、$\mathbf{R}P^n$ は Riemann 対称空間になる。

証明 $x, y \in S^n$ を任意にとる。

$\mathbf{R}(-x) = \mathbf{R}x$ だから $s_{-x} = s_x$ である。さらに $s_x(-y) = -s_x(y)$ より $p(s_x(-y)) = p(s_x(y))$ となり、$\epsilon_0 = \pm 1, \epsilon_1 = \pm 1$ に対して

$$p(s_{\epsilon_0 x}(\epsilon_1 y)) = p(s_x(y)).$$

したがって、$s_{p(x)}$ は well-defined である。

$$\begin{array}{ccc} T_y S^n & \xrightarrow{(ds_x)_y} & T_{s_x(y)} S^n \\ {\scriptstyle dp_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle dp_{s_x(y)}} \\ T_{p(y)}\mathbf{R}P^n & \xrightarrow[(ds_{p(x)})_{p(y)}]{} & T_{s_{p(x)}(p(y))}\mathbf{R}P^n \end{array}$$

は可換図式になり、$ds_x, dp_y, dp_{s_x(y)}$ は等長線形写像だから、$ds_{p(y)}$ も等長線形写像になる。よって、$s_{p(x)}$ は等長変換である。

定義より

$$s_{p(x)}^2(p(y)) = s_{p(x)}(p(s_x(y))) = p(s_x^2(y)) = p(y)$$

だから、$s_{p(x)}^2 = 1_{\mathbf{R}P^n}$ が成り立つ。

$S_x^n = \{u \in S^n \mid \langle u, x\rangle > 0\}$ の中の s_x の固定点は x だけである。したがって、$p(x) \in \mathbf{R}P^n$ の開近傍 $p(S_x^n)$ 内の $s_{p(x)}$ の固定点は $p(x)$ だけである。つまり、$p(x)$ は $s_{p(x)}$ の孤立固定点である。

以上により $\mathbf{R}P^n$ は Riemann 対称空間である。

2.2 複素射影空間その 2

命題 2.2.1 $p(x) \in \mathbf{C}P^n$ $(x \in S^{2n+1})$ に対して

$$s_x^{\mathbf{C}} = 1_{\mathbf{C}x} - 1_{(\mathbf{C}x)^\perp}$$
$$s_{p(x)}(p(y)) = p(s_x^{\mathbf{C}}(y)) \quad (y \in S^{2n+1})$$

によって $p(x) \in \mathbf{C}P^n$ における点対称 $s_{p(x)}$ を定めると、$\mathbf{C}P^n$ は Riemann 対称空間になる。さらに、$\mathbf{C}P^n$ の複素構造に関して $s_{p(x)}$ は正則変換である。

証明 $x, y \in S^{2n+1}$ を任意にとる。

$u, v \in U(1)$ に対して、$\mathbf{C}ux = \mathbf{C}x$ だから $s_{ux}^{\mathbf{C}} = s_x^{\mathbf{C}}$ である。さらに $s_x^{\mathbf{C}}(vy) = vs_x^{\mathbf{C}}(y)$ より $p(s_x^{\mathbf{C}}(vy)) = p(s_x^{\mathbf{C}}(y))$ となり、

$$p(s_{ux}^{\mathbf{C}}(vy)) = p(s_x^{\mathbf{C}}(y)).$$

したがって、$s_{p(x)}$ は well-defined である。

$$\begin{array}{ccc}
T_yS^{2n+1} & \xrightarrow{(ds_x^{\mathbf{C}})_y} & T_{s_x^{\mathbf{C}}(y)}S^{2n+1} \\
\cup\uparrow & & \uparrow\cup \\
(\mathbf{C}y)^{\perp} & \xrightarrow{(ds_x^{\mathbf{C}})_y} & (\mathbf{C}s_x^{\mathbf{C}}(y))^{\perp} \\
{\scriptstyle dp_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle dp_{s_x^{\mathbf{C}}(y)}} \\
T_{p(y)}\mathbf{C}P^n & \xrightarrow[(ds_{p(x)})_{p(y)}]{} & T_{s_{p(x)}(p(y))}\mathbf{C}P^n
\end{array}$$

は可換図式になり、$(ds_x)_y, dp_y, dp_{s_x^{\mathbf{C}}(y)}$ は等長線形写像だから、$ds_{p(y)}$ も等長線形写像になる。よって、$s_{p(x)}$ は等長変換である。

