

数理物質科学研究科

# 微分幾何学 IIIA

---

## 複素多様体入門

田崎博之

2015年度

# 目次

第1章	複素多様体	1
1.1	定義と例	1
1.2	ベクトル空間の複素構造と Hermitian 構造	4
1.3	概複素構造と可積分性	7
第2章	コホモロジーとベクトル束	14
2.1	層とコホモロジー	14
2.2	複素ベクトル束と接続	23
2.3	正則ベクトル束	36
第3章	Kähler 幾何学	45
3.1	Hermitian 多様体	45
3.2	Kähler 多様体の例	47

# 第1章 複素多様体

## 1.1 定義と例

定義 1.1.1 パラコンパクト Hausdorff 空間  $X$  の開集合  $U$  から  $n$  次元複素数ベクトル空間

$$\mathbb{C}^n = \{z \mid z = (z_1, \dots, z_n), z_j \in \mathbb{C}\}$$

の開集合への位相同型写像を局所複素座標と呼ぶ。  $X$  の局所複素座標  $z_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$  の集まり  $\{(U_j, z_j) \mid j \in I\}$  が次の条件を満たすとき、  $\{(U_j, z_j) \mid j \in I\}$  を  $X$  の局所複素座標系と呼び  $X$  を  $n$  次元複素多様体と呼ぶ。

- (1)  $\{U_j \mid j \in I\}$  は  $X$  の開被覆である。
- (2)  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$  を満たす  $j, k \in I$  について、

$$f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1} : z_k(U_j \cap U_k) \rightarrow z_j(U_j \cap U_k)$$

は双正則写像である。

例 1.1.2 複素数ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  はそれ自身の座標によって  $n$  次元複素多様体になる。

例 1.1.3  $n + 1$  次元複素数ベクトル空間  $\mathbb{C}^{n+1}$  内の 1 次元部分ベクトル空間全体  $CP^n$  には、次のようにして  $n$  次元複素多様体の構造が定まる。この複素多様体を  $n$  次元複素射影空間と呼ぶ。

$$P : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow CP^n ; (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \mapsto \mathbb{C}(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$$

によって写像  $P$  を定める。  $P$  は  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  の元に対して、それを基底とする 1 次元部分ベクトル空間を対応させる写像である。  $P$  によって  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  から  $CP^n$  に商位相を導入する。これによって、  $CP^n$  はパラコンパクト Hausdorff 空間であることがわかる。  $0 \leq j \leq n$  に対して

$$U_j = P(\{(\zeta_0, \dots, \zeta_n) \mid \zeta_j \neq 0\})$$

によって  $CP^n$  の部分集合  $U_j$  を定めると、  $U_j$  は  $CP^n$  の開集合になる。  $U_j$  における局所複素座標  $\phi_j$  を

$$\phi_j(P(\zeta_0, \dots, \zeta_n)) = \left( \frac{\zeta_0}{\zeta_j}, \dots, \frac{\widehat{\zeta_j}}{\zeta_j}, \dots, \frac{\zeta_n}{\zeta_j} \right)$$

によって定める。ただし、 $\hat{*}$ は $*$ を取り除くことを意味する。 $\phi_j$ の定義は $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$ のとり方に依存しないことがわかる。 $\{(U_j, \phi_j) \mid 0 \leq j \leq n\}$ は $CP^n$ の局所複素座標系になり、 $CP^n$ は $n$ 次元複素多様体になる。

$C^{n+1}$ 内の通常の Hermite 内積に関して長さ1のベクトル全体を

$$S^{2n+1} = \left\{ \zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in C^{n+1} \mid \sum \zeta_k \bar{\zeta}_k = 1 \right\}$$

によって定める。 $S^{2n+1}$ は実 $2n+1$ 次元コンパクト多様体になり、 $P(S^{2n+1}) = CP^n$ が成り立つので、 $CP^n$ もコンパクトになる。 $P|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ はHopfファイブレーションと呼ばれる。この写像による一点の逆像は実1次元の円になる。

例 1.1.4  $n+1$ 次元複素射影空間  $CP^{n+1}$  内の部分集合

$$Q_n(C) = \{P(\zeta_0, \dots, \zeta_{n+1}) \mid \zeta_0^2 + \dots + \zeta_{n+1}^2 = 0\}$$

は $n$ 次元複素多様体になる。 $Q_n(C)$ を複素二次超曲面と呼ぶ。

$R^{n+2}$ 内の向きをついた2次元部分ベクトル空間全体 $\tilde{G}_2(R^{n+2})$ には実 $2n$ 次元多様体の構造が定まることがわかる。 $\tilde{G}_2(R^{n+2})$ の元は、向きを定める正規直交基底 $u, v$ によって $\langle u, v \rangle_R$ と表すことができる。このとき、 $\zeta = u + \sqrt{-1}v \in C^{n+2}$ とおくと、 $\zeta \neq 0$ であり、

$$\zeta_0^2 + \dots + \zeta_{n+1}^2 = \sum_{j=0}^{n+1} u_j^2 - \sum_{j=0}^{n+1} v_j^2 + 2\sqrt{-1} \sum_{j=0}^{n+1} u_j v_j = 0$$

が成り立つ。そこで $\Phi : \tilde{G}_2(R^{n+2}) \rightarrow Q_n(C) ; \langle u, v \rangle_R \mapsto P(u + \sqrt{-1}v)$ によって写像 $\Phi$ を定めると、 $\Phi$ は実多様体の間の微分同型写像であることがわかる。

例 1.1.5  $C^n$ を実 $2n$ 次元実ベクトル空間とみなして、実基底 $v_1, \dots, v_{2n}$ をとる。

$$\Gamma = Zv_1 + \dots + Zv_{2n}$$

は加法群としての $C^n$ の離散部分群になる。これによる商空間 $C^n/\Gamma$ には自然に $C^n$ からの被覆写像 $p : C^n \rightarrow C^n/\Gamma$ が定まり、これにより $C^n/\Gamma$ には $n$ 次元複素多様体の構造が定まる。これは1次元の円 $S^1$ の $2n$ 個の直積 $S^1 \times \dots \times S^1$ と実多様体として微分同型である。特に $C^n/\Gamma$ はコンパクトである。 $C^n/\Gamma$ を複素トーラスと呼ぶ。 $p : C^n \rightarrow C^n/\Gamma$ は普遍被覆であり、被覆変換群は $\Gamma$ と同型になるので、 $C^n/\Gamma$ の基本群は $\pi_1(C^n/\Gamma) \cong \Gamma \cong Z^{2n}$ となる。ここで、 $Z$ は整数全体のなす加法群である。

定義 1.1.6 複素多様体 $G$ が群構造を持ち、積と逆元を対応させる写像が正則であるとき、 $G$ を複素 Lie 群と呼ぶ。

例 1.1.7 複素数ベクトル空間は加法群の構造に関して複素 Lie 群になる。複素トーラスも複素 Lie 群になる。 $n$ 次複素正方形行列の全体を $M_n(C)$ で表す。

$$GL(n, C) = \{g \in M_n(C) \mid \det g \neq 0\}$$

は複素 Lie 群である。これを複素一般線形群と呼ぶ。

## 例 1.1.8

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{C}) \right\}$$

とおくと、 $H$  は複素 Lie 群になる。 $H$  は複素多様体としては  $\mathbf{C}^3$  と同型であるが、複素 Lie 群としては同型ではない。

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid z_j \in \mathbf{Z} + \sqrt{-1}\mathbf{Z} \right\}$$

とおくと、 $D$  は  $H$  の離散部分群である。これによる商空間  $H/D$  には自然に  $H$  からの被覆写像  $p: H \rightarrow H/D$  が定まり、これにより  $H/D$  には 3 次元複素多様体の構造が定まる。 $H/D$  を岩澤多様体と呼ぶ。 $p: H \rightarrow H/D$  は普遍被覆であり、被覆変換群は  $D$  と同型になるので、 $H/D$  の基本群は  $\pi_1(H/D) \cong D$  となる。よって、 $H/D$  は複素トーラスとは同型にはならない。

例 1.1.9 向きの付いた曲面、すなわち実 2 次元多様体は 1 次元複素多様体であることを示す。向きの付いた実 2 次元多様体に Riemann 計量を入れ、その Riemann 計量を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表す。曲面には向きに合った等温座標が局所的に存在することが知られている。すなわち、

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0$$

を満たす実局所座標  $x, y$  である。もう一つの等温座標  $u, v$  と定義域の共通部分が存在するとき、その共通部分において二つのベクトル

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}$$

は長さが等しく、直交することがわかる。したがって、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad \epsilon = \pm 1$$

となり、

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\epsilon \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \epsilon \frac{\partial x}{\partial u}$$

を得る。二つの局所座標の変換行列は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

であり、その行列式は

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \epsilon \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right\}$$

である。二つの局所座標  $x, y$  と  $u, v$  はともに曲面の向きに合っていることから、この行列式は正  $\epsilon = 1$  である。したがって、 $x, y$  は  $u, v$  に関して Cauchy-Riemann の方程式を満たし、 $u + \sqrt{-1}v \mapsto x + \sqrt{-1}y$  は正則である。同様に逆写像も正則になることがわかり、曲面の向きに合った等温座標  $x, y$  は局所複素座標  $x + \sqrt{-1}y$  を定め、これら全体は複素局所座標系になり、曲面は1次元複素多様体になる。

## 1.2 ベクトル空間の複素構造と Hermite 構造

$V$  を  $n$  次元実ベクトル空間とする。 $V$  の複素化  $V^{\mathbb{C}}$  を  $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$  または  $V^{\mathbb{C}} = V \oplus \sqrt{-1}V$  によって定める。 $V$  の双対空間を  $V^*$  で表す。すると  $(V^*)^{\mathbb{C}} = (V^{\mathbb{C}})^*$  が成り立つ。ただし、右辺は複素ベクトル空間の双対空間である。 $v = v_1 + \sqrt{-1}v_2 \in V^{\mathbb{C}}$  ( $v_1, v_2 \in V$ ) に対して  $\bar{v} = v_1 - \sqrt{-1}v_2 \in V^{\mathbb{C}}$  によって  $\bar{v}$  を定める。 $f \in (V^*)^{\mathbb{C}}$  に対して

$$\bar{f}(v) = \overline{f(\bar{v})} \quad (v \in V^{\mathbb{C}})$$

によって  $\bar{f}$  を定めると  $\bar{f} \in (V^*)^{\mathbb{C}}$  が成り立つ。実線形写像  $\phi: V \rightarrow V$  に対して

$$\phi: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}; v_1 + \sqrt{-1}v_2 \mapsto \phi(v_1) + \sqrt{-1}\phi(v_2) \quad (v_1, v_2 \in V)$$

によって複素線形写像  $\phi$  を定める。このとき、

$$\overline{\phi(v)} = \phi(\bar{v}) \quad (v \in V^{\mathbb{C}})$$

が成り立つ。さらに  $\lambda$  が  $\phi$  の固有値ならば、 $-\lambda$  も  $\phi$  の固有値になり、それぞれの固有空間を  $V_{\lambda}, V_{-\lambda}$  とすると、 $\bar{V}_{\lambda} = V_{-\lambda}, \bar{V}_{-\lambda} = V_{\lambda}$  が成り立つ。

$V$  の恒等写像を  $1$  で表す。 $V$  の線形変換  $J: V \rightarrow V$  が  $J^2 = -1$  を満たすとき、 $J$  を  $V$  の複素構造という。 $J$  を  $V^{\mathbb{C}}$  の複素線形変換に拡張した  $J$  も  $J^2 = -1$  を満たす。 $J$  の固有値は  $\pm\sqrt{-1}$  であり、対応する固有空間を  $V_{\pm}$  で表すと、 $\bar{V}_{\pm} = V_{\mp}$  が成り立ち、 $V^{\mathbb{C}} = V_{+} \oplus V_{-}$  となる。特に  $V^{\mathbb{C}}$  は偶数次元である。したがって、 $V$  も偶数次元である。 $f \in (V^*)^{\mathbb{C}}$  が  $(1, 0)$  型であるとは、

$$f(Jx) = \sqrt{-1}f(x) \quad (x \in V^{\mathbb{C}})$$

が成り立つことである。 $f \in (V^*)^{\mathbb{C}}$  が  $(0, 1)$  型であるとは、

$$f(Jx) = -\sqrt{-1}f(x) \quad (x \in V^{\mathbb{C}})$$

が成り立つことである。 $f$  が  $(1, 0)$  型ならば、 $\bar{f}$  は  $(0, 1)$  型である。なぜならば、

$$\bar{f}(Jx) = \overline{f(Jx)} = \overline{f(J\bar{x})} = \overline{\sqrt{-1}f(\bar{x})} = -\sqrt{-1}\overline{f(\bar{x})} = -\sqrt{-1}\bar{f}(x).$$

同様に  $f$  が  $(0, 1)$  型ならば、 $\bar{f}$  は  $(1, 0)$  型である。

$V^C$  上の  $(1,0)$  型形式全体を  $A^{(1,0)}(V^C)$  で表し、 $V^C$  上の  $(0,1)$  型形式全体を  $A^{(0,1)}(V^C)$  で表すと、 $(V^*)^C$  は  $A^{(1,0)}(V^C)$  と  $A^{(0,1)}(V^C)$  の直和になる。さらに

$$\bar{A}^{(1,0)}(V^C) = A^{(0,1)}(V^C), \quad \bar{A}^{(0,1)}(V^C) = A^{(1,0)}(V^C)$$

が成り立つ。逆に  $(V^*)^C$  が複素共役で移り合う複素部分空間の直和に分解するならば、これらを  $(1,0)$  型と  $(0,1)$  型とする  $V$  の複素構造が定まる。

$J$  が  $V$  の複素構造ならば、 $-J$  も  $V$  の複素構造になる。これら二つの複素構造は互いに共役であるという。 $J$  に関して  $(1,0)$  型形式は、 $-J$  に関して  $(0,1)$  型である。逆に  $J$  に関して  $(0,1)$  型形式は、 $-J$  に関して  $(1,0)$  型である。

一般の交代形式を復習しておく。 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  の場合を考える。 $V$  を  $K$  上のベクトル空間とする。0以上の整数  $p$  に対して  $V$  上の  $p$  次交代形式とは、 $p = 0$  のときは  $K$  の元であり、 $p > 0$  のときは  $V$  の  $p$  個の積  $V \times \cdots \times V$  上の  $K$  に値を持つ  $K$  多重線形写像  $\omega$  であって、任意の  $i < j$  に対して

$$\omega(v_1, \dots, \overset{i}{\check{v}}_j, \dots, \overset{j}{\check{v}}_i, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_p)$$

を満たすものである。 $V$  上の  $p$  次交代形式全体のなすベクトル空間を  $A^p(V)$  で表す。 $p = 1$  の場合は  $A^1(V) = V^*$  である。

$\{1, \dots, n\}$  の置換全体のなす群を  $S_n$  で表す。 $\omega \in A^p(V)$  と  $\eta \in A^q(V)$  に対して

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

によって  $\omega \wedge \eta$  を定めると、 $\omega \wedge \eta \in A^{p+q}(V)$  がわかる。

$$A(V) = \sum_{p \geq 0} A^p(V) \quad (\text{代数的直和})$$

とおくと、 $A(V)$  は  $K$  上の代数になることが知られている。さらに  $\omega \in A^p(V), \eta \in A^q(V)$  に対して

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

が成り立つ。

$\dim V = n$  であり、 $f_1, \dots, f_n$  が  $V^* = A^1(V)$  の基底であるとき、

$$\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

は  $A^p(V)$  の基底になる。特に  $p > n$  のとき、 $A^p(V) = \{0\}$  であり、 $p \leq n$  のとき  $\dim A^p(V) = \binom{n}{p}$  が成り立つ。

これ以降は、実ベクトル空間  $V$  が複素構造  $J$  を持つ場合に、 $V^C$  上の交代形式について考える。 $A^{(1,0)}(V^C)$  の  $p$  個の元と  $A^{(0,1)}(V^C)$  の  $q$  個の元の積の和を  $(p, q)$  型という。 $(p, q)$  型交代形式の全体を  $A^{(p,q)}(V^C)$  で表すと

$$A^r(V^C) = \sum_{p+q=r} A^{(p,q)}(V^C)$$

は直和分解になる。また、 $\bar{A}^{(p,q)}(V^C) = A^{(q,p)}(V^C)$  が成り立つ。

$V \times V$  上の複素数値関数  $H(x, y)$  が次の条件を満たすとき、 $H$  を  $V$  の Hermitian 構造という。

$$(1) H(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 H(x_1, y) + \lambda_2 H(x_2, y) \quad (x_1, x_2, y \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \overline{H(x, y)} = H(y, x) \quad (x, y \in V).$$

$$(3) H(Jx, y) = \sqrt{-1}H(x, y) \quad (x, y \in V).$$

$H$  を次のように実部と虚部に分解する。

$$H(x, y) = F(x, y) + \sqrt{-1}G(x, y)$$

(2) と (3) より

$$F(x, y) = F(y, x), \quad G(x, y) = -G(y, x),$$

$$F(x, y) = G(Jx, y), \quad -G(x, y) = F(Jx, y).$$

対称形式  $F(x, y)$  が正定値のとき、 $H(x, y)$  は正定値であるという。正定値 Hermitian 構造  $H$  から定まる二次交代形式  $-G$  を Kähler 形式といい  $\hat{H}$  で表す。

