数学類

微分幾何学

リーマン幾何学

田崎博之

2017年度春学期

数学類
微分幾何学
Differential Geometry
授業概要

リーマン幾何学の基本事項について講義する。

目 次

1 平面曲線

この節では、平面曲線の曲率を定め曲率が曲線の形を決めていることと曲率から曲線を構成できることを示す。

一つのパラメータによって平面の点の移動の軌跡として平面曲線を定めることにする。$\mathbb{R}$ の開区間 I 上で定義され $\mathbb{R}^2$ に値を持つ写像 $\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ について考える。$\boldsymbol{p}$ の接線の変化を調べることによって、$\boldsymbol{p}$ の曲り方をとらえる。I の元 t に対して $\boldsymbol{p}'(t)$ が 0 でなければ、$\boldsymbol{p}(t)$ における $\boldsymbol{p}$ の接線を引くことができる。そこで、任意の $t \in I$ に対して $\boldsymbol{p}'(t) \neq 0$ となるときに、像 $\boldsymbol{p}(I)$ を**平面曲線**と呼び、$\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ を**平面曲線のパラメータ表示** という。

平面曲線のパラメータ表示が

$$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$$

によって与えられているとすると、$\boldsymbol{p}'(t) \neq 0$ が成り立つ。

$$\boldsymbol{p}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

を速度ベクトルとも呼ぶことにする。運動する点の時刻 t のときの位置が $\boldsymbol{p}(t)$ であると考えると、$\boldsymbol{p}(t)$ は平面の点の移動の軌跡を表し、$\boldsymbol{p}'(t)$ はその移動の速度ベクトルとみなせる。速度ベクトルの長さは

$$\|\boldsymbol{p}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

で与えられる。パラメータが a から b $(a \leq b)$ まで動くときの曲線 C の**長さ**を

$$L(C) = \int_a^b \|\boldsymbol{p}'(t)\| dt$$

で定める。この曲線の長さの定義がパラメータの変更によって変わらないことは、積分の変数変換の公式よりわかる。始点 $t = a$ からパラメータ t までの曲線の長さを s で表すことにすると、s は t の関数であり

$$s = \int_a^t \|\boldsymbol{p}'(t)\| dt, \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \|\boldsymbol{p}'(t)\| dt = \|\boldsymbol{p}'(t)\| > 0$$

が成り立つ。最後の不等式は $\boldsymbol{p}'(t) \neq 0$ という仮定からわかる。s は t に関して単調増加になり、逆関数が存在する。つまり、t を s の関数として $t = t(s)$ を考えることもできる。これを元の曲線に代入し $(x(t(s)), y(t(s)))$ とすると、パラメータ t による表示からパラメータ s による表示を得る。このパラメータ s を曲線の**弧長パラメータ**と呼ぶ。幾何学的な意味を考えると弧長パラメータ s に関する速度ベクトルは単位ベクトルになることがわかる。曲線に対して弧長パラメータは平行移動と向きを逆にすることを除けば一意的に定まる。そのため曲線の一般論を展

開する際には、弧長パラメータは使いやすいパラメータである。そこで、$\mathbb{R}^2$ の曲線を弧長パラメータ s を使って $\boldsymbol{p}(s)$ と表す。s が弧長パラメータであることから $\boldsymbol{p}(s)$ の速度ベクトル $\boldsymbol{p}'(s)$ は単位ベクトルになり、$\mathbb{R}^2$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表すと、$\langle\boldsymbol{p}'(s),\boldsymbol{p}'(s)\rangle = 1$ が成り立つ。この両辺を s で微分すると $\langle\boldsymbol{p}'(s),\boldsymbol{p}''(s)\rangle = 0$ を得る。これは $\boldsymbol{p}'(s)$ と $\boldsymbol{p}''(s)$ が直交することを意味する。$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{p}'(s)$ とおくと $\boldsymbol{e}_1(s)$ と $\boldsymbol{e}_1'(s)$ が直交することになる。$\boldsymbol{e}_1(s)$ を反時計回りに 90 度回転したベクトルを $\boldsymbol{e}_2(s)$ で表すと、$\boldsymbol{e}_1'(s)$ と $\boldsymbol{e}_2(s)$ は線形従属になり

$$\boldsymbol{e}_1'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s)$$

を満たす関数 $\kappa(s)$ が定まる。$\kappa(s)$ が曲線の**曲率**である。ここで、$\langle\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s)\rangle = 0$ と $\langle\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_2(s)\rangle = 1$ の両辺を微分すると

$$\langle\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2'(s)\rangle = -\langle\boldsymbol{e}_1'(s),\boldsymbol{e}_2(s)\rangle = -\kappa(s), \qquad \langle\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_2'(s)\rangle = 0$$

がわかる。$\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s)$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底なので、

$$\boldsymbol{e}_2'(s) = \langle\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2'(s)\rangle\boldsymbol{e}_1(s) + \langle\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_2'(s)\rangle\boldsymbol{e}_2(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}_1(s).$$

以上より**フレネの公式**

$$\boldsymbol{e}_1'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s), \qquad \boldsymbol{e}_2'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}_1(s)$$

を得る。$\mathbb{R}^2$ の元を縦ベクトルとみなして、二つ並べたものを 2 次正方行列とみると、フレネの公式を

$$\frac{d}{ds}[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)] = [\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)]\begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

と表せる。$\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s)$ は曲線の**動標構**と呼ばれている。曲線の曲率は単位接ベクトル $\boldsymbol{e}_1(s)$ の変化を記述するものとして定めたが、曲率は動標構の変化も記述していることをフレネの公式は示している。さらにフレネの公式から曲率が曲線の形を決めていることや、曲率からもとの曲線を構成できることを示す。後で曲面の場合に話を進めるために、$\mathbb{R}^n$ の運動群を考える。

n 次実正方行列の全体を $M(n,\mathbb{R})$ で表し、

$$SO(n) = \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n,\ \det g = 1\}$$

によって n 次**回転群** $SO(n)$ を定義する。ここで，${}^t g$ は g の転置行列であり、I_n は n 次単位行列である。回転群 $SO(n)$ が行列の積に関して群になることを示しておこう。$g,h \in SO(n)$ に対して

$${}^t(gh)(gh) = {}^t h\, {}^t g g h = {}^t h I_n h = {}^t h h = I_n, \quad \det(gh) = \det(g)\det(h) = 1$$

となるので、$gh \in SO(n)$ である。

$$^t(g^{-1})g^{-1} = gg^{-1} = I_n, \quad \det(g^{-1}) = (\det g)^{-1} = 1$$

となるので、$g^{-1} \in SO(n)$ である。以上より、$SO(n)$ が行列の積に関して群になることがわかる。

動標構の定め方より $[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)]$ は $SO(2)$ の元である。これを証明する。

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$$

とおく。これは単位ベクトルなので

$$x(s)^2 + y(s)^2 = 1$$

が成り立つ。$\boldsymbol{e}_2(s)$ は $\boldsymbol{e}_1(s)$ を反時計回りに 90 度回転したベクトルだから

$$\boldsymbol{e}_2(s) = \begin{bmatrix} -y(s) \\ x(s) \end{bmatrix}$$

となる。これらより

$$^t[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)][\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)] = \begin{bmatrix} x(s) & y(s) \\ -y(s) & x(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) & -y(s) \\ y(s) & x(s) \end{bmatrix} = 1$$

$$\det[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)] = \begin{vmatrix} x(s) & -y(s) \\ y(s) & x(s) \end{vmatrix} = 1$$

となり、$[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)] \in SO(2)$ がわかる。

$\mathbb{R}^n$ の向きを変えない等長変換は $R \in SO(n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ によって次のように表せる。

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,;\, \boldsymbol{x} \mapsto R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

この作用を行列の積で実現しようとすると、

$$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \\ 1 \end{bmatrix}$$

とできる。この表現を使って、$\mathbb{R}^n$ の**運動群** $M(\mathbb{R}^n)$ を

$$M(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, R \in SO(n), \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

によって定める。$R \in SO(n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ の定める等長変換と $R' \in SO(n)$ と $\boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^n$ の定める等長変換の合成は

$$\boldsymbol{x} \mapsto R(R'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}') + \boldsymbol{v} = RR'\boldsymbol{x} + R\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}$$

となるので、RR' と $R\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}$ の定める等長変換になっている。他方、これら等長変換に対応する $n+1$ 次正方行列の積は

$$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R' & \boldsymbol{v}' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR' & R\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、上記の RR' と $R\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}$ の定める等長変換に対応する $n+1$ 次正方行列に一致する。

$M(\mathbb{R}^n)$ の元の $\mathbb{R}^n$ 成分を対応させる写像を

$$\pi_0 : M(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n; \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{v}$$

とする。

平面曲線の議論に戻る。平面曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ とその動標構 $\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s)$ を合わせたもの

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(s) & \boldsymbol{e}_2(s) & \boldsymbol{p}(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (s \in I)$$

は定義域 I から $M(\mathbb{R}^2)$ への写像になり $\boldsymbol{p} = \pi_0 \circ \tilde{\boldsymbol{p}}$ を満たす。このような性質を持つ $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を $\boldsymbol{p}$ の**持ち上げ**と呼ぶ。

平面曲線の持ち上げを考える理由は，曲率と運動群の作用との関係を表しやすくするためである。$\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_1(s) & \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_2(s) & \frac{d}{ds}\boldsymbol{p}(s) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s) & -\kappa(s)\boldsymbol{e}_1(s) & \boldsymbol{e}_1(s) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(s) & \boldsymbol{e}_2(s) & \boldsymbol{p}(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 1 \\ \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{p}}(s)\begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 1 \\ \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = \tilde{\boldsymbol{p}}(s)\begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 1 \\ \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

を得る。そこで

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 1 \\ \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

と書くことにすると、(1.2) は

$$\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = \tilde{\boldsymbol{p}}(s)K(s) \tag{1.4}$$

となり、この両辺に $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)^{-1}$ を左から掛けると、

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s)^{-1}\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = K(s) \tag{1.5}$$

を得る。

もし、同じ開区間 I で定義された平面曲線 $\boldsymbol{p}_1(s)$ と $\boldsymbol{p}_2(s)$ が，$R \in SO(2)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ によって

$$\boldsymbol{p}_2(s) = R\boldsymbol{p}_1(s) + \boldsymbol{v} \quad (s \in I)$$

を満たすとき、$R, \boldsymbol{v}$ から定まる $M(\mathbb{R}^2)$ の元を

$$A = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

で表すと、$\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) = A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)$ が成り立つ。これは次のようにわかる。まず、$\boldsymbol{p}_1(s)$ と $\boldsymbol{p}_2(s)$ の関係式の両辺を s で微分すると、$\boldsymbol{p}_1(s)$ の速度ベクトルに R を作用させると $\boldsymbol{p}_2(s)$ の速度ベクトルに一致する。これらを反時計回りに 90 度回転したベクトルについても同様である。よって、$\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) = A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)$ が成り立つことがわかる。この等式から

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)^{-1}\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) &= (A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s))^{-1}\frac{d}{ds}(A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)) = \tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}A^{-1}A\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s) \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)\end{aligned}$$

がわかり、(1.5) より $\boldsymbol{p}_1(s)$ と $\boldsymbol{p}_2(s)$ の曲率が等しいと結論できる。

逆に，$\boldsymbol{p}_1(s)$ と $\boldsymbol{p}_2(s)$ が同じ曲率 $\kappa(s)$ を持てば、

$$\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s) = \tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)K(s), \qquad \frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) = \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)K(s)$$

が成り立つ。この後、n 次正則行列に値を持つ関数 $g(s)$ に対して、$g(s)^{-1}$ の微分を計算する必要があるので、これを求めておく。$g(s)^{-1}g(s) = I_n$ の両辺を s で微分すると、積の微分の公式より

$$\left(\frac{d}{ds}g(s)^{-1}\right)g(s) + g(s)^{-1}\frac{d}{ds}g(s) = 0$$

となり、左辺の第二項を移項して両辺に右から $g(s)^{-1}$ をかけると

$$\frac{d}{ds}g(s)^{-1} = -g(s)^{-1}\frac{d}{ds}g(s)g(s)^{-1} \tag{1.7}$$

を得る。これを使って計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}\right) = \left(\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\right)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} + \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)K(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} - \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)K(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} - \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)K(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)K(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} - \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)K(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} = 0\end{aligned}$$