定義より

$$s_{p(x)}^2(p(y)) = s_{p(x)}(p(s_x^{\mathbf{C}}(y))) = p((s_x^{\mathbf{C}})^2(y)) = p(y)$$

だから、$s_{p(x)}^2 = 1_{\mathbf{C}P^n}$ が成り立つ。

$\mathbf{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 内積の実部を $\langle\ ,\ \rangle$ で表すと、これは $\mathbf{R}^{2n+2}$ の標準的内積に一致する。$S_x^{2n+1} = \{u \in S^{2n+1} \mid \langle u, x\rangle > 0\}$ の中の $s_x^{\mathbf{C}}$ の固定点は $S_x^{2n+1} \cap U(1)x$ の元だけである。$p(U(1)x) = p(x)$ だから、$p(x) \in \mathbf{C}P^n$ の開近傍 $p(S_x^{2n+1})$ 内の $s_{p(x)}$ の固定点は $p(x)$ だけである。つまり、$p(x)$ は $s_{p(x)}$ の孤立固定点である。

以上により $\mathbf{C}P^n$ は Riemann 対称空間である。

2.3 Riemann 対称対

定理 2.3.1 M を Riemann 対称空間とすると、M は測地的完備になり、$I(M)$ は M に推移的に作用する。$I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ も M に推移的に作用する。特に Riemann 対称空間は Riemann 等質空間である。

証明 $s_x^2 = 1$ より $(ds_x)_x^2 = 1$ が成り立つ。よって、$(ds_x)_x : T_xM \to T_xM$ の固有値は 1 または -1 である。他方、x は s_x の孤立固定点なので、1 は $(ds_x)_x$ の固有値にはならない。したがって、$(ds_x)_x = -1$ である。

任意の $x \in M$ と $X \in T_xM$ に対してある $\epsilon > 0$ と

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : [0,\epsilon] \to M$ が存在する。s_x を $\gamma([0,\epsilon])$ に作用させることにより、γ の定義域を $[-\epsilon,\epsilon]$ に拡張できる。このとき、$(ds_x)_x(X) = -X$ だから、x においても $\gamma([-\epsilon,\epsilon])$ は滑らかになっている。$s_{\gamma(\epsilon)}$ を $\gamma([-\epsilon,\epsilon])$ に作用させることにより、γ の定義域を $[-\epsilon, 3\epsilon]$ に拡張できる。この操作を繰り返すことにより、γ の定義域を $\mathbf{R}$ 全体に拡張できる。したがって、M は測地的完備である。

定理 1.2.5 より、任意の二点 $x, y \in M$ を結ぶ測地線 γ が存在する。

$$\gamma : [0,1] \to M, \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

としておく。このとき、$s_{\gamma(1/2)}(x) = y$ が成り立つ。したがって、$I(M)$ は M に推移的に作用する。

一般に Lie 群が連結多様体に推移的に作用しているとき、その単位連結成分も推移的に作用することがわかる。したがって、$I_0(M)$ は M に推移的に作用する。

定理 2.3.2 Riemann 対称空間 M の点 x に対して

$$\sigma_x : I(M) \to I(M)\ ;\ g \mapsto s_x g s_x$$

によって写像 σ_x を定めると、σ_x は $I(M)$ の対合的 ($\sigma_x^2 = e$) 自己同型写像になる。さらに $\sigma_x(I_0(M)) = I_0(M)$ となり、

$$K_x = \{g \in I_0(M) \mid gx = x\}$$

とおくと、

$$M \cong I_0(M)/K_x, \qquad F_0(\sigma_x, I_0(M)) \subset K_x \subset F(\sigma_x, I_0(M))$$

が成り立つ。ここで

$$F(\sigma_x, I_0(M)) = \{g \in I_0(M) \mid \sigma_x(g) = g\}$$

であり、$F_0(\sigma_x, I_0(M))$ はその単位連結成分である。

例 2.3.3 n 次元球面 S^n の場合、$I(S^n) = O(n+1)$ になり、$I_0(S^n) = SO(n+1)$ が成り立つ。第 1 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である縦ベクトルを $e_1 \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ で表す。

$$s_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

となり、

$$\sigma_{e_1}(g) = s_{e_1} g s_{e_1} \qquad (g \in O(n+1)).$$

さらに

$$K_{e_1} = SO(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & g \end{bmatrix} \middle| g \in SO(n) \right\}$$