$V$  の線形独立な元  $e_1, \dots, e_m$  を  $e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m$  が  $V$  の基底になるようにとる。ただし、 $\dim V = n = 2m$  とする。この双対基底を  $e_1^*, \dots, e_m^*, (Je_1)^*, \dots, (Je_m)^*$  で表す。 $V$  の基底とその双対基底は自然に  $V^C$  の基底とその双対基底とみなせることに注意しておく。このとき、 $V^C$  の任意の元  $x$  は

$$x = \sum_{i=1}^m x^i e_i + \sum_{i=1}^m x^{m+i} Je_i$$

と表せる。ここで、

$$x^i = e_i^*(x), \quad x^{m+i} = (Je_m)^*(x)$$

である。 $H$  を  $V^C$  上の複素双線形形式に拡張し、それも  $H$  で表す。

$$f_i = e_i^* + \sqrt{-1}(Je_i)^*$$

とおくと、上記の  $x$  と  $y \in V^C$  に対して

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^m f_i(x)H(e_i, y).$$

$y$  についても同様に

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m \bar{f}_j(y)H(x, e_j)$$

となり、

$$H(x, y) = \sum_{i,j=1}^m f_i(x)\bar{f}_j(y)H(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^m H(e_i, e_j)(f_i \otimes \bar{f}_j)(x, y).$$



前回の結果より

$$H = \sum_{i,j=1}^m H(e_i, e_j)(f_i \otimes \bar{f}_j), \quad \hat{H} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j=1}^m H(e_i, e_j) f_i \wedge \bar{f}_j$$

を得る。この表示より、Kähler形式  $\hat{H}$  は  $(1, 1)$  型である。

### 1.3 概複素構造と可積分性

$M$  を  $n$  次元実多様体とする。 $M$  上の概複素構造とは、各  $x \in M$  に対して  $C^\infty$  級に対応する線形変換  $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$  であって  $J_x^2 = -1$  を満たすものである。概複素構造の与えられた多様体を概複素多様体という。前節の結果より次を得る。

命題 1.3.1 概複素多様体は偶数次元多様体である。

$M$  を概複素多様体とする。各点  $x \in T_x M$  の  $J_x$  は実ベクトル空間  $T_x M$  の複素構造である。そこで、 $T_x M^C$  上の  $(1, 0)$  型形式と  $(0, 1)$  型形式を考えることができ、直和

$$T_x^* M^C = A^{(1,0)}(T_x^* M^C) \oplus A^{(0,1)}(T_x^* M^C)$$

を得る。

命題 1.3.2 複素多様体は概複素多様体である。

証明  $z^k$  を複素多様体の局所複素座標とする。

$$z^k = x^k + \sqrt{-1}y^k$$

とおくと、 $x^k, y^k$  は複素多様体の実多様体としての局所実座標になる。

$$\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial}{\partial y^k}$$

は接ベクトル空間  $T_x M$  の実基底であり、その複素化  $T_x M^C$  の基底でもある。

$$J \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}$$

によって接ベクトル空間の線形変換  $J$  を定める。この定義が局所複素座標のとり方に依存しないことは Cauchy-Riemann の方程式からわかる。定め方より  $J^2 = -1$  となり、 $J$  は概複素構造になる。

特に断らない限り、複素多様体の概複素構造は上記の命題の証明中に構成したものとする。 $z^k$  の微分  $dz^k = dx^k + \sqrt{-1}dy^k$  は  $(1, 0)$  型形式である。したがって、 $d\bar{z}^k = dx^k - \sqrt{-1}dy^k$  は  $(0, 1)$  型形式である。

$$dz^k, \quad d\bar{z}^k \quad (1 \leq k \leq m)$$

は各点で  $T_x^*M^C$  の基底になる。この双対基底は

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \quad (1 \leq k \leq m)$$

になることがわかる。

複素多様体は概複素多様体であることがわかったが、逆に概複素多様体の概複素構造が複素多様体の構造から定まるのかどうかについて考える。

一般に実多様体  $M$  上の  $C^\infty$  級ベクトル場全体を  $\mathcal{T}(M)$  で表す。さらに  $M$  が概複素構造  $J$  を持つとする。このとき、

$$N(X, Y) = [JX, Y] + [X, JY] + J[JX, JY] - J[X, Y] \quad (X, Y \in \mathcal{T}(M))$$

によって  $N$  を定める。

$$N(Y, X) = -N(X, Y)$$

が成り立つ。  $M$  上の  $C^\infty$  級関数  $f$  に対して

$$N(fX, Y) = N(X, fY) = fN(X, Y)$$

が成り立つ。  $M$  上の  $C^\infty$  級関数全体のなす代数を  $C^\infty(M)$  で表す。  $N$  は  $\mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M)$  上定義され  $\mathcal{T}(M)$  に値を持つ  $C^\infty(M)$  双線形写像である。したがって、  $N$  は  $M$  上のテンソル場になる。

**定理 1.3.3** 概複素多様体の概複素構造が複素多様体の構造から定まるための必要十分条件は、テンソル場  $N$  が消えることである。

概複素構造が複素多様体の構造から定まるとき、可積分という。上の定理より、可積分概複素多様体は自然に複素多様体とみなせる。

この節では、これ以降  $M$  を複素多様体であり、 $\dim M = n = 2m$  とする。複素多様体に定まる概複素構造を使って、 $T_x M^C$  上の  $(p, q)$  型交代形式を考えることができる。 $x$  に  $C^\infty$  級に対応する  $(p, q)$  型交代形式  $\omega_x$  を  $(p, q)$  型微分形式と呼び、その全体を  $\mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  で表す。 $M$  上の  $r$  次実微分形式全体  $\mathcal{A}^r(M)$  の複素化  $\mathcal{A}^r(M)^C$  は、 $x$  に  $C^\infty$  級に対応する  $r$  次複素交代形式全体とみなせる。

$$\mathcal{A}^r(M)^C = \sum_{p+q=r} \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$$

は直和になる。実微分形式の外微分  $d: \mathcal{A}^r(M) \rightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M)$  を複素線形に拡張したのも同じ  $d: \mathcal{A}^r(M)^C \rightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M)^C$  で表す。 $d^2 = 0$  と

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta \quad (\omega \in \mathcal{A}^r(M)^C, \eta \in \mathcal{A}^s(M)^C)$$

が成り立つ。

**命題 1.3.4** (1)  $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  ならば、 $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}^{(q,p)}(M)$  である。

(2)  $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M), \beta \in \mathcal{A}^{(r,s)}(M)$  ならば、 $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}^{(p+r,q+s)}(M)$  である。

(3)  $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  ならば、 $d\alpha \in \mathcal{A}^{(p+1,q)}(M) + \mathcal{A}^{(p,q+1)}(M)$  である。

(4)  $p > m$  または  $q > m$  ならば  $\mathcal{A}^{(p,q)}(M) = \{0\}$  である。

$\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  の局所表示は

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} \alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

と書ける。上記命題の (3) より、 $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  に対して  $d\alpha$  は  $\mathcal{A}^{(p+1,q)}(M) + \mathcal{A}^{(p,q+1)}(M)$  に含まれる。そこで、 $d\alpha$  の  $\mathcal{A}^{(p+1,q)}(M)$  成分を  $\partial\alpha$  で表し、 $\mathcal{A}^{(p,q+1)}(M)$  成分を  $\bar{\partial}\alpha$  で表す。これらの局所表示は

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} \sum_k \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}, \\ \bar{\partial}\alpha &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} \sum_k \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \end{aligned}$$

複素数値関数  $\alpha$  の実部と虚部を  $\beta$  と  $\gamma$  で表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}^k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) (\beta + \sqrt{-1} \gamma) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma}{\partial y^k} \right) + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial \beta}{\partial y^k} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。特に、 $\alpha$  が正則関数であるための必要十分条件は  $\bar{\partial}\alpha = 0$  である。

命題 1.3.5  $\partial^2 = 0$ ,  $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ ,  $\bar{\partial}^2 = 0$  が成り立つ。

複素多様体  $M$  の  $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  に対して  $\bar{\partial}\alpha = 0$  となるとき、 $\alpha$  を  $\bar{\partial}$  閉という。 $M$  上の  $(p, q)$  型  $\bar{\partial}$  閉微分形式の全体を  $\mathcal{C}^{(p,q)}(M)$  で表す。 $\bar{\partial}^2 = 0$  だから  $\mathcal{C}^{(p,q)}(M) \supset \bar{\partial}\mathcal{A}^{(p,q)}(M)$  が成り立つので、

$$H^{(p,q)}(M) = \mathcal{C}^{(p,q)}(M) / \bar{\partial}\mathcal{A}^{(p,q-1)}(M)$$

を考えることができる。これを  $M$  の Dolbeault コホモロジーと呼ぶ。

これは実多様体の de Rham コホモロジーの類似であり、de Rham コホモロジーは次のように定義される。実多様体  $M$  上の  $p$  次閉微分形式の全体を  $\mathcal{C}^p(M)$  で表す。 $d^2 = 0$  だから  $\mathcal{C}^p(M) \supset d\mathcal{A}^{p-1}(M)$  が成り立つので、

$$H^p(M) = \mathcal{C}^p(M) / d\mathcal{A}^{p-1}(M)$$

を考えることができ、これを  $M$  の de Rham コホモロジーと呼ぶ。de Rham コホモロジーを調べる際に次の補題が重要になる。

補題 1.3.6 (Poincaré)  $r \geq 1$  とする。 $(-a, a)^n \subset \mathbf{R}^n$  上の  $r$  次閉微分形式  $\omega$  に対して、 $(-a, a)^n$  上の  $r-1$  次微分形式  $\eta$  が存在して、 $\omega = d\eta$  が成り立つ。

Poincaré の補題は  $p \geq 1$  に対して  $H^p((a, a)^n) = \{0\}$  であることを主張している。de Rham コホモロジーは局所的には自明であるということもできる。複素多様体の Dolbeault コホモロジーに関する類似の結果を以下で示す。 $z \in \mathbf{C}$  と  $r > 0$  に対して

$$D(z; r) = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\zeta| < r\}$$

とおく。また関数  $f$  に対して

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

とおく。 $f_{\bar{z}} = 0$  の必要十分条件は、 $f$  が正則になることである。

命題 1.3.7 (一般化された Cauchy の積分公式)  $0 < r < s$  と  $D(0; s)$  上の関数  $f$  に対して次の等式が成り立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D(0;r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D(0;r)} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{z-\zeta} \quad (z \in D(0;r)).$$

注意 1.3.8 前回最後の命題の証明の最後の等式より次の等式を得る。

$$-2\pi\sqrt{-1}f(z) = \int_{\partial D(z;\epsilon)} \frac{f(\zeta)d\bar{\zeta}}{\bar{z}-\bar{\zeta}} - \int_{D(0;r)} \frac{f_\zeta(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}.$$

補題 1.3.9 (Dolbeault-Grothendieck)  $0 < r_j < s_j$  として、

$$D(r) = D(0; r_1) \times \cdots \times D(0; r_m), \quad D(s) = D(0; s_1) \times \cdots \times D(0; s_m)$$

とおく。 $q \geq 1$  とする。 $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(D(s))$  が  $\bar{\partial}\alpha = 0$  を満たすとき、ある  $\beta \in \mathcal{A}^{(p,q-1)}(D(r))$  が存在して  $\bar{\partial}\beta = \alpha$  が成り立つ。

証明の概略  $m = 1$  かつ  $(p, q) = (0, 1)$  の場合を考える。座標は簡単に  $z = z_1$  と書く。任意の  $\alpha = f(z)d\bar{z} \in \mathcal{A}^{(0,1)}(D(s))$  は  $\bar{\partial}\alpha = 0$  を満たす。これに対してある  $\beta \in \mathcal{A}^{(0,0)}(D(r))$  が存在して  $\bar{\partial}\beta = \alpha$  が成り立つことを以下で示す。上記の条件は

$$(*) \quad \frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}} = f(z)$$

と同値である。この条件を満たす関数  $\beta$  が存在すると仮定する。 $\beta$  に命題 1.3.7 を適用すると、 $z \in D(0; r)$  に対して

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D(0;r)} \frac{\beta(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D(0;r)} \frac{f(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{z-\zeta}$$

である。右辺の第 1 項は  $z$  に関する正則関数である。これを  $g(z)$  とおくと、 $\beta$  は

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D(0;r)} \frac{f(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{z-\zeta} + g(z)$$

と表せる。逆に正則関数  $g(z)$  に対してこのように  $\beta(z)$  を定めると、 $\beta(z)$  は  $(*)$  を満たすことを以下で示す。右辺の積分を表現するために次の微分形式を  $D(0; s) - \{z\}$  において考える。

$$d(f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta}) = \left( f_\zeta(\zeta) \log|\zeta - z|^2 + \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

$\overline{D(z;\epsilon)} \subset D(0; r)$  を満たすように  $\epsilon > 0$  をとる。 $\overline{D(0; r)} - D(z;\epsilon)$  における上記二次微分形式の積分に Stokes の定理を適用すると

$$\begin{aligned} (**) \quad & \int_{\partial D(0;r)} f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} - \int_{\partial D(z;\epsilon)} f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} \\ & = \int_{\overline{D(0;r)} - D(z;\epsilon)} \left( f_\zeta(\zeta) \log|\zeta - z|^2 + \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon \rightarrow 0$  のときの (\*\*) の極限をとると

$$\int_{\partial D(0;r)} f(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} = \int_{D(0;r)} \left( f_\zeta(\zeta) \log |\zeta - z|^2 + \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

これと  $\beta(z)$  の定め方より

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D(0;r)} f(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} - \int_{D(0;r)} f_\zeta(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \int_{D(0;r)} \frac{f(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = 2\pi\sqrt{-1}\beta(z) - 2\pi\sqrt{-1}g(z). \end{aligned}$$

両辺に  $\partial/\partial\bar{z}$  を作用させると

$$- \int_{\partial D(0;r)} \frac{f(\zeta) d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} + \int_{D(0;r)} \frac{f_\zeta(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = 2\pi\sqrt{-1}\beta_{\bar{z}}(z).$$

注意 1.3.8 より  $\beta_{\bar{z}}(z) = f(z)$  が成り立つ。

一般の場合を証明するために、 $\alpha$  に対する条件  $(H_j)$  :  $\alpha$  は  $d\bar{z}^{j+1}, \dots, d\bar{z}^m$  を含まない、を導入し、 $j$  に関する帰納法で補題を証明する。 $(H_0)$  という条件は、 $\alpha$  は  $d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^m$  を含まないということだが、 $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}(D(s))$  かつ  $q \geq 1$  なので、 $\alpha = 0$  である。このときは  $\beta = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^p \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{q-1} \in \mathcal{A}^{(p,q-1)}(D(s))$  とおくと、 $\bar{\partial}\beta = 0 = \alpha$  が成り立つ。 $(H_0)$  を満たす  $\alpha$  について補題の主張が成り立つことがわかった。以下では  $(H_{j-1})$  を満たす  $\alpha$  について補題の主張が成り立つと仮定して、 $(H_j)$  を満たす  $\alpha$  についても補題の主張が成り立つことを示す。 $\alpha$  は

$$\alpha = \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_q \leq j}} \alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q} dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_q}$$

と表示できる。仮定  $\bar{\partial}\alpha = 0$  より  $l = j+1, \dots, m$  について

$$\frac{\partial \alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}}{\partial \bar{z}^l} = 0.$$

先に示した結果を  $D(s)$  上の関数  $\alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$  に適用すると、 $D(r)$  上の関数  $\beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$  が存在して

$$\frac{\partial \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}}{\partial \bar{z}^j} = \alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$$

が成り立つ。 $\beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$  は  $\alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$  を積分して得られるので、 $\beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}$  も  $l = j+1, \dots, m$  について

$$\frac{\partial \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q}}{\partial \bar{z}^l} = 0$$

を満たす。そこで

$$\lambda = (-1)^{p+q-1} \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_{q-1} \leq j-1}} \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_{q-1} \bar{j}} dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_{q-1}}$$

とおくと、 $\lambda \in \mathcal{A}^{(p,q-1)}(D(r))$  である。

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\lambda &= \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_{q-1} \leq j-1}} \sum_{l \neq l_1, \dots, l_{q-1}} \frac{\partial \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_{q-1} \bar{j}}}{\partial \bar{z}^l} \\
&\quad dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_{q-1}} \wedge d\bar{z}^l \\
&= \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_{q-1} \leq j-1}} \alpha_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_{q-1} \bar{j}} dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_{q-1}} \wedge d\bar{z}^j \\
&\quad + \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_{q-1} \leq j-1}} \sum_{\substack{l \neq l_1, \dots, l_{q-1} \\ l \leq j-1}} \frac{\partial \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_{q-1} \bar{j}}}{\partial \bar{z}^l} \\
&\quad dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_{q-1}} \wedge d\bar{z}^l
\end{aligned}$$

が成り立つ。  $\alpha - \bar{\partial}\lambda = \mu$  とおくと、  $\bar{\partial}\mu = \bar{\partial}\alpha - \bar{\partial}^2\lambda = 0$  が成り立ち、

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ l_1 < \dots < l_{q-1} \leq j-1}} \sum_{\substack{l \neq l_1, \dots, l_{q-1} \\ l \leq j-1}} \frac{\partial \beta_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_{q-1} \bar{j}}}{\partial \bar{z}^l} \\
&\quad dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p} \wedge d\bar{z}^{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{l_{q-1}} \wedge d\bar{z}^l
\end{aligned}$$