がわかり、$\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1}$ は s に依存しない一定の $A \in M(\mathbb{R}^2)$ に一致する。すなわち、$\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s)\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)^{-1} = A$ である。この両辺に右から $\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)$ をかけると $\tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) = A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)$ となり、(1.6) と同様に A を定めると、$\pi_0 \circ \tilde{\boldsymbol{p}}_2(s) = \pi_0 \circ A\tilde{\boldsymbol{p}}_1(s)$ より

$$\boldsymbol{p}_2(s) = R\boldsymbol{p}_1(s) + \boldsymbol{v}$$

が成り立つ。すなわち、二つの平面曲線が同じ曲率を持てば、運動群の作用で写り合うことがわかる。

開区間 I 上の関数 $\kappa(s)$ に対して、$\kappa(s)$ を曲率として持つ曲線を構成する。(1.1) を未知関数 $[\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)]$ に関する常微分方程式とみなすと、(1.1) は線形常微分方程式である。線形常微分方程式の一般論から、任意の初期条件に対して (1.1) の解は I において一意的に存在することが知られているが、この場合は以下のように直接解を記述できる。その記述に必要になる回転行列の性質をまず示しておく。

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

によって回転行列 $R(\theta) \in SO(2)$ を定める。θ が s の関数の場合には

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}R(\theta) &= \begin{bmatrix} -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} & -\cos\theta\frac{d\theta}{ds} \\ \cos\theta\frac{d\theta}{ds} & -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta}{ds} \\ \frac{d\theta}{ds} & 0 \end{bmatrix} \\ &= R(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta}{ds} \\ \frac{d\theta}{ds} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、常微分方程式 (1.1) は、常微分方程式

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa(s)$$

に帰着する。これは最も簡単な常微分方程式であり、初期条件 $\theta(s_0) = \theta_0,\ s_0 \in I$ に対して

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)ds + \theta_0$$

が一意的な解である。これより、$R(\theta(s))$ は初期条件 $R(\theta(s_0)) = R(\theta_0)$ に対する (1.1) の一意的な解になる。$R(\theta(s)) = [\boldsymbol{e}_1(s)\ \boldsymbol{e}_2(s)]$ によって $\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s)$ を定める。$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{p}(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}_1(s)ds + \boldsymbol{v}_0$$

とおくと、$\boldsymbol{p}(s)$ は曲率 $\kappa(s)$ の平面曲線であることがわかる。

上で構成した $\boldsymbol{p}(s)$ から $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ を定めると、$\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ は (1.4) を満たすこともわかる。すなわち、(1.4) を未知関数 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ に関する常微分方程式とみなしたとき、任意の初期条件に対して (1.4) の解を構成したことになる。

2　線形群

前節では $M(\mathbb{R}^2)$ への写像を利用して、平面曲線の曲率と $M(\mathbb{R}^2)$ の作用との関係を明らかにし、曲率が平面曲線の一意性と存在を支配していることを示した。この方法を曲面の場合に適用するために、行列の成す群への写像の一意性と存在の条件を考える。

n 次実正方行列の全体 $M(n,\mathbb{R})$ は自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視でき、この同一視によって $\mathbb{R}^{n^2}$ の標準的な位相から $M(n,\mathbb{R})$ の位相を定める。

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\}$$

によって**一般線形群** $GL(n,\mathbb{R})$ を定める。行列式は行列の成分の多項式になり、特に連続関数になる。よって $GL(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の開集合である。$GL(n,\mathbb{R})$ の部分群が閉集合になっているとき、**線形群**と呼ぶ。

$SO(n)$ は線形群であることを示す。$SO(n)$ の定義より

$$SO(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n,\ \det g = 1\}$$

である。そこで、$\varphi(g) = {}^t gg\ (g \in GL(n,\mathbb{R}))$ によって写像 $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ を定めると、$\varphi(g)$ は g の成分の二次式になり、特に連続写像である。したがって、$SO(n) = \varphi^{-1}(I_n) \cap \det^{-1}(1)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の閉集合になり、$SO(n)$ は線形群である。

$M(\mathbb{R}^n)$ も線形群であることを示す。

$$A(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| R \in GL(n,\mathbb{R}),\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

とおくと、$GL(n+1,\mathbb{R})$ の元の第 $n+1$ 行が $[0\ 1]$ に固定されたもの全体になっているので、$A(\mathbb{R}^n)$ は $GL(n+1,\mathbb{R})$ の閉集合である。さらに上の形より $A(\mathbb{R}^n)$ は位相空間として $GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ と同相になる。よって、$M(\mathbb{R}^n)$ は $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ と同相になり、$SO(n)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の閉集合なので、$M(\mathbb{R}^n)$ は $A(\mathbb{R}^n)$ の閉集合になる。したがって、$M(\mathbb{R}^n)$ は $GL(n+1,\mathbb{R})$ の閉集合になり、$M(\mathbb{R}^n)$ は線形群である。

次に線形群 $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ のリー環を定義する。G の単位元 I_n を通る曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \qquad (c(0) = I_n)$$

の 0 における速度ベクトル $c'(0)$ の全体 $\mathfrak{g}$ は $M(n,\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間になり、

$$[X,Y] = XY - YX \qquad (X, Y \in M(n,\mathbb{R}))$$

とおくと、$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ が成り立つことを以下で示す。この $\mathfrak{g}$ を G の**リー環**と呼ぶ。

$c(t) = I_n$ を t で微分すると 0 になり、$0 \in \mathfrak{g}$ である。$X \in \mathfrak{g}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して、I_n を通る曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \qquad (c(0) = I_n)$$

が存在して $c'(0) = X$ となる。$d : t \mapsto c(rt)$ も I_n を通る G の曲線になり、$d'(0) = rc'(0) = rX$ は $\mathfrak{g}$ に含まれる。$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して I_n を通る G の曲線 $x(t), y(t)$ であって $x'(0) = X, y'(0) = Y$ を満たすものをとる。G は $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群なので $x(t)y(t)$ は I_n を通る G の曲線になる。さらに、

$$\left.\frac{d}{dt}x(t)y(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} y(0) + x(0)\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0} = x'(0) + y'(0) = X + Y$$

となるので、$X + Y \in \mathfrak{g}$ が成り立つ。したがって、$\mathfrak{g}$ は $M(n, \mathbb{R})$ の部分ベクトル空間である。

$g \in G$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$ が成り立つことを次に示す。I_n を通る曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \qquad (c(0) = I_n,\ c'(0) = X)$$

をとる。$gc(t)g^{-1}$ も G の曲線になり、$gc(0)g^{-1} = I_n$ が成り立つ。よって

$$\left.\frac{d}{dt}gc(t)g^{-1}\right|_{t=0} = gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。これを使って $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ が成り立つことを示す。$c(t) \in G$, $Y \in \mathfrak{g}$ より、$c(t)Yc(t)^{-1} \in \mathfrak{g}$ が成り立つ。積の微分の公式と (1.7) を使うと

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}c(t)Yc(t)^{-1}\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0} Yc(0)^{-1} + c(0)Y\left.\frac{d}{dt}c(t)^{-1}\right|_{t=0} \\ &= XY - YX = [X, Y]\end{aligned}$$

を得る。$c(t)Yc(t)^{-1}$ は $M(n, \mathbb{R})$ 内の部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の曲線なので、$[X, Y] \in \mathfrak{g}$ が成り立つ。

実は線形群 $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ は、$GL(n, \mathbb{R})$ の部分多様体になることが知られている。この結果は認めることにする。上で定義した G のリー環は部分多様体としての G の単位元 I_n における接ベクトル空間 $T_{I_n}(G)$ に他ならない。

$SO(n)$ のリー環 $\mathfrak{so}(n)$ は

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$$

である。この等式を以下で示す。$SO(n)$ の単位元を通る曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SO(n)$ に対して ${}^tc(t)c(t) = I_n$ が成り立つ。この両辺を t で微分すると

$$\left.\frac{d}{dt}{}^tc(t)\right|_{t=0} c(0) + {}^tc(0)\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0} = 0$$

を得る。行列に対して微分する操作と転置行列をとる操作は可換なので、

$${}^t\left(\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}\right) + \left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0} = 0$$

となり、

$$\mathfrak{so}(n) \subset \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$$

を得る。逆に ${}^tX + X = 0$ を満たす $X \in M(n,\mathbb{R})$ をとる。

$$c(t) = \left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1}$$

とおく。$c(t)$ は 0 の近傍で定義された $SO(n)$ の曲線になり、

$$c(0) = I_n, \qquad c'(0) = X$$

を満たすことを以下で示す。$c(0) = I_n$ は $c(t)$ の定め方よりわかり、$c(t)$ は 0 の近傍で定義できる $GL(n,\mathbb{R})$ の曲線になる。

$$\begin{aligned}
{}^tc(t)c(t) &= {}^t\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1}{}^t\left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1} \\
&= \left(I_n + \frac{t}{2}X\right)^{-1}\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)\left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1} \\
&= \left(I_n + \frac{t}{2}X\right)^{-1}\left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1} \\
&= I_n
\end{aligned}$$

となり $c(t)$ は直交行列になる。よって、$\det c(t) = \pm 1$ であるが、$\det c(t)$ は t に関して連続であり $\det c(0) = 1$ なので、$\det c(t) = 1$ が成り立つ。これらより、$c(t)$ は I_n を通る $SO(n)$ の曲線になる。積の微分の公式と (1.7) を使うと

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}\left(I_n + \frac{t}{2}X\right)\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt}\left(I_n - \frac{t}{2}X\right)^{-1}\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X.
\end{aligned}$$

以上より

$$\mathfrak{so}(n) \supset \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$$

を得る。したがって、問題の等式

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$$

を得る。

$M(\mathbb{R}^n)$ のリー環 $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^n)$ が

$$\mathfrak{m}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \left.\begin{bmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right| X \in \mathfrak{so}(n),\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

であることを、上で示した $SO(n)$ のリー環の結果を利用して示す。$M(\mathbb{R}^n)$ の単位元を通る曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$c'(0) \in \left\{ \begin{bmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{so}(n),\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

が成り立つことは、$M(\mathbb{R}^n)$ の定義と $SO(n)$ のリー環の結果からわかる。逆に $X \in \mathfrak{so}(n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ をとる。$SO(n)$ のリー環の結果から $SO(n)$ の単位元を通り

$$d'(0) = X$$

を満たす曲線 $d : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SO(n)$ をとることができる。

$$c(t) = \begin{bmatrix} d(t) & t\boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと、$c(t)$ は 0 の近傍で定義された $M(\mathbb{R}^n)$ の曲線になり、

$$c(0) = I_n, \qquad c'(0) = \begin{bmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を満たす。以上より

$$\mathfrak{m}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{bmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{so}(n),\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

を得る。

　次に $\mathbb{R}^2$ の領域 D から線形群 G への写像について考えてみよう。領域とは連結な開集合である。これ以降の議論は D を一般次元の連結な多様体に置き換えても適切な修正を加えることで成り立つが、ここでは平面の領域に限定して話を進める。f を D から G への写像とする。$\boldsymbol{x} \in D$ と $X \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X) = \left. \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x})^{-1} f(\boldsymbol{x} + tX) \right|_{t=0}$$

によって $\omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X) \in \mathfrak{g}$ を定める。

$$c(t) = f(\boldsymbol{x})^{-1} f(\boldsymbol{x} + tX)$$

によって $c(t)$ を定めると、$c(t)$ は G の曲線になり、$c(0) = I_n$ を満たす。さらに $c'(0) = \omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X)$ となるので、$\omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X) \in \mathfrak{g}$ である。これにより、写像

$$\omega(f)_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{g}$$

が定まる。$\omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X)$ の定め方より、f の $\boldsymbol{x}$ における微分写像 $df_{\boldsymbol{x}}$ を使うと、

$$\omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X) = f(\boldsymbol{x})^{-1} df_{\boldsymbol{x}}(X) \tag{2.8}$$

が成り立つ。したがって、各 $\boldsymbol{x} \in D$ について写像 $\omega(f)_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{g}$ は線形写像になる。一般にベクトル空間 V から W への線形写像の全体を $\mathrm{Hom}(V, W)$ で表すと、$\omega(f)$ は D の各点 $\boldsymbol{x}$ に $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g})$ の元 $\omega(f)_{\boldsymbol{x}}$ を対応させている。これを一般化し、D の各点 $\boldsymbol{x}$ に $\alpha_{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, V)$ を対応させる $\alpha = (\alpha_{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{x} \in D}$ を V に値を持つ D 上の **1 次微分形式**と呼ぶ。$\omega(f)$ は $\mathfrak{g}$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式であり、写像 $f : D \to G$ の **Maurer-Cartan 形式**と呼ばれている。