がわかる。s_{e_1} の記述より

$$F(s_{e_1}, SO(n+1)) = S(O(1) \times O(n)), \qquad F_0(s_{e_1}, SO(n+1)) = SO(n)$$

であり、この場合は

$$F_0(s_{e_1}, SO(n+1)) = K_{e_1} \subset F(s_{e_1}, SO(n+1))$$

が成り立つこともわかる。

定理 2.3.2 から次の定義を得る。

定義 2.3.4 連結コンパクト Lie 群 G、G の対合的自己同型写像 σ と G の閉 Lie 部分群 K が

$$F_0(\sigma, G) \subset K \subset F(\sigma, G)$$

を満たすとき、(G, K) を**コンパクト Riemann 対称対**と呼ぶ。

定理 2.3.5 (G, K) をコンパクト Riemann 対称対とし、その対合的自己同型写像を σ とする。このとき、G の作用が等長的になる Riemann 計量が G/K に存在し、原点 $o = K \in G/K$ の点対称 s_o を

$$s_o(gK) = \sigma(g)K \qquad (g \in G)$$

によって定めることにより、G/K はコンパクト Riemann 対称空間になる。

定理 2.3.6 (G, K) をコンパクト Riemann 対称対とする。このとき、あるトーラスと同型な閉 Lie 部分群 $A \subset G$ が存在して

$$G/K = \bigcup_{k \in K} k(A \cdot o)$$

が成り立つ。特に $G = KAK$ が成り立つ。

例 2.3.7 例 2.3.3 より $(SO(n+1), SO(n))$ はコンパクト Riemann 対称対である。

$$SO(n+1)/SO(n) \to S^n \,;\, gSO(n) \mapsto ge_1$$

によって両者を同一視できる。

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

とおく。Ae_1 は S^n の e_1 を通る大円になる。これに $SO(n)$ を作用させると e_1 を通るすべての大円が得られ、

$$S^n = \bigcup_{k \in SO(n)} kAe_1$$

が成り立つことがわかる。

例 2.3.8 例 2.3.3 の記号を流用すると、

$$F(\sigma_{e_1}, SO(n+1)) = S(O(1) \times O(n))$$

だから、$(SO(n+1), S(O(1) \times O(n)))$ はコンパクト Riemann 対称対である。

$$SO(n+1)/S(O(1) \times O(n)) \to \mathbf{R}P^n \ ; \ gS(O(1) \times O(n)) \mapsto p(ge_1)$$

によって両者を同一視できる。例 2.3.7 の A により

$$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{k \in S(O(1) \times O(n))} kp(Ae_1)$$

が成り立つことがわかる。

例 2.3.9 例 2.3.3 の記号を流用すると、

$$F(\sigma_{e_1}, SU(n+1)) = S(U(1) \times U(n))$$

となり、$(SU(n+1), S(U(1) \times U(n)))$ はコンパクト Riemann 対称対である。

$$SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)) \to \mathbf{C}P^n \ ; \ gS(U(1) \times U(n)) \mapsto p(ge_1)$$

によって両者を同一視できる。例 2.3.7 の A により

$$\mathbf{C}P^n = \bigcup_{k \in S(U(1) \times U(n))} kp(Ae_1)$$

が成り立つことがわかる。

例 2.3.10 $U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(g) = \bar{g} \qquad (g \in U(n))$$

によって定める。$F(\sigma, U(n)) = O(n)$ が成り立ち、$(U(n), SO(n))$ はコンパクト Riemann 対称対である。

$$U(1)^n = \left\{ \left. \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \right| z_i \in U(1) \right\}$$

とおくと、

$$U(n)/SO(n) = \bigcup_{k \in SO(n)} kU(1)^n o$$

が成り立つことが知られている。これより $U(n) = SO(n)U(1)^n SO(n)$ が成り立つ。

第3章　極地と対蹠集合

3.1　極地

定義 3.1.1 M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の点 x における点対称 s_x の固定点全体 $F(s_x, M)$ を連結成分の合併に分解する。この連結成分の一つ一つを M の**極地**と呼ぶ。極地が一点からなるとき**極**と呼ぶ。$\{x\}$ は必ず $F(s_x, M)$ の連結成分になるため、$\{x\}$ は**自明な極**と呼ぶ。