となり、  $\mu$  は条件  $(H_{j-1})$  を満たす。帰納法の仮定より、ある  $\nu \in \mathcal{A}^{(p, q-1)}(D(r))$  が存在して  $\bar{\partial}\nu = \mu$  を満たす。以上より  $\lambda + \nu \in \mathcal{A}^{(p, q-1)}(D(r))$  であり、

$$\bar{\partial}(\lambda + \nu) = \bar{\partial}\lambda + \bar{\partial}\nu = \bar{\partial}\lambda + \mu = \alpha$$

となり、補題の主張が成り立つ。

## 第2章 コホモロジーとベクトル束

### 2.1 層とコホモロジー

$M$  と  $S$  を位相空間とし  $\pi : S \rightarrow M$  を写像とする。これらが次の条件を満たすとき、 $(S, M, \pi)$  を  $M$  上の abel 群 (複素ベクトル空間) の層という。

- (1)  $\pi$  は局所位相同型写像である。
  - (2) 各点  $x \in M$  に対して  $\pi^{-1}(x)$  は abel 群 (複素ベクトル空間) の構造を持つ。
  - (3) 各  $\pi^{-1}(x)$  の群 (複素ベクトル空間) の演算は連続写像である。
- $\pi^{-1}(x)$  は  $x$  上の茎という。

$U$  を  $M$  の開集合とする。連続写像  $f : U \rightarrow S$  が層  $S$  の  $U$  上の切断であるとは、 $\pi \circ f = 1_U$  が成り立つことである。 $S$  の  $U$  上の切断の全体  $\Gamma(U, S)$  は、abel 群 (複素ベクトル空間) の構造を持つ。開集合  $V \subset U$  に対して、 $\rho_{VU} : \Gamma(U, S) \rightarrow \Gamma(V, S)$  を切断の制限を対応させる写像とすると、これは abel 群の準同型写像になる。

$M$  を複素多様体 (または  $C^\infty$  級多様体) とする。 $M$  の点  $x$  をとる。 $x$  の開近傍で定義された正則 ( $C^\infty$  級) 関数  $f, g$  に対して、 $x$  のある開近傍で  $f, g$  が一致するとき、 $f, g$  は同値といい  $f \sim_x g$  で表す。 $\sim_x$  は同値関係になり、 $\sim_x$  による同値類を  $x$  における正則 ( $C^\infty$  級) 関数芽と呼ぶ。 $x$  の開近傍で定義された正則 ( $C^\infty$  級) 関数  $f$  の同値類を  $f_x$  で表す。 $x$  における正則 ( $C^\infty$  級) 関数芽の全体を  $\mathcal{O}_x$  ( $\mathcal{D}_x$ ) で表す。 $\mathcal{O}_x$  ( $\mathcal{D}_x$ ) には自然に  $\mathbb{C}$  上の代数の構造が定まる。 $\mathcal{O} = \cup\{\mathcal{O}_x \mid x \in M\}$  ( $\mathcal{D} = \cup\{\mathcal{D}_x \mid x \in M\}$ ) によって  $\mathcal{O}$  ( $\mathcal{D}$ ) を定め、以下のように位相を導入する。 $\phi \in \mathcal{O}$  に対して  $\phi = f_x$  となる正則関数  $f$  をとり、 $f$  の定義域である開近傍である  $U$  に対して  $\mathcal{U}(f) = \{f_y \mid y \in U\} \subset \mathcal{O}$  を定める。 $\{\mathcal{U}(f) \mid f_x = \phi\}$  が  $\phi$  の基本近傍系になるように  $\mathcal{O}$  に位相を定める。 $\mathcal{D}$  についても同様である。 $\pi : \mathcal{O} \rightarrow M$  を  $\pi(\mathcal{O}_x) = x$  となるように定めると、 $\pi$  は連続になり、 $\mathcal{O}$  は複素ベクトル空間の層になることがわかる。 $\mathcal{O}$  を  $M$  上の正則関数芽の層と呼ぶ。同様に  $\mathcal{D}$  も複素ベクトル空間の層になる。 $\mathcal{D}$  を  $M$  上の  $C^\infty$  級関数芽の層と呼ぶ。複素多様体  $M$  の点  $x$  の開近傍で定義された正則関数  $f$  であって、 $f(x) \neq 0$  となるものの正則関数芽全体を  $\mathcal{O}_x^*$  で表す。 $\mathcal{O}_x^*$  は積に関して abel 群になる。これから定まる層を  $\mathcal{O}^*$  で表す。実多様体上の abel 群  $G$  または複素数  $C$  に値を持つ定数関数の芽から定まる層を定数層と呼び、 $\underline{G}$  または  $\underline{C}$  で表す。特に単位元  $0$  だけの群の場合は  $\underline{0}$  と表す。

以上の構成は関数に限らず、微分形式に対しても同様にできる。実多様体上の  $p$  次微分形式の芽から定まる層を  $\Omega^p$  で表し、 $p$  次閉微分形式の芽から定まる層を  $\ker d^p$  で表す。同様に、複素多様体上の  $(p, q)$  型微分形式の芽から定まる層を  $\Omega^{(p,q)}$  で表し、 $(p, q)$  型  $\bar{\partial}$  閉微分形式の芽から定まる層を  $\ker \bar{\partial}^{(p,q)}$  で表す。



$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  を  $M$  上の茎の代数構造は同じ層とする。写像  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が次の条件を満たすとき、層の準同型写像という。

- (1)  $\Phi$  は連続。
- (2)  $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, \pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow M$  を射影とすると、 $\pi_{\mathcal{B}} \circ \Phi = \pi_{\mathcal{A}}$  が成り立つ。
- (3) 各  $x \in M$  に対して  $\Phi$  は  $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(x)$  から  $\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)$  への準同型を誘導する。

$$(*) \quad \mathcal{A} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}$$

を層の準同型写像の系列とする。各点  $x \in M$  において

$$\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(x) \xrightarrow{\Phi} \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x) \xrightarrow{\Psi} \pi_{\mathcal{C}}^{-1}(x)$$

が完全系列になるとき、すなわち

$$\text{im}(\Phi : \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(x) \rightarrow \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)) = \ker(\Psi : \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x) \rightarrow \pi_{\mathcal{C}}^{-1}(x))$$

が成り立つとき、 $(*)$  を完全系列という。

Poincaré の補題 (補題 1.3.6) より、実多様体上の層の系列

$$\underline{0} \rightarrow \ker d^p \xrightarrow{i} \Omega^p \xrightarrow{d} \ker d^{p+1} \rightarrow \underline{0}$$

は完全系列になる。

Dolbeault-Grothendieck の補題 (補題 1.3.9) より、複素多様体上の層の系列

$$\underline{0} \rightarrow \ker \bar{\partial}^{(p,q)} \xrightarrow{i} \Omega^{(p,q)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \ker \bar{\partial}^{(p,q+1)} \rightarrow \underline{0}$$

は完全系列になる。

ここで、複体とそのコホモロジーの基本事項をまとめておく。 $C^q$  を abel 群または複素ベクトル空間の系列とし、 $\delta^q : C^q \rightarrow C^{q+1}$  を準同型写像とする。 $\delta^{q+1}\delta^q = 0$  が成り立つとき、 $C = (C^q, \delta^q)$  を複体と呼び、 $\delta^q$  をコバウンダリ作用素と呼ぶ。

$$Z^q(C) = \{c \in C^q \mid \delta^q c = 0\}$$

の元を  $q$  コサイクルと呼び、

$$B^q(C) = \delta^{q-1}(C^{q-1})$$

の元を  $q$  コバウンダリと呼ぶ。 $\delta^{q+1}\delta^q = 0$  より  $B^q(C) \subset Z^q(C)$  が成り立つ。これより、商群または商ベクトル空間

$$H^q(C) = Z^q(C)/B^q(C)$$

が定まる。これを複体  $C$  の  $q$  次コホモロジーという。

$\{0\}$  と 0 写像のみからなる複体を 0 で表す。  $H^q(0) = \{0\}$  が成り立つ。

$(C^q, \delta^q)$  と  $(D^q, \delta^q)$  を複体とする。準同型写像  $\alpha^q : C^q \rightarrow D^q$  が

$$\delta^q \circ \alpha^q = \alpha^{q+1} \circ \delta^q$$

を満たすとき、 $\alpha = (\alpha^q)$  を複体の準同型写像という。  $c \in B^q(C)$  に対してある  $c' \in C^{q-1}(C)$  が存在して  $c = \delta^{q-1}c'$  となる。よって

$$\alpha^q c = \alpha^q \delta^{q-1}c' = \delta^q \alpha^{q-1}c' \in B^q(D)$$

となり、

$$\alpha^q B^q(C) \subset B^q(D)$$

を得る。  $c \in Z^q(C)$  に対して  $\delta^q c = 0$  が成り立つ。よって

$$\delta^q \alpha^q c = \alpha^{q+1} \delta^q c = \alpha^{q+1} 0 = 0$$

となり、  $\alpha^q c \in Z^q(D)$  である。これより

$$\alpha^q Z^q(C) \subset Z^q(D)$$

を得る。以上より  $\alpha^q$  は準同型写像

$$\alpha^q : H^q(C) \rightarrow H^q(D)$$

を誘導する。

複体の準同型写像の系列

$$C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E$$

が完全系列であるとは、各  $q$  について

$$C^q \xrightarrow{\alpha^q} D^q \xrightarrow{\beta^q} E^q$$

が完全系列になることをいう。

命題 2.1.1 複体の完全系列

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$$

に対して、準同型写像  $\delta^q : H^q(E) \rightarrow H^{q+1}(C)$  が存在して

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(E) \xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(C) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(D) \xrightarrow{\beta^q} H^q(E) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(C) \rightarrow \dots$$

は完全系列になる。

命題 2.1.2 複体の準同型写像  $\alpha, \beta : C \rightarrow D$  に対して、ある準同型写像の系列  $k^q : C^q \rightarrow D^{q-1}$  が存在して

$$\delta^{q-1}k^q + k^{q+1}\delta^q = \alpha^q - \beta^q$$

を満たすとき、 $\alpha$  と  $\beta$  が誘導する  $H^q(C)$  から  $H^q(D)$  への準同型写像は等しくなる。

$S$  をパラコンパクト Hausdorff 空間  $M$  上の層とする。 $\mathcal{U} = \{U_i\}$  を  $M$  の局所有限な開被覆とする。 $U_i$  を頂点とし

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_q} \neq \emptyset$$

を満たす  $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_q}\}$  を  $q$  次元単体とする単体複体を  $N(\mathcal{U})$  で表し、脈体と呼ぶ。すなわち

$$N(\mathcal{U}) = \{\{U_{i_0}, \dots, U_{i_q}\} \mid U_{i_j} \in \mathcal{U}, U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_q} \neq \emptyset\}.$$

各  $q$  次元単体  $\sigma = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_q}\} \in N(\mathcal{U})$  に  $f(\sigma) \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_q}, S)$  を対応させる関数  $f$  を  $N(\mathcal{U})$  の  $S$  係数  $q$  コチェインという。 $N(\mathcal{U})$  の  $S$  係数  $q$  コチェインの全体を  $C^q(N(\mathcal{U}), S)$  で表す。 $S$  が abel 群または複素ベクトル空間の層であることに応じて、 $C^q(N(\mathcal{U}), S)$  も abel 群または複素ベクトル空間の構造を持つ。

コバウンダリ作用素

$$\delta^q : C^q(N(\mathcal{U}), S) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathcal{U}), S)$$

を次で定める。 $f \in C^q(N(\mathcal{U}), S)$  と  $q+1$  次元単体  $\sigma = \{U_0, \dots, U_{q+1}\} \in N(\mathcal{U})$  に対して

$$(\delta^q f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \rho_\sigma f(\{U_0, \dots, \widehat{U}_j, \dots, U_{q+1}\})$$

によって  $\delta^q f \in C^{q+1}(N(\mathcal{U}), S)$  を定める。ただし、 $U_0 \cap \cdots \cap U_{q+1}$  への制限写像を  $\rho_\sigma$  で表す。定め方より、 $\delta^q$  は準同型写像になる。

$\delta^{q+1} \delta^q = 0$  を示す。以下の計算では制限写像を省略する。 $f \in C^q(N(\mathcal{U}), S)$  と  $q+2$  次元単体  $\sigma = \{U_0, \dots, U_{q+2}\} \in N(\mathcal{U})$  に対して

$$\begin{aligned} & (\delta^{q+1} \delta^q f)(\{U_0, \dots, U_{q+2}\}) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f(\{U_0, \dots, \widehat{U}_i, \dots, \widehat{U}_j, \dots, U_{q+2}\}) \\ &+ \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} f(\{U_0, \dots, \widehat{U}_j, \dots, \widehat{U}_i, \dots, U_{q+2}\}) = 0. \end{aligned}$$

したがって、 $\delta^{q+1} \delta^q = 0$  が成り立つ。これより、 $(C^q(N(\mathcal{U}), S), \delta^q)$  は複体になる。この複体のコホモロジーを脈体  $N(\mathcal{U})$  の  $S$  係数  $q$  次コホモロジーという。

$H^0(N(\mathcal{U}), S) = Z^0(N(\mathcal{U}), S)$  の元  $f$  と任意の 1 次元単体  $\{U_0, U_1\} \in N(\mathcal{U})$  に対して

$$0 = (\delta^0 f)(\{U_0, U_1\}) = f(\{U_1\}) - f(\{U_0\})$$

が成り立つ。したがって、 $f$  は  $\Gamma(M, S)$  の元を定め、 $H^0(N(\mathcal{U}), S)$  は  $\Gamma(M, S)$  と同一視できる。特に、 $H^0(N(\mathcal{U}), S)$  は局所有限開被覆  $\mathcal{U}$  のとり方に依存しない。一

方  $q \geq 1$  の場合には  $H^0(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  は  $\mathcal{U}$  のとり方に依存するかもしれない。そこで、次のような極限操作により  $\mathcal{U}$  のとり方に依存しないものを定める。

$\mathcal{U}, \mathcal{V}$  を  $M$  の開被覆とする。 $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U}$  の細分であるとは、任意の  $V \in \mathcal{V}$  に対してある  $U \in \mathcal{U}$  が存在して  $V \subset U$  が成り立つことである。これにより  $V_i \in \mathcal{V}$  に対して  $U_{\alpha(i)} \in \mathcal{U}$  が定まり、 $V_i \subset U_{\alpha(i)}$  が成り立つ。そこで

$$\alpha^* : C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow C^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

を  $f \in C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  と  $\{V_{i_0}, \dots, V_{i_q}\} \in N(\mathcal{V})$  に対して

$$(\alpha^* f)(\{V_{i_0}, \dots, V_{i_q}\}) = f(\{U_{\alpha(i_0)}, \dots, U_{\alpha(i_q)}\})$$

とすることにより定める。 $\alpha^*$  は複体の準同型写像になり、

$$\alpha^* : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

を誘導することがわかる。

$V_i \in \mathcal{V}$  に対して  $U_{\beta(i)} \in \mathcal{U}$  が定まり、 $V_i \subset U_{\beta(i)}$  が成り立つとき、 $\beta$  が定めるコホモロジーの準同型写像

$$\beta^* : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

は  $\alpha$  が定める準同型写像と等しいことを示す。 $\{V_{i_0}, \dots, V_{i_{q-1}}\} \in N(\mathcal{V})$  に対して  $W = V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_{q-1}}$  とおく。 $f \in C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  に対して

$$(k^q f)(\{V_{i_0}, \dots, V_{i_{q-1}}\}) = \sum_{r=0}^{q-1} (-1)^r \rho_W f(\{U_{\alpha(i_0)}, \dots, U_{\alpha(i_r)}, U_{\beta(i_r)}, \dots, U_{\beta(i_{q-1})}\})$$

によって準同型写像

$$k^q : C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow C^{q-1}(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

を定めると、

$$\delta^{q-1} k^q + k^{q+1} \delta^q = \beta^* - \alpha^*$$

が成り立つ。したがって、命題 2.1.2 を適用でき、

$$\alpha^* = \beta^* : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

が成り立つ。

以上の結果より  $M$  の局所有限開被覆  $\mathcal{U}$  とその細分  $\mathcal{V}$  に対して準同型

$$\Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

が定まる。 $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U}$  の細分するとき  $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$  とする。これにより、 $M$  の局所有限開被覆全体に順序構造が定まる。任意の  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  に対して  $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}, \mathcal{V} \leq \mathcal{W}$  となる  $\mathcal{W}$  が存在する。 $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W}$  のときに

$$\Pi_{\mathcal{W}\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}} = \Pi_{\mathcal{W}\mathcal{U}} : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{W}), \mathcal{S})$$

が成り立つ。このような  $(H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}), \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}})$  を帰納的系という。

帰納的系  $(H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}), \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}})$  の帰納的極限によって

$$H^q(M, \mathcal{S}) = \varinjlim H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$$

を定める。 $H^q(M, \mathcal{S})$  を層  $\mathcal{S}$  係数  $q$  次コホモロジーという。帰納的極限は次のように定義される。 $f, g \in H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  に対してある  $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$  に対して  $\Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}}f = \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}}g$  が成り立つとき、 $f \sim g$  と書く。 $\sim$  は  $H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  の同値関係になる。 $f$  の代表する同値類を  $\bar{f}$  とおく。

$$\bar{H}^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) = \{\bar{f} \mid f \in H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})\}$$

とすると、これも abel 群または複素ベクトル空間の構造を持つ。 $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U}$  の細分するとき、準同型写像

$$\Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

は準同型写像

$$(*) \quad \bar{\Pi}_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \bar{H}^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow \bar{H}^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{S})$$

を定める。 $\bar{f} \in \bar{H}^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  に対して  $\bar{\Pi}_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\bar{f} = 0$  とすると、 $\mathcal{V}$  の細分  $\mathcal{W}$  が存在して  $0 = \bar{\Pi}_{\mathcal{W}\mathcal{V}}\bar{\Pi}_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\bar{f} = \bar{\Pi}_{\mathcal{W}\mathcal{U}}\bar{f}$  となり、 $\bar{f} = 0$  がわかる。したがって、準同型写像  $(*)$  は単射になる。これより、 $\bar{H}^q(N(\mathcal{U})) \subset \bar{H}^q(N(\mathcal{V}))$  とみなすことができる。そこで帰納的極限を

$$\varinjlim H^q(N(\mathcal{U})) = \bigcup_{\mathcal{U}} \bar{H}^q(N(\mathcal{U}))$$

によって定義する。

命題 2.1.3  $H^0(M, \mathcal{S}) = \Gamma(M, \mathcal{S})$ .