G の元 g を写像 f の像に左からかけて $(L_g f)(\boldsymbol{x}) = g f(\boldsymbol{x})$ を考える。$X \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
\omega(L_g f)_{\boldsymbol{x}}(X) &= \frac{d}{dt}(g f(\boldsymbol{x}))^{-1} g f(\boldsymbol{x} + tX)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x})^{-1} g^{-1} g f(\boldsymbol{x} + tX)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x})^{-1} f(\boldsymbol{x} + tX)\bigg|_{t=0} = \omega(f)_{\boldsymbol{x}}(X)
\end{aligned}$$

となるので、$\omega(L_g f)_{\boldsymbol{x}} = \omega(f)_{\boldsymbol{x}}$ がわかり、$\omega(L_g f) = \omega(f)$ が成り立つ。すなわち、f と $L_g f$ の Maurer-Cartan 形式は同じになる。

次に二つの写像 $f_1, f_2 : D \to G$ に対して $\omega(f_1) = \omega(f_2)$ が成り立つと仮定する。$\omega(f_1) = \omega(f_2) = \omega$ とおくと、各 $\boldsymbol{x} \in D$ と $X \in \mathbb{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x} + tX \in D$ が成り立てば、

$$f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \frac{d}{dt} f_1(\boldsymbol{x} + tX) = f_2(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \frac{d}{dt} f_2(\boldsymbol{x} + tX) = \omega_{\boldsymbol{x}+tX}(X)$$

となり、

$$\frac{d}{dt} f_i(\boldsymbol{x} + tX) = f_i(\boldsymbol{x} + tX)\,\omega_{\boldsymbol{x}+tX}(X)$$

が $i = 1, 2$ について成り立つ。逆行列の微分の公式 (1.7) を使うと

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f_2(\boldsymbol{x} + tX) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&= \left(\frac{d}{dt} f_2(\boldsymbol{x} + tX \right) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} + f_2(\boldsymbol{x} + tX) \frac{d}{dt} f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&= f_2(\boldsymbol{x} + tX)\omega_{\boldsymbol{x}+tX}(X) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&\quad - f_2(\boldsymbol{x} + tX) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \left(\frac{d}{dt} f_1(\boldsymbol{x} + tX) \right) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&= f_2(\boldsymbol{x} + tX)\omega_{\boldsymbol{x}+tX}(X) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&\quad - f_2(\boldsymbol{x} + tX) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} f_1(\boldsymbol{x} + tX)\omega_{\boldsymbol{x}+tX}(X) f_1(\boldsymbol{x} + tX)^{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

がわかる。これより、$f_2(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})^{-1}$ は D に含まれる線分上で一定値をとる。D は連結なので、D の任意の二点は D 内の折れ線で結ばれる。したがって、$f_2(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})^{-1}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存しない一定の $g \in G$ に一致する。これより $f_2(\boldsymbol{x}) = gf_1(\boldsymbol{x})$ となり、$f_2 = L_g f_1$ が成り立つ。よって、$\omega(f_1) = \omega(f_2)$ の必要十分条件は、ある $g \in G$ が存在して $f_2 = L_g f_1$ が成り立つことである。

ここまでの議論は前節の曲線から定まる $M(\mathbb{R}^2)$ への写像の議論と同様に進んでいる。曲線の場合に、$K(s)$ に対して (1.4) を満たす $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ が存在することを示した。D から G への写像の場合は、与えられた $\mathfrak{g}$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 α に対して、$\omega(f) = \alpha$ を満たす写像 $f : D \to G$ が存在するかという問題になる。曲線の場合には問題が線形常微分方程式の解の存在に帰着したため解決したが、$\omega(f) = \alpha$ は後で示すように f に関する偏微分方程式になるため、いつでも解 f が存在するとは限らない。α を与えたときに $\omega(f) = \alpha$ を満たす G への写像 f の存在の必要十分条件を記述するために 1 次微分形式の外積と外微分を利用する。

まず外積を定義する。ベクトル空間 U, V, W に対して双線形写像 $B : U \times V \to W$ が定まっているとする。すなわち、$v_0 \in V$ を固定すると

$$U \to W \; ; \; u \mapsto B(u, v_0)$$

は線形写像になり、$u_0 \in U$ を固定すると

$$V \to W \; ; \; v \mapsto B(u_0, v)$$

は線形写像になるということである。ベクトル空間のスカラー倍を定めている写像

$$\mathbb{R} \times V \to V \; ; \; (r, v) \mapsto rv$$

や正方行列の積を定めている写像

$$M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}) \; ; \; (X, Y) \mapsto XY$$

などは双線形写像の例である。話を一般の双線形写像 B に戻す。U に値を持つ D 上の 1 次微分形式 α と V に値を持つ D 上の 1 次微分形式 β に対して

$$B(\alpha \wedge \beta)_{\boldsymbol{x}}(X, Y) = B(\alpha_{\boldsymbol{x}}(X), \beta_{\boldsymbol{x}}(Y)) - B(\alpha_{\boldsymbol{x}}(Y), \beta_{\boldsymbol{x}}(X))$$
$$(\boldsymbol{x} \in D, \; X, Y \in \mathbb{R}^2)$$

によって $B(\alpha \wedge \beta)$ を定義する。これは D の各点に対して、$\mathbb{R}^2$ 上の W に値を持つ交代双線形写像を定めている。交代というのは $B(\alpha \wedge \beta)_{\boldsymbol{x}}(X, Y) = -B(\alpha \wedge \beta)_{\boldsymbol{x}}(Y, X)$ が成り立つことであり、これは定義よりわかる。B が明らかな場合は、$B(\alpha \wedge \beta)$ の B を省略して $\alpha \wedge \beta$ と書く。次に外微分を定義する。ベクトル空間 U に値を持つ D 上の 1 次微分形式 α を

$$\alpha_{\boldsymbol{x}} = \alpha_1(\boldsymbol{x})dx_1 + \alpha_2(\boldsymbol{x})dx_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in D) \tag{2.9}$$

と表す。ここで、α_i は V に値を持つ D 上の関数であり、dx_i は $\mathbb{R}^2$ のベクトルの第 i 成分を対応させる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。α の**外微分** $d\alpha$ を

$$(d\alpha)_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2 \tag{2.10}$$

によって定める。$dx_1 \wedge dx_2$ は $\mathbb{R}$ の積から定まっていて、$X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(dx_1 \wedge dx_2)(X, Y) = dx_1(X)dx_2(Y) - dx_1(Y)dx_2(X) = X_1Y_2 - X_2Y_1$$

となっている。この値は X, Y の張る平行四辺形の面積に符号を付けたものである。写像 $f : D \to G$ から定まる $\omega(f)$ の外微分 $d\omega(f)$ を求めるために、$\omega(f)$ を (2.9) の形に表示すると (2.8) より

$$\omega(f)_{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_1 + f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})dx_2$$

となる。外微分の定義より

$$(d\omega(f))_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right)\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

右辺の $dx_1 \wedge dx_2$ の係数関数を計算する。公式 (1.7) を使うと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) &= -f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(\boldsymbol{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) &= -f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
&(d\omega(f))_{\boldsymbol{x}} \\
&= \left(-f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

を得る。一般に n 次正方行列に値を持つ D 上の 1 次微分形式 $A = A_1dx_1 + A_2dx_2$ に対して、行列の積に関する 1 次微分形式の外積 $A \wedge A$ は

$$A \wedge A = (A_1A_2 - A_2A_1)dx_1 \wedge dx_2 \tag{2.11}$$

を満たすことを示しておく。$X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
(A \wedge A)(X, Y) &= (A_1dx_1 + A_2dx_2)(X)(A_1dx_1 + A_2dx_2)(Y) \\
&\quad - (A_1dx_1 + A_2dx_2)(Y)(A_1dx_1 + A_2dx_2)(X) \\
&= (A_1X_1 + A_2X_2)(A_1Y_1 + A_2Y_2) - (A_1Y_1 + A_2Y_2)(A_1X_1 + A_2X_2) \\
&= A_1A_2(X_1Y_2 - Y_1X_2) + A_2A_1(X_2Y_1 - Y_2X_1) \\
&= (A_1A_2 - A_2A_1)(X_1Y_2 - Y_1X_2) \\
&= (A_1A_2 - A_2A_1)(dx_1 \wedge dx_2)(X, Y)
\end{aligned}$$

となるので、(2.11) が成り立つことがわかる。$d\omega(f)$ の計算に話を戻すと、

$$d\omega(f) + \omega(f) \wedge \omega(f) = 0$$

が成り立つことがわかる。

これまでに写像 $f : D \to G$ に対して $\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 次微分 $\omega(f)$ を定め、$\omega(f)$ は

$$d\omega(f) + \omega(f) \wedge \omega(f) = 0$$

を満たすことを示した。さらに、次の主張が成り立つ。$\mathfrak{g}$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 ω が

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0 \tag{2.12}$$

を満たすならば、D の任意の点に対してその近傍で定義された G への写像 f が存在して $\omega(f) = \omega$ を満たす。さらに D が単連結ならば、f の定義域は D 全体に拡張できる。この結果の証明には 1 階偏微分方程式の可積分条件に関する結果が必要になる。これについては次の節で扱う。(2.12) は **Maurer-Cartan 方程式**と呼ばれている。上で示したことは写像 $f : D \to G$ の Maurer-Cartan 形式 $\omega(f)$ は Maurer-Cartan 方程式を満たすということである。

3 可積分条件

この節の主な目的は、$\mathfrak{g}$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 ω が Maurer-Cartan 方程式 (2.12) を満たすならば、D の任意の点に対してその近傍で定義された G への写像 f が存在して $\omega(f) = \omega$ を満たすことと、さらに D が単連結ならば、f の定義域は D 全体に拡張できることを証明することである。その準備のため、まず写像の定義域が 1 次元の場合を考えておく。

第 1 節で示した結果は、開区間 I 上定義された関数 $\kappa(s)$ に対して、(1.3) によって $K(s)$ を定め、(1.4) を未知関数 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ に関する常微分方程式とみなしたとき、I において任意の初期条件に対して解 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ が存在することを示した。これは次のようなより一般的な状況でも成り立つ。

線形群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ に値を持つ開区間 I 上の関数 A に対して

$$\frac{d}{ds} f(s) = f(s)A(s) \tag{3.13}$$

を満たす写像 $f : I \to G$ が、$t_0 \in I$ と $g_0 \in G$ に対する初期条件 $f(s_0) = g_0$ について一意的に存在する。これは $f(s)A(s) \in f(s)\mathfrak{g} = f(s)T_{I_n}G = T_{f(s)}G$ となることから G 上の常微分方程式になり、局所的に解は存在する。他方、(3.13) において $f(s)$ を $M(n, \mathbb{R})$ に値を持つ関数とみると、線形常微分方程式である。したがって、任意の初期条件 $f(s_0) = g_0$ について解 $f(s)$ は I において一意的に存在する。局所的に存在する G に値を持つ (3.13) の解と I 全体で存在する $M(n, \mathbb{R})$ に値を持

つ (3.13) の解は解の一意性から一致する。したがって、$f(s_0) = g_0$ を満たす (3.13) の解 $f : I \to G$ が一意的に存在することがわかる。

上の定式化は前節の微分形式を使った定式化とは若干異なるが、次のように考えると同類とみなすことができる。ベクトル空間 V に対して、V の元 v に $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, V)$ の元 $r \mapsto rv$ を対応させることで、V と $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, V)$ を同一視できる。すると、上の $\mathfrak{g}$ に値を持つ I 上の関数 A は、各 $s \in I$ に $A(s) \in \mathfrak{g}$ を対応させているので、$A(s) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$ とみなすと、A は $\mathfrak{g}$ に値を持つ I 上の 1 次微分形式とみなせる。$\omega(f)(s) = f(s)^{-1}\dfrac{d}{ds}f(s)$ も $\mathfrak{g}$ に値を持つ I 上の関数であるが、$\mathfrak{g}$ に値を持つ I 上の 1 次微分形式とみなすと、上の等式は $\omega(f) = A$ という 1 次微分形式の等式になり、前節で扱った等式と同様の形になる。ただし、この場合は A には特別な条件が必要ではない。これは f や A の定義域 I が 1 次元であることによっている。さらに言えば問題が線形常微分方程式に帰着することによる。これに対して $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された $\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 次微分形式 ω に対して $\omega(f) = \omega$ を満たす写像 $f : D \to G$ はいつでも存在するわけではない。すでにみたようにこのような写像 f が存在すれば、ω は Maurer-Cartan 方程式 $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ を満たす。逆に ω が Maurer-Cartan 方程式を満たせば、$\omega(f) = \omega$ を満たす G への写像 f が D の各点の近傍で任意の初期条件に対して存在することを証明する。微分に関する等式 $\omega(f) = \omega$ を満たす f が存在するための条件になる $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ を**可積分条件**という。