例 3.1.2 n 次元球面 S^n の点 x における点対称 s_x の固定点集合は $F(s_x, S^n) = \{\pm x\}$ である。よって、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、ともに極になる。

$\mathbf{R}^{n+1}$ の実部分ベクトル空間 V に対して

$$P(V) = \{p(x) \mid x \in S^n \cap V\} \cong \mathbf{R}P^{\dim V - 1}$$

とおく。

例 3.1.3 n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の点 $p(x)$ $(x \in S^n)$ における点対称 $s_{p(x)}$ の固定点集合は

$$F(s_{p(x)}, \mathbf{R}P^n) = \{p(x)\} \cup P((\mathbf{R}x)^\perp)$$

である。よって、$\mathbf{R}P^n$ の $p(x)$ に関する極地は $\{p(x)\}$ と $P((\mathbf{R}x)^\perp)$ である。

$\mathbf{C}^{n+1}$ の複素部分ベクトル空間 V に対して

$$P(V) = \{p(x) \mid x \in S^{2n+1} \cap V\} \cong \mathbf{C}P^{\dim V - 1}$$

とおく。

例 3.1.4 n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ の点 $p(x)$ $(x \in S^{2n+1})$ における点対称 $s_{p(x)}$ の固定点集合は

$$F(s_{p(x)}, \mathbf{C}P^n) = \{p(x)\} \cup P((\mathbf{C}x)^\perp)$$

である。よって、$\mathbf{C}P^n$ の $p(x)$ に関する極地は $\{p(x)\}$ と $P((\mathbf{C}x)^\perp)$ である。

3.2　対蹠集合

定義 3.2.1 M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-Nagano が導入した。

例 3.2.2 n 次元球面 S^n の点 x における点対称 s_x の固定点集合は $F(s_x, S^n) = \{\pm x\}$ である。したがって、$\{\pm x\}$ は大対蹠集合になり、$\#_2 S^n = 2$ を得る。

定理 3.2.3 n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の包含関係に関して極大な対蹠集合 A に対して、$\mathbf{R}^{n+1}$ のある正規直交基底 $x_1, \dots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A = \{p(x_1), \dots, p(x_{n+1})\}.$$

これは大対蹠集合になり、$\#_2 \mathbf{R}P^n = n + 1$ である。

証明　n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき、$\mathbf{R}P^1$ は円であり、極大な対蹠集合 A に対して、$\mathbf{R}^2$ の正規直交基底 x_1, x_2 が存在し、$A = \{p(x_1), p(x_2)\}$. これは大対蹠集合になり、$\#_2 \mathbf{R}P^1 = 2$ である。

一般の n について考える。$n - 1$ 以下の次元の実射影空間に対して定理の主張が成り立っていると仮定する。A の点 $p(x_1)$ $(x_1 \in S^n)$ をとると、

$$A \subset F(s_{p(x_1)}, \mathbf{R}P^n) = \{p(x_1)\} \cup P((\mathbf{R}x_1)^\perp)$$

が成り立つ。これより

$$A - \{p(x_1)\} \subset P((\mathbf{R}x_1)^\perp) \cong \mathbf{R}P^{n-1}$$

となる。よって、$A - \{p(x_1)\}$ は $\mathbf{R}P^{n-1}$ の極大な対蹠集合になる。帰納法の仮定より、$(\mathbf{R}x_1)^\perp$ のある正規直交基底 $x_2, \dots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A - \{p(x_1)\} = \{p(x_1), \dots, p(x_{n+1})\}.$$

したがって、

$$A = \{p(x_1), \dots, p(x_{n+1})\}$$

を得る。ここで、$x_1, \dots, x_{n+1}$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の正規直交基底である。A は大対蹠集合になり、$\#_2 \mathbf{R}P^n = n + 1$ である。

定理 3.2.4 n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ の包含関係に関して極大な対蹠集合 A に対して、$\mathbf{C}^{n+1}$ のあるユニタリ基底 $x_1, \dots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A = \{p(x_1), \dots, p(x_{n+1})\}.$$