$\mathcal{S}$  を  $M$  上の複素ベクトル空間の層とする。層の準同型写像  $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  に対して

$$\text{supph} = \{x \in M \mid h(\mathcal{S}_x) \neq 0\} \text{ の閉包}$$

によって、 $n$  の台  $\text{supph}$  を定める。 $\mathcal{U} = \{U_i\}$  を  $M$  の局所有限な開被覆とする。層の準同型写像の族  $\{h_i\}$  が次の条件を満たすとき、 $\mathcal{U}$  に付随する  $\mathcal{S}$  の単位の分割という。

- (1)  $\text{supph}_i \subset U_i$ .
- (2)  $\sum_i h_i = 1$  が成り立つ。

任意の局所有限な開被覆に付随する単位の分割を許容する層を細層と呼ぶ。

実多様体の局所有限な開被覆に付随する単位の分割を利用すると、 $\Omega^p$  や複素多様体の場合の  $\Omega^{(p,q)}$  が細層であることがわかる。

定理 2.1.4 パラコンパクト Hausdorff 空間  $M$  上の細層  $\mathcal{S}$  に対して次が成り立つ。

$$H^q(M, \mathcal{S}) = \{0\} \quad (q \geq 1).$$

証明の概略  $M$  の任意の局所有限開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  について、

$$H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) = \{0\} \quad (q \geq 1)$$

を示せばよい。 $\mathcal{S}$  は細層なので、 $\mathcal{U}$  に付随する  $\mathcal{S}$  の単位の分割  $\{h_i\}$  をとることができる。

$q \geq 1$  に対して

$$k^q : C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow C^{q-1}(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$$

を次のように定める。 $f \in C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$  と  $\{U_{i_0}, \dots, U_{i_{q-1}}\} \in N(\mathcal{U})$  に対して

$$(k^q f)(\{U_{i_0}, \dots, U_{i_{q-1}}\}) = \sum_i h_i(f(\{U_i, U_{i_0}, \dots, U_{i_{q-1}}\})).$$

$\mathcal{U}$  は局所有限開被覆なので、上の和は意味を持つ。 $k^{q+1}\delta^q + \delta^{q-1}k^q = 1$  を得る。 $q \geq 1$  のとき、命題 2.1.2 より

$$1 = 0 : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S})$$

なので、 $H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{S}) = \{0\}$  が成り立つ。

$\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を  $M$  上の層の準同型写像とする。 $M$  の開集合  $U$  に対して  $\alpha$  は準同型写像  $\Gamma(U, \mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B})$  を誘導し、さらに複体の準同型写像

$$\alpha^q : C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \rightarrow C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B})$$

を定める。これはコホモロジーの間の準同型写像

$$\alpha_*^q : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \rightarrow H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B})$$

を定める。ここれは帰納的系  $(H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}), \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}})$  から  $(H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B}), \Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}})$  への準同型写像になる。これは  $M$  の局所有限開被覆  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  が  $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$  を満たすとき、 $\Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\alpha_*^q = \alpha_*^q\Pi_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$  が成り立つことを意味する。このとき、 $\alpha_*^q$  は帰納的極限の間の準同型写像

$$\alpha_*^q : \lim_{\rightarrow} H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \rightarrow \lim_{\rightarrow} H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B})$$

を誘導する。すなわち、層  $\mathcal{S}$  係数コホモロジーの間の準同型写像

$$\alpha_*^q : H^q(M, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{B})$$

を誘導する。

層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \rightarrow 0$$

に対して、完全系列

$$0 \rightarrow C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^q} C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^q} C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

が定まる。これは複体の完全系列になり、命題 2.1.1 より準同型写像

$$\delta^q : H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{C}) \rightarrow H^{q+1}(N(\mathcal{U}), \mathcal{A})$$

が存在して

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(N(\mathcal{U}), \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{B}) \\ \xrightarrow{\beta^q} H^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(N(\mathcal{U}), \mathcal{A}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

は完全系列になる。さらに

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(M, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(M, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(M, \mathcal{B}) \\ \xrightarrow{\beta^q} H^q(M, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M, \mathcal{A}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

は完全系列になる。

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}_0 \xrightarrow{\alpha^0} \mathcal{S}_1 \xrightarrow{\alpha^1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\alpha^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{p-1}} \mathcal{S}_p \xrightarrow{\alpha^p} \dots$$

をパラコンパクト Hausdorff 空間  $M$  上の層の完全系列とする。

$$H^q(M, \mathcal{S}_p) = \{0\} \quad (p \geq 0, q \geq 1)$$

が成り立つとき、この系列を層  $\mathcal{S}$  の分解という。定理 2.1.4 より各  $\mathcal{S}_p$  が細層ならば、上の系列は分解になる。この分解を細分解という。

層の完全系列 (\*) は系列

$$0 \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{S}) \xrightarrow{\alpha_*} \Gamma(M, \mathcal{S}_0) \xrightarrow{\alpha_*^0} \Gamma(M, \mathcal{S}_1) \xrightarrow{\alpha_*^1} \Gamma(M, \mathcal{S}_2) \xrightarrow{\alpha_*^2} \dots \xrightarrow{\alpha_*^{p-1}} \Gamma(M, \mathcal{S}_p) \xrightarrow{\alpha_*^p} \dots$$

を定める。これは完全系列になるとは限らないが、 $\alpha^{p+1}\alpha^p = 0$  が成り立つ。したがって、 $(\Gamma(M, \mathcal{S}_p), \alpha_*^p)$  は複体になる。

定理 2.1.5 パラコンパクト Hausdorff 空間  $M$  上の層  $\mathcal{S}$  の分解 (\*) に対して、複体  $(\Gamma(M, \mathcal{S}_p), \alpha_*^p)$  のコホモロジーは自然な仕方で  $H^q(M, \mathcal{S})$  と同型になる。

証明の概要 最初に  $q = 0$  の場合のコホモロジーの同型を証明する。系列 (\*) が完全であることから、 $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_0$  は単射であり、

$$\text{im } \alpha = \ker \alpha^0$$

が成り立つ。よって、 $\alpha_* : \Gamma(M, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{S}_0)$  も単射になり、

$$\ker \alpha_*^0 = \Gamma(M, \ker \alpha^0) = \Gamma(M, \operatorname{im} \alpha) \cong \Gamma(M, \mathcal{S}) \cong H^0(M, \mathcal{S}).$$

最後の同型は 2.1.3 による。 $\ker \alpha_*^0$  は複体  $(\Gamma(M, \mathcal{S}_p), \alpha_*^p)$  の 0 次コホモロジーである。系列 (\*) が完全であることから、 $p \geq 0$  に対して

$$0 \rightarrow \ker \alpha^p \rightarrow \mathcal{S}_p \xrightarrow{\alpha^p} \ker \alpha^{p+1} \rightarrow 0$$

は層の完全系列になる。この完全系列から定まるコホモロジーの完全系列を利用すると、

$$H^q(M, \mathcal{S}) \cong H^q(M, \ker \alpha^0) \cong H^1(M, \ker \alpha^{q-1})$$

を得る。次に層の完全系列

$$0 \rightarrow \ker \alpha^{q-1} \rightarrow \mathcal{S}_{q-1} \rightarrow \ker \alpha^q \rightarrow 0$$

から定まるコホモロジーの完全系列を利用すると、コホモロジーの完全系列

$$H^0(M, \mathcal{S}_{q-1}) \xrightarrow{\alpha_*^{q-1}} H^0(M, \ker \alpha^q) \xrightarrow{\delta^0} H^1(M, \ker \alpha^{q-1}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{S}_{q-1}) = \{0\}$$

を得る。以上より

$$\begin{aligned} H^q(M, \mathcal{S}) &\cong H^1(M, \ker \alpha^{q-1}) \cong H^0(M, \ker \alpha^q) / \operatorname{im} \alpha_*^{q-1} \\ &\cong \ker(\alpha^q : \Gamma(M, \mathcal{S}_q) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{S}_{q+1})) / \operatorname{im}(\alpha^{q-1} : \Gamma(M, \mathcal{S}_{q-1}) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{S}_q)) \end{aligned}$$

となり、 $H^q(M, \mathcal{S})$  は複体  $(\Gamma(M, \mathcal{S}_p), \alpha_*^p)$  の  $q$  次コホモロジーに同型になる。

例 2.1.6 実多様体  $M$  上の定数層  $\underline{C}$  は細分解

$$0 \rightarrow \underline{C} \xrightarrow{i} \Omega^0 \xrightarrow{d^0} \Omega^1 \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega^p \xrightarrow{d^p} \dots$$

を持つ。各  $\Omega^p$  が細層であることは単位の分割の存在からわかり、上記系列が層の完全系列であることは Poincaré の補題 (補題 1.3.6) よりわかる。したがって、定理 2.1.5 より  $H^q(M, \underline{C})$  は複体  $(\Gamma(M, \Omega^p), d^p)$  のコホモロジーと同型になる。

複素多様体  $M$  上の  $(p, 0)$  型微分形式  $\alpha$  の局所表示

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}$$

において  $\alpha_{i_1 \dots i_p}$  が正則関数になるとき、 $\alpha$  を  $p$  次正則微分形式と呼ぶ。

$$\bar{\partial}^{(p,0)} \alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_k \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}$$

なので、 $(p, 0)$  型微分形式  $\alpha$  が  $p$  次正則微分形式になるためには、 $\bar{\partial}^{(p,0)} \alpha = 0$  が必要十分条件である。したがって、 $p$  次正則微分形式の芽の層は、層の準同型写像

$$\bar{\partial}^{(p,0)} : \Omega^{(p,0)} \rightarrow \Omega^{(p,1)}$$

の核  $\ker \bar{\partial}^{(p,0)}$  に一致する。



例 2.1.7 複素多様体  $M$  上の  $p$  次正則微分形式の芽の層  $\ker \bar{\partial}^{(p,0)}$  は細分解

$$0 \rightarrow \ker \bar{\partial}^{(p,0)} \xrightarrow{i} \Omega^{(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{(p,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{(p,q)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

を持つ。各  $\Omega^{(p,q)}$  が細層であることは単位の分割の存在からわかり、上記系列が層の完全系列であることは Dolbeault-Grothendieck の補題 (補題 1.3.9) よりわかる。したがって、定理 2.1.5 より  $H^q(M, \ker \bar{\partial}^{(p,0)})$  は複体  $(\Gamma(M, \Omega^{(p,q)}), \bar{\partial})$  のコホモロジーと同型になる。

## 2.2 複素ベクトル束と接続

$C^q$  に左から作用する。  $\pi_E : E \rightarrow M$  が次の条件を満たすとき、多様体  $M$  上の複素ベクトル束と呼ぶ。

- (1)  $E, M$  は実多様体であり、  $\pi_E : E \rightarrow M$  は多様体の間の  $C^\infty$  級写像である。
- (2) ある自然数  $q$  が存在し、  $M$  の各点  $x$  に対して  $x$  の開近傍  $U$  と微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times C^q$$

が存在し、  $u \in \pi_E^{-1}(U)$  に対して  $\Phi_U(u)$  の  $U$  成分は  $\pi_E(u)$  に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \quad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、  $y \in U$  に対して  $\pi_E^{-1}(y)$  は複素ベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(y)} : \pi_E^{-1}(y) \rightarrow C^q$$

は線形同型写像になる。

$E$  を複素ベクトル束の全空間、  $M$  を底空間、  $\pi_E$  を射影、  $\pi_E^{-1}(y)$  を  $y$  のファイバーと呼ぶ。  $q$  をベクトル束の階数と呼び、  $\text{rank } E$  で表す。

上記の定義における  $U$  と同じ性質を持つ  $V$  が共通部分を持つとき、  $\Phi_V \circ \Phi_U^{-1}$  は  $(U \cap V) \times C^q$  からそれ自身への  $C^\infty$  級写像になり、

$$\Phi_V \circ \Phi_U^{-1}(y, \xi) = (y, g_{VU}(y)\xi) \quad ((y, \xi) \in (U \cap V) \times C^q)$$

と記述できる。このとき  $g_{VU}(y) \in GL(q, C)$  となり、

$$g_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(q, C)$$

は  $C^\infty$  級になる。  $g_{UV}$  を変換関数という。これらは次を満たす。

$$\begin{aligned} g_{VU}(y) &= g_{UV}(y)^{-1} \quad (y \in U \cap V), \\ g_{UW}g_{WV}(y)g_{VU}(y) &= 1 \quad (y \in U \cap V \cap W). \end{aligned}$$

ただし、第1式の右辺の  $g_{UV}(y)^{-1}$  は  $GL(q, \mathbb{C})$  の元としての逆元であり、第2式の右辺の  $1$  は  $GL(q, \mathbb{C})$  の単位元である。

逆に上の二つの条件を満たす  $GL(q, \mathbb{C})$  に値を持つ関数  $g_{UV}$  があれば、これから複素ベクトル束を構成できる。

$\pi : E \rightarrow M$  と  $\pi' : E' \rightarrow M$  を多様体  $M$  上の複素ベクトル束とする。 $x \in M$  に対して  $E_x = \pi^{-1}(x)$ ,  $E'_x = (\pi')^{-1}(x)$  と表す。微分同型写像  $\psi : E \rightarrow E'$  が  $\pi = \pi' \circ \psi$  を満たし、各  $x \in M$  に対して

$$\psi|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_x$$

が複素線形同型写像になるとき、 $\psi$  を複素ベクトル束の同型写像と呼び、 $E$  と  $E'$  は同型であるという。 $V$  を複素ベクトル空間とし、 $M \times V$  から  $M$  への射影を考えることによって、 $M \times V$  は  $M$  上のベクトル束になる。 $M$  上の複素ベクトル束  $E$  が  $M \times V$  と同型になるとき、 $E$  を自明ベクトル束と呼ぶ。

$\psi : E \rightarrow E'$  が  $M$  上の複素ベクトル束  $E$  から  $E'$  への同型写像とする。 $U$  上では  $E$  と  $E'$  が積に分解するように  $U$  をとる。 $\Phi'_U \circ \psi \circ \Phi_U^{-1}$  は  $U \times \mathbb{C}^q$  からそれ自身への  $C^\infty$  級写像になり、

$$\Phi'_U \circ \psi \circ \Phi_U^{-1}(y, \xi) = (y, g_U(y)\xi) \quad ((y, \xi) \in U \times \mathbb{C}^q)$$

と記述できる。このとき  $g_U(y) \in GL(q, \mathbb{C})$  となり、

$$g_U : U \rightarrow GL(q, \mathbb{C})$$

は  $C^\infty$  級になる。 $E$  と  $E'$  の変換関数をそれぞれ  $\{g_{VU}\}$  と  $\{g'_{VU}\}$  で表す。 $(y, \xi) \in (U \cap V) \times \mathbb{C}^q$  に対して

$$g'_{VU}(y) = g_V(y)g_{VU}(y)g_U(y)^{-1}$$

を得る。逆に変換関数  $\{g_{VU}\}$  と  $\{g'_{VU}\}$  に対して、上の等式を満たす  $\{g_U\}$  が存在すれば、これらの変換関数が定める複素ベクトル束は同型になることがわかる。

双対空間や直和、テンソル積などの複素ベクトル空間から複素ベクトル空間を作る操作は、複素ベクトル束に対しても自然に定まる。

階数が1の複素ベクトル束を複素線束という。

定理 2.2.1 実多様体  $M$  上の複素線束の同型類全体はテンソル積によって abel 群の構造を持ち、 $H^2(M, \mathbb{Z})$  に同型である。

定理 2.2.1 の証明  $M$  上の複素線束の同型類全体はテンソル積によって abel 群になることはすぐにわかる。単位元は自明線束である。複素線束  $L$  の逆元は  $L$  の双対束  $L^*$  になる。

$M$  上の複素数値  $C^\infty$  級関数の芽の層を  $\Omega^0$  で表し、加法によって abel 群の層とみなす。 $M$  上の 0 にならない複素数値  $C^\infty$  級関数の芽の層を  $\Omega^*$  で表し、乘法によって abel 群の層とみなす。