ω を

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$$

と表す。他方 $\omega(f)$ は

$$\omega(f) = f^{-1}df = f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

と表せることから、f の満たすべき条件は

$$f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \omega_1, \qquad f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \omega_2$$

である。さらに

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f\omega_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f\omega_2 \tag{3.14}$$

と書き直せる。任意の $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in D$ と $g_0 \in G$ に対して $\boldsymbol{x}_0 \in I_1 \times I_2 \subset D$ となる開区間 I_1, I_2 をとり、(3.14) と $f(\boldsymbol{x}_0) = g_0$ を満たす $I_1 \times I_2$ 上定義された関数 f が存在することを証明する。ここで、$\boldsymbol{x}_0 \in I_1 \times I_2 \subset D$ となる開区間 I_1, I_2 が存在することは D が開集合であることからわかる。

$I_1 \times \{x_{02}\}$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f\omega_1$$

と $f(\boldsymbol{x}_0)=g_0$ を満たす G への写像 f が存在することは、1 次元の場合ですでに示した。これを利用して各 $x_1 \in I_1$ について、$\{x_1\}\times I_2$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=f\omega_2$$

を満たし、(x_1, x_{02}) における値が $f(x_1, x_{02})$ に一致する G への写像 f が存在することも 1 次元の場合に帰着する。さらに、常微分方程式の初期条件に関する可微分性より、f は x_1 についても可微分になる。f は $I_1\times I_2$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=f\omega_2$$

を満たし、$I_1\times\{x_{02}\}$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f\omega_1$$

を満たすことがわかっている。この等式が $I_1\times I_2$ 全体で成り立つことを以下で証明する。そのために、ω が満たす Maurer-Cartan 方程式を ω_1,ω_2 を使って記述しておく。(2.10) と (2.11) より、$d\omega+\omega\wedge\omega=0$ は

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}+\omega_1\omega_2-\omega_2\omega_1=0$$

と同値になる。$I_1\times I_2$ 全体で $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=f\omega_1$ が成り立つことを示すために、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}-f\omega_1$ の x_2 座標の方向の変化を調べる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}(f\omega_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\omega_2+f\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}(f\omega_1)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\omega_1+f\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}=f\omega_2\omega_1+f\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-f\omega_1\right)&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\omega_2+f\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}-f\omega_2\omega_1-f\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\omega_2-f\omega_1\omega_2+f\omega_1\omega_2+f\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}-f\omega_2\omega_1-f\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-f\omega_1\right)\omega_2+f\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}+\omega_1\omega_2-\omega_2\omega_1\right)\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-f\omega_1\right)\omega_2
\end{aligned}$$

を得る。最後の等号は Maurer-Cartan 方程式より従う等式による。これより、$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}-f\omega_1$ は各 $\{x_1\}\times I_2$ において F を未知関数とする線形常微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_2}F=F\omega_2,\qquad F(x_1,x_{02})=0$$

の解になる。恒等的に 0 になる定数関数も上の線形常微分方程式の解になるので、解の一意性により

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - f\omega_1 = 0$$

が成り立つ。x_2 による偏微分が 0 になることが直接わかるわけではないが、線形常微分方程式の解になることから、恒等的に 0 になるしかないわけである。以上で f は (3.14) を満たすことがわかった。

この節の最後に D が単連結の場合に上で存在を示した f が D 全体で存在することを証明する。D が単連結であるとは、D の任意の閉曲線が D 内で一点に連続的に変形できることである。D 内の一点 $\boldsymbol{x}_0$ を固定する。D の任意の点 $\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{x}_0$ と D 内の曲線 c_0 で結ぶことができる。c_0 を D に含まれる開長方形で覆うと、c_0 はコンパクトなので有限個の開長方形 R_i $(1 \leq i \leq m)$ で覆うことができる。ただし、$\boldsymbol{x}_0 \in R_1$, $R_i \cap R_{i+1} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{x}_1 \in R_m$ を満たすとする。上で示したことより、$f(\boldsymbol{x}_0) = g_0$ と $\omega(f) = \omega$ を満たす $\boldsymbol{x}_0$ を含む開長方形 R_1 から G への写像 f が存在する。同様にして f の定義域を R_2 に拡張できる。これを繰り返すことにより、f の定義域を R_1 から R_m まで拡張できる。特に $f(\boldsymbol{x}_1)$ が定まる。$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}_1$ を D 内の別の曲線 c_1 で結んで同様の操作をしても定まる $f(\boldsymbol{x}_1)$ は等しいことを示す。D は単連結であることから c_0 は c_1 に連続的に変形できる。すなわち、c_0 と c_1 のパラメータ表示を

$$c_0(t), \quad c_1(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で表すと、連続写像 $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ であって

$$H(i,t) = c_i(t) \quad (i = 0, 1,\ 0 \leq t \leq 1),$$
$$H(s,j) = \boldsymbol{x}_j \quad (0 \leq s \leq 1,\ j = 0, 1)$$

を満たす H が存在する。$H([0,1] \times [0,1])$ はコンパクトなので、D に含まれる有限個の開長方形で覆うことができ、上記と同様にしてこれら開長方形の合併において f を定めることができ、特に c_0 と c_1 のどちらで $f(\boldsymbol{x}_1)$ を定めても等しいことがわかる。以上より、f は D 全体で定義できる。

4　曲面

第 2 節と第 3 節の結果を使って、第 1 節と同様の方針で曲面について考えてみよう。空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面を $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^3$ への写像 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の像として表す。$\mathbb{R}^2$ の座標を x_1, x_2 で表し、偏微分 $\boldsymbol{p}_{x_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}_{x_2}(\boldsymbol{x})$ が D の任意の点で線形独立になっていると仮定する。曲面には潰れた点はないという前提である。$\boldsymbol{p}_{x_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}_{x_2}(\boldsymbol{x})$ は曲面の各点における接平面の基底になっている。これにグラム-シュミットの直交化を施すと接平面の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x})$ が得られる。$\mathbb{R}^3$ のベクトル積 $\times$ を使って

$$\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x})$$

を定義すると、$\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x})$ は曲面の単位法ベクトルになる。これら $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x})$ は各 $\boldsymbol{x} \in D$ について定まり、曲面の**動標構**と呼ばれている。曲線の場合と同様に動標構の変化を記述するものを定める。動標構の定め方より $[\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x})]$ は $SO(3)$ の元である。$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ とその動標構 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x})$ を合わせたもの

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{x} \in D)$$

は定義域 D から $M(\mathbb{R}^3)$ への写像になり $\boldsymbol{p} = \pi_0 \circ \tilde{\boldsymbol{p}}$ を満たす。このような性質を持つ $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を第 1 節の曲線の場合と同様に $\boldsymbol{p}$ の**持ち上げ**と呼ぶ。第 1 節で示した曲線に関する結果と同様の結果が曲面の場合にも成り立つことを期待して、第 2 節と第 3 節の議論を $\tilde{\boldsymbol{p}} : D \to M(\mathbb{R}^3)$ に適用する。

第 2 節で定めた $\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ は $M(\mathbb{R}^3)$ のリー環 $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^3)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式である。第 2 節と第 3 節の議論より、$\tilde{\boldsymbol{p}}$ の一意性や存在は $\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ によって記述できるので、$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ の意味や $\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ の満たす Maurer-Cartan 方程式を調べてみる。$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ は $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^3)$ に値を持つ。その $\mathfrak{so}(3)$ 成分を ω_o で表し、$\mathbb{R}^3$ 成分を ω_v で表すと、

$$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} \omega_o & \omega_v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と表現できる。ω_o は $\mathfrak{so}(3)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式であり、ω_v は $\mathbb{R}^3$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式である。さらに、$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ は Maurer-Cartan 方程式

$$d\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) + \omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) \wedge \omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = 0 \tag{4.15}$$

を満たす。上記の左辺の第二項は、$X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
&(\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) \wedge \omega(\tilde{\boldsymbol{p}}))(X, Y) \\
&= \omega(\tilde{\boldsymbol{p}})(X)\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})(Y) - \omega(\tilde{\boldsymbol{p}})(Y)\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})(X) \\
&= \begin{bmatrix} \omega_o(X) & \omega_v(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_o(Y) & \omega_v(Y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_o(Y) & \omega_v(Y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_o(X) & \omega_v(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \omega_o(X)\omega_o(Y) & \omega_o(X)\omega_v(Y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_o(Y)\omega_o(X) & \omega_o(Y)\omega_v(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \omega_o(X)\omega_o(Y) - \omega_o(Y)\omega_o(X) & \omega_o(X)\omega_v(Y) - \omega_o(Y)\omega_v(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\omega_o \wedge \omega_o)(X, Y) & (\omega_o \wedge \omega_v)(X, Y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_o \wedge \omega_o & \omega_o \wedge \omega_v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (X, Y)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) \wedge \omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} \omega_o \wedge \omega_o & \omega_o \wedge \omega_v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つことがわかる。したがって、(4.15) を $\mathbb{R}^3$ 成分と $\mathfrak{so}(3)$ 成分に分解すると、$\mathbb{R}^3$ 成分は

$$d\omega_v + \omega_o \wedge \omega_v = 0 \tag{4.16}$$

と同等になり、$\mathfrak{so}(3)$ 成分は

$$d\omega_o + \omega_o \wedge \omega_o = 0 \tag{4.17}$$

と同等になる。ω_o, ω_v をさらに詳しく見てみよう。$\tilde{\boldsymbol{p}}$ の表示より

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_1 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \\ {}^t\boldsymbol{e}_2 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ {}^t\boldsymbol{e}_3 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_3 \rangle \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \tilde{\boldsymbol{p}}^{-1} d\tilde{\boldsymbol{p}} &= \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_1 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \\ {}^t\boldsymbol{e}_2 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ {}^t\boldsymbol{e}_3 & -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_3 \rangle \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{e}_1 & d\boldsymbol{e}_2 & d\boldsymbol{e}_3 & d\boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{e}_1 & {}^t\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{e}_2 & {}^t\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{e}_3 & {}^t\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{p} \\ {}^t\boldsymbol{e}_2 d\boldsymbol{e}_1 & {}^t\boldsymbol{e}_2 d\boldsymbol{e}_2 & {}^t\boldsymbol{e}_2 d\boldsymbol{e}_3 & {}^t\boldsymbol{e}_2 d\boldsymbol{p} \\ {}^t\boldsymbol{e}_3 d\boldsymbol{e}_1 & {}^t\boldsymbol{e}_3 d\boldsymbol{e}_2 & {}^t\boldsymbol{e}_3 d\boldsymbol{e}_3 & {}^t\boldsymbol{e}_3 d\boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_3 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p} \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_3 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p} \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{p} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これより

$$\omega_o = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_3 \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_3 \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3 \rangle \end{bmatrix}, \quad \omega_v = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p} \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p} \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{p} \rangle \end{bmatrix}$$

を得る。$d\boldsymbol{p}$ の像は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表されるので、$\langle \boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{p} \rangle = 0$ である。

$$\theta_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p} \rangle, \quad \theta_2 = \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p} \rangle, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

と表すと、ω_v は

$$\omega_v = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表現できる。

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1\langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p}\rangle + \boldsymbol{e}_2\langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p}\rangle = \theta_1\boldsymbol{e}_1 + \theta_2\boldsymbol{e}_2$$

となるので、θ_1, θ_2 は接平面の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の双対基底である。ω_D が $\mathfrak{so}(3)$ に値を持つ 1 次微分形式であることは $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{i,j}$ を微分すると

$$0 = d\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \langle d\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle + \langle \boldsymbol{e}_i, d\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_j, d\boldsymbol{e}_i\rangle + \langle \boldsymbol{e}_i, d\boldsymbol{e}_j\rangle$$

となることからもわかる。$X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} {}^t\theta\theta(X,Y) &= {}^t\theta(X)\theta(Y) = \theta_1(X)\theta_1(Y) + \theta_2(X)\theta_2(Y) \\ &= \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p}(X)\rangle\langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{p}(Y)\rangle + \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p}(X)\rangle\langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{p}(Y)\rangle \\ &= \langle d\boldsymbol{p}(X), d\boldsymbol{p}(Y)\rangle \end{aligned}$$

によって曲面の接ベクトルの内積が定まる。${}^t\theta\theta = \langle d\boldsymbol{p}, d\boldsymbol{p}\rangle$ を曲面の**第一基本形式**と言う。ω_o は $\mathfrak{so}(3)$ に値を持つので、$\mathfrak{so}(2)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 ω_D と $\mathbb{R}^2$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 α によって

$$\omega_o = \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha \\ -{}^t\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

