数学類

微分幾何学

Riemann 幾何学

田崎博之

2018 年度

数学類

微分幾何学

Differential Geometry

授業概要

Riemann 幾何学の基本事項について解説する。

目 次

第1章　テンソル場

1.1　テンソル代数

定義 1.1.1 有限次元実ベクトル空間 V に対して、V から実数 $\mathbf{R}$ への線形写像の全体を V^* で表し、V の**双対ベクトル空間**と呼ぶ。V^* は $\mathbf{R}$ の和と積から自然に定まる演算によってベクトル空間の構造を持つ。$v \in V$ に対して

$$v(f) = f(v) \qquad (f \in V^*)$$

によって、$v : V^* \to \mathbf{R}$ を定めると、$v \in (V^*)^*$ とみなすことができ、この対応によって $(V^*)^*$ と V を同一視することができる。δ^i_j を

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

によって定める。V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して、$f^i(u_j) = \delta^i_j$ によって定まる V^* の元 $\{f^i\}$ は V^* の基底になる。特に $\dim V^* = \dim V$ となる。$\{f^i\}$ を $\{u_j\}$ の**双対基底**と呼ぶ。

定義 1.1.2 p 個の実ベクトル空間 $V_1, \ldots, V_p$ の積 $V_1 \times \cdots \times V_p$ から実ベクトル空間 W への写像 F が V_1 から V_p の各成分について線形写像になるとき、F を**多重線形写像**と呼ぶ。有限次元実ベクトル空間 V に対して、$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q}$ 上で定義された $p+q$ 変数の実数値多重線形写像を V 上の (p,q) **型テンソル** と呼び、その全体を $T^{(p,q)}(V)$ で表す。$T^{(p,q)}(V)$ を (p,q) **型テンソル空間**と呼ぶ。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A, A' と実数 r に対して

$$\begin{aligned}
&(A + A')(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) \\
&\ = A(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) + A'(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q), \\
&(rA)(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) = rA(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q)
\end{aligned}$$

によって $T^{(p,q)}(V)$ の加法とスカラー倍が定まる。この加法とスカラー倍によって $T^{(p,q)}(V)$ は実ベクトル空間になる。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A と $T^{(r,s)}(V)$ の元 B に対して、

$$\begin{aligned}
& (A \otimes B)(g^1, \ldots, g^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) \\
= \ & A(g^1, \ldots, g^p, v_1, \ldots, v_q) B(g^{p+1}, \ldots, g^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) \\
& (g^1, \ldots, g^{p+r} \in V^*,\ v_1, \ldots, v_{q+s} \in V)
\end{aligned}$$

によって $(p+r,q+s)$ 型テンソル $A \otimes B$ を定める。$A \otimes B$ を A と B の**テンソル積**と呼ぶ。$T^{(1,0)}(V) = (V^*)^* = V$ とみなし、$T^{(0,1)}(V) = V^*$ であることに注意する。V の元 $u_1, \dots, u_p$ と V^* の元 $f^1, \dots, f^q$ に対して、

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q)(g^1, \dots, g^p, v_1, \dots, v_q) \\ = \ & g^1(u_1) \cdots g^p(u_p) f^1(v_1) \cdots f^q(v_q) \\ & (g^1, \dots, g^p \in V^*,\ v_1, \dots, v_q \in V) \end{aligned}$$

によって写像

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{q} \longrightarrow \mathbf{R}$$

は定まり、$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q$ は V 上の (p,q) 型テンソルになる。

命題 1.1.3 V を有限次元実ベクトル空間とすると、写像

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) & \longrightarrow & T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A,B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

は双線形写像になり、写像

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{q} & \longrightarrow & T^{(p,q)}(V) \\ (u_1, \dots, u_p, f^1, \dots, f^q) & \longmapsto & u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q \end{array}$$

は多重線形写像になる。

定義 1.1.4 有限次元実ベクトル空間 V に対して、

$$T(V) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T^{(p,q)}(V)$$

とおく。ただし、$T^{(0,0)}(V) = \mathbf{R}$ としておく。定義 1.1.2 で定めた双線形写像

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}(V) \times T^{(r,s)}(V) & \longrightarrow & T^{(p+r,q+s)}(V) \\ (A,B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

を、$T(V) \times T(V)$ 全体の双線形写像に拡張し、これを二項演算として $T(V)$ は代数になる。$T(V)$ を V 上の**テンソル代数**と呼ぶ。

命題 1.1.5 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \dots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \dots, f^n$ をその双対基底とする。すると、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \le i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \le n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。特に、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になる。

証明　まず $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ $(1\le i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q\le n)$ が線形独立になることを示す。

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p=1\\ j_1,\dots,j_q=1}}^{n} a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}=0\qquad (a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\in\mathbf{R})$$

とする。$1\le k_1,\dots,k_p,l_1,\dots,l_q\le n$ となる $k_1,\dots,k_p,l_1,\dots,l_q$ をとり、

$$(f^{k_1},\dots,f^{k_p},u_{l_1},\dots,u_{l_q})$$

を上の式に代入すると $a^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}=0$ となる。したがって $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ は線形独立である。

次に $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ $(1\le i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q\le n)$ は $T^{(p,q)}(V)$ を生成することを示す。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A を任意に一つとる。V の元 v に対して

$$v=\sum_{j=1}^{n}f^j(v)u_j$$

となり、V^* の元 g に対して

$$g=\sum_{i=1}^{n}g(u_i)f^i$$

となる。$g^1,\dots,g^p\in V^*$ と $v_1,\dots,v_q\in V$ に対して

$$\begin{aligned}
&A(g^1,\dots,g^p,v_1,\dots,v_q)\\
=\ &A\left(\sum_{i_1=1}^{n}g^1(u_{i_1})f^{i_1},\dots,\sum_{i_p=1}^{n}g^p(u_{i_p})f^{i_p},\sum_{j_1=1}^{n}f^{j_1}(v_1)u_{j_1},\dots,\sum_{j_q=1}^{n}f^{j_q}(v_q)u_{j_q}\right)\\
=\ &\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p=1\\ j_1,\dots,j_q=1}}^{n} g^1(u_{i_1})\cdots g^p(u_{i_p})f^{j_1}(v_1)\cdots f^{j_q}(v_q)A(f^{i_1},\dots,f^{i_p},u_{j_1},\dots,u_{j_q})\\
=\ &\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p=1\\ j_1,\dots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1},\dots,f^{i_p},u_{j_1},\dots,u_{j_q})\\
&\times(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q})(g^1,\dots,g^p,v_1,\dots,v_q).
\end{aligned}$$

よって、

$$A=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p=1\\ j_1,\dots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1},\dots,f^{i_p},u_{j_1},\dots,u_{j_q})u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$

が成り立つ。したがって $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ は $T^{(p,q)}(V)$ を生成する。

以上で

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になることがわかった。このことから、$T^{(p,q)}(V)$ の次元は n^{p+q} になることもわかる。

定義 1.1.6 命題 1.1.5 の証明中にある $T^{(p,q)}V$ の元 A の基底による表示

$$A = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

を A の**成分表示**と呼び、$A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q})$ を A の**成分**と呼ぶ。

注意 1.1.7 上の成分表示のように、和 $\sum$ の後で同じ添え字が上下組になって現れ、添え字の動く範囲がわかっているときは、和の記号 $\sum$ を省略する。例えば、上の場合は

$$A = A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}) u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

と書き表す。この表し方を **Einstein の規約**という。考えている基底が定まっている場合には

$$A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = A(f^{i_1}, \ldots, f^{i_p}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q})$$

と書くことにする。このとき、A の成分表示は

$$A = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

となる。さらに、$A = (A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q})$ とも表す。

命題 1.1.8 V を n 次元実ベクトル空間とする。$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とする。$T^{(p,q)}(V)$ の元 A を

$$A = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q}$$

と成分表示する。V のもう一つの基底 $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ とその双対基底 $\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^n$ をとり、

$$A = \bar{A}^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \bar{u}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{u}_{k_p} \otimes \bar{f}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{f}^{l_q}$$

と成分表示する。$u_1, \ldots, u_n$ から $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ への基底の変換行列を $g = (g^i_k)$ で表し、その逆行列を $\bar{g} = (\bar{g}^l_j)$ で表す。すなわち、

$$\bar{u}_k = g^i_k u_i, \qquad \bar{g}^i_k g^k_j = \delta^i_j.$$

このとき、

$$\bar{A}^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} = A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \bar{g}^{k_1}_{i_1} \cdots \bar{g}^{k_p}_{i_p} g^{j_1}_{l_1} \cdots g^{j_q}_{l_q}$$

が成り立つ。

命題 1.1.9 V を有限次元実ベクトル空間とし、V の基底 $u_1,\dots,u_n$ とその双対基底 $f^1,\dots,f^n$ をとっておく。$T^{(p,q)}(V)$ の元 $A=(A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ と $T^{(r,s)}(V)$ の元 $B=(B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s})$ のテンソル積 $A\otimes B$ の成分は、

$$(A\otimes B)^{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_q l_1\cdots l_s}=A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}B^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$$