$M$  上の複素線束の同型類全体は  $H^1(M, \Omega^*)$  と対応することを示す。 $M$  上の複素線束  $L$  をとる。 $M$  の局所有限開被覆  $\mathcal{U}$  を各  $U \in \mathcal{U}$  上では  $L$  が積に分解するようにとる。このとき、 $L$  の変換関数  $\{g_{UV}\}$  は  $C^1(N(\mathcal{U}), \Omega^*)$  の元になる。1 次コバウンダリ作用素  $\delta^1$  を作用させると

$$(\delta^1 g)(\{U, V, W\}) = g_{VW} g_{UV}^{-1} g_{UV} = g_{VW} g_{WU} g_{UV} = 1$$

となり、変換関数  $\{g_{UV}\}$  は 1 次コサイクルであることがわかる。変換関数  $\{g_{UV}\}$  と  $\{g'_{UV}\}$  が定める複素ベクトル束が同型になるための必要十分条件は、ある  $\{g_U\}$  が存在して

$$g'_{VU} = g_V g_{VU} g_U^{-1}$$

が成り立つことである。 $\{g_U\}$  は  $C^0(N(\mathcal{U}), \Omega^*)$  の元であり、

$$g'_{VU} g_{VU}^{-1} = g_V g_U^{-1} = (\delta^0 g)(\{U, V\})$$

だから  $\{g'_{VU}\}$  と  $\{g_{VU}\}$  の定める  $H^1(N(\mathcal{U}), \Omega^*)$  の元は等しい。逆に  $H^1(N(\mathcal{U}), \Omega^*)$  の等しい元を定める  $\{g'_{VU}\}$  と  $\{g_{VU}\}$  が定める複素ベクトル束は同型になる。以上より、 $M$  上の複素線束の同型類全体は  $H^1(N(\mathcal{U}), \Omega^*)$  と対応することがわかり、 $H^1(M, \Omega^*)$  とも対応する。さらに、 $M$  上の複素線束のテンソル積は変換関数の積に対応するので、 $H^1(M, \Omega^*)$  の積に対応する。

加法群  $C$  から乗法群  $C^*$  への準同型写像

$$e : C \rightarrow C^* ; z \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$$

から abel 群の完全系列

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} C \xrightarrow{e} C^* \rightarrow 0$$

を構成できる。この完全系列は、層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \Omega^0 \xrightarrow{e} \Omega^* \rightarrow 0$$

を誘導する。さらに層の完全系列はコホモロジーの完全系列

$$H^1(M, \Omega^0) \xrightarrow{e_*^1} H^1(M, \Omega^*) \xrightarrow{\delta_*^1} H^2(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*^2} H^2(M, \Omega^0)$$

を誘導する。 $\Omega^0$  は細層だから、定理 2.1.4 より

$$H^1(M, \Omega^0) = \{0\}, \quad H^2(M, \Omega^0) = \{0\}$$

が成り立つ。これと上のコホモロジーの完全系列より

$$\delta_*^1 : H^1(M, \Omega^*) \rightarrow H^2(M, \mathbf{Z})$$

は同型になる。

上記定理の証明中に示したように、 $M$  上の複素線束  $L$  は自然に  $H^1(M, \Omega^*)$  の元とみなせる。 $\delta_*^1 L \in H^2(M, \mathbf{Z})$  を  $L$  の Chern 類と呼ぶ。

$\pi_E : E \rightarrow M$  を実多様体  $M$  上の複素ベクトル束とする。 $C^\infty$  級写像  $\sigma : M \rightarrow E$  で  $\pi_E \circ \sigma = 1_M$  を満たすものを、複素ベクトル束  $E$  の断面と呼ぶ。 $E$  の断面の全体を  $\Gamma(E)$  で表す。

$M$  を実多様体とし、 $E$  を  $M$  上の複素ベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E); (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、 $\nabla$  を  $E$  上の接続と呼ぶ。

$$(1) \nabla_{X+Y} \phi = \nabla_X \phi + \nabla_Y \phi \quad (X, Y \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E)),$$

$$(2) \nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X \phi + \nabla_X \psi \quad (X \in \Gamma(TM), \phi, \psi \in \Gamma(E)),$$

$$(3) \nabla_{fX} \phi = f \nabla_X \phi \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in \mathcal{A}^0(M)),$$

$$(4) \nabla_X(f\phi) = f \nabla_X \phi + (Xf)\phi \quad (X \in \Gamma(TM), \phi \in \Gamma(E), f \in \mathcal{A}^0(M)).$$

$\phi \in \Gamma(E)$  に対して  $\nabla \phi$  を  $X \in \Gamma(TM)$  に  $\nabla_X \phi \in \Gamma(E)$  を対応させるものと考え、(1) と (3) より

$$\nabla \phi \in \Gamma(\text{Hom}(TM, E)) \cong \Gamma(T^*M \otimes E)$$

とみなせる。さらに対応

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

は次の (5) と (6) を満たす。

$$(5) \nabla(\phi + \psi) = \nabla \phi + \nabla \psi \quad (\phi, \psi \in \Gamma(E)),$$

$$(6) \nabla(f\phi) = f \nabla \phi + df \phi \quad (\phi \in \Gamma(E), f \in \mathcal{A}^0(M)).$$

(5) は (2) からわかる。(4) より  $X \in \Gamma(TM)$  に対して

$$\nabla_X(f\phi) = f \nabla_X \phi + (Xf)\phi = f \nabla \phi(X) + df(X)\phi = (f \nabla \phi + df \phi)(X)$$

となり、(6) が成り立つ。逆に (5) と (6) を満たす

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

は  $E$  上の接続を定める。

以下では接続の局所的性質を調べる。 $U$  を  $M$  の開集合とし、 $U$  上  $E$  のフレーム  $s_1, \dots, s_q$  があるとする。すなわち各  $s_i$  は  $U$  上定義された  $E$  の断面であり、各  $x \in U$  に対して  $s_1(x), \dots, s_q(x)$  は  $E_x$  の基底である。

$\nabla s_i$  は

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^q \omega_i^j s_j \quad (1 \leq i \leq q)$$

と表すことができる。ここで、 $\omega_i^j$  は  $U$  上で定義された 1 次微分形式である。

$$s = [s_1 \cdots s_q], \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_q^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^q & \cdots & \omega_q^q \end{bmatrix}$$

と書くことにすると、 $\omega$  は  $M_q(C)$  に値を持つ 1 次微分形式であり、

$$\nabla s = s\omega$$

と表現できる。 $\omega$  を接続形式という。 $\omega$  は接続を完全に決定することが以下のようにわかる。 $E$  の  $U$  上の断面  $\xi$  は  $U$  上の  $C^\infty$  級関数  $\xi^i$  によって

$$\xi = \sum_i \xi^i s_i$$

と表せる。これより

$$\nabla \xi = \sum_i \left( \sum_j \xi^j \omega_j^i + d\xi^i \right) s_i$$

によって、 $\nabla \xi$  は  $\omega_i^j$  によって記述できる。これを行列で記述すると

$$\xi = [s_1 \cdots s_q] \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^q \end{bmatrix},$$

$$\nabla \xi = [s_1 \cdots s_q] \left( \omega \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\xi^1 \\ \vdots \\ d\xi^q \end{bmatrix} \right).$$

$\nabla \xi = 0$  を満たす断面  $\xi$  を水平という。 $\nabla \xi = 0$  の局所的な必要十分条件は

$$\omega \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\xi^1 \\ \vdots \\ d\xi^q \end{bmatrix} = 0$$

であり、これは一階線形偏微分方程式系である。一般にはこれに解が存在するとは限らない。しかしながら、 $M$  の曲線  $C$  に制限すれば、この方程式は一階線形常微分方程式系になり、任意の初期条件に対して一意的に解が存在する。 $\xi(t) \in E_{C(t)}$

を満たす  $\xi(t)$  を  $C(t)$  の持ち上げという。さらに  $\nabla_{C'(t)}\xi(t) = 0$  を満たすとき、 $\xi(t)$  を  $C(t)$  の水平持ち上げという。

もう一つの  $U$  上  $E$  のフレーム  $s' = [s'_1 \cdots s'_q]$  があると、 $U$  上定義された  $GL(q, \mathbb{C})$  に値を持つ関数  $g$  が存在して、

$$[s'_1 \cdots s'_q] = [s_1 \cdots s_q]g \quad \text{すなわち} \quad s' = sg$$

と表せる。 $s'$  に関する接続形式を  $\omega'$  とすると、

$$g\omega' = \omega + dg$$

を得る。

フレーム  $s$  から定まる接続形式  $\omega$  に対して

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

を定める。 $\Omega$  をフレーム  $s$  に関する曲率形式という。もう一つのフレーム  $s'$  から定まる接続形式  $\omega'$  に関する曲率形式を  $\Omega'$  で表すと、

$$g\Omega' = \Omega$$

を得る。上の等式より、 $\Omega = 0$  という条件はフレーム  $s$  のとり方に依存しないことがわかる。 $\Omega = 0$  を満たす接続を平坦という。

$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$  を外微分すると

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が成り立つことがわかる。これを Bianchi の恒等式という。

$E$  の二つのフレーム  $s, s'$  が  $s' = sg$  という変換されるとき、対応する接続形式を  $\omega, \omega'$  で表し、さらに対応する曲率形式を  $\Omega, \Omega'$  で表すと、 $\Omega' = g^{-1}\Omega g$  が成り立つ。この性質を元に次の定義を与える。フレーム  $s$  に対して定まる  $q$  次正方形行列に値を持つ  $k$  次微分形式  $\Phi_s$  が  $\Phi_{s'} = g^{-1}\Phi_s g$  を満たすとき、 $\Phi_s$  を  $k$  次随伴型テンソリアル形式という。曲率形式は 2 次随伴型テンソリアル形式の例である。

$k$  次随伴型テンソリアル形式  $\Phi_s$  に対して

$$d^\nabla \Phi_s = d\Phi_s - (-1)^k \Phi_s \wedge \omega + \omega \wedge \Phi_s$$

によって共変外微分  $d^\nabla \Phi_s$  を定義する。

命題 2.2.2  $k$  次随伴型テンソリアル形式  $\Phi_s$  の共変外微分  $d^\nabla \Phi_s$  は  $k+1$  次随伴型テンソリアル形式である。

共変外微分  $d^\nabla$  を使うと Bianchi の恒等式は、フレーム  $s$  を省略して

$$d^\nabla \Omega = 0$$

と表すことができる。

随伴型テンソリアル形式  $\Phi, \Psi$  に対して

$$[\Phi \wedge \Psi] = \Phi \wedge \Psi - \Psi \wedge \Phi$$

とおく。 $[\Phi \wedge \Psi]$  も随伴型テンソリアル形式になることがわかる。

命題 2.2.3 随伴型テンソリアル形式  $\Phi$  に対して次が成り立つ。

$$d^\nabla d^\nabla \Phi = [\Omega \wedge \Phi].$$

証明 共変外微分の定義より、 $k$  次随伴型テンソリアル形式  $\Phi$  に対して

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla \Phi &= d(d^\nabla \Phi) - (-1)^{k+1}(d^\nabla \Phi) \wedge \omega + \omega \wedge (d^\nabla \Phi) \\ &= d(d\Phi - (-1)^k \Phi \wedge \omega + \omega \wedge \Phi) \\ &\quad - (-1)^{k+1}(d\Phi - (-1)^k \Phi \wedge \omega + \omega \wedge \Phi) \wedge \omega \\ &\quad + \omega \wedge (d\Phi - (-1)^k \Phi \wedge \omega + \omega \wedge \Phi) \\ &= -(-1)^k d\Phi \wedge \omega - \Phi \wedge d\omega + d\omega \wedge \Phi - \omega \wedge d\Phi \\ &\quad - (-1)^{k+1} d\Phi \wedge \omega - \Phi \wedge \omega \wedge \omega - (-1)^{k+1} \omega \wedge \Phi \wedge \omega \\ &\quad + \omega \wedge d\Phi - (-1)^k \omega \wedge \Phi \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \Phi \\ &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \Phi - \Phi \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega \\ &= [\Omega \wedge \Phi]. \end{aligned}$$

$M_q(\mathbb{C})$  の  $r$  個の積上定義された多重線形写像

$$P : M_q(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_q(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

について考える。これは各  $M_q(\mathbb{C})$  の成分について一次多項式になっていて、 $M_q(\mathbb{C})$  全体について  $r$  次多項式である。そこで、このような  $P$  を  $M_q(\mathbb{C})$  上の  $r$  次多項式と呼ぶことにする。任意の  $A_i \in M_q(\mathbb{C})$  と  $g \in GL(q, \mathbb{C})$  について

$$P(gA_1g^{-1}, \dots, gA_rg^{-1}) = P(A_1, \dots, A_r)$$

が成り立つとき、 $P$  を不変という。任意の  $r$  次の置換  $\sigma$  について

$$P(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r)}) = P(A_1, \dots, A_r)$$

が成り立つとき、 $P$  を対称という。

対称多項式  $P$  は  $P(A, \dots, A)$  の値だけで定まる。2 次の場合は

$$P(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(P(A_1 + A_2, A_1 + A_2) - P(A_1, A_1) - P(A_2, A_2))$$

が成り立つ。3次の場合は

$$\begin{aligned}
 & P(A_1, A_2, A_3) \\
 &= \frac{1}{6}(P(A_1 + A_2 + A_3, A_1 + A_2 + A_3, A_1 + A_2 + A_3) \\
 &\quad - P(A_1 + A_2, A_1 + A_2, A_1 + A_2) - P(A_2 + A_3, A_2 + A_3, A_2 + A_3) \\
 &\quad - P(A_3 + A_1, A_3 + A_1, A_3 + A_1) \\
 &\quad + P(A_1, A_1, A_1) + P(A_2, A_2, A_2) + P(A_3, A_3, A_3))
 \end{aligned}$$

が成り立つ。高次の場合も同様である。

一般次数の対称不変多項式の例を挙げる。 $A \in M_q(\mathbb{C})$  に対して

$$\det \left( I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A \right) = \sum_{0 \leq j \leq q} \binom{q}{j} P_j(A)$$

によって  $A$  の成分の  $j$  次の多項式  $P_j(A)$  を定める。

$j$  次対称不変多項式  $P$  に曲率形式  $\Omega$  を代入することにより、 $2j$  次微分形式

$$P(\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega)$$

を得る。 $\Omega$  が随伴型テンソリアル形式であることから、これは多様体  $M$  全体で定義された微分形式になる。さらに閉微分形式になることがわかり、 $2j$  次のコホモロジー類を定めることがわかる。さらにこのコホモロジー類は、複素ベクトル束の接続  $\nabla$  のとり方に依存しないことがわかる。

特に上記の行列式の展開から得られる対称不変多項式  $P_j$  に曲率形式を代入して得られるコホモロジー類を  $j$  次 Chern 類と呼ぶ。この Chern 類は複素ベクトル束を調べる上で重要な役割を演じる。

この講義は正式にはここまでで終了するが、秋学期に希望者を対象にして非公式に続ける予定である。なお、この講義のまとめのファイルは秋学期にも同様の形式で継続して公開するつもりである。



春学期の終わり頃に扱ったベクトル束上の接続の曲率に関する基本事項を簡単に復習しておく。

$M$  を実多様体とし、 $E$  を  $M$  上の複素ベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  上の接続とする。 $E$  の局所的フレーム  $s$  に対して  $\nabla s = s\omega$  によって、 $\nabla$  の接続形式  $\omega$  を定める。もう一つの局所的フレーム  $s'$  に対して変換行列  $g$  を  $s' = sg$  によって定める。 $s$  から定まる接続形式  $\omega$  に対して  $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$  によって曲率形式  $\Omega$  を定める。 $s'$  から定まる接続形式  $\omega'$  と曲率形式  $\Omega'$  に対して

$$g\omega' = \omega g + dg, \quad g\Omega' = \Omega g$$

が成り立つ。 $\Omega$  を外微分すると、Bianchi の恒等式

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が成り立つことがわかる。フレーム  $s$  に対して定まる  $q$  次正方行列に値を持つ  $k$  次微分形式  $\Phi_s$  が  $\Phi_{s'} = g^{-1}\Phi_s g$  を満たすとき、 $\Phi_s$  を  $k$  次随伴型テンソリアル形式という。曲率形式は 2 次随伴型テンソリアル形式の例である。 $k$  次随伴型テンソリアル形式  $\Phi_s$  に対して

$$d^\nabla \Phi_s = d\Phi_s - (-1)^k \Phi_s \wedge \omega + \omega \wedge \Phi_s$$

によって共変外微分  $d^\nabla \Phi_s$  を定義する。 $k$  次随伴型テンソリアル形式  $\Phi_s$  の共変外微分  $d^\nabla \Phi_s$  は  $k+1$  次随伴型テンソリアル形式である。随伴型テンソリアル形式  $\Phi, \Psi$  に対して  $[\Phi \wedge \Psi] = \Phi \wedge \Psi - \Psi \wedge \Phi$  とおく。 $[\Phi \wedge \Psi]$  も随伴型テンソリアル形式になることがわかる。随伴型テンソリアル形式  $\Phi$  に対して次が成り立つ。

$$d^\nabla d^\nabla \Phi = [\Omega \wedge \Phi].$$

$M_q(\mathbb{C})$  の  $j$  個の積上定義された多重線形写像

$$P : M_q(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_q(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