という形に書ける。ω_D と α は

$$\omega_D = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2\rangle \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_3\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_3\rangle \end{bmatrix}$$

となる。これら θ, ω_D, α を使って (4.16) と (4.17) を書き直そう。(4.16) は

$$\begin{bmatrix} d\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha \\ -{}^t\alpha & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} d\theta + \omega_D \wedge \theta \\ -{}^t\alpha \wedge \theta \end{bmatrix} = 0$$

となる。第 1,2 成分は

$$d\theta + \omega_D \wedge \theta = 0 \tag{4.18}$$

と同等になり、第 3 成分は $-{}^t\alpha\wedge\theta = 0$ と同等になる。第 3 成分の式より、$X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$0 = ({}^t\alpha \wedge \theta)(X,Y) = {}^t\alpha(X)\theta(Y) - {}^t\alpha(Y)\theta(X)$$

が成り立つ。このことから

$${}^t\alpha\theta(X,Y) = {}^t\alpha(X)\theta(Y) \qquad (X, Y \in \mathbb{R}^2)$$

は接ベクトルの対称な双線形形式になる。${}^t\alpha\theta$ を曲面の**第二基本形式**と言う。次に (4.17) は

$$\begin{bmatrix} d\omega_D & d\alpha \\ -{}^t d\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha \\ -{}^t\alpha & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha \\ -{}^t\alpha & 0 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} d\omega_D + \omega_D \wedge \omega_D - \alpha \wedge {}^t\alpha & d\alpha + \omega_D \wedge \alpha \\ -{}^t d\alpha - {}^t\alpha \wedge \omega_D & 0 \end{bmatrix} = 0$$

となる。$\mathfrak{so}(2)$ 成分は

$$d\omega_D + \omega_D \wedge \omega_D - \alpha \wedge {}^t\alpha = 0 \tag{4.19}$$

と同等になり、$\mathbb{R}^2$ 成分は

$$d\alpha + \omega_D \wedge \alpha = 0 \tag{4.20}$$

と同等になる。(4.19) を**ガウスの方程式**と呼び、(4.20) を**コダッチの方程式**と呼ぶ。

もし、同じ領域 D で定義された曲面 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ が，$R \in SO(3)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ によって

$$\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{x} \in D)$$

を満たすとき、$R, \boldsymbol{v}$ から定まる $M(\mathbb{R}^3)$ の元を A で表すと $\boldsymbol{p}' = A \circ \boldsymbol{p}$、さらに $\tilde{\boldsymbol{p}'} = A\tilde{\boldsymbol{p}}$ が成り立つ。第 2 節の結果より $\omega(\tilde{\boldsymbol{p}'}) = \omega(\tilde{\boldsymbol{p}})$ がわかる。さらに、$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \omega(\tilde{\boldsymbol{p}'})$ の成分によって $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ の第一基本形式と第二基本形式は記述できるので、これらは等しいと結論できる。逆に $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ が同じ第一基本形式と第二基本形式を持つと仮定する。これは $\boldsymbol{p}$ から定まる θ, α と $\boldsymbol{p}'$ から定まる θ', α' が ${}^t\theta\theta = {}^t\theta'\theta'$ と ${}^t\alpha\theta = {}^t\alpha'\theta'$ を満たすことを意味する。これは、$\theta = \theta'$ と $\alpha = \alpha'$ を満たすことと同等になる。

次に (4.18) を満たし $\mathfrak{so}(2)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 ω_D は θ に対して一意的に定まることを示す。このような ω_D が存在すると仮定する。ω_D は $\mathfrak{so}(2)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式なので、

$$\omega_D = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

となる D 上の 1 次微分形式 γ が存在する。θ の成分 θ_1, θ_2 は D の各点で線形独立なので、D 上の関数 f_1, f_2 によって $\gamma = f_1\theta_1 + f_2\theta_2$ と表示できる。(4.18) は

$$\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} d\theta_1 - \gamma \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 + \gamma \wedge \theta_1 \end{bmatrix} = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \gamma \wedge \theta_2 = f_1\theta_1 \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= -\gamma \wedge \theta_1 = -f_2\theta_2 \wedge \theta_1 = f_2\theta_1 \wedge \theta_2. \end{aligned}$$

したがって、f_1, f_2 は θ_1, θ_2 から一意的に定まることがわかる。逆に D 上の各点で線形独立になる 1 次微分形式 θ_1, θ_2 に対して、$d\theta_1, d\theta_2$ は D 上の 2 次微分形式になるので、

$$d\theta_1 = f_1\theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_1 = f_2\theta_1 \wedge \theta_2$$

を満たす関数 f_1, f_2 が存在する。そこで、$\gamma = f_1\theta_1 + f_2\theta_2$ によって γ を定めれば、γ から定まる ω_D は (4.18) を満たす。

よって，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ の第一基本形式と第二基本形式が同じならば、$\theta = \theta'$, $\alpha = \alpha'$, $\omega_D = \omega'_D$ となって、

$$\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha & \theta \\ -{}^t\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_D & \alpha' & \theta' \\ -{}^t\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \omega(\tilde{\boldsymbol{p}'})$$

が成り立つ。第 2 節の結果からある $A \in M(\mathbb{R}^3)$ が存在して $\tilde{\boldsymbol{p}'} = A\tilde{\boldsymbol{p}}$ となり、$\boldsymbol{p}' = A \circ \boldsymbol{p}$ がわかる。

第 1 節で与えられた関数を曲率に持つ平面曲線を構成した。曲面についてもこれと同様のことを考えてみる。すなわち、D 上の第一基本形式と第二基本形式になるべきものを与えて、それらを第一基本形式と第二基本形式とする曲面を構成する。D を $\mathbb{R}^2$ の単連結領域とする。$\mathbb{R}^2$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 θ と α を考える。ただし，${}^t\theta\theta$ は D の各点で正定値内積になり、${}^t\alpha\theta$ は D の各点で対称な双線形形式になっているとする。さらに，上で示したことより (4.18) を満たす $\mathfrak{so}(2)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式 ω_D は一意的に存在する。α, ω_D が (4.19) と (4.20) を満たすと仮定する。このとき

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha & \theta \\ -{}^t\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は $\mathfrak{m}(\mathbb{R}^3)$ に値を持つ D 上の 1 次微分形式になる。さらに、α, ω_D が (4.19) と (4.20) を満たすことから、

$$d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} d\omega_D & d\alpha & d\theta \\ -{}^t d\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha & \theta \\ -{}^t\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_D & \alpha & \theta \\ -{}^t\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d\omega_D + \omega_D \wedge \omega_D - \alpha \wedge {}^t\alpha & d\alpha + \omega_D \wedge \alpha & d\theta + \omega_D \wedge \theta \\ -{}^t d\alpha - {}^t\alpha \wedge \omega_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つ。第 3 節の結果より写像 $\tilde{\boldsymbol{p}} : D \to M(\mathbb{R}^3)$ が存在して $\omega(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \tilde{\omega}$ を満たす。このとき，$\pi \circ \tilde{\boldsymbol{p}}$ は曲面を定め、その第一基本形式と第二基本形式はそれぞれ ${}^t\theta\theta$ と ${}^t\alpha\theta$ に一致することがわかる。

5　曲面の Gauss 曲率

この節では前節の設定の元で曲面の Gauss 曲率を扱う。その前に、微分形式の外微分に関するいくつかの基本事項を確認しておく。

ベクトル空間に値を持つ D 上の関数 f に対して、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

は同じベクトル空間に値を持つ D 上の 1 次微分形式になる。さらにこの外微分は

$$ddf = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

となる。微分形式の外積を定義したときと同様にベクトル空間 U, V, W に対して双線形写像 $B : U \times V \to W$ が定まっているとする。ξ が U に値を持つ D 上の関数であり、η が V に値を持つ D 上の 1 次微分形式ならば、$\boldsymbol{x} \in D,\ X \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$B(\xi\eta)_{\boldsymbol{x}}(X) = B(\xi(\boldsymbol{x}), \eta_{\boldsymbol{x}}(X)))$$

によって W に値を持つ D 上の 1 次微分形式 $B(\xi\eta)$ が定まる。同様に ξ が U に値を持つ D 上の 1 次微分形式であり、η が V に値を持つ D 上の関数ならば、

$$B(\xi\eta)_{\boldsymbol{x}}(X) = B(\xi_{\boldsymbol{x}}(X), \eta(\boldsymbol{x}))$$

によって W に値を持つ D 上の 1 次微分形式 $B(\xi\eta)$ が定まる。双線形写像 B を固定しているときは B を省略して $\xi\eta$ と書くことにする。このとき、ξ が U に値を持つ D 上の関数であり、η が V に値を持つ D 上の 1 次微分形式ならば、

$$d(\xi\eta) = d\xi \wedge \eta + \xi d\eta \tag{5.21}$$

が成り立ち、ξ が U に値を持つ D 上の 1 次微分形式であり、η が V に値を持つ D 上の関数ならば、

$$d(\xi\eta) = d\xi\eta - \xi \wedge d\eta \tag{5.22}$$

が成り立つ。(5.21) を証明するために

$$\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2$$

とおく。ここで η_i は V に値を持つ D 上の関数である。

$$\xi\eta = \xi\eta_1 dx_1 + \xi\eta_2 dx_2$$

となる。外微分の定義 (2.10) より

$$\begin{aligned} d(\xi\eta) &= \left(\frac{\partial(\xi\eta_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\xi\eta_1)}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\eta_2 + \xi\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_2}\eta_1 - \xi\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\eta_2 - \frac{\partial \xi}{\partial x_2}\eta_1\right) dx_1 \wedge dx_2 + \xi \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \frac{\partial \xi}{\partial x_1} dx_1 \wedge \eta_2 dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_2 \wedge \eta_1 dx_1 + \xi d\eta \\
&= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge (\eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2) + \xi d\eta \\
&= d\xi \wedge \eta + \xi d\eta.
\end{aligned}
$$

次に (5.22) を証明するために

$$
\xi = \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2
$$

とおく。ここで ξ_i は U に値を持つ D 上の関数である。

$$
\xi\eta = \xi_1 \eta dx_1 + \xi_2 \eta dx_2
$$

となる。外微分の定義 (2.10) より

$$
\begin{aligned}
d(\xi\eta) &= \left(\frac{\partial(\xi_2\eta)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\xi_1\eta)}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\eta + \xi_2\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\eta - \xi_1\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) \eta dx_1 \wedge dx_2 + \left(\xi_2\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \xi_1\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \eta - \xi_2 dx_2 \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x_1} dx_1 - \xi_1 dx_1 \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x_2} dx_2 \\
&= d\xi\eta - (\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2) \wedge \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} dx_2\right) \\
&= d\xi\eta - \xi \wedge d\eta.
\end{aligned}
$$

同じ曲面 $\boldsymbol{p} : D \to \mathbb{R}^3$ の動標構 $\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ と $\boldsymbol{e}'_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ について、前節と同じように θ, ω_D と θ', ω'_D をそれぞれ定める。単位法ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{e}'_3$ は一致しているとする。このとき、$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $SO(2)$ の作用によって変換して得られる。よって、$SO(2)$ に値を持つ D 上の関数 g によって

$$
[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] g
$$

となる。この両辺に θ を作用させると

$$
\theta[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2] = \theta[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g = g
$$

となり、

$$
g^{-1}\theta[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

が成り立つ。これより $\theta' = g^{-1}\theta$ となって、$\theta = g\theta'$ がわかる。これを (4.18) に代入すると、

$$d(g\theta') + \omega_D \wedge g\theta' = 0$$

を得る。以下でこの等式を変形する。(5.21) を使うと

$$\begin{aligned}
&dg \wedge \theta' + gd\theta' + \omega_D g \wedge \theta' = 0, \\
&g^{-1}dg \wedge \theta' + d\theta' + g^{-1}\omega_D g \wedge \theta' = 0, \\
&d\theta' + (g^{-1}dg + g^{-1}\omega_D g) \wedge \theta' = 0.
\end{aligned}$$

他方、$d\theta' + \omega'_D \wedge \theta' = 0$ を満たす ω'_D の一意性より

$$\omega'_D = g^{-1}dg + g^{-1}\omega_D g$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$$