これは大対蹠集合になり、$\#_2 \mathbf{C}P^n = n + 1$ である。

証明　定理 3.2.3 と同様に証明できる。

3.3 実射影空間の交叉

定義 3.3.1 Riemann 多様体内の部分多様体には自然に Riemann 計量が定まり、Riemann 多様体になる。この Riemann 計量に関する部分多様体のすべての測地線が外の Riemann 多様体の測地線にもなるとき、この部分多様体を**全測地的部分多様体**という。

定理 3.3.2 (Frankel) 断面曲率が正のコンパクト Riemann 多様体内の次元の和が全体の次元以上になる二つのコンパクト全測地的部分多様体の交叉は空ではない。

命題 3.3.3 $\mathbf{R}P^n$ は $\mathbf{C}P^n$ の全測地的部分多様体になる。

定理 3.3.4 $\mathbf{R}P^n \cap g\mathbf{R}P^n$ $(g \in U(n+1))$ が離散的ならば、これは $\mathbf{R}P^n, g\mathbf{R}P^n, \mathbf{C}P^n$ の大対蹠集合である。

証明 $L_0 = \mathbf{R}P^n, L_1 = g\mathbf{R}P^n$ としておく。n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき、$\mathbf{C}P^1$ は 2 次元球面と等長的であり、L_0, L_1 はその中の大円になる。したがって、$L_0 \cap L_1$ が離散的ならば、これは $L_0, L_1, \mathbf{C}P^1$ の大対蹠集合である。

一般の n について考える。$n-1$ 以下の次元の複素射影空間に対して定理の主張が成り立っていると仮定する。Frankel の定理を適用することにより、$L_0 \cap L_1 \neq \emptyset$ がわかる。$x_1 \in L_0 \cap L_1$ をとる。$L_0 \cap L_1$ の x_1 以外の元が存在すれば $P((\mathbf{C}x_1)^\perp)$ 内にあることを示す。$x_1' \in L_0 \cap L_1 - \{x_1\}$ とする。x_1 と x_1' を L_0 内で最短測地線 γ_0 で結び、x_1 と x_1' を L_1 内で最短測地線 γ_1 で結ぶ。$L_0 \cap L_1$ は離散的だから、γ_0 と γ_1 は異なる。x_1 を通る $\mathbf{C}P^n$ の測地線は x_1 と $P((\mathbf{C}x_1)^\perp)$ 以外では交わらないことがわかるので、x_1' は $P((\mathbf{C}x_1)^\perp)$ に含まれる。これより

$$L_0 \cap L_1 = \{x_1\} \cup \{(L_0 \cap L_1) \cap P((\mathbf{C}x_1)^\perp)\}.$$

ここで、$P((\mathbf{C}x_1)^\perp) \cong \mathbf{C}P^{n-1}, L_i \cap P((\mathbf{C}x_1)^\perp) \cong \mathbf{R}P^{n-1}$ であり、

$$(L_0 \cap L_1) \cap P((\mathbf{C}x_1)^\perp) = (L_0 \cap P((\mathbf{C}x_1)^\perp)) \cap (L_1 \cap P((\mathbf{C}x_1)^\perp))$$

が成り立つ。これは $\mathbf{C}P^{n-1}$ 内の二つの $\mathbf{R}P^{n-1}$ の離散的な交叉になり、帰納法の仮定より $\mathbf{C}P^{n-1}$ 内の大対蹠集合になる。もちろん、$L_i \cap P$ の大対蹠集合になる。したがって、$L_0 \cap L_1$ は $\mathbf{C}P^n, L_i$ の大対蹠集合になる。

定理 3.3.4 では、実射影空間の交叉が離散的であるという前提の元で、交叉が大対蹠集合になることを主張している。最後にこの交叉が離散的になるための必要十分条件を明らかにし、交叉が大対蹠集合になることの別証明を与える。

補題 3.3.5 $u \in U(n)$ に対して $z_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\mathbf{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ が存在して

$$uw_i = z_i v_i \quad (1 \leq i \leq n), \qquad \det u = z_1 \cdots z_n$$

が成り立つ。すなわち、

$$u[w_1,\dots,w_n]=[v_1,\dots,v_n]\begin{bmatrix} z_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & z_n \end{bmatrix}$$