を  $M_q(\mathbb{C})$  上の  $j$  次多項式と呼ぶ。任意の  $A_i \in M_q(\mathbb{C})$  と  $g \in GL(q, \mathbb{C})$  について

$$P(gA_1g^{-1}, \dots, gA_jg^{-1}) = P(A_1, \dots, A_j)$$

が成り立つとき、 $P$  を不変という。任意の  $r$  次の置換  $\sigma$  について

$$P(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(j)}) = P(A_1, \dots, A_j)$$

が成り立つとき、 $P$  を対称という。対称多項式  $P$  は  $P(A, \dots, A)$  の値だけで定まる。以上が復習である。

以下では曲率形式  $\Omega$  を不変対称多項式  $P$  に代入して、多様体  $M$  上の微分形式  $P(\Omega)$  を定め、これから定まる de Rham コホモロジーの元  $[P(\Omega)]$  が接続  $\nabla$  に依存しないことを示す。

任意の  $A, X \in M_q(\mathbb{C})$  について

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} A e^{-tX} = XA - AX = [X, A]$$

が成り立つ。  $P$  を  $j$  次対称不変多項式とする。任意の  $A_i, X \in M_q(\mathbb{C})$  について

$$\sum_{k=1}^j P(A_1, \dots, [X, A_k], \dots, A_j) = 0$$

が成り立つ。  $M$  の接ベクトル  $X_1, \dots, X_{2j}$  に対して

$$\begin{aligned} & P(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)(X_1, \dots, X_{2j}) \\ &= \frac{1}{2^j} \sum_{\sigma \in S_{2j}} \text{sgn}(\sigma) P(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(X_{\sigma(2j-1)}, X_{\sigma(2j)})) \end{aligned}$$

と定めることにより、  $2j$  次微分形式  $P(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$  を定義する。これを簡単に  $P(\Omega)$  とも書く。  $P(\Omega') = P(g^{-1}\Omega g) = P(\Omega)$  となり、  $P(\Omega)$  は多様体全体で定義された  $2j$  次微分形式になる。外微分の性質と Bianchi の恒等式、  $P$  の不変性より、  $P(\Omega) = P(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$  は  $2j$  次閉微分形式であることがわかる。したがって、  $P(\Omega)$  は de Rham コホモロジー類  $[P(\Omega)]$  を定める。

$[P(\Omega)]$  が接続  $\nabla$  に依存しないことを以下で示す。  $\nabla_0$  と  $\nabla_1$  を  $E$  上の接続とする。  $\alpha = \nabla_1 - \nabla_0$  とおくと、  $\alpha$  は  $\text{End}(E)$  に値を持つ  $M$  上の 1 次微分形式になり、局所的には  $M_q(\mathbb{C})$  に値を持つ 1 次微分形式になる。  $\nabla_t = \nabla_0 + t\alpha$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とおくと、  $\nabla_t$  も接続になる。  $\nabla_t$  の接続形式を  $\omega_t$  とし、曲率形式を  $\Omega_t$  とする。  $\omega_t = \omega_0 + t\alpha$  となり、

$$\begin{aligned} \Omega_t &= d(\omega_0 + t\alpha) + (\omega_0 + t\alpha) \wedge (\omega_0 + t\alpha) \\ &= d\omega_0 + t d\alpha + \omega_0 \wedge \omega_0 + t\omega_0 \wedge \alpha + t\alpha \wedge \omega_0 + t^2 \alpha \wedge \alpha \\ &= \Omega_0 + t(d\alpha + \omega_0 \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_0) + t^2 \alpha \wedge \alpha \\ &= \Omega_0 + t d^{\nabla_0} \alpha + t^2 \alpha \wedge \alpha. \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_t &= d\alpha + \omega_0 \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_0 + 2t\alpha \wedge \alpha \\ &= d\alpha + (\omega_0 + t\alpha) \wedge \alpha + \alpha \wedge (\omega_0 + t\alpha) \\ &= d\alpha + \omega_t \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_t \\ &= d^{\nabla_t} \alpha \end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(\Omega_t) &= \sum_{k=1}^j P\left(\Omega_t \wedge \cdots \wedge \frac{d}{dt} \overset{k}{\tilde{\Omega}}_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\right) \\
&= jP\left(\left(\frac{d}{dt}\Omega_t\right) \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\right) \\
&= jP((d\alpha + \omega_t \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_t) \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&dP(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t) \\
&= P(d\alpha \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t) - P(\alpha \wedge d\Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t) - \cdots - P(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge d\Omega_t)
\end{aligned}$$

であり、Bianchi の恒等式より

$$d\Omega_t = -\omega_t \wedge \Omega_t + \Omega_t \wedge \omega_t$$

が成り立つので、上の等式の二行目以降の和に  $M$  の接ベクトル  $X_1, \dots, X_{2j}$  を代入した値は

$$\begin{aligned}
&- P(\alpha \wedge d\Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t)(X_1, \dots, X_{2j}) - \cdots \\
&- P(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge d\Omega_t)(X_1, \dots, X_{2j}) \\
&= P(\alpha \wedge (\omega_t \wedge \Omega_t - \Omega_t \wedge \omega_t) \wedge \cdots \wedge \Omega_t)(X_1, \dots, X_{2j}) + \cdots \\
&+ P(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge (\omega_t \wedge \Omega_t - \Omega_t \wedge \omega_t))(X_1, \dots, X_{2j}) \\
&= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{\sigma \in S_{2j}} \text{sgn}(\sigma) \left[ P(\alpha(X_{\sigma(1)}), \right. \\
&\quad \omega_t(X_{\sigma(2)})\Omega_t(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}) - \Omega_t(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})\omega_t(X_{\sigma(4)}), \dots, \\
&\quad \left. \Omega_t(X_{\sigma(2j-1)}, X_{\sigma(2j)}) \right) \\
&+ \cdots \\
&+ P(\alpha(X_{\sigma(1)}), \Omega_t(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}), \dots, \\
&\quad \omega_t(X_{\sigma(2j-2)})\Omega_t(X_{\sigma(2j-1)}, X_{\sigma(2j)}) - \Omega_t(X_{\sigma(2j-2)}, X_{\sigma(2j-1)})\omega_t(X_{\sigma(2j)})) \left. \right] \\
&= \cdots \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2j} \\ \sigma(3) < \sigma(4) \\ \sigma(2j-1) < \sigma(2j)}} \text{sgn}(\sigma) \left[ P(\alpha(X_{\sigma(1)}), [\omega_t(X_{\sigma(2)}), \Omega_t(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)})], \dots, \right. \\
&\quad \left. \Omega_t(X_{\sigma(2j-1)}, X_{\sigma(2j)}) \right) \\
&+ \cdots \\
&+ P(\alpha(X_{\sigma(1)}), \Omega_t(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}), \dots, [\omega_t(X_{\sigma(2)}), \Omega_t(X_{\sigma(2j-1)}, X_{\sigma(2j)})]) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots \\
&= P((\omega_t \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_t) \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)(X_1, \dots, X_{2j}).
\end{aligned}$$

したがって、

$$dP(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t) = P((d\alpha + \omega_t \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega_t) \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)$$

となり、先の結果と合わせると

$$\frac{d}{dt} P(\Omega_t) = j dP(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= \int_0^1 j dP(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt \\
&= d \int_0^1 j P(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\int_0^1 j P(\alpha \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt$$

は  $M$  上の  $2j - 1$  次微分形式になり、de Rham コホモロジー類の等式  $[P(\Omega_1)] = [P(\Omega_0)]$  が成り立つ。

以上の結果を定理としてまとめておく。

**定理 2.2.4 (Chern-Weil)**  $E$  を多様体  $M$  上の階数  $q$  の複素ベクトル束とし、 $\nabla$  を  $E$  上の接続とする。 $P$  を  $M_q(\mathbb{C})$  上の  $j$  次対称不変多項式とする。 $\nabla$  の局所的な曲率形式  $\Omega$  を  $P$  に代入すると、 $P(\Omega) = P(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$  は  $M$  上の  $2j$  次閉微分形式になり、 $P(\Omega)$  の定める de Rham コホモロジー類  $[P(\Omega)]$  は  $\nabla$  に依存しない。

コホモロジー類  $[P(\Omega)]$  を  $P$  に関する特性類という。

曲率形式を不変多項式に代入するという考え方は、Euclid 空間内の部分多様体のチューブの体積を表す Weyl の公式から始まったものと思われる。部分多様体の第二基本形式を不変多項式に代入した量の積分を係数とする多項式でこのチューブの体積を表現できることは、部分多様体論による計算でわかる。これを曲率形式を不変多項式に代入した量で表現できることを明らかにしたことは飛躍である。さらに、Gauss-Bonnet の定理の高次元化に必要な被積分量の発見につながり、上記の Chern-Weil の定理に発展した。

多様体  $M$  上のベクトル束  $E$  の各ファイバーに 1.2 節で定めた正定値 Hermitian 構造  $H(\cdot, \cdot)$  があり、 $E$  の  $C^\infty$  級断面  $\xi, \eta$  に対して  $H(\xi, \eta)$  が  $M$  上の  $C^\infty$  級関数になるとき、 $H(\cdot, \cdot)$  を  $E$  の Hermitian 構造という。ベクトル束の局所自明性により、局所的に Hermitian 構造は存在し、単位の分割を使うと全体で Hermitian 構造は存在することがわかる。

$s$  を  $E$  の局所的なフレームとし、 $H_s = (H(s_i, s_j))$  とおくと、 $H_s$  は  $M_q(\mathbb{C})$  に値を持つ局所的な  $C^\infty$  級関数になる。 $H$  が Hermitian 構造であることから、各  $H_s$  は正定値 Hermitian 行列に値を持つ関数である。

$s'$  をもう一つのフレームとし、 $s' = sg$  によって変換されているとすると、 $H_{s'} = {}^t g H_s \bar{g}$  が成り立つ。 $E$  の断面の局所表示

$$\xi = \sum_i \xi^i s_i, \quad \eta = \sum_j \eta^j s_j$$

に対して

$$H(\xi, \eta) = H\left(\sum_i \xi^i s_i, \sum_j \eta^j s_j\right) = \sum_{i,j} \xi^i H(s_i, s_j) \bar{\eta}^j$$

となる。

$E$  の断面  $\xi, \eta$  に対して

$$dH(\xi, \eta) = H(\nabla \xi, \eta) + H(\xi, \nabla \eta)$$

が成り立つとき、接続  $\nabla$  は Hermitian 構造  $H$  を保つという。上記等式は任意の接ベクトル  $X$  に対して

$$XH(\xi, \eta) = dH(\xi, \eta)(X) = H(\nabla_X \xi, \eta) + H(\xi, \nabla_X \eta)$$

が成り立つことである。ベクトル束の Hermitian 構造が存在することの証明と同様に、局所的に Hermitian 構造を保つ接続は存在し、単位の分割を使うと全体で Hermitian 構造を保つ接続が存在することがわかる。

接続  $\nabla$  が Hermitian 構造  $H$  を保つことをフレームを使って表現する。まずフレーム  $s$  に対して

$$\nabla s_i = \sum_k s_k \omega_i^k, \quad \nabla s = s\omega$$

によって接続形式  $\omega$  が定まる。 $\nabla$  が  $H$  を保つことは  $dH_s = {}^t \omega H_s + H_s \bar{\omega}$  と表せる。この等式の両辺をさらに微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= ddH_s = d{}^t \omega H_s - {}^t \omega \wedge dH_s + dH_s \wedge \bar{\omega} + H_s d\bar{\omega} \\ &= {}^t d\omega H_s - {}^t \omega \wedge ({}^t \omega H_s + H_s \bar{\omega}) + ({}^t \omega H_s + H_s \bar{\omega}) \wedge \bar{\omega} + H_s d\bar{\omega} \\ &= ({}^t d\omega - {}^t \omega \wedge {}^t \omega) H_s + H_s (\bar{\omega} \wedge \bar{\omega} + d\bar{\omega}). \end{aligned}$$

ここで、 $M$ の接ベクトル $X, Y$ に対して

$$\begin{aligned} ({}^t\omega \wedge {}^t\omega)(X, Y) &= {}^t\omega(X){}^t\omega(Y) - {}^t\omega(Y){}^t\omega(X) = {}^t(\omega(Y)\omega(X) - \omega(X)\omega(Y)) \\ &= -{}^t(\omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X)) = -{}^t(\omega \wedge \omega)(X, Y) \end{aligned}$$

となるので、

$$0 = {}^t(d\omega + \omega \wedge \omega)H_s + H_s \overline{{}^t(d\omega + \omega \wedge \omega)} = {}^t\Omega H_s + H_s \bar{\Omega}$$

を得る。以上より、Hermite構造を保つ接続 $\nabla$ の接続形式 $\omega$ とその曲率形式 $\Omega$ は次の等式を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned} {}^t\omega H_s + H_s \bar{\omega} &= dH_s, \\ {}^t\Omega H_s + H_s \bar{\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

フレーム $s$ がユニタリになる場合、すなわち $H_s = I$ となる場合、上の等式は

$$\begin{aligned} {}^t\omega + \bar{\omega} &= 0, \\ {}^t\Omega + \bar{\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

すなわち、 $\omega, \Omega$ は交代 Hermite 行列に値を持つ一次微分形式、二次微分形式になる。このとき、

$$\begin{aligned} \det \left( I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) &= \det {}^t \left( I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) = \det \left( I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} {}^t\Omega \right) \\ &= \det \left( I - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\Omega} \right) = \overline{\det \left( I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right)} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、各 $P_j(\Omega)$ は $M$ 上の実微分形式になり、 $[P_j(\Omega)]$ は $M$ の実係数 de Rham コホモロジー類になる。

## 2.3 正則ベクトル束

前節では多様体 $M$ は実多様体という前提で議論をしていたが、この節では $M$ は複素多様体とする。 $E$ を $M$ 上の複素ベクトル束とする。定義域が $M$ 全体を覆う局所的なフレームの族の間の変換関数が $GL(q, \mathbb{C})$ に値を持つ正則関数になるようにとれるとき、 $E$ を正則ベクトル束という。 $M$ の複素座標と $E$ の局所的なフレームの成分により、 $E$ は複素多様体になる。

複素多様体の複素座標 $z_1, \dots, z_n$ から定まる $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ の張る接ベクトル全体は、正則ベクトル束になることがわかる。

$E$ を複素多様体 $M$ 上の正則ベクトル束とする。 $M$ の開集合 $U$ 上定義された $E$ 断面を $U$ から $E$ への写像とみなすと正則写像になるとき、正則断面という。 $E$ のフレーム $s = (s_1, \dots, s_q)$ の各 $s_i$ が正則断面であるとき、 $s$ を正則フレームと呼ぶ。正則フレームの間の変換関数は正則関数になる。正則フレームを利用して、 $E$ の断面 $\xi$ に対して $\bar{\partial}\xi$ を定めることができる。

正則フレーム  $s$  を利用して、 $E$  の断面  $\xi$  に対して  $\bar{\partial}\xi$  を次のように定めることができる。

$$\xi = \sum_i \xi^i s_i$$

によって  $\xi$  を正則フレームによって局所表示し、

$$\bar{\partial}\xi = \sum_i \bar{\partial}\xi^i s_i$$

によって  $\bar{\partial}\xi$  を定める。この定め方は正則フレームのとり方に依存しないで定まることがわかる。

**命題 2.3.1** 複素多様体上の Hermite 構造を持つ正則ベクトル束に対して、Hermite 構造を保ち、正則フレームに関する接続形式が  $(1, 0)$  型になる接続が一意的に存在する。

**証明**  $dH_s = {}^t\omega H_s + H_s \bar{\omega}$  を  $(1, 0)$  型と  $(0, 1)$  型の和に分解すると  $dH_s = \partial H_s + \bar{\partial}H_s$  となる。 $\omega$  が  $(1, 0)$  型であるための必要十分条件は

$${}^t\omega H_s = \partial H_s, \quad H_s \bar{\omega} = \bar{\partial}H_s$$

である。最初の条件は転置をとると  ${}^tH_s \omega = \partial^t H_s$  と同値であり、 $H_s$  は Hermite 行列なので、 $\bar{H}_s \omega = \partial \bar{H}_s$  と同値である。両辺の複素共役をとると  $H_s \bar{\omega} = \bar{\partial}H_s$  となる。したがって、 $\omega$  が  $(1, 0)$  型であるための必要十分条件は  ${}^tH_s \omega = \partial^t H_s$  である。さらにこれは  ${}^t\omega = \partial H_s H_s^{-1}$  と同値であり、これによって  $\omega$  は  $H_s$  から一意的に定まる。

${}^t\omega = \partial H_s H_s^{-1}$  によって、正則フレーム  $s$  に関する接続形式  $\omega$  を定める。別の正則フレーム  $s'$  に対して  $s' = sg$  が成り立つとすると、 $g$  は  $GL(q, \mathbb{C})$  に値を持つ正則関数になる。 $\bar{\partial}g = 0$ ,  $dg = \partial g$  が成り立つことに注意しておく。Hermite 構造から定まる行列は  $H_{s'} = {}^t g H_s \bar{g}$  と変換される。

$$\begin{aligned} {}^t\omega' &= \partial H_{s'} H_{s'}^{-1} = \partial({}^t g H_s \bar{g}) ({}^t g H_s \bar{g})^{-1} = (\partial^t g H_s \bar{g} + {}^t g \partial H_s \bar{g}) \bar{g}^{-1} H_s^{-1} g^{-1} \\ &= {}^t \partial g {}^t g^{-1} + {}^t g \partial H_s H_s^{-1} {}^t g^{-1} = {}^t dg {}^t g^{-1} + {}^t g {}^t \omega {}^t g^{-1} \end{aligned}$$