なので、$g^{-1}\omega_D g = \omega_D$ が成り立つ。したがって、上で得た ω_D と ω'_D との関係は

$$\omega'_D = g^{-1}dg + \omega_D$$

と表せる。この等式の両辺を外微分すると

$$d\omega'_D = d(g^{-1}dg) + d\omega_D$$

を得る。(1.7) を使うと得られる $d(g^{-1}) = -g^{-1}dgg^{-1}$ と (5.21) を利用すると、

$$d(g^{-1}dg) = d(g^{-1}) \wedge dg = -g^{-1}dgg^{-1} \wedge dg = -g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg$$

ここで、$SO(2)$ が可換群であり $\mathfrak{so}(2)$ の元の積も可換になり、$X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg)(X,Y) = g^{-1}dg(X)g^{-1}dg(Y) - g^{-1}dg(Y)g^{-1}dg(X) = 0$$

となるので、$g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = 0$ が成り立つ。よって、

$$d\omega'_D = d\omega_D$$

を得る。すなわち、単位法ベクトルが一致するどんな動標構に対しても、それから定まる ω_D の外微分 $d\omega_D$ は同じになる。これは、$d\omega_D$ が曲面の形を反映した量になっていることを示唆している。$d\omega_D$ は $\mathfrak{so}(2)$ に値を持つ D 上の 2 次微分形式なので

$$d\omega_D = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \theta_1 \wedge \theta_2$$

と記述できる。K は D 上の関数である。$\theta_1 \wedge \theta_2$ は曲面の面積素であり動標構のとり方に依存しないので、K も動標構のとり方に依存しない。K を曲面の **Gauss 曲率**と呼ぶ。

$\mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とし半径 r の球面

$$S^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

の Gauss 曲率を求めてみよう。パラメータ表示を

$$\boldsymbol{p}(\phi, \psi) = r(\cos\phi\cos\psi, \sin\phi\cos\psi, \sin\psi)$$

によって定める。

$$d\boldsymbol{p} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \psi} d\psi$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \phi} &= r(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \psi} &= r(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi). \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi) \end{aligned}$$

とおくと、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は接平面の正規直交系になる。さらに

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1 r\cos\psi d\phi + \boldsymbol{e}_2 r d\psi$$

となるので、

$$\theta_1 = r\cos\psi d\phi, \quad \theta_2 = r d\psi, \quad d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1\theta_1 + \boldsymbol{e}_2\theta_2$$

を得る。

$$d\theta_1 = r\sin\psi d\phi \wedge d\psi, \quad d\theta_2 = 0$$

となるので、

$$d\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \omega \wedge \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

を満たす

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{1,2} \\ -\omega_{1,2} & 0 \end{bmatrix}$$

は $\omega_{1,2} = -\sin\psi d\phi$ により定まる。

$$d\omega_{1,2} = \cos\psi d\phi \wedge d\psi = \frac{1}{r^2}\theta_1 \wedge \theta_2$$

となり、Gauss 曲率は $1/r^2$ である。

Gauss 曲率の定義および上の球面の Gauss 曲率の計算からわかるように、曲面の接平面の内積が定まっていれば $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を定めることができ、これから θ_1, θ_2 および ω が定まり $d\omega$ を求めることで Gauss 曲率がわかる。曲面の議論の出発点は 2 次元の領域から 3 次元 Euclid 空間への写像の像として曲面を定めることだったが、曲面の Gauss 曲率はこの写像から定まるというよりは、接平面の内積から定まっているわけである。

平面の領域の各点の内積を定めてその Gauss 曲率を計算する例を与える。

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

によって領域 D を定める。$X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{y^2}(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)$$

によって接平面の内積を定める。

$$\boldsymbol{e}_1 = (y, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, y)$$

は各点で接平面の正規直交系になる。

$$\theta_1 = \frac{1}{y} dx, \quad \theta_2 = \frac{1}{y} dy$$

は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の双対基底になる。

$$d\theta_1 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy, \quad d\theta_2 = 0$$

となるので、

$$d \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \omega \wedge \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

を満たす

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{1,2} \\ -\omega_{1,2} & 0 \end{bmatrix}$$

は $\omega_{1,2} = -\dfrac{1}{y} dx$ により定まる。

$$d\omega_{1,2} = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx = -\frac{1}{y^2} dx \wedge dy = -\theta_1 \wedge \theta_2$$

となり、Gauss 曲率は -1 である。

6 Riemann 多様体

多様体の各点の接ベクトル空間に内積 $\langle , \rangle$ が定まっていて、任意の局所座標近傍 $(U; x_, \ldots, x_n)$ に対して内積 $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ が U 上の C^∞ 級関数になるとき、接ベクトル空間の内積の全体を **Riemann 計量**と呼び、Riemann 計量の備わっている多様体を **Riemann 多様体**と呼ぶ。

Riemann 多様体の局所座標近傍 $(U; x_, \ldots, x_n)$ において、$\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ は U の各点の接ベクトル空間の基底になる。これらにグラム-シュミットの直交化を施すと U の各点の接ベクトル空間の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を得る。これらの双対基底を $\theta^1, \ldots, \theta^n$ で表し

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{bmatrix}$$

とおくと、θ は $\mathbb{R}^n$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式になる。

$$d\theta + \omega \wedge \theta = 0$$

を満たす $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式 ω が一意的に存在することを以下で証明する。この ω を**接続形式**と呼ぶ。

証明 $d\theta^i$ は $\mathbb{R}$ に値を持つ U 上の 2 次微分形式である。したがって、U 上の関数 $f^i_{j,k}$ によって

$$d\theta^i = \sum_{j,k=1}^n f^i_{j,k} \theta^j \wedge \theta^k, \quad f^i_{j,k} + f^i_{k,j} = 0$$

と表せる。そこで、

$$\omega^i_j = \sum_{k=1}^n (f^i_{j,k} - f^k_{i,j} + f^j_{k,i}) \theta^k$$

によって $\mathbb{R}$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式 ω^i_j を定める。

$$\omega^i_j + \omega^j_i = \sum_{k=1}^n (f^i_{j,k} - f^k_{i,j} + f^j_{k,i} + f^j_{i,k} - f^k_{j,i} + f^i_{k,j}) \theta^k = 0$$

となり、$\omega = [\omega^i_j]$ は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式になる。以下で $\omega \wedge \theta$ の i 成分を計算する。

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \theta)^i &= \sum_{j=1}^n \omega^i_j \wedge \theta^j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (f^i_{j,k} - f^k_{i,j} + f^j_{k,i}) \theta^k \wedge \theta^j \\ &\quad (-f^k_{i,j} = f^k_{j,i} \text{ なので}) \\ &= \sum_{j,k=1}^n f^i_{j,k} \theta^k \wedge \theta^j = -d\theta^i \end{aligned}$$

となり、$d\theta^i + (\omega\wedge\theta)^i = 0$ を得る。したがって、$d\theta + \omega\wedge\theta = 0$ が成り立つ。

次に ω の一意性を証明する。ω と $\tilde{\omega}$ が $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式であり、

$$d\theta + \omega\wedge\theta = 0, \quad d\theta + \tilde{\omega}\wedge\theta = 0$$

を満たすと仮定する。$\omega - \tilde{\omega} = \alpha$ とおくと、α も $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式である。上記の等式の両辺をひくと $\alpha\wedge\theta = 0$ を得る。

$$\alpha^i_j = \sum_{k=1}^n \alpha^i_{j,k}\theta^k$$

とおくと、$\alpha^i_{j,k} + \alpha^j_{i,k} = 0$ である。さらに、$\alpha\wedge\theta = 0$ の i 成分は

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha^i_j \wedge \theta^j = \sum_{j,k=1}^n \alpha^i_{j,k}\theta^k\wedge\theta^j$$

である。したがって、$\alpha^i_{j,k} = \alpha^i_{k,j}$ が成り立つ。これらより、

$$\alpha^i_{j,k} = \alpha^i_{k,j} = -\alpha^k_{i,j} = -\alpha^k_{j,i} = \alpha^j_{k,i} = \alpha^j_{i,k} = -\alpha^i_{j,k}$$

となり、$\alpha^i_{j,k} = 0$ がわかる。したがって、$\omega = \tilde{\omega}$ である。

Riemann 多様体の開集合 U の各点の接ベクトル空間の同じ向きの正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ と $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ があるとする。上と同じように θ, ω と θ', ω' をそれぞれ定める。このとき、$\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $O(n)$ の作用によって変換して得られる。よって、$O(n)$ に値を持つ U 上の関数 g によって

$$[\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n] = [\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n]g$$

となる。この両辺に θ を作用させると

$$\theta[\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n] = \begin{bmatrix}\theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n\end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n]g = [\theta^i(\boldsymbol{e}_j)]g = \begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix} g = g$$

となり、

$$g^{-1}\theta[\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n] = \begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

が成り立つ。これより $\theta' = g^{-1}\theta$ となって、$\theta = g\theta'$ がわかる。これを

$$d\theta + \omega\wedge\theta = 0$$

に代入すると、

$$d(g\theta') + \omega \wedge g\theta' = 0$$

を得る。以下でこの等式を変形する。(5.21) を使うと

$$\begin{aligned}
&dg \wedge \theta' + gd\theta' + \omega g \wedge \theta' = 0, \\
&g^{-1}dg \wedge \theta' + d\theta' + g^{-1}\omega g \wedge \theta' = 0, \\
&d\theta' + (g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) \wedge \theta' = 0.
\end{aligned}$$

他方、$d\theta' + \omega' \wedge \theta' = 0$ を満たす ω' の一意性より

$$\omega' = g^{-1}dg + g^{-1}\omega g \tag{6.23}$$

が成り立つ。

接続形式 ω に対して $\omega \wedge \omega$ を考える。$x \in U$ と $X, Y \in T_xM$ に対して

$$(\omega \wedge \omega)(X, Y) = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X) = [\omega(X), \omega(Y)] \in \mathfrak{o}(n)$$

となり、$\omega \wedge \omega$ は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 1 次微分形式である。

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

によって Ω を定めると、Ω は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ U 上の 2 次微分形式になる。Ω を**曲率形式**と呼ぶ。

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ から定まる曲率形式を Ω で表し、$O(n)$ に値を持つ関数 g によって

$$[\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n] = [\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n]g$$

と変換された $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ から定まる曲率形式を Ω' で表すと

$$\Omega' = g^{-1}\Omega g$$

が成り立つ。

証明 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ から定まる接続形式を ω で表し、$\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ から定まる接続形式を ω' で表す。(6.23) より、

$$\begin{aligned}
\Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\
&= d(g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) + (g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) \wedge (g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) \\
&\quad ((5.21)\ \text{より}) \\
&= d(g^{-1}) \wedge dg + d(g^{-1}) \wedge \omega g + g^{-1}d(\omega g) \\
&\quad + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}\omega g \\
&\quad ((5.22)\ \text{より}) \\
&= -g^{-1}dgg^{-1} \wedge dg - g^{-1}dgg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1}d\omega g + g^{-1}(d\omega g - \omega \wedge dg) \\
&\quad + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}\omega g \\
&= g^{-1}d\omega g + g^{-1}\omega \wedge \omega g = g^{-1}\Omega g.
\end{aligned}$$

Riemann 多様体の接ベクトル X を

$$X = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \theta^i(X) = [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n] \begin{bmatrix} \theta^1(X) \\ \vdots \\ \theta^n(X) \end{bmatrix}$$

と表現したとき、Ω を表現行列に持つ接ベクトル空間の線形変換

$$X \mapsto [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]\Omega \begin{bmatrix} \theta^1(X) \\ \vdots \\ \theta^n(X) \end{bmatrix} = \sum_{i,j} \boldsymbol{e}_i \Omega^i_j \theta^j(X) = \sum_{i,j} \Omega^i_j \theta^j(X) \boldsymbol{e}_i$$

は正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ のとり方によらないことが次のようにわかる。

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n]\Omega'\theta'(X) &= [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n] g g^{-1} \Omega g g^{-1} \theta(X) \\ &= [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n] \Omega \theta(X). \end{aligned}$$

したがって、Ω は接ベクトル空間の線形変換に値を持つ 2 次微分形式とみなせ、Riemann 多様体全体で定義できる。接ベクトル X, Y を Ω に代入すると $\Omega(X, Y)$ は接ベクトル空間の線形変換を定める。Ω^i_j は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ 2 次微分形式なので、この線形変換は Riemann 計量に関して接ベクトル空間の交代線形変換になる。これも同じ記号 Ω で表すことにする。

2 次元の場合は、$\omega \wedge \omega = 0$ になり $\Omega = d\omega$ となる。したがって、この場合は $d\omega$ が曲率形式であり、$d\omega$ の $(1, 2)$ 成分が Gauss 曲率である。