で与えられる。

定義 1.1.10 V を有限次元実ベクトル空間とし、基底 $u_1,\dots,u_n$ とその双対基底 $f^1,\dots,f^n$ をとる。$A\in T^{(p,q)}(V)$ とする。$1\le r\le p,\ 1\le s\le q$ となる r,s をとり、写像

$$C^{(r,s)}A:\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p-1}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q-1}\to\mathbf{R}$$

を

$$\begin{aligned}&(C^{(r,s)}A)(g^1,\dots,g^{p-1},v_1,\dots,v_{q-1})\\&=A(g^1,\dots,g^{r-1},f^i,g^r,\dots,g^{p-1},v_1,\dots,v_{s-1},u_i,v_s,\dots,v_{q-1})\end{aligned}$$

によって定める。すると $C^{(r,s)}A\in T^{(p-1,q-1)}(V)$ となる。$C^{(r,s)}A$ を A の**縮約**と呼ぶ。

例 1.1.11 定義 1.1.10 において $p=q=1$ の場合を考える。正確な詳しい議論は例 1.1.14 で行うが、ここでは縮約の最初の例として簡単に述べておく。V の線形変換の全体を $\mathrm{End}(V)$ で表す。$A=A^i_j u_i\otimes f^j\in T^{(1,1)}(V)$ に $\mathrm{End}(V)$ の元

$$v\mapsto A^i_j f^j(v)u_i$$

を対応させることにより、$T^{(1,1)}(V)$ と $\mathrm{End}(V)$ は線形同型になる。これにより両者を同一視する。このとき、

$$C^{(1,1)}A=A^i_j u_i(f^k)f^j(u_k)=A^k_k=\mathrm{tr}A.$$

すなわち、$T^{(1,1)}(V)$ の元を $\mathrm{End}(V)$ の元と同一視すると、縮約 $C^{(1,1)}$ は線形変換の tr に他ならない。縮約は tr の一般化になっている。

命題 1.1.12 定義 1.1.10 の縮約の定義は、V の基底のとり方に依存しない。また、V の基底 $u_1,\dots,u_n$ とその双対基底 $f^1,\dots,f^n$ に関する成分表示は

$$(C^{(r,s)}A)^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}}=A^{i_1\cdots i_{r-1}ii_r\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}ij_s\cdots j_{q-1}}$$

となる。

証明 $\bar{u}_k=g^i_k u_i$ によって基底を変換すると、命題 1.1.8 または、その証明中に示したことより、双対基底は、$\bar{f}^l=\bar{g}^l_j f^j$ によって変換される。これを使うと縮約の定義は基底のとり方に依存しないことがわかる。

縮約の定義より次がわかる。

$$(C^{(r,s)}A)^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}}=A^{i_1\cdots i_{r-1}ii_r\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}ij_s\cdots j_{q-1}}.$$

命題 1.1.13 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、

$$\phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p} \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{q} \to W$$

を多重線形写像とする。このとき

$$\Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes g^1 \otimes \cdots \otimes g^q) = \phi(v_1, \ldots, v_p, g^1, \ldots, g^q) \qquad (v_i \in V,\ g^j \in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi : T^{(p,q)}(V) \to W$$

が唯一つ存在する。

証明　命題 1.1.5 より、$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とし、$f^1, \ldots, f^n$ をその双対基底とすると、

$$u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_q} \quad (1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n)$$

は $T^{(p,q)}(V)$ の基底になる。そこで、

$$\Phi(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^q) = \phi(u_1, \ldots, u_p, f^1, \ldots, f^q)$$

によって Φ の基底上の値を定め、線形になるように $T^{(p,q)}(V)$ 全体に拡張すると、Φ は命題の条件を満たす線形写像になる。Φ の条件は $T^{(p,q)}(V)$ の基底の像を定めているので、このような Φ は一意的である。

例 1.1.14 V を有限次元実ベクトル空間とし、写像 $\phi : V \times V^* \to \mathrm{End}(V)$ を

$$\phi(u, f)(v) = f(v)u \qquad (u, v \in V,\ f \in V^*)$$

によって定めると、ϕ は双線形写像になる。命題 1.1.13 より、

$$\Phi(u \otimes f) = \phi(u, f) \qquad (u \in V,\ f \in V^*)$$

を満たす線形写像

$$\Phi : T^{(1,1)}(V) \to \mathrm{End}(V)$$

が唯一つ存在する。V の基底 $u_1, \ldots, u_n$ とその双対基底 $f^1, \ldots, f^n$ をとる。

$$\Phi(u_i \otimes f^j)(u_k) = \phi(u_i, f^j)(u_k) = f^j(u_k)u_i = \delta^j_k u_i$$

となるので、$\Phi(u_i \otimes f^j)$ は u_j を u_i に写し、他の u_k を 0 に写す線形写像になる。よって

$$\{\Phi(u_i \otimes f^j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

は $\mathrm{End}(V)$ の基底になる。さらに命題 1.1.5 より、Φ は $T^{(1,1)}(V)$ の基底を $\mathrm{End}(V)$ の基底に写し、線形同型写像になる。この線形同型写像によって、$T^{(1,1)}(V)$ と $\mathrm{End}(V)$ を同一視する。

$A \in T^{(1,1)}(V)$ の成分を A^i_j とすると、$A = A^i_j u_i \otimes f^j$ となり、

$$\Phi(A) = A^i_j \Phi(u_i \otimes f^j).$$

よって、

$$\Phi(A)u_k = A^i_j \Phi(u_i \otimes f^j)u_k = A^i_j \delta^j_k u_i = A^i_k u_i$$

となり、(A^i_j) は $\Phi(A)$ の基底 $u_1, \ldots, u_n$ に関する行列表示になる。さらに、

$$C^{(1,1)}A = A^i_i = \mathrm{tr}(\Phi(A))$$

となるので、$C^{(1,1)}A = \mathrm{tr}(\Phi(A))$ が成り立つ。つまり、$T^{(1,1)}(V)$ を $\mathrm{End}(V)$ と同一視すると、$T^{(1,1)}(V)$ での縮約は線形写像のトレースになる。

命題 1.1.15 V と W を有限次元実ベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする。このとき次の条件を満たす線形写像

$$F^{(p,0)} : T^{(p,0)}(V) \longrightarrow T^{(p,0)}(W)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $v_1, \ldots, v_p \in V$ に対して

$$F^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_p)$$

が成り立つ。また次の条件を満たす線形写像

$$F^{(0,q)} : T^{(0,q)}(W) \longrightarrow T^{(0,q)}(V)$$

が唯一つ存在する。条件：任意の $g^1, \ldots, g^p \in W^*$ に対して

$$F^{(0,q)}(g^1 \otimes \cdots \otimes g^q) = (g^1 \circ F) \otimes \cdots \otimes (g^q \circ F)$$

が成り立つ。

1.2　ベクトル束

定義 1.2.1 $\pi_E : E \to M$ が次の条件を満たすとき、多様体 M 上の**ベクトル束**と呼ぶ。

(1) E, M は多様体であり、$\pi_E : E \to M$ は多様体の間の C^∞ 級写像である。

(2) ある自然数 k が存在し、M の各点 p に対して p の開近傍 U と微分同型写像

$$\Phi_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$$

が存在し、$u \in \pi_E(U)$ に対して $\Phi_U(u)$ の U 成分は $\pi_E(u)$ に一致し、

$$\Phi_U(u) = (\pi_E(u), \phi_U(u)) \qquad (u \in \pi_E^{-1}(U))$$

とおくと、$x \in U$ に対して $\pi_E^{-1}(x)$ はベクトル空間の構造を持ち、

$$\phi_U|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \to \mathbf{R}^k$$

は線形同型写像になる。

E をベクトル束の**全空間**、M を**底空間**、π_E を**射影**、$\pi_E^{-1}(x)$ を x の**ファイバー**と呼ぶ。k をベクトル束の**階数**と呼び、$\mathrm{rank}E$ で表す。

定義 1.2.2 $\pi : E \to M$ と $\pi' : E' \to M'$ を多様体 M と M' 上のベクトル束とする。$x \in M$ に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$、$y \in M'$ に対して $E'_y = (\pi')^{-1}(y)$ と表す。C^∞ 級写像 $\Phi : E \to E'$ と $\phi : M \to M'$ が $\pi \circ \pi = \pi' \circ \Phi$ を満たし、各 $x \in M$ に対して

$$\phi|_{E_x} : E_x \to E'_{\phi(x)}$$

が線形写像になるとき、Φ を**ベクトル束の準同型写像**と呼ぶ。$\Phi : E \to E'$ が微分同型写像になるとき、Φ を**ベクトル束の同型写像**と呼び、$\pi : E \to M$ と $\pi' : E' \to M'$ は**同型**であるという。V をベクトル空間とし、$M \times V$ から M への射影を考えることによって、$M \times V$ は M 上のベクトル束になる。M 上の E が $M \times V$ と同型になるとき、E を**自明ベクトル束**と呼ぶ。次の例で扱う M の接ベクトル束 TM が自明であるとき、M は**絶対平行性**を持つという。

例 1.2.3 M を多様体とし、各 $x \in M$ における M の接ベクトル空間を T_xM で表す。

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

とおく。$u \in TM$ に対して $u \in T_xM$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : TM \to M$$