となる。$z_i^2=z_j^2$ のとき $i\sim j$ と定義し、この同値関係 $\sim$ によって $\{1,\dots,n\}$ を

$$\{1,\dots,n\}=N_1\cup\cdots\cup N_s$$

と類別する。このとき、

$$uw=zv$$

を満たす $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトル v,w と $z\in\mathbf{C}$ に対して、ある $1\le a\le s$ が存在して

$$v\in\bigoplus_{i\in N_a}\langle v_i\rangle_{\mathbf{R}},\qquad w\in\bigoplus_{i\in N_a}\langle w_i\rangle_{\mathbf{R}},\qquad z^2=z_i^2\ (i\in N_a)$$

が成り立つ。

証明　例 2.3.10 より、任意の $u\in U(n)$ に対してある $z_i\in U(1)$ $(1\le i\le n)$ と $k_1,k_2\in SO(n)$ が存在して

$$u=k_1\begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}k_2^{-1}.$$

この表示より $\det u=z_1\cdots z_n$ が成り立つ。k_1,k_2 の第 i 列をそれぞれ v_i,w_i で表すと、$v_1,\dots,v_n$ と $w_1,\dots,w_n$ はともに $\mathbf{R}^n$ の正の向きの正規直交基底になり、

$$[uw_1\dots uw_n]=u[w_1\dots w_n]=uk_2=[v_1z_1\dots v_nz_n].$$

すなわち $uw_i=z_iv_i$ を得る。

次に $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトル v,w と $z\in\mathbf{C}$ が

$$uw=zv$$

を満たすと仮定する。v,w は単位ベクトルであり u はユニタリ行列だから、$z\in U(1)$ となる。$\mathbf{R}^n$ の基底 $v_1,\dots,v_n$ と $w_1,\dots,w_n$ を用いて、v,w を

$$v=\sum_{i=1}^n a_iv_i,\quad w=\sum_{i=1}^n b_iw_i\quad (a_i,b_i\in\mathbf{R})$$

と表す。すると

$$\sum_{i=1}^n a_izv_i=zv=uw=u\sum_{i=1}^n b_iw_i=\sum_{i=1}^n b_iuw_i=\sum_{i=1}^n b_iz_iv_i$$

となる。ここで $v_1, \dots, v_n$ は $\mathbf{R}^n$ の実基底であるから、$\mathbf{C}^n$ の複素基底にもなり、

$$a_i z = b_i z_i \quad (1 \le i \le n)$$

が成り立つ。$v \neq 0$ より $a_{i_0} \neq 0$ となる i_0 が存在し、

$$z = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}} z_{i_0}$$

となる。ここで、$z, z_{i_0} \in U(1)$ かつ $b_{i_0}/a_{i_0} \in \mathbf{R}$ であるから、$z = \pm z_{i_0}$ となることが分かる。よって、$i_0 \in N_a$ となる $1 \le a \le s$ が存在する。このとき

$$z = \pm z_i \quad (i \in N_a)$$

である。$i \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash N_a$ については、$z_i \neq \pm z_{i_0}$ かつ $\pm a_i z_{i_0} = a_i z = b_i z_i$ であるから、$a_i = b_i = 0$ となる。したがって、

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i \in N_a} a_i v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^n b_i w_i = \sum_{i \in N_a} b_i w_i$$

となり、

$$v \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}, \qquad w \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle w_i \rangle_{\mathbf{R}}$$

となることが示された。

定理 3.3.6 $u \in U(n)$ に対して、補題 3.3.5 の通り、

$$u w_i = z_i v_i \quad (1 \le i \le n)$$

をみたす $z_i \in U(1)$ $(1 \le i \le n)$ と $\mathbf{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ と $w_1, \dots, w_n$ をとる。$z_i^2 = z_j^2$ のとき $i \sim j$ と定義し、この同値関係 $\sim$ によって $\{1, \dots, n\}$ を

$$\{1, \dots, n\} = N_1 \cup \cdots \cup N_s$$

と類別する。このとき、$P(\mathbf{C}^n)$ において

$$P(\mathbf{R}^n) \cap uP(\mathbf{R}^n) = P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) = \bigcup_{a=1}^s P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}} \right)$$

が成り立つ。特に、$P(\mathbf{R}^n)$ と $uP(\mathbf{R}^n)$ が離散的に交わる必要十分条件は

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad z_i^2 \neq z_j^2$$

である。このとき

$$P(\mathbf{R}^n) \cap uP(\mathbf{R}^n) = \{ \langle v_i \rangle_{\mathbf{C}} \mid 1 \le i \le n \}$$