接続形式を定める等式 $d\theta + \omega \wedge \theta = 0$ の両辺を外微分する。$dd\theta + d(\omega \wedge \theta) = 0$ であり、$dd\theta = 0$ なので、$d(\omega \wedge \theta) = 0$ が成り立つ。以下でこの左辺を計算する。

$$0 = d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\omega = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta - \omega \wedge (-\omega \wedge \theta) = \Omega \wedge \theta.$$

次に曲率形式 Ω の定義式 $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ を外微分する。

$$\begin{aligned} d\Omega &= dd\omega + d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \end{aligned}$$

これらより

$$\Omega \wedge \theta = 0, \qquad d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

を得る。これらを **Bianchi の恒等式**と呼ぶ。

開集合 U 上で Ω は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ 2 次微分形式なので

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} R^i_{j,k,l} \theta^k \wedge \theta^l, \quad R^i_{j,k,l} + R^i_{j,l,k} = 0$$

と記述できる。このとき、次が成り立つ。

(1) $R^i_{j,k,l} + R^j_{i,k,l} = 0.$

(2) $R^i_{j,k,l} + R^i_{k,l,j} + R^i_{l,j,k} = 0.$

(3) $R^i_{j,k,l} = R^k_{l,i,j}.$

証明 (1) は Ω が $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ微分形式であることからわかる。
(2) Bianchi の恒等式 $\Omega \wedge \theta = 0$ を成分で表す。

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} R^i_{j,k,l} \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^j = \sum_{j,k,l=1}^{n} R^i_{j,k,l} \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l.$$

1 から n までのうちで互いに相異なる a, b, c について $\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c$ を含む項は

$$\begin{aligned} 0 &= R^i_{a,b,c}\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c + R^i_{b,c,a}\theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^a + R^i_{c,a,b}\theta^c \wedge \theta^a \wedge \theta^b \\ &\quad + R^i_{a,c,b}\theta^a \wedge \theta^c \wedge \theta^b + R^i_{b,a,c}\theta^b \wedge \theta^a \wedge \theta^c + R^i_{c,b,a}\theta^c \wedge \theta^b \wedge \theta^a \\ &= (R^i_{a,b,c} + R^i_{b,c,a} + R^i_{c,a,b} - R^i_{a,c,b} - R^i_{b,a,c} - R^i_{c,b,a})\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \\ &= 2(R^i_{a,b,c} + R^i_{b,c,a} + R^i_{c,a,b})\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c. \end{aligned}$$

となり、

$$R^i_{a,b,c} + R^i_{b,c,a} + R^i_{c,a,b} = 0$$

を得る。$a \neq b = c$ の場合は $R^i_{a,b,b} = R^i_{b,b,a} + R^i_{b,a,b} = 0$ となり、

$$R^i_{a,b,b} + R^i_{b,b,a} + R^i_{b,a,b} = 0$$

を得る。$a = b = c$ の場合は $R^i_{a,a,a} = 0$ なので主張は成り立つ。
(3) (1), (2) を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= (R^i_{j,k,l} + R^i_{k,l,j} + R^i_{l,j,k}) - (R^j_{k,l,i} + R^j_{l,i,k} + R^j_{i,k,l}) \\ &\quad - (R^k_{l,i,j} + R^k_{i,j,l} + R^k_{j,l,i}) + (R^l_{i,j,k} + R^l_{j,k,i} + R^l_{k,i,j}) \\ &= 2R^i_{j,k,l} - 2R^k_{l,i,j}. \end{aligned}$$

したがって、$R^i_{j,k,l} = R^k_{l,i,j}$ が成り立つ。

接ベクトル空間の正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対して、$\Omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を $\boldsymbol{e}_1$ に作用させ $\boldsymbol{e}_2$ と内積をとった値 $\langle \Omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_2 \rangle$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の定める平面の**断面曲率**という。接ベクトル空間内のすべての平面の断面曲率が一定値 c のとき、**定曲率** c であるという。
断面曲率の定義が正規直交系のとり方に依存しないことを確認しておこう。2 次直交行列 $g = (g^i_j)$ によって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を

$$[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]g$$

と変換する。

$$\begin{aligned}
&\langle \Omega(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)(\boldsymbol{e}'_1), \boldsymbol{e}'_2 \rangle \\
&= \langle \Omega(\boldsymbol{e}_1 g_1^1 + \boldsymbol{e}_2 g_1^2, \boldsymbol{e}_1 g_2^1 + \boldsymbol{e}_2 g_2^2)(\boldsymbol{e}_1 g_1^1 + \boldsymbol{e}_2 g_1^2), \boldsymbol{e}_1 g_2^1 + \boldsymbol{e}_2 g_2^2 \rangle \\
&= \det(g)^2 \langle \Omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_2 \rangle = \langle \Omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_2 \rangle
\end{aligned}$$

となり、正規直交系のとり方に依存しない。

定曲率 c であるための必要十分条件は、$R^i_{j,k,l} = c(\delta^i_k \delta_{jl} - \delta^i_l \delta_{jk})$ であることが知られている。このとき、

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} R^i_{j,k,l} \theta^k \wedge \theta^l = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} c(\delta^i_k \delta_{jl} - \delta^i_l \delta_{jk}) \theta^k \wedge \theta^l \\
&= \frac{1}{2} c(\theta^i \wedge \theta^j - \theta^j \wedge \theta^i) = c\theta^i \wedge \theta^j
\end{aligned}$$

が成り立つ。逆に $\Omega^i_j = c\theta^i \wedge \theta^j$ ならば、$R^i_{j,k,l} = c(\delta^i_k \delta_{jl} - \delta^i_l \delta_{jk})$ が成り立つこともわかる。特に、定曲率 c の Riemann 多様体の曲率形式は $\Omega^i_j = c\theta^i \wedge \theta^j$ となる。

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に通常の計量を入れたときの曲率形式を求める。第 i 成分のみ 1 で他の成分は 0 の $\mathbb{R}^n$ の元を $\boldsymbol{e}_i$ で表すと、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は各点の接ベクトル空間の正規直交基底になる。その双対基底 $\theta^1, \ldots, \theta^n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標 $x_1, \ldots, x_n$ を使って $\theta^i = dx_i$ と記述できる。$d\theta^i = ddx_i = 0$ なので、$\omega = 0$ である。さらに、$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ となる。したがって、$R^i_{j,k,l} = 0 = 0(\delta^i_k \delta_{jl} - \delta^i_l \delta_{jk})$ となり、$\mathbb{R}^n$ は定曲率 0 である。

n 次元単位球面

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

の曲率を立体射影を利用して計算する。超平面

$$\{(\boldsymbol{x}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

の点 $(\boldsymbol{x}, 0)$ と $(0, \ldots, 0, -1)$ を結ぶ直線と S^n は二点で交わり、そのうちの一点は $(0, \ldots, 0, -1)$ である。もう一つの交点を $p(\boldsymbol{x})$ で表す。このあとで示すように p は $\mathbb{R}^n$ から $S^n - \{(0, \ldots, 0, -1)\}$ への微分同型写像になる。この写像の逆写像 $p^{-1} : S^n - \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$ を立体射影と呼ぶ。

まず $p(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ の座標で記述する。$(\boldsymbol{x}, 0)$ と $(0, \ldots, 0, -1)$ を結ぶ直線は、パラメータ t によって

$$t(\boldsymbol{x}, 1) + (0, \ldots, 0, -1) = (t\boldsymbol{x}, t-1)$$

と表せる。この直線と S^n との交点では

$$t^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 + (t-1)^2 = 1, \quad (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2) t^2 - 2t = 0$$

となる。交点における t の値は

$$t = 0, \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}$$

である。$t = 0$ は交点 $(0, \dots, 0, -1)$ に対応する。よって、

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{2\boldsymbol{x}}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}, \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2} - 1 \right) = \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}(2\boldsymbol{x}, 1 - \|\boldsymbol{x}\|^2)$$

となる。$\boldsymbol{p}$ の偏微分は $1 \leq i \leq n$ について i 成分のみ 1 で他の成分は 0 のベクトルを $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ で表すと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_{x_i} &= \frac{-2x_i}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2}(2\boldsymbol{x}, 1 - \|\boldsymbol{x}\|^2) + \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}(0, \dots, \overset{i}{\breve{2}}, \dots, 0, -2x_i) \\
&= \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2}\{(-4x_i\boldsymbol{x}, -2x_i + 2x_i\|\boldsymbol{x}\|^2) + ((2 + 2\|\boldsymbol{x}\|^2)\bar{\boldsymbol{e}}_i, -2x_i - 2x_i\|\boldsymbol{x}\|^2)\} \\
&= \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2}(-4x_i\boldsymbol{x} + (2 + 2\|\boldsymbol{x}\|^2)\bar{\boldsymbol{e}}_i, -4x_i) \\
&= \frac{2}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2}(-2x_i\boldsymbol{x} + (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)\bar{\boldsymbol{e}}_i, -2x_i).
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{p}_{x_i}, \boldsymbol{p}_{x_i} \rangle &= \frac{4}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^4}\{4x_i^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 4x_i^2(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2) + (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2 + 4x_i^2\} \\
&= \frac{4}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2}
\end{aligned}$$

が成り立ち、$i \neq j$ のときは

$$\langle \boldsymbol{p}_{x_i}, \boldsymbol{p}_{x_j} \rangle = \frac{4}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^4}\{4x_ix_j\|\boldsymbol{x}\|^2 - 4x_ix_j(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^2 + 4x_ix_j\} = 0.$$

これらより、

$$\|\boldsymbol{p}_{x_i}\| = \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}$$

となり、

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}(-2x_i\boldsymbol{x} + (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)\bar{\boldsymbol{e}}_i, -2x_i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

は正規直交系になる。

$$d\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_{x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{e}_i dx_i$$

となるので、

$$\theta^i = \frac{2}{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}dx_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおくと、θ^i は $\boldsymbol{e}_i$ の双対基底になる。

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^n \frac{-2\cdot 2x_j}{(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^2}dx_j \wedge dx_i = -\sum_{j=1}^n x_j\theta^j \wedge \theta^i$$

そこで、

$$\omega^i_j = -x_j\theta^i + x_i\theta^j$$

とおくと、$\omega = [\omega^i_j]$ は $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ 1 次微分形式になり、

$$d\theta^i + \sum_{j=1}^n \omega^i_j \wedge \theta^j = -\sum_{j=1}^n x_j\theta^j \wedge \theta^i + \sum_{j=1}^n (-x_j\theta^i + x_i\theta^j) \wedge \theta^j = 0$$

が成り立つ。したがって、上に定めた ω は接続形式になる。曲率形式 Ω^i_j を求める。

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j &= d\omega^i_j + \sum_{k=1}^n \omega^i_k \wedge \omega^k_j \\
&= -dx_j \wedge \theta^i - x_j d\theta^i + dx_i \wedge \theta^j + x_i d\theta^j + \sum_{k=1}^n (-x_k\theta^i + x_i\theta^k) \wedge (-x_j\theta^k + x_k\theta^j) \\
&= -\frac{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}{2}\theta^j \wedge \theta^i + x_j \sum_{k=1}^n x_k\theta^k \wedge \theta^i + \frac{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}{2}\theta^i \wedge \theta^j - x_i \sum_{k=1}^n x_k\theta^k \wedge \theta^j \\
&\quad + \sum_{k=1}^n x_k x_j \theta^i \wedge \theta^k - \sum_{k=1}^n x_k^2 \theta^i \wedge \theta^j + \sum_{k=1}^n x_i x_k \theta^k \wedge \theta^j = \theta^i \wedge \theta^j
\end{aligned}$$

となり、S^n は定曲率 1 である。

　半空間

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

の接ベクトル $X = (X_i), Y = (Y_i)$ に対して

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{x_n^2}\sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

によって接ベクトル空間の内積を定める。

$$\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, \overset{i}{\breve{x_n}}, \ldots, 0) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

は各点で接ベクトル空間の正規直交系になる。

$$\theta^i = \frac{1}{x_n}dx_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

は $\boldsymbol{e}_i$ の双対基底になる。$1 \leq i \leq n-1$ に対して

$$d\theta^i = -\frac{1}{x_n^2} dx_n \wedge dx_i = -\theta^n \wedge \theta^i$$

であり、$d\theta^n = 0$ である。$d\theta + \omega \wedge \theta = 0$ を満たす $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ 1 次微分形式 $\omega = [\omega^i_j]$ は、$1 \leq i, j \leq n-1$ のとき、

$$\omega^i_j = 0, \quad \omega^i_n = -\theta^i$$

により定まる。これより

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j &= d\omega^i_j + \omega^i_n \wedge \omega^n_j = -\theta^i \wedge \theta^j, \\
\Omega^i_n &= d\omega^i_n + \omega^i_n \wedge \omega^n_n = -d\theta^i = \theta^n \wedge \theta^i = -\theta^i \wedge \theta^n
\end{aligned}$$