が定まる。M の各点 p に対して p を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。U の各点 x において

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

は接ベクトル空間 T_xM の基底になるので、$\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (x^1(\pi(u)), \dots, x^n(\pi(u)), \xi^1, \dots, \xi^n) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to (x^1, \dots, x^n)(U) \times \mathbf{R}^n$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$ をとることができ、TM は多様体になる。さらに、π の定め方より $\pi : TM \to M$ がベクトル束になることがわかる。これを多様体 M の**接ベクトル束**と呼ぶ。

定義 1.2.4 $\pi_E : E \to M$ を多様体 M 上のベクトル束とする。C^∞ 級写像 $\sigma : M \to E$ で $\pi_E \circ \sigma = 1_M$ を満たすものを、ベクトル束 E の**断面**と呼ぶ。条件 $\pi_E \circ \sigma = 1_M$ は、任意の $x \in M$ に対して $\sigma(x) \in E_x$ が成り立つことと同値である。E の断面の全体を $\Gamma(M, E)$ または単に $\Gamma(E)$ で表す。接ベクトル束の断面は、**ベクトル場**ともいう。

例 1.2.5 $\Gamma(M \times \mathbf{R})$ は M 上の C^∞ 級関数全体とみなせ、ベクトル空間 V に対して $\Gamma(M \times V)$ は M 上の V に値を持つ C^∞ 級関数全体とみなせる。

定義 1.2.6 多様体 M の各点 $p \in M$ の接ベクトル空間 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ が定まっていて、任意のベクトル場 $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対して $\langle X, Y \rangle \in \Gamma(M \times \mathbf{R})$ が成り立つとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**と呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体の接ベクトルの長さや角度は、Riemann 計量によって Euclid 空間と同様に定める。

例 1.2.7 $M = \mathbf{R}^n$ とおくと、各点の接ベクトル空間 T_xM は自然に $\mathbf{R}^n$ と同一視でき、$\mathbf{R}^n$ の標準的な内積によって、M は Riemann 多様体になる。

定義 1.2.8 $\iota : M \to \tilde{M}$ を多様体 M から Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ への挿入とする。すなわち M の各点 x での ι の微分写像 $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$ が単射であるとする。このとき、$\tilde{M}$ 上の Riemann 計量 $\tilde{g}$ の $d\iota$ による引き戻し $g = \iota^*\tilde{g}$ は M 上の Riemann 計量になる。この (M, g) を $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。ただし、引き戻し $\iota^*\tilde{g}$ は

$$(\iota^*\tilde{g})_x(X, Y) = \tilde{g}_{\iota(x)}(d\iota_x(X), d\iota_x(Y)) \qquad (x \in M,\ X, Y \in T_xM)$$

によって定義される。

注意 1.2.9 曲線論や曲面論で扱っている曲線や曲面は、$\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}^2$ の開集合から $\mathbf{R}^2$ や $\mathbf{R}^3$ への挿入から定まる Riemann 部分多様体を考察の対象にしている。

注意 1.2.10 定義1.2.8では、$\tilde{M}$ の Riemann 計量から M の Riemann 計量を誘導したが、M の Riemann 計量を固定して議論する場合もある。そのときは、Riemann 多様体 (M,g) から $(\tilde{M},\tilde{g})$ への C^∞ 級写像 ι が、M の各点 x に対して $d\iota_x : T_xM \to T_{\iota(x)}\tilde{M}$ は等長線形写像になるという条件をみたすとき、ι を**等長的挿入**と呼び、(M,g) を $(\tilde{M},\tilde{g})$ の **Riemann 部分多様体**と呼ぶ。

例 1.2.11 $\iota : M \to (\tilde{M},\tilde{g})$ を Riemann 多様体 $(\tilde{M},\tilde{g})$ の Riemann 部分多様体とする。

$$T\tilde{M}|_M = \bigcup_{x\in M} T_{\iota(x)}\tilde{M}$$

によって $T\tilde{M}|_M$ を定めると、TM のベクトル束の構造から $T\tilde{M}|_M$ もベクトル束になることがわかる。各 $x \in M$ に対して $d\iota_x(T_xM)$ は $T_{\iota(x)}\tilde{M}$ の部分空間である。各 $x \in M$ に対して、

$$T_x^\perp M = \{u \in T_{\iota(x)}\tilde{M} \mid \tilde{g}_{\iota(x)}(u, d\iota_x(T_xM)) = 0\}$$

とおき、

$$T^\perp M = \bigcup_{x\in M} T_x^\perp M$$

で $T^\perp M$ を定める。$u \in T^\perp M$ に対して $u \in T_x^\perp M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像

$$\pi : T^\perp M \to M$$

が定まる。このとき、$\pi : T^\perp M \to M$ はベクトル束になる。$\pi : T^\perp M \to M$ を、Riemann 部分多様体 M の**法ベクトル束**と呼ぶ。法ベクトル束 $T^\perp M$ の断面を M 上の**法ベクトル場**と呼ぶ。

定義 1.2.12 E を多様体 M 上のベクトル束とする。$\langle\ ,\ \rangle$ は E の各ファイバーの内積を定めていて、E の任意の断面 s,t に対して

$$\langle s,t\rangle(x) = \langle s(x), t(x)\rangle \qquad (x \in M)$$

によって定まる M 上の関数 $\langle s,t\rangle$ が C^∞ 級になるとき、$\langle\ ,\ \rangle$ をベクトル束 E の**計量**といい、$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ を計量ベクトル束と呼ぶ。

例 1.2.13 定義 1.2.6 で定めた多様体の Riemann 計量は、接ベクトル束の計量に他ならない。また、Riemann 多様体の Riemann 部分多様体の法ベクトル束にも、全体の Riemann 多様体の計量から自然に定まる計量が入る。

1.3　テンソル場

定義 1.3.1 多様体 M の各点 $x \in M$ の接ベクトル空間 T_xM 上の (p,q) 型テンソル空間 $T^{(p,q)}(T_xM)$ を $T_x^{(p,q)}M$ で表す。

$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$$

とおくと、$T^{(p,q)}M$ は M 上のベクトル束になる (命題 1.3.2)。$T^{(p,q)}M$ の断面を (p,q) **型テンソル場**と呼ぶ。テンソル場の和、関数倍、テンソル積、縮約は、多様体の各点の接ベクトル空間上のテンソル空間における演算で定める。

命題 1.3.2 $T^{(p,q)}M$ は M 上のベクトル束になる。

証明　$u \in T^{(p,q)}M$ に対して $u \in T_x^{(p,q)}M$ となる $x \in M$ が一つ定まるので、$\pi(u) = x$ とおくと、写像 $\pi : T^{(p,q)}M \to M$ が定まる。M の各点 x に対して x を含む座標近傍系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ をとる。$\pi^{-1}(U)$ の各元 u は

$$u = u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_{\pi(u)} \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right|_{\pi(u)} \otimes dx^{j_1}_{\pi(u)} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}_{\pi(u)}$$

と表すことができ、

$$\Phi_U(u) = (\pi(u), u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}) \qquad (u \in \pi^{-1}(U))$$

によって、写像

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{n^{p+q}}$$

を定める。これによって、$\pi^{-1}(U)$ 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n, u^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ をとることができる。これによって、$T^{(p,q)}M$ に多様体構造が定まり、さらに $\pi : T^{(p,q)}M \to M$ にベクトル束の構造が定まる。

例 1.3.3 Riemann 計量は $(0,2)$ 型テンソル場になる。

命題 1.3.4 $f : M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする。f はベクトル束の準同型写像 $df^{(p,0)} : T^{(p,0)}M \to T^{(p,0)}N$ を誘導し、

$$df_x^{(p,0)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = df_x(v_1) \otimes \cdots \otimes df_x(v_p) \qquad (x \in M,\ v_i \in T_xM)$$

が成り立つ。

証明　$x \in M$ における f の微分写像 $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ は、命題 1.1.15 より、テンソルの空間の線形写像 $df_x^{(p,0)} : T_x^{(p,0)}M \to T_{f(x)}^{(p,0)}N$ を誘導する。これにより、$df^{(p,0)} : T^{(p,0)}M \to T^{(p,0)}N$ が定まる。多様体の局所座標を使って $df^{(p,0)}$ が C^∞ 級写像であることもわかり、ベクトル束の準同型写像になることがわかる。

第2章　Riemann 多様体

2.1　曲面の微分幾何学

この節では第 1 章の知識をもとにして曲面論の簡単な復習をしておく。$p : D \to \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^2$ の連結な開集合 D で定義された $\mathbf{R}^3$ への挿入とする。すなわち微分写像 $dp : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ が D の各点で階数 2 になるとする。このとき、p の像を曲面とみなし $\mathbf{R}^2$ の直交座標の D への制限 u, v をこの曲面の座標とみなす。

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_v = \frac{\partial p}{\partial v}$$