となり、転置をとると  $\omega' = g^{-1} dg + g^{-1} \omega g$  を得る。したがって、 $g\omega' = dg + \omega g$  となり、 $\omega$  は接続形式の変換規則を満たし、 $E$  上の接続を定めることがわかる。 $\omega$  から定まる接続が  $E$  の Hermite 構造を保つことと  $\omega$  が  $(1, 0)$  型であることは定め方よりわかる。

複素多様体上の Hermite 構造を持つ正則ベクトル束に対して、Hermite 構造を保ち接続形式が  $(1, 0)$  型になる一意的な接続を Hermite 接続と呼ぶ。

正則フレームに関する Hermite 接続の局所表示は

$$\nabla \xi = \sum_i \left( \sum_j \xi^j \omega_j^i + \partial \xi^i \right) s_i + \bar{\partial} \xi$$

と  $(1, 0)$  型と  $(0, 1)$  型に分解される。

Hermite 構造を持つ正則ベクトル束の Hermite 接続の曲率形式を求めてみよう。  
 ${}^t\omega = \partial H_s H_s^{-1}$  の両辺を微分すると、 $d = \partial + \bar{\partial}$  かつ  $\partial\bar{\partial} = 0$  より

$${}^t d\omega = \bar{\partial}\partial H_s H_s^{-1} - \partial H_s \wedge d(H_s^{-1}).$$

ここで、 $I = H_s H_s^{-1}$  の両辺を微分して  $d(H_s^{-1}) = -H_s^{-1} dH_s H_s^{-1}$  を得る。よって

$${}^t d\omega = \bar{\partial}\partial H_s H_s^{-1} + \partial H_s \wedge H_s^{-1} dH_s H_s^{-1} = \bar{\partial}\partial H_s H_s^{-1} + \partial H_s H_s^{-1} \wedge dH_s H_s^{-1}.$$

次に

$${}^t\omega \wedge {}^t\omega = \partial H_s H_s^{-1} \wedge \partial H_s H_s^{-1}$$

であり、外積の定義より  ${}^t\omega \wedge {}^t\omega = -{}^t(\omega \wedge \omega)$  を得る。以上より

$${}^t\Omega = \bar{\partial}\partial H_s H_s^{-1} + \partial H_s H_s^{-1} \wedge \bar{\partial} H_s H_s^{-1}$$

を得る。特に曲率形式  $\Omega$  は  $(1, 1)$  型微分形式である。

ファイバーが 1 次元の場合を考える。 $q = 1$  だから  $H$  は正の実数に値を持つ関数になり、 $\Omega$  は純虚数に値を持つ 1 次微分形式になる。 $\log H$  を考えることができ、

$$\bar{\partial}\partial \log H = \bar{\partial}\partial H H^{-1} + \partial H H^{-1} \wedge \bar{\partial} H H^{-1} = \Omega.$$

したがって、 $\Omega = \bar{\partial}\partial \log H$  を得る。 $\Omega$  は後で示すように  $M$  全体で定義された 1 次微分形式になる。

複素多様体  $M$  上の正則関数の芽の層を  $\mathcal{O}$  で表し、加法によって abel 群の層とみなす。 $M$  上の 0 にならない正則関数の芽の層を  $\mathcal{O}^*$  で表し、乗法によって abel 群の層とみなす。局所的に正則関数の商になる関数を有理型関数という。 $M$  上の有理型関数の芽の層を  $\mathcal{M}$  で表す。 $\mathcal{O}^*$  の各点の茎は  $\mathcal{M}$  の茎の部分群になる。このようなときに、 $\mathcal{O}^*$  は  $\mathcal{M}$  の部分層という。さらに  $\mathcal{O}^*$  の局所的な断面の成す群は、 $\mathcal{M}$  の局所的な断面の成す群の部分とみなせ、商群を考えることができ、それから層  $\mathcal{D}$  を定めることができる。この  $\mathcal{D}$  について、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M} \xrightarrow{k} \mathcal{D} \rightarrow 0$$

は層の完全系列になる。 $\mathcal{D}$  の各元を因子の芽といい、 $\mathcal{D}$  を因子の芽の層という。因子の芽とは、局所的な有理型関数の芽を 0 にならない正則関数倍したものの同士を同一視したものである。上の層の完全系列から、それらのコホモロジーの完全系列を得る。

$$0 \rightarrow H^0(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{i_*^0} H^0(M, \mathcal{M}) \xrightarrow{k_*^0} H^0(M, \mathcal{D}) \xrightarrow{\delta_*^0} H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow \dots$$

よって、商群  $H^0(M, \mathcal{D})/k_*^0 H^0(M, \mathcal{M})$  は  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  の部分群  $\delta_*^0 H^0(M, \mathcal{D})$  に同型である。 $H^0(M, \mathcal{D})$  の元を因子と呼ぶ。二つの因子が  $M$  上の有理型関数倍で一致するとき、これらは線形同値であるという。これは同値関係になり、その同値類を因子類という。商群  $H^0(M, \mathcal{D})/k_*^0 H^0(M, \mathcal{M})$  は因子類の全体にほかならない。これを因子類群と呼ぶ。上でみたように因子類群は自然に  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  の部分群とみなせる。



定理 2.2.1 の証明でみたように、 $M$  上の 0 にならない複素数値  $C^\infty$  級関数の芽の層を  $\Omega^*$  で表すと、 $M$  上の複素線束の同型類全体はテンソル積により群になり、 $H^1(M, \Omega^*)$  と同一視できる。複素線束が正則ベクトル束になるとき、単に正則線束と呼ぶことにする。複素線束の場合と同様の議論により、 $M$  上の正則線束の同型類全体はテンソル積により群になり、 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  と同一視できる。

以下で  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  を詳しく調べる。定理 2.2.1 の証明中に定義した写像

$$e : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^* ; z \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$$

は層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

を誘導する。さらにこの層の完全系列はコホモロジーの完全系列を誘導し、特に準同型写像

$$\delta_*^1 : H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(M, \mathcal{Z})$$

を得る。正則線束  $E \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$  に対して、 $\delta_*^1(E) \in H^2(M, \mathcal{Z})$  は定理 2.2.1 の証明の後で定義した Chern 類である。

以下で上記準同型写像  $\delta_*^1$  の像を記述する。 $M$  上の複素数値  $C^\infty$  級  $r$  次微分形式の芽の層を  $\Omega^r$  で表していた。 $M$  上の実数値  $C^\infty$  級  $r$  次微分形式の芽の層を  $\Omega_R^r$  で表すことにする。さらに  $M$  上の実数値  $C^\infty$  級  $r$  次閉微分形式の芽の層を  $\mathcal{C}_R^r$  で表す。すると  $\mathcal{C}_R^r$  は  $\Omega_R^r$  の部分層になる。Poincaré の補題より

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_R^r \xrightarrow{l^r} \Omega_R^r \xrightarrow{d^r} \mathcal{C}_R^{r+1} \rightarrow 0$$

は層の完全系列になる。これより次のコホモロジーの完全系列を得る。ただし、多様体  $M$  は省略して記述する。

$$\cdots \rightarrow H^p(\mathcal{C}_R^r) \xrightarrow{l_*^{p,r}} H^p(\Omega_R^r) \xrightarrow{d_*^r} H^p(\mathcal{C}_R^{r+1}) \xrightarrow{\delta_*^{p,r}} H^{p+1}(\mathcal{C}_R^r) \rightarrow \cdots$$

$\Omega_R^r$  は細層であることに注意する。 $p = 0, r = 1$  の場合は

$$H^0(\Omega_R^1) \xrightarrow{d_*^1} H^0(\mathcal{C}_R^2) \xrightarrow{\delta_*^{0,1}} H^1(\mathcal{C}_R^1) \xrightarrow{l_*^{1,1}} H^1(\Omega_R^1) = 0$$

は完全系列になる。よって、 $\delta_*^{0,1}$  は全射になる。 $p = 1, r = 0$  の場合は、 $\mathcal{C}_R^0 = \mathbf{R}$  に注意すると

$$0 = H^1(\Omega_R^0) \xrightarrow{d_*^1} H^1(\mathcal{C}_R^1) \xrightarrow{\delta_*^{1,0}} H^2(\mathbf{R}) \xrightarrow{l_*^{2,0}} H^2(\Omega_R^0) = 0$$

は完全系列になる。よって、 $\delta_*^{1,0}$  は同型写像になる。

自然な埋め込みである群の準同型写像  $j : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $M$  上の定数層の準同型写像、さらにそれらのコホモロジーの準同型写像  $j_*^r : H^r(\mathcal{Z}) \rightarrow H^r(\mathbf{R})$  を誘導する。先に得た準同型写像  $\delta_*^1 : H^1(\mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\mathcal{Z})$  と合せて次の系列を得る。

$$H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_*^1} H^2(\mathcal{Z}) \xrightarrow{j_*^2} H^2(\mathbf{R}).$$

これまでの図式をまとめて書くと次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow d_*^1 & & \\
 H^0(\Omega_R^1) & \xrightarrow{d_*^1} & H^0(\mathcal{C}_R^2) & \xrightarrow{\delta_*^{0,1}} & H^1(\mathcal{C}_R^1) & \xrightarrow{l_*^{1,1}} & 0 \\
 & & & & \cong \downarrow \delta_*^{1,0} & & \\
 H^1(\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta_*^1} & H^2(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{j_*^2} & H^2(\mathbf{R}) & & \\
 & & & & \downarrow l_*^{2,0} & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

$M$  上の正則線束  $E$  は  $H^1(\mathcal{O}^*)$  の元とみなせ、 $\delta_*^1(E) \in H^2(\mathbf{Z})$  である。さらにこれを実係数で考えると  $j_*^2 \delta_*^1(E) \in H^2(\mathbf{R})$ 。上の  $\delta_*^{1,0}$  は同型なので、 $(\delta_*^{1,0})^{-1} j_*^2 \delta_*^1(E) \in H^1(\mathcal{C}_R^1)$  が定まる。上の  $\delta_*^{0,1}$  は全射だから、 $M$  上の実数値  $C^\infty$  級 2 次閉微分形式  $\alpha$  が存在して、

$$\delta_*^{0,1} \alpha = (\delta_*^{1,0})^{-1} j_*^2 \delta_*^1(E) \in H^1(\mathcal{C}_R^1)$$

が成り立つ。この  $\alpha$  のとり方は  $M$  上の実数値  $C^\infty$  級 1 次微分形式の外微分の和を除いて一意的に定まる。この  $\alpha$  の形を明らかにしたい。

その前に正則線束  $E$  に Hermite 構造を定めたとき、一意的に存在する Hermite 接続について考察しておく。 $\mathcal{U}$  を  $M$  の開被覆であって、各  $U \in \mathcal{U}$  上  $E$  は正則なフレーム  $s_U$  を持つとする。 $E$  の Hermite 構造を  $H$  で表し

$$h_U = H(s_U, s_U) > 0$$

とおく。 $U \cap V \neq \emptyset$  となる  $V \in \mathcal{U}$  に対して

$$s_U g_{UV} = s_V \quad (U \cap V \text{ 上})$$

によって変換関数  $g_{UV}$  を定める。 $g_{UV}$  は  $U \cap V$  上定義された正則関数である。よって  $U \cap V$  上

$$h_V = H(s_V, s_V) = H(s_U g_{UV}, s_U g_{UV}) = H(s_U, s_U) g_{UV} \bar{g}_{UV} = h_U |g_{UV}|^2$$

が成り立つ。これより  $U \cap V$  上

$$\bar{\partial} \partial \log h_V = \bar{\partial} \partial (\log h_U + \log g_{UV} + \log \bar{g}_{UV}) = \bar{\partial} \partial \log h_U$$

を得る。したがって、 $\bar{\partial} \partial \log h_U$  は  $M$  上の  $C^\infty$  級  $(1, 1)$  型微分形式を定める。これは正則線束  $E$  の曲率形式  $\Omega$  である。

$M$  に Riemann 計量を導入し、 $U$  の各元はその Riemann 計量に関して凸になるようにとる。すると、 $U \cap V \neq \emptyset$  のとき、 $U \cap V$  もまた凸になる。特に  $U \cap V$  は単連結になる。層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

に対応する層係数コホモロジーの長い完全系列を利用する。開被覆  $\mathcal{U}$  が定める脈体  $N(\mathcal{U})$  の層  $\mathcal{O}^*$  を係数とする 1 コサイクル  $\{g_{UV}\}$  が正則線束  $E$  を定めている。

$$g_{UV} = e(f_{UV}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}f_{UV})$$

を満たす  $U \cap V$  上で定義された正則関数  $f_{UV}$  をとることができる。

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}f_{VU}) = g_{VU} = g_{UV}^{-1} = \exp(-2\pi\sqrt{-1}f_{UV})$$

となるので、 $f_{VU} = -f_{UV}$  となるように定める。 $\{f_{UV}\}$  は脈体  $N(\mathcal{U})$  の層  $\mathcal{O}$  を係数とする 1 コチェインであり、 $e_*^1\{f_{UV}\} = \{g_{UV}\}$  が成り立つ。 $c = \delta^1\{f_{UV}\}$  とおくと、 $c$  は脈体  $N(\mathcal{U})$  の定数層  $\mathcal{Z}$  を係数とする 2 コチェインである。 $U, V, W \in \mathcal{U}$  が  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$  を満たすとき、 $U \cap V \cap W$  において

$$c_{UVW} = \delta^1(f) = f_{VW} - f_{UW} + f_{UV}$$

となる。これが  $\delta_*^1(E)$  を定める。さらに  $j_*^2\delta_*^1(E) = j_*^2([c]) \in H^2(\mathbf{R})$  である。 $\delta_*^{1,0}$  によって  $j_*^2\delta_*^1(E) = j_*^2([c])$  に写る  $H^1(\mathcal{C}_R^1)$  の元の代表元を求める。

層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_R^0 \xrightarrow{l^0} \Omega_R^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}_R^1 \rightarrow 0$$

に対応する層係数コホモロジーの長い完全系列を利用する。 $\mathcal{C}_R^0$  は定数層  $R$  であることに注意しておく。 $N(\mathcal{U})$  の  $\mathcal{C}_R^1$  を係数とする 1 コサイクル  $\{\frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV})\}$  をとる。これが 1 コサイクルになることは、後の計算からわかる。これは  $N(\mathcal{U})$  の  $\Omega_R^0$  を係数とする 1 コチェイン  $\{\frac{1}{2}(f_{UV} + \bar{f}_{UV})\}$  の  $d_*^0$  による像である。 $\{\frac{1}{2}(f_{UV} + \bar{f}_{UV})\}$  にコバウンダリ作用素  $\delta^1$  を作用させると

$$\delta^1 \left\{ \frac{1}{2}(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) \right\} = \left\{ \frac{1}{2}(c_{UVW} + \bar{c}_{UVW}) \right\} = \{c_{UVW}\}.$$

ここで、最後の等号は  $c_{UVW}$  が整数値であることから得られる。 $\{c_{UVW}\}$  は  $N(\mathcal{U})$  の定数層  $R$  を係数とする 2 コチェインであり、

$$\delta_*^{1,0} \left\{ \frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) \right\} = \{c_{UVW}\} = j_*^2\delta_*^1(E)$$

が成り立つ。

以下で  $\frac{1}{2}(f_{UV} + \bar{f}_{UV})$  を正則線束の Hermite 構造を使って記述する。

$$g_{UV} = \exp(2\pi\sqrt{-1}f_{UV})$$

の両辺を微分すると、

$$\partial g_{UV} = \exp(2\pi\sqrt{-1}f_{UV})2\pi\sqrt{-1}\partial f_{UV} = g_{UV}2\pi\sqrt{-1}\partial f_{UV}$$

となり

$$\partial f_{UV} = \frac{\partial g_{UV}}{2\pi\sqrt{-1}g_{UV}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial \log g_{UV}$$

を得る。これらより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})(\log g_{UV} + \log \bar{g}_{UV}) \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log |g_{UV}|^2 = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log \frac{h_V}{h_U} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})(-\log h_U + \log h_V). \end{aligned}$$

よって

$$(*) \quad \frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})(-\log h_U + \log h_V)$$

を得る。この等式より、 $\{\frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV})\}$  が 1 コサイクルであることがわかる。

層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_R^1 \xrightarrow{l^1} \Omega_R^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}_R^2 \rightarrow 0$$

に対応する層係数コホモロジーの長い完全系列を利用する。 $N(\mathcal{U})$  の  $\Omega_R^1$  を係数とする 0 コチェイン  $\{\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log h_U\}$  について考える。

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}d(\partial - \bar{\partial})\log h_U = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\bar{\partial}\partial\log h_U = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega.$$

よって 0 コチェイン  $\{\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log h_U\}$  の  $d_*^1$  による像は、 $N(\mathcal{U})$  の  $\mathcal{C}_R^2$  を係数とする 0 コサイクル  $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega$  になる。 $\{\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log h_U\}$  にコバウンダリ作用素を作用させると、(\*) より

$$\begin{aligned} \delta_*^0 \left\{ \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})\log h_U \right\} &= \left\{ \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})(-\log h_U + \log h_V) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) \right\}. \end{aligned}$$