となり、H^n は定曲率 -1 である。

7 共変微分

多様体 M の C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(M)$ で表し、C^∞ 級ベクトル場の全体を $\Gamma(TM)$ で表す。自然な和とスカラー倍によって $\Gamma(TM)$ は実ベクトル空間になる。M が Riemann 計量 $\langle , \rangle$ を持つとき、$\Gamma(TM)$ には次の条件を満たす双線形写像

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \; ; \; (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

が一意的に存在する。

(1) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \qquad (X, Y \in \Gamma(TM), \; f \in C^\infty(M))$,

(2) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y \qquad (X, Y \in \Gamma(TM), \; f \in C^\infty(M))$,

(3) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad (X, Y \in \Gamma(TM))$

(4) $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \qquad (X, Y, Z \in \Gamma(TM))$,

∇ を**共変微分**と呼ぶ。

証明 まず、条件を満たす ∇ が存在すると仮定する。条件 (4) から、M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle \\
\langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= Y \langle Z, X \rangle \\
-\langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle &= -Z \langle X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

これらの両辺を加え、条件 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ に注意すると、

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle \\ = \; & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle. \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle) \end{aligned}$$

を得る。これより、この ∇ の一意性がわかる。逆に上の等式で ∇ を定める。

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \qquad (X, Y, Z \in C^\infty(TM)) \\ \nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \qquad (X, Y, Z \in C^\infty(TM)) \end{aligned}$$

が成り立つことは、定義式よりわかる。M 上の C^∞ 級関数 f に対して、

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(fX\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, fX\rangle - Z\langle fX, Y\rangle \\ &+ \langle [fX, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], fX\rangle + \langle [Z, fX], Y\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(fX\langle Y, Z\rangle + (Yf)\langle Z, X\rangle + fY\langle Z, X\rangle \\ &- (Zf)\langle X, Y\rangle - fZ\langle X, Y\rangle \\ &+ f\langle [X, Y], Z\rangle - (Yf)\langle X, Z\rangle - f\langle [Y, Z], X\rangle \\ &+ f\langle [Z, X], Y\rangle + (Zf)\langle X, Y\rangle) \\ &= \frac{1}{2}f(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle) \\ &= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

よって、$\langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle = f\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ が成り立ち、$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ を得る。

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X (fY), Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle fY, Z\rangle + fY\langle Z, X\rangle - Z\langle X, fY\rangle \\ &\quad +\langle [X, fY], Z\rangle - \langle [fY, Z], X\rangle + \langle [Z, X], fY\rangle) \\ &= \frac{1}{2}((Xf)\langle Y, Z\rangle + fX\langle Y, Z\rangle + fY\langle Z, X\rangle \\ &\quad -(Zf)\langle X, Y\rangle - fZ\langle X, Y\rangle \\ &\quad +f\langle [X, Y], Z\rangle + (Xf)\langle Y, Z\rangle \\ &\quad -f\langle [Y, Z], X\rangle + (Zf)\langle Y, X\rangle + \langle [Z, X], fY\rangle) \\ &= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle + (Xf)\langle Y, Z\rangle \\ &= \langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

よって、$\langle \nabla_X(fY), Z\rangle = \langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle$ が成り立ち、

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

を得る。∇ の定義式より、

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&\quad +\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle) \\
&\quad +\frac{1}{2}(X\langle Z, Y\rangle + Z\langle Y, X\rangle - Y\langle X, Z\rangle \\
&\quad +\langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Z, Y], X\rangle + \langle [Y, X], Z\rangle) \\
&= X\langle Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

最後に

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&\quad + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle) \\
&\quad - \frac{1}{2}(Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle \\
&\quad + \langle [Y, X], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle) \\
&= \langle [X, Y], Z\rangle
\end{aligned}$$

となるので、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

を得る。

局所的な正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対して、それから定まる接続形式 ω によって共変微分 ∇ を記述できることを以下で示す。$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の双対基底を $\theta^1, \ldots, \theta^n$ で表し、これらから定まる接続形式を ω で表す。共変微分の存在証明で示したことから

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k\rangle &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k\rangle + \boldsymbol{e}_j\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i\rangle - \boldsymbol{e}_k\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle \\
&\quad + \langle [\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j], \boldsymbol{e}_k\rangle - \langle [\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k], \boldsymbol{e}_i\rangle + \langle [\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i], \boldsymbol{e}_j\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\theta^k([\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j]) - \theta^i([\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k]) + \theta^j([\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i])).
\end{aligned}$$

ここで、微分形式の外微分の性質を導いておく。1 次微分形式 α とベクトル場 X, Y について

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

が成り立つことを以下で示す。α の局所表示を

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$$

で表すと、α の外微分 $d\alpha$ の局所表示は

$$d\alpha = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

になる。ベクトル場 X, Y の局所表示を

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で表す。外積の定義より

$$d\alpha(X, Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} (\xi^j \eta^i - \eta^j \xi^i)$$

が成り立つ。

$$\alpha(Y) = \sum_i \alpha_i \eta^i$$

となるので

$$X(\alpha(Y)) = \sum_{i,j} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_i \eta^i) = \sum_{i,j} \xi^j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \eta^i + \alpha_i \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right).$$

X と Y を入れ替えることにより

$$Y(\alpha(X)) = \sum_{i,j} \eta^j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \xi^i + \alpha_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right)$$

も得られる。ベクトル場のブラケット積の定義から

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i,j} \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\alpha([X, Y]) = \sum_{i,j} \alpha_i \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right).$$

以上の計算結果より

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

を得る。

上記の外微分に関する等式を利用すると

$$d\theta^k(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i(\theta^k(\boldsymbol{e}_j))-\boldsymbol{e}_j(\theta^k(\boldsymbol{e}_i))-\theta^k([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])=-\theta^k([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])$$

となる。他方

$$\begin{aligned}d\theta^k(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)&=-\sum_l(\omega_l^k\wedge\theta^l)(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=-\sum_l(\omega_l^k(\boldsymbol{e}_i)\theta^l(\boldsymbol{e}_j)-\omega_l^k(\boldsymbol{e}_j)\theta^l(\boldsymbol{e}_i))\\&=-(\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i)-\omega_i^k(\boldsymbol{e}_j))\end{aligned}$$

となるので、

$$\theta^k([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])=\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i)-\omega_i^k(\boldsymbol{e}_j)$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k\rangle&=\frac{1}{2}(\theta^k([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])-\theta^i([\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k])+\theta^j([\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_i]))\\&=\frac{1}{2}(\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i)-\omega_i^k(\boldsymbol{e}_j)-\omega_k^i(\boldsymbol{e}_j)+\omega_j^i(\boldsymbol{e}_k)+\omega_i^j(\boldsymbol{e}_k)-\omega_k^j(\boldsymbol{e}_i))\\&=\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i).\end{aligned}$$

したがって、次の等式が成り立つ。

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j=\sum_k\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_k.$$

この表示から任意のベクトル場に対して、共変微分を求めてみよう。ベクトル場 X,Y の $\boldsymbol{e}_i$ による表示を

$$X=\sum_i X^i\boldsymbol{e}_i\quad(X^i=\theta^i(X)),\qquad Y=\sum_i Y^i\boldsymbol{e}_i\quad(Y^i=\theta^i(Y))$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}\nabla_XY&=\sum_{i,j}\nabla_{X^i\boldsymbol{e}_i}(Y^j\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i,j}X^i\nabla_{\boldsymbol{e}_i}(Y^j\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i,j}X^i(\boldsymbol{e}_iY^j\boldsymbol{e}_j+Y^j\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j)\\&=\sum_{i,j}X^i\boldsymbol{e}_iY^j\boldsymbol{e}_j+\sum_{i,j,k}X^iY^j\omega_j^k(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

となり、ベクトル場 X,Y に対する ∇_XY の定まり方を接続形式 ω によって記述できる。

上記の接続形式と共変微分の関係から、曲率形式を共変微分で表すこともできる。

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k&=\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\left(\sum_l\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_l\right)=\sum_l\left(\boldsymbol{e}_i(\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j))\boldsymbol{e}_l+\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j)\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_l\right)\\&=\sum_l\boldsymbol{e}_i(\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j))\boldsymbol{e}_l+\sum_{l,m}\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j)\omega_l^m(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_m\\&=\sum_m\boldsymbol{e}_i(\omega_k^m(\boldsymbol{e}_j))\boldsymbol{e}_m+\sum_{l,m}\omega_l^m(\boldsymbol{e}_i)\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m.\end{aligned}$$

i と j を入れ換えると

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k = \sum_m \boldsymbol{e}_j(\omega_k^m(\boldsymbol{e}_i))\boldsymbol{e}_m + \sum_{l,m}\omega_l^m(\boldsymbol{e}_j)\omega_k^l(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_m.$$

さらに

$$\nabla_{[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]}\boldsymbol{e}_k = \sum_m \omega_k^m([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])\boldsymbol{e}_m.$$

これらより、

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k - \nabla_{[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]}\boldsymbol{e}_k \\
&= \sum_m \left(\boldsymbol{e}_i(\omega_k^m(\boldsymbol{e}_j)) - \boldsymbol{e}_j(\omega_k^m(\boldsymbol{e}_i)) - \omega_k^m([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j])\right)\boldsymbol{e}_m \\
&\quad + \sum_{l,m}\left(\omega_l^m(\boldsymbol{e}_i)\omega_k^l(\boldsymbol{e}_j) - \omega_l^m(\boldsymbol{e}_j)\omega_k^l(\boldsymbol{e}_i)\right)\boldsymbol{e}_m \\
&= \sum_m d\omega_k^m(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m + \sum_m (\omega\wedge\omega)_k^m(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m \\
&= \sum_m (d\omega+\omega\wedge\omega)_k^m(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m = \sum_m \Omega_k^m(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_k - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_k - \nabla_{[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]}\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l\rangle = \Omega_k^l(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

が成り立つ。

8　曲率の性質

n 次元連結 Riemann 多様体の曲率形式が局所的に関数 c によって $\Omega_j^i = c\theta^i\wedge\theta^j$ と記述できるとする。$n \geq 3$ ならば c は定数になる。

証明　Bianchi の恒等式 $d\Omega = \Omega\wedge\omega - \omega\wedge\Omega$ に $\Omega_j^i = c\theta^i\wedge\theta^j$ を代入する。左辺の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}
d\Omega_j^i &= dc\wedge\theta^i\wedge\theta^j + cd\theta^i\wedge\theta^j - c\theta^i\wedge d\theta^j \\
&= dc\wedge\theta^i\wedge\theta^j - c\sum_k \omega_k^i\wedge\theta^k\wedge\theta^j + c\sum_k \theta^i\wedge\omega_k^j\wedge\theta^k \\
&= dc\wedge\theta^i\wedge\theta^j - c\sum_k \omega_k^i\wedge\theta^k\wedge\theta^j - c\sum_k \omega_k^j\wedge\theta^i\wedge\theta^k.
\end{aligned}$$

右辺の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge\omega - \omega\wedge\Omega)_j^i &= \sum_k \Omega_k^i\wedge\omega_j^k - \sum_k \omega_k^i\wedge\Omega_j^k \\
&= \sum_k c\theta^i\wedge\theta^k\wedge\omega_j^k - \sum_k \omega_k^i\wedge c\theta^k\wedge\theta^j
\end{aligned}$$

$$= -c\sum_k \omega_k^j \wedge \theta^i \wedge \theta^k - c\sum_k \omega_k^i \wedge \theta^k \wedge \theta^j.$$

したがって、Bianchi の恒等式より

$$dc \wedge \theta^i \wedge \theta^j = 0$$

が成り立つ。$dc = \sum_k \boldsymbol{e}_k c\theta^k$ となるので、任意の i, j について

$$\sum_k \boldsymbol{e}_k c\theta^k \wedge \theta^i \wedge \theta^j = 0.$$

これより $n \geq 3$ ならば、任意の k について $dc(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_k c = 0$ となる。したがって、$dc = 0$ すなわち c は局所的に定数になる。多様体が連結ならば、c は多様体全体で定数になる。

参考文献

[1] 田崎博之、「微分形式の可積分性」、講義ノート、`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/lecture/ln1997/cho97.pdf`

[2] 田崎博之、「微分のことばで幾何を扱う／微分幾何」、『数学セミナー』2017 年 1 月号、17–23.

[3] P. Griffiths, "On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry", *Duke Math. J.* Vol. 41, No. 4 (1974), 775-814.