と表すことにする。p が挿入になるという条件は p_u, p_v が線形独立になることと同値になる。曲面の 2 次元多様体としての接ベクトル空間は、$\dfrac{\partial}{\partial u}$ と p_u を同一視し $\dfrac{\partial}{\partial v}$ と p_v を同一視することによって、$\mathbf{R}^3$ 内の p_u, p_v の張る 2 次元部分ベクトル空間、すなわち接平面と同一視することができる。通常 dp の内積

$$I = \langle dp, dp \rangle$$

として定義される曲面の**第一基本形式** I は曲面上の $(0, 2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X, Y に対して

$$I(X, Y) = \langle dp(X), dp(Y) \rangle$$

によって値が定まる。dp は線形単射だから I は正定値になり曲面の Riemann 計量になる。

$$dp = p_u du + p_v dv$$

となるので、

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \langle p_u du(X) + p_v dv(X), p_u du(Y) + p_v dv(Y) \rangle \\ &= \langle p_u, p_u \rangle du \otimes du(X, Y) + \langle p_u, p_v \rangle (du \otimes dv + dv \otimes du)(X, Y) \\ &\quad + \langle p_v, p_v \rangle dv \otimes dv(X, Y). \end{aligned}$$

一般にベクトル空間 V の $(0, 2)$ 型テンソル Φ が

$$\Phi(X, Y) = \Phi(Y, X) \qquad (X, Y \in V)$$

を満たすとき、Φ を $(0,2)$ 型**対称テンソル**という。V の $(0,1)$ 型テンソル ϕ,ψ に対して

$$\phi \bullet \psi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi)$$

によって $(0,2)$ 型テンソル $\phi \bullet \psi$ を定める。$X,Y \in V$ に対して

$$\begin{aligned}(\phi \bullet \psi)(X,Y) &= \frac{1}{2}(\phi(X)\psi(Y) + \psi(X)\phi(Y)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(Y)\psi(X) + \psi(Y)\phi(X)) = (\phi \bullet \psi)(Y,X)\end{aligned}$$

となり、$\phi \bullet \psi$ は $(0,2)$ 型対称テンソルであることがわかる。すなわち、二つの $(0,1)$ 型テンソルの対称テンソル積は $(0,2)$ 型対称テンソルになる。

話を曲面に戻す。第一基本形式 I の定義より、I は $(0,2)$ 型対称テンソルになり、

$$I = \langle p_u, p_u \rangle du \bullet du + 2\langle p_u, p_v \rangle du \bullet dv + \langle p_v, p_v \rangle dv \bullet dv$$

と書き表すことができる。通常、曲面論では

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

と書いて第一基本形式、すなわち、Riemann 計量を次のように表す。

$$I = Edu \bullet du + 2Fdu \bullet dv + Gdv \bullet dv.$$

曲面の接ベクトル空間の基底 p_u, p_v のベクトル積 $p_u \times p_v$ は接平面に直交するので、

$$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

とおくと、e は曲面の単位法ベクトルになる。

$$II = -\langle dp, de \rangle$$

として定義される曲面の**第二基本形式** II は曲面上の $(0,2)$ 型テンソル場になり、接ベクトル X,Y に対して

$$II(X,Y) = -\langle dp(X), de(Y) \rangle$$

によって値が定まる。

$$de = e_u du + e_v dv$$

となるので、

$$\begin{aligned}II(X,Y) &= -\langle p_u du(X) + p_v dv(X), e_u du(Y) + e_v dv(Y) \rangle \\ &= -\langle p_u, e_u \rangle du(X)du(Y) - \langle p_u, e_v \rangle du(X)dv(Y) \\ &\quad -\langle p_v, e_u \rangle dv(X)du(Y) - \langle p_v, e_v \rangle dv(X)dv(Y).\end{aligned}$$

e は p_u, p_v と直交するので

$$\langle p_u, e\rangle = 0, \quad \langle p_v, e\rangle = 0$$

が成り立つ。これらを u と v で偏微分すると、積の微分の公式より

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial u}\langle p_u, e\rangle = \langle p_{uu}, e\rangle + \langle p_u, e_u\rangle, \\
0 &= \frac{\partial}{\partial v}\langle p_u, e\rangle = \langle p_{uv}, e\rangle + \langle p_u, e_v\rangle, \\
0 &= \frac{\partial}{\partial u}\langle p_v, e\rangle = \langle p_{vu}, e\rangle + \langle p_v, e_u\rangle, \\
0 &= \frac{\partial}{\partial v}\langle p_v, e\rangle = \langle p_{vv}, e\rangle + \langle p_v, e_v\rangle.
\end{aligned}$$

ここで $p_{uv} = p_{vu}$ だから $\langle p_u, e_v\rangle = \langle p_v, e_u\rangle$ となり、II は $(0, 2)$ 型対称テンソルであることがわかる。さらに

$$\begin{aligned}
II &= -\langle p_u, e_u\rangle du \bullet du - 2\langle p_u, e_v\rangle du \bullet dv - \langle p_v, e_v\rangle dv \bullet dv \\
&= \langle p_{uu}, e\rangle du \bullet du + 2\langle p_{uv}, e\rangle du \bullet dv + \langle p_{vv}, e\rangle dv \bullet dv
\end{aligned}$$

と第二基本形式 II を書き表すことができる。通常、曲面論では

$$L = \langle p_{uu}, e\rangle, \quad M = \langle p_{uv}, e\rangle, \quad N = \langle p_{vv}, e\rangle$$

と書いて第二基本形式を次のように表す。

$$II = L du \bullet du + 2M du \bullet dv + N dv \bullet dv.$$

曲面の一点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ を固定し、そこでの単位法ベクトルを e_0 で表す。位置ベクトルと e_0 との内積によって曲面上の関数 f を定める。すなわち、

$$f(u, v) = \langle p(u, v), e_0\rangle.$$

p_0 での曲面の接平面は e_0 と直交するので、p_0 において

$$df = \langle p_u du + p_v dv, e_0\rangle = \langle p_u, e_0\rangle du + \langle p_v, e_0\rangle dv = 0$$

となり、関数 f は p_0 で臨界値をとる。f の二階偏微分は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}(p_0) = \langle p_{uu}, e_0\rangle = L, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(p_0) = \langle p_{uv}, e_0\rangle = M, \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(p_0) = \langle p_{vv}, e_0\rangle = N
\end{aligned}$$

となるので、f の p_0 における Hesse 行列は第二基本形式 II の表現行列に一致する。特に II が定値になる点、すなわち行列式が $LN - M^2 > 0$ を満たす点では曲面は凸または凹になり、II が不定値になる点、すなわち $LN - M^2 < 0$ を満たす点では曲面は鞍型になる。このことから第二基本形式 II は曲面の形を表しているとみることができる。

2.2　ベクトル束と線形接続

　多様体上のベクトル束の線形接続の定義と基本事項について解説する。多様体 M 上の C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(M)$ で表す。

定義 2.2.1 M を多様体とし、E を M 上のベクトル束とする。対応

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E);\ (X, \phi) \mapsto \nabla_X \phi$$

が、次の (1) から (4) を満たすとき、∇ を E 上の**線形接続**と呼ぶ。

(1) $\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi, \qquad (X, Y \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E))$

(2) $\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi, \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi, \psi \in \Gamma(E))$

(3) $\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi, \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M))$

(4) $\nabla_X(f\phi) = f\nabla_X\phi + (Xf)\phi. \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M))$

任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して $\nabla_X\phi = 0$ を満たす $\phi \in \Gamma(E)$ を**平行**な断面という。

定義 2.2.2 $\langle\ ,\ \rangle$ を多様体 M 上のベクトル束 E の計量とする。E 上の線形接続 ∇ が

$$X\langle\phi, \psi\rangle = \langle\nabla_X\phi, \psi\rangle + \langle\phi, \nabla_X\psi\rangle \qquad (X \in \Gamma(TM),\ \phi, \psi \in \Gamma(E))$$

を満たすとき、線形接続 ∇ は計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を**保つ**という。

命題 2.2.3 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の接続とする。$X, Y \in \Gamma(TM)$ と $\phi \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)\phi = \nabla_X\nabla_Y\phi - \nabla_Y\nabla_X\phi - \nabla_{[X,Y]}\phi$$

によって E の断面 $R^\nabla(X, Y)\phi$ を定めると、R^∇ はベクトル束 $A^2(TM, \mathrm{End}(E))$ の C^∞ 級断面を定める。ここで、$A^2(U, V)$ は $U \times U$ から V への交代双線形写像の全体を表す。上記の主張は、M の点 p に対して $R_p^\nabla \in A^2(T_pM, \mathrm{End}(E_p))$ が定まることを意味する。

　証明　$X, Y \in \Gamma(TM)$ と $\phi \in \Gamma(E)$ に対して $R^\nabla(X, Y)\phi = -R^\nabla(Y, X)\phi$ となることは、定め方より明らか。

　M 上の C^∞ 級関数 f に対して、

$$\begin{aligned}
& R^\nabla(fX, Y)\phi \\
= \ & f\nabla_X\nabla_Y\phi - f\nabla_Y\nabla_X\phi - (Yf)\nabla_X\phi - f\nabla_{[X,Y]}\phi + (Yf)\nabla_X\phi \\
= \ & fR^\nabla(X, Y)\phi.
\end{aligned}$$