となり、交叉は $P(\mathbf{R}^n)$ と $uP(\mathbf{R}^n)$ の大対蹠集合になる。この交叉は $P(\mathbf{C}^n)$ の大対蹠集合にもなっている。

証明　$P(\mathbf{C}^n)$ において、

$$P(\mathbf{R}^n) \ni \langle v_i \rangle_{\mathbf{C}} = \langle z_i v_i \rangle_{\mathbf{C}} = \langle u w_i \rangle_{\mathbf{C}} \in P(u\mathbf{R}^n)$$

より

$$\langle v_i \rangle_{\mathbf{C}} \in P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n)$$

となり、

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) \supset \{\langle v_i \rangle_{\mathbf{C}} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

を得る。

さらに

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) = \bigcup_{a=1}^{s} P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}\right)$$

が成り立つことを示す。$P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}\right)$ の元は $\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}} \ni v \neq 0$ によって $\langle v \rangle_{\mathbf{C}}$ と表すことができる。

$$v = \sum_{i \in N_a} c_i v_i \quad (c_i \in \mathbf{R})$$

と表しておく。N_a の元 i_0 を一つとり固定する。このとき、任意の $i \in N_a$ に対して $z_i = \pm z_{i_0}$ が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} P(\mathbf{R}^n) \ni \langle v \rangle_{\mathbf{C}} &= \langle z_{i_0} v \rangle_{\mathbf{C}} = \left\langle \sum_{i \in N_a} c_i z_{i_0} v_i \right\rangle_{\mathbf{C}} = \left\langle \sum_{i \in N_a} \pm c_i z_i v_i \right\rangle_{\mathbf{C}} \\ &= \left\langle \sum_{i \in N_a} \pm c_i u w_i \right\rangle_{\mathbf{C}} = \left\langle u \sum_{i \in N_a} \pm c_i w_i \right\rangle_{\mathbf{C}} \in P(u\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

となり、$\langle v \rangle_{\mathbf{C}}$ は $P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}\right)$ の任意の元であるから

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) \supset P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}\right)$$

となることが分かる。さらに、ここで $a \in \{1, 2, \ldots, s\}$ は任意であるから

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) \supset \bigcup_{a=1}^{s} P\left(\bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbf{R}}\right)$$

が示された。

次に、逆の包含関係を示すために $P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n)$ の元を $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトル v によって $\langle v \rangle_{\mathbf{C}}$ で表す。$\langle v \rangle_{\mathbf{C}} \in P(u\mathbf{R}^n)$ より $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトル w が存在して $\langle uw \rangle_{\mathbf{C}} =$

$\langle v\rangle_{\mathbf{C}}$ となる。したがって、$z \in U(1)$ が存在して $uw = zv$ が成り立つ。補題 3.3.5 より、ある $1 \leq a \leq s$ について $v \in \bigoplus_{i\in N_a}\langle v_i\rangle_{\mathbf{R}}$ となるので、$\langle v\rangle_{\mathbf{C}} \in P\left(\bigoplus_{i\in N_a}\langle v_i\rangle_{\mathbf{R}}\right)$ である。よって

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) \subset \bigcup_{a=1}^{s} P\left(\bigoplus_{i\in N_a}\langle v_i\rangle_{\mathbf{R}}\right)$$

となることが分かる。以上で

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) = \bigcup_{a=1}^{s} P\left(\bigoplus_{i\in N_a}\langle v_i\rangle_{\mathbf{R}}\right)$$

が成り立つことが示された。

$P(\mathbf{R}^n)$ と $P(u\mathbf{R}^n)$ が離散的に交わる必要十分条件は、各 N_a が一元のみから成ることであり、これは

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad z_i^2 \neq z_j^2$$

と同値になる。これら部分多様体が離散的に交わるときは、上で得た交叉の表示より

$$P(\mathbf{R}^n) \cap P(u\mathbf{R}^n) = \{\langle v_i\rangle_{\mathbf{C}} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

となる。この交叉は $P(\mathbf{R}^n)$ と $P(u\mathbf{R}^n)$ の大対蹠集合になる。$P(\mathbf{C}^n)$ の大対蹠集合にもなっている。