さらに最後の項は  $N(\mathcal{U})$  の  $\mathcal{C}_R^1$  を係数とする 1 コサイクルである。以上より、

$$\delta_*^{0,1} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega = \left\{ \frac{1}{2}d(f_{UV} + \bar{f}_{UV}) \right\} = (\delta_*^{1,0})^{-1} j_*^2 \delta_*^1(E).$$

以上をまとめると次の定理を得る。

**定理 2.3.2** 複素多様体  $M$  上の正則線束  $E$  に対応する  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  の元も  $E$  で表す。 $E$  の Chern 類を  $\delta_*^1(E) \in H^2(M, \mathbf{Z})$  で表す。 $E$  に Hermite 構造を入れ、その Hermite 接続の曲率形式を  $\Omega$  で表す。 $j: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  とすると、 $j_*^2 \delta_*^1(E) \in H^2(M, \mathbf{R})$  は  $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega$  を代表元に持つ。

例 2.1.6 は係数を実数にしても同型  $H^q(M, \mathbf{R}) \cong H^q(\Gamma(M, \Omega_{\mathbf{R}}^*), d^*)$  を得る。これより、 $Z^2(M) = \{\alpha \in \Omega_{\mathbf{R}}^2 \mid d\alpha = 0\}$ ,  $B^2(M) = d\Omega_{\mathbf{R}}^1$  とおくと、 $H^2(M, \mathbf{R}) \cong Z^2(M)/B^2(M)$  である。(1, 1) 型微分形式を代表元に持つ  $Z^2(M)/B^2(M)$  の元に対応する  $H^2(M, \mathbf{R})$  の元全体を  $H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{R})$  で表す。 $H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{Z}) = j_*^{-1}H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{R})$  とすると、次の定理が成り立つ。

定理 2.3.3 定理 2.3.2 の設定のもとで  $\delta_*^1 H^1(M, \mathcal{O}^*) = H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{Z})$  が成り立つ。

証明 定理 2.3.2 より包含関係  $\delta_*^1 H^1(M, \mathcal{O}^*) \subset H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{Z})$  を得る。逆の包含関係  $H_{(1,1)}^2(M, \mathbf{Z}) \subset \delta_*^1 H^1(M, \mathcal{O}^*)$  を以下で示す。層やコホモロジーの記述では  $M$  を省略する。層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

の誘導する層係数コホモロジーの完全系列

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*^1} H^1(\mathcal{O}) \xrightarrow{e_*^1} H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_*^1} H^2(\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*^2} H^2(\mathcal{O}) \rightarrow \cdots$$

において  $i_*^2 H_{(1,1)}^2(\mathbf{Z}) = 0$  を示せばよい。なぜならば、

$$H_{(1,1)}^2(\mathbf{Z}) \subset \ker i_*^2 = \delta_*^1 H^1(\mathcal{O}^*)$$

となるからである。

$M$  上の複素値  $C^\infty$  級  $r$  次閉微分形式の芽の層を  $\mathcal{C}^r$  で表す。すると  $\mathcal{C}^r$  は  $\Omega^r$  の部分層になる。 $M$  上の複素値  $C^\infty$  級  $(p, q)$  型  $\bar{\partial}$  閉微分形式の芽の層を  $\mathcal{C}^{(p,q)}$  で表す。すると  $\mathcal{C}^{(p,q)}$  は  $\Omega^{(p,q)}$  の部分層になる。 $\mathcal{C}^0$  は定数層  $C$  に一致し、 $\mathcal{C}^{(0,0)}$  は  $\mathcal{O}$  に一致する。図式 (\*)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^r & \xrightarrow{i} & \Omega^r & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{r+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Pi^{(0,r)} & & \downarrow \Pi^{(0,r)} & & \downarrow \Pi^{(0,r+1)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{(0,r)} & \xrightarrow{i'} & \Omega^{(0,r)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{C}^{(0,r+1)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

において、 $i, i'$  は自然な埋め込みである。

$$\Omega^r = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{(p,q)}$$

に関する各成分への自然な射影を  $\Pi^{(p,q)}$  で表す。Poincaré の補題より図式 (\*) の上の水平な系列は完全系列になり、Dolbeault-Grothendieck の補題より図式 (\*) の下の水平な系列は完全系列になる。 $r$  次微分形式  $\alpha$  を  $(p, q)$  型微分形式  $\alpha^{p,q} = \Pi^{(p,q)}\alpha$  の和に分解すると、

$$\Pi^{(0,r+1)} d\alpha = \Pi^{(0,r+1)} \sum_{p+q=r} d\alpha^{p,q} = \Pi^{(0,r+1)} \sum_{p+q=r} (\partial\alpha^{p,q} + \bar{\partial}\alpha^{p,q}) = \bar{\partial}\alpha^{0,r} = \bar{\partial}\Pi^{(0,r)}\alpha.$$

したがって、図式(\*)は可換になる。特に図式(\*)の $r = 0$ の場合に $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^{(0,0)} = \mathcal{O}$ を適用し、次のコホモロジーの長い可換完全系列を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H^1(\Omega^0) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^1) & \xrightarrow{\Delta^1} & H^2(\mathcal{C}) & \longrightarrow & H^2(\Omega^0) = 0 \\ & & \downarrow \Pi^{(0,0)} & & \downarrow \Pi^{(0,1)} & & \\ 0 = H^1(\Omega^{(0,0)}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^{(0,1)}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}^1} & H^2(\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^2(\Omega^{(0,0)}) = 0 \end{array}$$

したがって、 $\Delta^1$ と $\tilde{\Delta}^1$ は同型写像である。図式(\*)の $r = 1$ の場合から次のコホモロジーの長い可換完全系列を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\Omega^1) & \xrightarrow{d_*} & H^0(\mathcal{C}^2) & \xrightarrow{\delta_*} & H^1(\mathcal{C}^1) & \longrightarrow & H^1(\Omega^1) = 0 \\ \downarrow \Pi^{(0,1)} & & \downarrow \Pi^{(0,2)} & & \downarrow \Pi^{(0,1)} & & \\ H^0(\Omega^{(0,1)}) & \xrightarrow{\bar{d}_*} & H^0(\mathcal{C}^{(0,2)}) & \xrightarrow{\bar{\delta}_*} & H^1(\mathcal{C}^{(0,1)}) & \longrightarrow & H^1(\Omega^{(0,1)}) = 0 \end{array}$$

以上より次の同型の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{C}^2)/d_*H^0(\Omega^1) & \xrightarrow[\cong]{\Delta^0} & H^1(\mathcal{C}^1) & \xrightarrow[\cong]{\Delta^1} & H^2(\mathcal{C}) \\ \downarrow \Pi^{(0,2)} & & \downarrow \Pi^{(0,1)} & & \downarrow \Pi^{(0,0)} \\ H^0(\mathcal{C}^{(0,2)})/\bar{d}_*H^0(\Omega^{(0,1)}) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Delta}^0} & H^1(\mathcal{C}^{(0,1)}) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Delta}^1} & H^2(\mathcal{O}) \end{array}$$

$i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{O}$ を自然な埋め込み $h : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}$ を使って $i = \Pi^{(0,0)} \circ h$ と分解する。 $H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z})$ の元は局所的に定義された $(1,1)$ 型微分形式によって表される。上の同型の可換図式より

$$i_*^2 H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z}) = \Pi^{(0,0)} h H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z}) = \tilde{\Delta}^1 \tilde{\Delta}^0 \Pi^{(0,2)} (\Delta^0)^{-1} (\Delta^1)^{-1} h H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z}).$$

ここで $\Pi^{(0,2)} (\Delta^0)^{-1} (\Delta^1)^{-1} h H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z}) = 0$ となるので、 $i_*^2 H^2_{(1,1)}(\mathcal{Z}) = 0$ が成り立つ。

$M$ 上の正則線束 $E \in H^1(M, \mathcal{O})$ であってChern類が $c(E) = 0$ を満たすもの全体が成す部分群について考える。完全系列

$$H^1(M, \mathcal{Z}) \xrightarrow{i_*^1} H^1(M, \mathcal{O}) \xrightarrow{e_*^1} H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_*^1} H^2(M, \mathcal{Z})$$

より $\ker \delta_*^1 = \text{ime } e^1 \cong H^1(M, \mathcal{O})/i_*^1 H^1(M, \mathcal{Z})$ が成り立つ。 $M$ が複素射影多様体の複素部分多様体のとき、これは複素トーラスになることが知られている。これを $M$ のPicard多様体という。

例 2.3.4  $E$ を複素多様体 $M$ 上の階数 $q$ の正則ベクトル束とする。 $E$ の変換関数を $g_{UV}$ で表す。 $g_{UV}$ は $GL(q, \mathcal{C})$ に値を持つ正則関数なので、 $\det g_{UV}$ は $GL(1, \mathcal{C}) = \mathcal{C} - \{0\}$ に値を持つ変換関数になる。 $\det g_{UV}$ から定まる正則線束を $\wedge^q E$ で表す。 $E$ の各点のファイバーの $q$ 次外積をファイバーにする正則線束は $\wedge^q E$ に一致する。複素多様体 $M$ の次元を $m$ とし、 $T^*$ を $M$ の余接ベクトル束とする。このとき、 $\wedge^m T^*$ を $M$ の標準線束と呼び、 $K(M)$ で表す。

## 第3章 Kähler幾何学

### 3.1 Hermite 多様体

$M$  を  $m$  次元複素多様体とする。 $M$  の接ベクトル束  $T(M)$  は正則ベクトル束になる。 $T(M)$  に Hermite 構造が与えられているとき、 $M$  を Hermite 多様体という。 $M$  の局所複素座標  $z^1, \dots, z^m$  に対して

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}$$

は  $T(M)$  の局所正則フレームになる。 $T(M)$  の Hermite 構造を  $H$  で表す。

$$h_{ij} = H \left( \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right)$$

とおくと、行列  $(h_{ij})$  は正定値 Hermite 行列になる。

1.2 節で扱った Hermite 構造から定まる Kähler 形式を Hermite 多様体でも考えることができる。Hermite 多様体の Hermite 構造  $H$  から定まる Kähler 形式  $\hat{H}$  は

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j} h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

と表される。 $\hat{H}$  は実数値  $(1,1)$  型微分形式である。Kähler 形式が閉であるとき、すなわち  $d\hat{H} = 0$  が成り立つとき、Hermite 多様体  $M$  を Kähler 多様体という。

$T = T(M)$  の局所フレーム  $s = (s_1, \dots, s_m)$  をとる。 $s$  は正則であることは仮定しない。 $s$  の双対フレームを  $\sigma = {}^t(\sigma^1, \dots, \sigma^m)$  とする。 $\sigma^i$  は  $(1,0)$  型微分形式である。 $x \in M$  とする。 $\xi \in T_x$  と  $\omega \in T_x^*$  に対して、 $\langle \xi, \omega \rangle$  によってこれらのとる値を表す。もう一つの局所フレーム  $s'$  とその双対フレーム  $\sigma'$  について、

$$\langle s_i, \sigma^k \rangle = \langle s'_i, \sigma'^k \rangle = \delta_i^k$$

が成り立つ。 $s$  から  $s'$  への変換行列を  $g$  で表す。すなわち

$$s'_i = \sum_j g_i^j s_j$$

であり、行列による表示は

$$(s'_1, \dots, s'_m) = (s_1, \dots, s_m) \begin{pmatrix} g_1^1 & \cdots & g_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ g_m^1 & \cdots & g_m^m \end{pmatrix}$$

となる。これを簡単に  $s' = sg$  とも書く。

$$\sigma^l = \sum_k g_k^l \sigma'^k$$

が成り立つ。行列による表示は

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^1 & \cdots & g_m^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_1^m & \cdots & g_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'^1 \\ \vdots \\ \sigma'^m \end{pmatrix}$$

である。これを簡単に  $\sigma = g\sigma'$  とも書く。

$\sigma = g\sigma'$  の両辺を外微分することにより

$$d\sigma + \omega \wedge \sigma = g(\omega' \wedge \sigma')$$

を得る。これは、 $\sigma, \sigma'$  の変換と同じ変換を受けている。

$$\tau = d\sigma + \omega \wedge \sigma$$

とにおいて、 $\tau$  を捩率形式と呼ぶ。

**定理 3.1.1** 複素多様体の Hermite 構造の接続形式が  $(1, 0)$  型であるための必要十分条件は、捩率形式が  $(2, 0)$  型になることである。

**定理 3.1.2** Hermite 多様体が Kähler 多様体になるための必要十分条件は、捩率形式が  $0$  になることである。

証明の概略 局所正則フレーム  $s_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$  をとる。各  $j$  について

$$\sum_{i,k} \frac{\partial h_{ij}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i = 0$$

が成り立つことが、 $\tau = 0$  の必要十分条件であり、かつ  $d\hat{H} = 0$  の必要十分条件であることもわかる。

**定理 3.1.3** Hermite 多様体が Kähler 多様体であるための必要十分条件は、局所的に  $C^\infty$  級実数値関数  $u$  が存在して  $\hat{H} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$  が成り立つことである。

証明の概略 Poincaré の補題および Dolbeault-Grothendieck の補題より、定理の関数の存在がわかる。



## 3.2 Kähler 多様体の例

### 例 3.2.1 複素数ベクトル空間

$$C^n = \{(z^1, \dots, z^n) \mid z^i \in C\}$$

に

$$H \left( \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right) = \delta_{ij}$$

によって Hermite 構造を定める。Kähler 形式は

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n dz^i \wedge d\bar{z}^i$$

となり、 $d\hat{H} = 0$  である。したがって、 $C^n$  は Kähler 多様体である。Hermite 構造から定まる Hermite 接続の接続形式は

$${}^t\omega = \partial H H^{-1} = 0$$

を満たし、 $\omega = 0$  が成り立つ。これより、曲率形式は

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = 0$$

となる。

例 3.2.2 例 1.1.3 で扱った複素射影空間に Kähler 多様体の構造が入ることを確かめる。設定や記号は例 1.1.3 に従う。開集合  $U \subset CP^n$  において定義された正則写像  $Z : U \rightarrow C^{n+1} - \{0\}$  が  $P \circ Z = \text{id}_U$  を満たすとする。このとき、 $Z = (z^0, \dots, z^n)$  と表し、

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=0}^n |z^i|^2, \quad \omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \partial \log \|Z\|^2$$

によって  $\omega$  を定めると、 $\omega$  は  $U$  上の  $(1, 1)$  型の実数値微分形式になる。たとえば

$$Z : U_i \rightarrow C^{n+1} - \{0\}; \quad P(z^0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, z^n) \mapsto (z^0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, z^n)$$

は上の条件を満たす。同じ条件  $P \circ Z' = \text{id}_U$  を満たす正則写像  $Z' : U \rightarrow C^{n+1} - \{0\}$  は、 $U$  上の 0 にならない正則関数  $f$  によって  $Z' = fZ$  と表せる。このとき

$$\bar{\partial} \partial \log \|Z'\|^2 = \bar{\partial} \partial \log \|fZ\|^2 = \bar{\partial} \partial (\log \|Z\|^2 + \log f + \log \bar{f}) = \bar{\partial} \partial \log \|Z\|^2$$

が成り立つので、 $\omega$  は  $CP^n$  上の  $(1, 1)$  型の実数値微分形式になる。 $U_0$  の点

$$P(1, z^1, \dots, z^n)$$

に対して  $z^1, \dots, z^n$  は複素座標になる。さらに

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \partial \log \left( 1 + \sum_{i=1}^n z^i \bar{z}^i \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \frac{\partial \sum_i z^i \bar{z}^i}{1 + \sum_i z^i \bar{z}^i} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \frac{\sum_i dz^i \bar{z}^i}{1 + \sum_i z^i \bar{z}^i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left( \frac{-\sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i}{1 + \sum_i z^i \bar{z}^i} - \frac{\sum_i z^i d\bar{z}^i \wedge \sum_i dz^i \bar{z}^i}{(1 + \sum_i z^i \bar{z}^i)^2} \right).\end{aligned}$$

$P(1, 0, \dots, 0) \in U_0$  においては

$$\omega = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i$$

となり、対応する Hermite 構造は正定値になる。

ユニタリ群  $U(n+1)$  は  $C^{n+1} - \{0\}$  に作用する。この作用は  $U(n+1)$  の  $CP^n$  への作用を誘導し、この  $U(n+1)$  の  $CP^n$  への作用は推移的である。さらに  $U(n+1)$  の作用は  $\|Z\|^2$  を不変にし、 $U(n+1)$  の作用は  $\omega$  も不変にすることがわかる。これより、 $\omega$  に対応する Hermite 構造は  $P(1, 0, \dots, 0)$  に限らず  $CP^n$  のすべての点において正定値になる。対応する Kähler 形式は  $\omega$  であり、 $\omega$  の定め方より  $\omega$  は閉微分形式である。したがって、 $CP^n$  は Kähler 多様体になる。

**例 3.2.3**  $M$  を Kähler 多様体  $N$  の複素部分多様体とする。 $N$  の Hermite 構造は自然に  $M$  の Hermite 構造を誘導する。さらに  $M$  の Kähler 形式は  $N$  の Kähler 形式の引き戻しになり、閉微分形式であることがわかる。したがって、 $M$  も Kähler 多様体になる。特に  $C^n$  や  $CP^n$  の複素部分多様体は Kähler 多様体になる。