よって、$R^\nabla(fX,Y)\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ を得る。X,Y に関する交代性より、$R^\nabla(X,fY)\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ も成り立つ。

$$\begin{aligned} & R^\nabla(X,Y)f\phi \\ = \;& f\nabla_X\nabla_Y\phi + (Xf)\nabla_Y\phi + (Yf)\nabla_X\phi + (XYf)\phi \\ & -f\nabla_Y\nabla_X\phi - (Yf)\nabla_X\phi - (Xf)\nabla_Y\phi - (YXf)\phi - f\nabla_{[X,Y]}\phi - ([X,Y]f)\phi \\ = \;& fR^\nabla(X,Y)\phi. \end{aligned}$$

よって、$R^\nabla(X,Y)f\phi = fR^\nabla(X,Y)\phi$ を得る。以上より、$R^\nabla(X,Y)\phi$ は X,Y,ϕ の一点での値で定まることがわかり、R^∇ は $A^2(TM,\mathrm{End}(E))$ の C^∞ 級断面になる。

定義 2.2.4 命題 2.2.3 で定めた R^∇ を接続 ∇ の**曲率テンソル**と呼ぶ。考えている接続が明らかな場合は、単に R と書くこともある。

補題 2.2.5 ∇ を多様体 M 上のベクトル束 E 上の線形接続とする。さらに、E が計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を持ち、∇ が $\langle\ ,\ \rangle$ を保つとき、

$$\langle R^\nabla(X,Y)\phi,\psi\rangle + \langle\phi, R^\nabla(X,Y)\psi\rangle = 0 \qquad (X,Y\in\Gamma(TM),\ \phi,\psi\in\Gamma(E))$$

が成り立つ。すなわち、各 $p\in M$ と $X_p,Y_p\in T_pM$ について $R_p^\nabla(X_p,Y_p)$ は E_p の交代線形変換である。

証明　ベクトル場を関数 f に作用させると $[X,Y]f = XYf - YXf$ となることに注意して、定義 2.2.2 を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= XY\langle\phi,\psi\rangle - YX\langle\phi,\psi\rangle - [X,Y]\langle\phi,\psi\rangle \\ &= X\langle\nabla_Y\phi,\psi\rangle + X\langle\phi,\nabla_Y\psi\rangle - Y\langle\nabla_X\phi,\psi\rangle - Y\langle\phi,\nabla_X\psi\rangle \\ &\quad -\langle\nabla_{[X,Y]}\phi,\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_{[X,Y]}\psi\rangle \\ &= \langle\nabla_X\nabla_Y\phi,\psi\rangle + \langle\nabla_Y\phi,\nabla_X\psi\rangle + \langle\nabla_X\phi,\nabla_Y\psi\rangle + \langle\phi,\nabla_X\nabla_Y\psi\rangle \\ &\quad -\langle\nabla_Y\nabla_X\phi,\psi\rangle - \langle\nabla_X\phi,\nabla_Y\psi\rangle - \langle\nabla_Y\phi,\nabla_X\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_Y\nabla_X\psi\rangle \\ &\quad -\langle\nabla_{[X,Y]}\phi,\psi\rangle - \langle\phi,\nabla_{[X,Y]}\psi\rangle \\ &= \langle R^\nabla(X,Y)\phi,\psi\rangle + \langle\phi,R^\nabla(X,Y)\psi\rangle. \end{aligned}$$

2.3　Levi-Civita 接続

定理 2.3.1 Riemann 多様体 $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ の接ベクトル束 TM には、

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X,Y] \qquad (X,Y\in\Gamma(TM))$$

を満たし、Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ線形接続が、一意的に存在する。

証明 定理の条件を満たす線形接続 ∇ が存在すれば、ベクトル場 X, Y に対して $\nabla_X Y$ の形が決まることを示す。これは定理の主張の一意性を証明したことにもなる。さらに $\nabla_X Y$ の決まった形は定理の条件をすべて満たすことを示すことにより、この線形接続の存在もわかることになる。

まず、条件を満たす線形接続 ∇ が存在すると仮定する。Riemann 計量を保つという条件から、M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle \\
\langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= Y\langle Z, X\rangle \\
-\langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle &= -Z\langle X, Y\rangle .
\end{aligned}
$$

これらの両辺を加え、条件 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ に注意すると、

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = &\ \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&+\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)
\end{aligned}
$$

を得る。これより、この接続の一意性がわかる。

逆に上の等式で ∇ を定める。線形接続の定義の (1) と (2) が成り立つことは、定義式よりわかる。M 上の C^∞ 級関数 f に対して、$\langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle = f\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ が成り立ち、$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ を得る。次に $\langle \nabla_X (fY), Z\rangle = \langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle$ となり、$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$ を得る。以上で、∇ が TM の線形接続になることがわかる。

∇ の定義式より、$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle$ となり、∇ は Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ。∇ の定義式より、$\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$ となるので、$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ が成り立つ。

定義 2.3.2 定理 2.3.1 で定めた接続 ∇ を Riemann 多様体の **Levi-Civita 接続**と呼ぶ。また、$\nabla_X Y$ を Y の X による**共変微分**という。

系 2.3.3 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は、ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = &\ \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&+\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)
\end{aligned}
$$

を満たす。

今後、多様体の局所座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ におけるベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ を簡単に ∂_i で表すことにする。

命題 2.3.4 Riemann 多様体 (M,g) の Levi-Civita 接続を ∇ で表す。M の局所座標近傍 $(U;x^1,\dots,x^n)$ において、$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$ によって U 上の C^∞ 級関数 Γ_{ij}^k を定めると、ベクトル場 $X=X^i\partial_i,\ Y=Y^j\partial_j$ に対して、∇_XY の局所表示は

$$\nabla_XY=(XY^k+\Gamma_{ij}^kX^iY^j)\partial_k$$

となる。Riemann 計量の局所表示を $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ とし、行列 (g_{ij}) の逆行列の成分を g^{ij} で表すと、

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{il}-\partial_lg_{ij})$$

が成り立つ。もう一つの局所座標近傍 $(V;y^1,\dots,y^n)$ において、$\dfrac{\partial}{\partial y^p}$ を $\bar\partial_p$ で表し、$\nabla_{\bar\partial_p}\bar\partial_q=\bar\Gamma_{pq}^r\bar\partial_r$ とする。このとき、$U\cap V$ において、

$$\bar\Gamma_{pq}^r=\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\Gamma_{ij}^k+\frac{\partial^2x^k}{\partial y^p\partial y^q}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

が成り立つ。

証明　線形接続の性質より、$\nabla_XY=\nabla_{X^i\partial_j}(Y^j\partial_j)=(XY^k+\Gamma_{ij}^kX^iY^j)\partial_k$. 系 2.3.3 より、$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l)=\frac{1}{2}(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{li}-\partial_lg_{ij})$. 他方

$$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l)=g(\Gamma_{ij}^k\partial_k,\partial_l)=\Gamma_{ij}^kg(\partial_k,\partial_l)=\Gamma_{ij}^kg_{kl}.$$

よって $\Gamma_{ij}^kg_{kl}=\frac{1}{2}(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{il}-\partial_lg_{ij})$. g_{ij} は対称行列だから、その逆行列 g^{ij} も対称行列になり、

$$\Gamma_{ij}^m=\Gamma_{ij}^kg_{kl}g^{lm}=\frac{1}{2}g^{lm}(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{li}-\partial_lg_{ij})$$

となり、

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{il}-\partial_lg_{ij})$$

を得る。

座標変換に関する ∂_i と $\bar\partial_p$ の間の関係

$$\bar\partial_p=\frac{\partial}{\partial y^p}=\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\partial_i$$

に注意しておく。上で求めた共変微分の局所表示より、

$$\bar\Gamma_{pq}^r\bar\partial_r=\nabla_{\bar\partial_p}\bar\partial_q=\left(\frac{\partial^2x^k}{\partial y^p\partial y^q}+\Gamma_{ij}^k\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\bar\partial_r$$

となり、

$$\bar\Gamma_{pq}^r=\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\Gamma_{ij}^k+\frac{\partial^2x^k}{\partial y^p\partial y^q}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}$$

を得る。

定義 2.3.5 命題 2.3.4 で定めた Γ_{ij}^k を **Christoffel の記号**と呼ぶ。

注意 2.3.6 今後、Riemann 多様体の局所的な議論では、局所座標近傍を明示しなくても、Riemann 計量の成分、Christoffel の記号等は上で定めた記号を使うことにする。

命題 2.3.7 Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の曲線 c に沿って定義されたベクトル場 X に対して、

$$\nabla_{c'(t)} X = \left(c'(t) X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j \right) \partial_k$$

によって c に沿ったベクトル場 $\nabla_{c'(t)} X$ を定めると、これは局所座標近傍のとり方に依存しない。

証明 局所座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ ともう一つの局所座標近傍 $(V; y^1, \ldots, y^n)$ をとる。命題 2.3.4 の証明中と同じ記号を使うことにする。さらに $X = X^i \partial_i = \bar{X}^p \bar{\partial}_p$ としておく。X を c の像の近傍に拡張する。

$$c'(t) X^k = \frac{d}{dt} X^k(c(t)) = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{dx^i(c(t))}{dt}$$

に注意し、命題 2.3.4 の Christoffel の記号の変換公式を使うと、

$$\left(c'(t) X^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j \right) \partial_k = \left(c'(t) \bar{X}^r + \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{dy^p(c(t))}{dt} \bar{X}^q \right) \bar{\partial}_r$$

を得る。したがって、$\nabla_{c'(t)} X$ は局所座標のとり方に依存しない。

定義 2.3.8 命題 2.3.7 で定まる $\nabla_{c'(t)} X$ を X の**曲線に沿った共変微分**と呼ぶ。$\nabla_{c'(t)} X = 0$ を満たすベクトル場 X を**曲線に沿った平行ベクトル場**と呼ぶ。これを X に関する常微分方程式とみなすと、局所表示は、

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j(t) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

となり、未知関数 X^k に関する連立線形常微分方程式系になる。したがって、曲線 c が定義されている区間では、任意の初期条件に対して平行ベクトル場が一意に存在する。特に、曲線 c の定義区間が $[a, b]$ のとき、$u \in T_{c(a)} M$ に対して $X(a) = u$ を満たす平行ベクトル場 X が一意に存在し、u に $X(b) \in T_{c(b)} M$ を対応させると、$T_{c(a)} M$ から $T_{c(b)} M$ への線形同型写像になる。この線形同型写像を**曲線に沿った平行移動**と呼び、τ_c で表す。

命題 2.3.9 Riemann 多様体の曲線に沿った平行移動は等長線形写像になる。

証明　曲線 $c(t)$ に沿った平行ベクトル場 X, Y に対して、$\langle X, Y\rangle$ は曲線 $c(t)$ に沿った関数、すなわち t に関する関数になり、

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = c'(t)\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_{c'(t)}X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{c'(t)}Y\rangle = 0.$$

したがって、平行ベクトル場の内積は一定になる。特に、平行移動は内積を保つことになり、等長線形写像になる。

命題 2.3.10 Riemann 多様体上のベクトル場 X, Y と点 x に対して、$c(0) = x$ と $c'(0) = X_x$ を満たす曲線 $c(t)$ をとる。曲線 c に沿った $c(t)$ から $c(0)$ までの平行移動を τ_0^t で表すと、

$$(\nabla_X Y)_x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x)$$

が成り立つ。

証明　T_xM の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとり、c に沿って平行ベクトル場に拡張したものを $e_i(t)$ で表す。$Y_{c(t)} = Y^i(t)e_i(t)$ と表すことにすると、

$$(\nabla_X Y)_x = \nabla_{c'(0)}(Y^i(t)e_i(t)) = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

他方、

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{c(t)} - Y_x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y^i(t) - Y^i(0))e_i = \frac{dY^i}{dt}(0)e_i.$$

したがって、命題の等式を得る。

2.4　共変微分

命題 2.4.1 Riemann 多様体上のベクトル場 X に対してテンソル場 T に $\nabla_X T$ を対応させる対応で、次の条件を満たすものが一意的に存在する。

(1) ∇_X はテンソル場の型を保ち、縮約と可換になる。さらに、テンソル場 S, T に対して

$$\nabla_X(S\otimes T) = \nabla_X S\otimes T + S\otimes\nabla_X T.$$

(2) C^∞ 級関数 f に対して $\nabla_X f = Xf$ となり、ベクトル場 Y に対しては $\nabla_X Y$ は Levi-Civita 接続による共変微分に一致する。

証明　まず、条件を満たす ∇_X が存在すると仮定する。$(0,1)$ 型テンソル場、すなわち 1 次微分形式 ω と $(1,0)$ 型テンソル場、すなわちベクトル場 Y に対して、$\omega\otimes Y$ の縮約は $C^{(1,1)}(\omega\otimes Y) = \omega_i Y^i = \omega(Y)$ となることに注意しておく。

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y) &= C^{(1,1)}(\nabla_X\omega\otimes Y) = C^{(1,1)}(\nabla_X(\omega\otimes Y) - \omega\otimes\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X C^{(1,1)}(\omega\otimes Y) - \omega(\nabla_X Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)\\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).\end{aligned}$$

よって、

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

となり、これによって $\nabla_X\omega$ が一意的に定まることがわかる。以上より、$(0,0)$ 型テンソル場、$(1,0)$ 型テンソル場、$(0,1)$ 型テンソル場への ∇_X の作用が一意的に定まる。

(p,q) 型テンソル場 T の場合を考える。1 次微分形式 $\omega^1,\dots,\omega^p$ とベクトル場 $X_1,\dots,X_q$ をとる。C で全成分に関する縮約を表すと、

$$C(T\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^p\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_q) = T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)$$

となることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
= \ & C(\nabla_X T\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^p\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_q) \\
= \ & C\Big(\nabla_X(T\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^p\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_q) \\
& -\sum_{i=1}^{p} T\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\nabla_X\omega^i\otimes\cdots\otimes\omega^p\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_q \\
& -\sum_{j=1}^{q} T\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^p\otimes X_1\otimes\cdots\otimes\nabla_X X_j\otimes\cdots\otimes X_q\Big) \\
= \ & X(T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)) \\
& -\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
& -\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,\nabla_X X_j,\dots,X_q).
\end{aligned}$$

これによって $\nabla_X T$ が一意的に定まることがわかる。

逆に、一意性を示した等式で ∇_X の作用を定めることにより、対応 $T\mapsto\nabla_X T$ を定める。この対応が条件を満たすことを以下で示す。

C^∞ 級関数 f とベクトル場 Y に対して

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(fY) &= X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X(fY)) = X(f\omega(Y)) - \omega((Xf)Y + f\nabla_X Y) \\
&= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - (Xf)\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= f(\nabla_X\omega)(Y)
\end{aligned}$$

となるので、$\nabla_X\omega$ は $(0,1)$ 型テンソル場になる。さらに

$$\nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(T^{(0,1)}M)\to\Gamma(T^{(0,1)}M);\ (X,\omega)\mapsto\nabla_X\omega$$

は $T^{(0,1)}M$ 上の線形接続になることがわかる。

(p,q) 型テンソル場 T に対して、$\nabla_X T$ も (p,q) 型テンソル場になることを示す。$\nabla_X(f\omega^k) = (Xf)\omega^k + f\nabla_X\omega^k$ が成り立つことに注意する。

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1,\dots,f\omega^k,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
= \;& X(fT(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)) - f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
& -(Xf)T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) - f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,\nabla_X X_j,\dots,X_q) \\
= \;& f(\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q).
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,fX_l,\dots,X_q) \\
= \;& X(fT(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q)) - f\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\dots,\nabla_X\omega^i,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
& -f\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,\nabla_X X_j,\dots,X_q) - (Xf)T(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q) \\
= \;& f(\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^p,X_1,\dots,X_q).
\end{aligned}
$$

以上より、$\nabla_X T$ は (p,q) 型テンソル場になる。

(p,q) 型テンソル場 S と (r,s) 型テンソル場 T に対して、

$$
\begin{aligned}
& \nabla_X(S\otimes T)(\omega^1,\dots,\omega^{p+r},X_1,\dots,X_{q+s}) \\
& = (\nabla_X S\otimes T + S\otimes\nabla_X T)(\omega^1,\dots,\omega^{p+r},X_1,\dots,X_{q+s})
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかり、

$$\nabla_X(S\otimes T) = \nabla_X S\otimes T + S\otimes\nabla_X T$$

を得る。

∇_X と縮約の可換性を調べる。T を (p,q) 型テンソル場とし、$1\le r\le p,\ 1\le s\le q$ とする。T の縮約 $C^{(r,s)}T$ は

$$(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,X_{q-1}) = T(\omega^1,\dots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\dots,\omega^{p-1},X_1,\dots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\dots,X_{q-1})$$

となることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
& (C^{(r,s)}\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,X_{q-1}) \\
= \ & X(T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1})) \\
& -\sum_{i=1}^{p-1} T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\overset{r}{\breve{(dx^a)}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -\sum_{j=1}^{q-1} T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\nabla_X}}\partial_a\ldots,X_{q-1}).
\end{aligned}
$$

ここで、$\nabla_X\partial_a = X^b\Gamma^c_{ba}\partial_c$ であり、

$$
\nabla_X(dx^a)(\partial_c) \ = \ X(dx^a(\partial_c)) - dx^a(\nabla_X\partial_c) = -dx^a(X^b\Gamma^d_{bc}\partial_d) = -X^b\Gamma^a_{bc}
$$

となるので、

$$
\nabla_X(dx^a) = -X^b\Gamma^a_{bc}dx^c.
$$

これらより、

$$
\begin{aligned}
& -T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\overset{r}{\breve{(dx^a)}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -T(\omega^1,\ldots,\overset{r}{\breve{dx^a}}\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\nabla_X}}\partial_a\ldots,X_{q-1}) \\
= \ & 0.
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
& (C^{(r,s)}\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,X_{q-1}) \\
= \ & X((C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,X_{q-1})) \\
& -\sum_{i=1}^{p-1}(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\overset{s}{\breve{\partial_a}}\ldots,X_{q-1}) \\
& -\sum_{j=1}^{q-1}(C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_{q-1}) \\
= \ & (\nabla_X C^{(r,s)}T)(\omega^1,\ldots,\omega^{p-1},X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_{q-1})
\end{aligned}
$$

となり、

$$
C^{(r,s)}\nabla_X T = \nabla_X C^{(r,s)}T
$$

が成り立つ。したがって、∇_X は縮約と可換になる。

系 2.4.2 (p,q) 型テンソル場 T に対して、

$$\begin{aligned} & (\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\ = \ & X(T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)) \\ & -\sum_{i=1}^{p} T(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^i,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\ & -\sum_{j=1}^{q} T(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_q) \end{aligned}$$

が成り立つ。

系 2.4.3 命題 2.4.1 で定めた写像

$$\nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(T^{(p,q)}M)\to\Gamma(T^{(p,q)}M);\ (X,T)\mapsto\nabla_X T$$

は $T^{(p,q)}M$ 上の線形接続になる。

証明　系 2.4.2 によって線形接続の条件を計算して確かめることができる。

系 2.4.4 (p,q) 型テンソル場 T に対して ∇T を

$$\begin{aligned} (\nabla T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q;X) &= (\nabla_X T)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q) \\ & \quad (\omega^i\in\Gamma(T^{(0,1)}M),\ X_j,X\in\Gamma(T^{(1,0)}M)) \end{aligned}$$

によって定めると、∇T は $(p,q+1)$ 型テンソル場になる。

定義 2.4.5 $\nabla T=0$ となるテンソル場 T を**平行テンソル場**と呼ぶ。

例 2.4.6 Riemann 多様体 (M,g) の Levi-Civita 接続 ∇ は、

$$(\nabla_X g)(Y,Z)=X(g(Y,Z))-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)=0$$

を満たすので、$\nabla g=0$ となり、Riemann 計量は平行テンソル場になる。

命題 2.4.7 (p,q) 型テンソル場 T の局所表示を

$$T=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_q}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla T &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k}\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_q}\otimes dx^k \\ &= \nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_q}\otimes dx^k \end{aligned}$$

の成分は、

$$\nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=\partial_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+\sum_{a=1}^{p}\Gamma^{i_a}_{kl}T^{i_1\cdots l\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}-\sum_{b=1}^{q}\Gamma^{m}_{kj_b}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots m\cdots j_q}$$

で与えられる。ここで、l は a 番目であり、m は b 番目である。

証明　$\nabla_{\partial_k}dx^i=-\Gamma^i_{ka}dx^a$ に注意して、系 2.4.2 を使って ∇T を計算することにより、命題の局所表示は得られる。

2.5　曲率テンソル

注意 2.5.1 実ベクトル空間 V に対して、V の q 個の積 $V \times \cdots \times V$ から V への多重線形写像の全体の成す実ベクトル空間を $L^q(V)$ で表す。$L^q(V)$ の元 T に対して、

$$\tilde{T}(\omega, X_1, \ldots, X_q) = \omega(T(X_1, \ldots, X_q)) \qquad (\omega \in V^*,\ X_j \in V)$$

によって $\tilde{T}$ を定めると、$\tilde{T}$ は V 上の $(1,q)$ 型テンソルなる。逆に V 上の $(1,q)$ 型テンソル $\tilde{T}$ に対して上の等式によって $L^q(V)$ の元 T を定めることができる。これにより、$L^q(V)$ と $T^{(1,q)}(V)$ を同一視する。

M を多様体とし、

$$L^q(TM) = \bigcup_{x \in M} L^q(T_xM)$$

とおくと、$L^q(T_xM)$ と $T_x^{(1,q)}M$ の同一視により、$L^q(TM)$ は $T^{(1,q)}M$ と同一視できる。特に、$L^q(TM)$ は M 上のベクトル束になる。

$L^q(TM)$ の断面 T に対して、

$$\tilde{T}(\omega, X_1, \ldots, X_q) = \omega(T(X_1, \ldots, X_q)) \qquad (\omega \in \Gamma(T^{(0,1)}M),\ X_j \in \Gamma(T^{(1,0)}M))$$

によって M 上の $(1,q)$ 型テンソル場 $\tilde{T}$ が定まる。逆に M 上の $(1,q)$ 型テンソル場に対して、上の等式によって $L^q(TM)$ の断面が定まる。これより、$L^q(TM)$ の断面と M 上の $(1,q)$ 型テンソル場を同一視する。

$L^q(TM)$ の断面 T の局所表示を

$$T(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) = T^i_{j_1 \cdots j_q} \partial_i$$

とすると、$(1,q)$ 型テンソル場 $\tilde{T}$ の成分は、

$$\tilde{T}^i_{j_1 \cdots j_q} \quad = \quad \tilde{T}(dx^i, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}) = T^i_{j_1 \cdots j_q}$$

となり、T の成分に一致する。今後、$\tilde{T}$ も単に T と表すことにする。

定義 2.5.2 Riemann 多様体 M の Levi-Civita 接続に関する曲率テンソルを単に R で表し、Riemann 多様体の**曲率テンソル**と呼ぶことにする。曲率テンソルは $L^3(TM)$ の断面になるので、注意 2.5.1 より、M 上の $(1,3)$ 型テンソル場とみなすことができる。

定理 2.5.3 Riemann 多様体の曲率テンソル R は、ベクトル場 X, Y, Z, W に対して、次の (1) から (4) を満たす。

(1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0,$

(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$

(3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle Z,R(X,Y)W\rangle = 0$,

(4) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$.

(2) は**第 1Bianchi の恒等式**と呼ばれる。

証明　(1) は曲率テンソルの定義より、(3) は補題 2.2.5 よりわかる。
(2) Levi-Civita 接続の性質

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

を使うと、

$$\begin{aligned}
& R(X,Y)Z \\
= \ & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
= \ & \nabla_X(\nabla_Z Y + [Y,Z]) - \nabla_Y(\nabla_Z X + [X,Z]) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
= \ & \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Y,Z]}X + [X,[Y,Z]] - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[X,Z]}Y - [Y,[X,Z]] - \nabla_{[X,Y]}Z.
\end{aligned}$$

$R(Y,Z)X$ と $R(Z,X)Y$ については定義式をそのまま使うと、

$$\begin{aligned}
& R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
= \ & [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

最後の等式はベクトル場のブラケット積に関する Jacobi の恒等式である。
(4) を証明するためには、次の補題を示せば十分である。

補題 2.5.4 V を内積を持つ実ベクトル空間とする。V 上の $(1,3)$ 型テンソル R が

(1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$,

(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle Z,R(X,Y)W\rangle = 0$

をみたすとき、R は

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$$

を満たす。

証明　(1) から (3) の性質を使うと求める等式

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$$

を得る。

注意 2.5.5 この節で得た結果の局所表示を与えておく。Riemann 多様体の曲率テンソルの局所表示を

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$$

で表す。Christoffel の記号を使うと

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

となる。さらに、$(0,4)$ 型テンソル場 $\langle R(X,Y)Z, W\rangle$ の成分を

$$\langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = R_{ijkl}$$

で定めると、

$$R_{ijkl} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = \langle R^m_{ijk}\partial_m, \partial_l\rangle = g_{lm}R^m_{ijk}.$$

定理 2.5.3 を成分で表すと、

$$\begin{aligned} &R^l_{ijk} + R^l_{jik} = 0, \\ &R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0, \\ &R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0 \\ &R_{ijkl} = R_{klij}. \end{aligned}$$

補題 2.5.6 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$\frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2} \qquad (X, Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

は基底のとり方に依存しない。ただし、$|X \wedge Y|$ は X, Y の張る平行四辺形の面積である。

注意 2.5.7 一般に内積を持つベクトル空間において、ベクトル X, Y の成す角度は

$$\angle(X, Y) = \cos^{-1}\frac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}$$

によって定める。すると $\langle X, Y\rangle = |X| \cdot |Y| \cos\angle(X, Y)$ が成り立つ。X, Y の張る平行四辺形の面積 $|X \wedge Y|$ は、

$$|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2\sin^2\angle(X, Y) = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$$

を満たす。

証明　Z,W を σ のもう一つの基底とすると、

$$Z = aX + bY, \quad W = cX + dY \quad (ad - bc \neq 0)$$

と表すことができる。定理 2.5.3 の (1) と (3) から、

$$\langle R(Z,W)W,Z\rangle = (ad-bc)^2\langle R(X,Y)Y,X\rangle.$$

また、$|Z \wedge W|^2 = (ad-bc)^2|X \wedge Y|^2$. 以上より、

$$\frac{\langle R(Z,W)W,Z\rangle}{|Z\wedge W|^2} = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X\wedge Y|^2}.$$

定義 2.5.8 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に対して、

$$K_\sigma = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X\wedge Y|^2} \qquad (X,Y \text{ は } \sigma \text{ の基底})$$

とおき、K_σ を σ の**断面曲率**と呼ぶ。M のすべての点 p における接ベクトル空間 T_pM 内のすべての 2 次元部分空間 σ に対して K_σ が一定になるとき、M を**定曲率空間**と呼ぶ。

注意 2.5.9 任意の 1 次元 Riemann 多様体の曲率テンソルは、定理 2.5.3 の (1) より 0 になるので、曲率を考える意味がない。2 次元以上の場合、接ベクトル空間の 2 次元部分空間 σ に対して σ の正規直交基底 e_1, e_2 をとれば、$|e_1 \wedge e_2| = 1$ となるので $K_\sigma = \langle R(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle$ が成り立つ。

命題 2.5.10 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M が定曲率空間になるための必要十分条件は、ある実数 K が存在し、任意の点 $p \in M$ の任意の接ベクトル $X,Y,Z \in T_pM$ に対して

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

が成り立つことである。このとき、K は断面曲率の一定値に一致する。

証明　曲率テンソル R が

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

を満たすとき、$\langle R(X,Y)Y,X\rangle = K|X\wedge Y|^2$. 断面曲率は一定値 K をとり、M は定曲率空間になる。

逆に M が定曲率空間であると仮定する。M の断面曲率の一定値を K とおく。

$$R_K(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

によって、M 上の $(1,3)$ 型テンソル場 R_K を定める。R_K の定め方より、R_K は補題 2.5.4 の (1) から (3) を満たす。したがって、補題 2.5.4 より、R_K は

$$\langle R_K(X,Y)Z,W\rangle = \langle R_K(Z,W)X,Y\rangle$$

が成り立つ。以上より、R_K は定理 2.5.3 の (1) から (4) までの等式を満たす。定理 2.5.3 より R も (1) から (4) までの等式を満たすので、$S = R - R_K$ とおくと、S も (1) から (4) までの等式を満たす $(1,3)$ 型テンソル場になる。以下で S が 0 になることを示す。

まず、任意の接ベクトル X,Y について

$$\langle S(X,Y)Y,X\rangle = 0$$

が成り立つことを示す。X,Y が線形従属のときは、X,Y に関する交代性より

$$\langle S(X,Y)Y,X\rangle = 0$$

が成り立つ。X,Y が線形独立のときは、

$$\begin{aligned}\langle S(X,Y)Y,X\rangle &= \langle R(X,Y)Y,X\rangle - \langle R_K(X,Y)Y,X\rangle \\ &= K|X\wedge Y|^2 - K(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2) = 0.\end{aligned}$$

以上より、任意の接ベクトル X,Y について $\langle S(X,Y)Y,X\rangle = 0$ が成り立つ。この等式の Y の代りに $Y+Z$ を代入すると $S(X,Y)X = 0$ を得る。この等式の X の代りに $X+Z$ を代入すると、$S(X,Y)Z = 0$ を得る。したがって、$R = R_K$ となり、

$$R(X,Y)Z = K(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

が成り立つ。

定義 2.5.11 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M の接ベクトル X,Y に対して、

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

によって M 上の $(0,2)$ 型テンソル場 Ric を定める。Ric を **Ricci テンソル**と呼ぶ。単位接ベクトル X に対して $\mathrm{Ric}(X,X)$ を X の **Ricci 曲率**と呼ぶ。Ricci 曲率が一定値をとるとき、M を **Einstein 多様体**と呼ぶ。

補題 2.5.12 Riemann 多様体の Ricci テンソルは対称になり、接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_n$ をとると、

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle$$

と表すことができる。

証明　等式

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

は Ricci テンソルの定め方からわかる。この等式と定理 2.5.3 を使うと、

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X).$$

がわかり、Ricci テンソル Ric は対称になる。

注意 2.5.13 Riemann 多様体 M の単位接ベクトル X に対して、$X, e_2, \ldots, e_n$ が正規直交基底になるようにすると、

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(e_i, X)X, e_i \rangle$$

となり、Ricci 曲率は断面曲率の和になる。特に、定曲率空間は Einstein 多様体になる。

補題 2.5.14 Riemann 多様体 (M, g) が Einstein 多様体になるための必要十分条件は、ある実数 c が存在し、$\mathrm{Ric} = cg$ が成り立つことである。このとき、c は Ricci 曲率の一定値に一致する。

証明　Ricci テンソル Ric が $\mathrm{Ric} = cg$ を満たすとき、単位接ベクトル X の Ricci 曲率は、$\mathrm{Ric}(X, X) = c$ となり、M は Einstein 多様体になる。

逆に M が Einstein 多様体であると仮定する。M の Ricci 曲率の一定値を c とおく。0 ではない任意の接ベクトル X に対して

$$\mathrm{Ric}(X, X) = |X|^2 \mathrm{Ric}\left(\frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|} \right) = c|X|^2$$

となるので、$\mathrm{Ric}(X, X) = c|X|^2$ が成り立つ。この等式は X が 0 のときも成り立つので、任意の接ベクトル X に対して成り立つ。

補題 2.5.12 より、Ricci テンソルは対称だから、任意の接ベクトル X, Y に対して

$$\begin{aligned} c|X+Y|^2 &= \mathrm{Ric}(X+Y, X+Y) \\ &= c|X|^2 + 2\mathrm{Ric}(X, Y) + |Y|^2 \end{aligned}$$

となるので、$2\mathrm{Ric}(X, Y) = c(|X+Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2) = c2g(X, Y)$. したがって、$\mathrm{Ric} = cg$ が成り立つ。

命題 2.5.15 (Schur の補題) M を次元が 3 以上の連結 Riemann 多様体とする。

(1) M の各点 p における断面曲率 K_σ が、T_pM 内の 2 次元部分空間 σ に依存せず一定値 K_p をとるとき、M は定曲率空間になる。

(2) M の各点 p における Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(X,X)$ が、単位接ベクトル X に依存せず一定値 c_p をとるとき、M は Einstein 多様体になる。

証明　まず (2) を証明し、その結果を利用して (1) を証明する。
(2) Ricci テンソルの局所表示を $R_{ij}=\mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_j)$ と表すことにすると、

$$R(\partial_k,\partial_i)\partial_j = R^l_{kij}\partial_l$$

だから、$R_{ij}=R^k_{kij}$. 定理 2.5.3 の (1) と (5) 第 2Bianchi の恒等式の局所表示 (注意 2.5.5) を使うと、

$$\nabla_l R_{ij}-\nabla_i R_{lj} \;=\; \nabla_l R^k_{kij}-\nabla_i R^k_{klj} = -\nabla_l R^k_{ikj}-\nabla_i R^k_{klj} = \nabla_k R^k_{lij}.$$

補題 2.5.14 の証明と同様にして、$\mathrm{Ric}=cg$ となることがわかる。ただし、c は M 上の C^∞ 級関数である。これより、

$$\nabla_l R_{ij} = \nabla_l(cg_{ij}) = (\partial_l c)g_{ij}.$$

よって、

$$\nabla_k R^k_{lij} = (\partial_l c)g_{ij}-(\partial_i c)g_{lj}.$$

$\dim M=n$ としておく。両辺に g^{ij} をかけて和をとると、

$$g^{ij}\nabla_k R^k_{lij} = g^{ij}(\partial_l c)g_{ij}-g^{ij}(\partial_i c)g_{lj}. = (n-1)\partial_l c.$$

他方、

$$\begin{aligned} g^{ij}\nabla_k R^k_{lij} &= \nabla_k(g^{ij}R^k_{lij}) = \nabla_k(g^{ij}R_{lijm}g^{mk}) = \nabla_k(g^{ij}R_{jmli}g^{mk}) \\ &= \nabla_k(R^j_{jml}g^{mk}) = \nabla_k(R_{ml}g^{mk}) = \nabla_k(cg_{ml}g^{mk}) \\ &= \nabla_l c = \partial_l c. \end{aligned}$$

以上より、$(n-2)\partial_l c=0$ となり、仮定から $n\geq 3$ だから、$\partial_l c=0$。よって関数 c は局所定数になり、M は連結だから c は定数になる。したがって、M は Einstein 多様体になる。

(1) 注意 2.5.13 より、単位接ベクトル X の Ricci 曲率は、$\mathrm{Ric}(X,X)=(n-1)K$ となる。よって、(2) より、M は Einstein 多様体になり、K は定数になる。

定義 2.5.16 次元が 2 以上の Riemann 多様体 M 上の関数 $\tau=\mathrm{tr}(\mathrm{Ric})$ を M の**スカラー曲率**と呼ぶ。M の接ベクトル空間の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_n$ をとれば、

$$\tau=\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i,e_i)$$

となる。

Riemann 多様体内の曲線の長さを速度ベクトルの Riemann 計量による長さの積分によって定める。局所的に最短な曲線として測地線の概念が定まる。一点から出発する測地線の拡がり方を曲率を使って調べることができ、Riemann 多様体全体の位相に関する情報が得られる。

このような観点から証明された Riemann 多様体の曲率と位相に関するいくつかの基本的な定理を述べる。

定理 2.5.17 (Cartan) M を連結、単連結な n 次元 Riemann 多様体とし、その断面曲率が 0 以下になると仮定する。このとき、M は $\mathbf{R}^n$ と微分同型になる。

定理 2.5.18 (Synge) M をコンパクト連結向き付け可能偶数次元 Riemann 多様体とし、その断面曲率が正になると仮定する。このとき、M は単連結になる。

定理 2.5.19 (Myers) M を完備連結 Riemann 多様体とし、ある正数 c が存在し、任意の単位接ベクトル X の Ricci 曲率が、$\mathrm{Ric}(X, X) \geq c$ を満たすと仮定する。このとき、M はコンパクトになり、基本群 $\pi_1(M, p)$ は有限群になる。