

数理物質科学研究科

微分幾何学I

ファイバー束

田崎博之

2019 年度春学期 (月 2)

数理物質科学研究科
微分幾何学 I
Differential Geometry I
授業概要

多様体上のファイバー束の同値類と分類空間への写像のホモトピー類の対応について解説する。

目次

第1章 基本群と被覆空間	1
1.1 ホモトピー類と基本群	1
1.2 被覆空間	6
1.3 被覆変換群	8
1.4 普遍被覆空間	9
第2章 ファイバー束	10
2.1 ファイバー束の定義	10
2.2 主束	13
2.3 ファイバー束のホモトピー	15
第3章 ホモトピー群とファイバー空間	16
3.1 ホモトピー群	16
3.2 Serre ファイバー空間と道の空間	19
3.3 n 連結性	22
第4章 分類空間	26
4.1 CW 複体	26
4.2 n 普遍束	28
4.3 分類空間	30

第1章 基本群と被覆空間

1.1 ホモトピー類と基本群

集合 X の部分集合 $A_1, \dots, A_n$ と集合 Y の部分集合 $B_1, \dots, B_n$ に対して、写像 $f: X \rightarrow Y$ が $f(A_i) \subset B_i$ を満たすとき、

$$f: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$$

と表す。

位相空間 X の部分集合 $A_1, \dots, A_n$ と位相空間 Y の部分集合 $B_1, \dots, B_n$ に対して、連続写像 $f, g: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ が**ホモトープ**であるとは、連続写像 $H: (X \times [0, 1], A_1 \times [0, 1], \dots, A_n \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ が存在し

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad (x \in X)$$

を満たすことである。 H を**ホモトピー**と呼ぶ。 f, g がホモトープであることを

$$f \simeq g: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$$

で表す。

X から Y への連続写像の全体を $C(X; Y)$ で表す。

$$\begin{aligned} C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n) \\ = \{f \in C(X; Y) \mid f: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)\} \end{aligned}$$

によって $C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ を定める。

補題 1.1.1 (1) ホモトープは $C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ の同値関係である。

(2) $f \simeq g: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$, $f' \simeq g': (Y, B_1, \dots, B_n) \rightarrow (Z, C_1, \dots, C_n)$ ならば、 $f' \circ f \simeq g' \circ g: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Z, C_1, \dots, C_n)$ である。

証明 (1) $f \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ に対して

$$H(x, t) = f(x) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

とおくと、 H によって $f \simeq g$ が成り立つ。

$f, g \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ に対してホモトピー H によって f, g がホモトープになるならば、

$$\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

によって g, f がホモトープになる。

$f, g, h \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ に対してホモトピー H によって f, g がホモトープになりホモトピー G によって g, h がホモトープになるならば、

$$H * G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & (x \in X, 0 \leq t \leq 1/2), \\ G(x, 2t - 1) & (x \in X, 1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

によって f, h はホモトープになる。

以上より、ホモトープは $C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ の同値関係であることがわかる。

(2) ホモトピー H によって $f, g \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ がホモトープになり、ホモトピー G によって $f', g' \in C(Y, B_1, \dots, B_n; Z, C_1, \dots, C_n)$ がホモトープになるとする。すると

$$F(x, t) = G(H(x, t), t) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

によって $f' \circ f, g' \circ g \in C(X, A_1, \dots, A_n; Z, C_1, \dots, C_n)$ もホモトープになる。

$C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ におけるホモトープの同値類を**ホモトピー類**という。連続写像 $f \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ が代表するホモトピー類を $[f]$ で表す。

$(X, A_1, \dots, A_n), (Y, B_1, \dots, B_n)$ が**ホモトピー同値**であるとは、

$$f \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n), \quad g \in C(Y, B_1, \dots, B_n; X, A_1, \dots, A_n)$$

が存在して、

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq 1_X : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_n), \\ f \circ g &\simeq 1_Y : (Y, B_1, \dots, B_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n) \end{aligned}$$

が成り立つことである。このとき、 $(X, A_1, \dots, A_n), (Y, B_1, \dots, B_n)$ は**同じホモトピー型**を持つともいう。一点からなる位相空間と同じホモトピー型を持つ位相空間を**可縮**という。

X を位相空間とする。 $C([0, 1]; X)$ の元を X の**道**という。 X の点 x_0, x_1 をとる。 $C([0, 1], 0, 1; X, x_0, x_1)$ の元を x_0 と x_1 を結ぶ道という。

$$\pi_1(X, x_0, x_1) = C([0, 1], 0, 1; X, x_0, x_1) / \simeq,$$

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0, x_0)$$

によって $\pi_1(X, x_0, x_1)$ および $\pi_1(X, x_0)$ を定める。 $c, c' \in C([0, 1]; X)$ が $c(1) = c'(0)$ を満たすとき、

$$c * c'(t) = \begin{cases} c(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ c'(2t - 1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

によって $c * c'$ を定める。 $c * c'$ を c と c' の積という。

$$\bar{c}(t) = c(1 - t) \quad (t \in [0, 1])$$

によって c の逆 $\bar{c}$ を定める。 $x \in X$ に対して

$$0_x(t) = x \quad (t \in [0, 1])$$

によって $0_x \in C([0, 1]; X)$ を定める。

補題 1.1.2 以下が成り立つ。

- (1) $c_0 \simeq c_1 : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ と $c'_0 \simeq c'_1 : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_1, x_2)$ に対して、 $c_0 * c'_0 \simeq c_1 * c'_1 : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_2)$ が成り立つ。これより積

$$\pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi_1(X, x_1, x_2) \rightarrow \pi_1(X, x_0, x_2) ; ([c], [c']) \mapsto [c][c'] = [c * c']$$

が定まる。

- (2) $[c] \in \pi_1(X, x_0, x_1)$, $[c'] \in \pi_1(X, x_1, x_2)$, $[c''] \in \pi_1(X, x_2, x_3)$ に対して、

$$([c][c'])[c''] = [c]([c'][c''])$$

が成り立つ。

- (3) $[c] \in \pi_1(X, x_0, x_1)$ に対して $[c][\bar{c}] = [0_{x_0}]$, $[\bar{c}][c] = [0_{x_1}]$ が成り立つ。

- (4) $[c] \in \pi_1(X, x_0, x_1)$ に対して $[0_{x_0}][c] = [c] = [c][0_{x_1}]$ が成り立つ。

- (5) $\pi_1(X, x_0)$ は上で定めた積に関して $[0_{x_0}]$ を単位元とする群になる。

証明 (1) ホモトピー H によって $c_0 \simeq c_1$ が成り立ち、ホモトピー H' によって $c'_0 \simeq c'_1$ が成り立つとする。

$$H * H'(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & (0 \leq s \leq 1/2), \\ H'(2s - 1, t) & (1/2 \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと、これは $c_0 * c'_0 \simeq c_1 * c'_1 : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ を与える。これより

$$\pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi_1(X, x_1, x_2) \rightarrow \pi_1(X, x_0, x_2) ; ([c], [c']) \mapsto [c][c'] = [c * c']$$

が well-defined に定まる。

(2)

$$H(s, t) = \begin{cases} c\left(\frac{4s}{t+1}\right) & (0 \leq s \leq \frac{1}{4}(t+1)), \\ c'(4s - t - 1) & (\frac{1}{4}(t+1) \leq s \leq \frac{1}{4}(t+2)), \\ c''\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & (\frac{1}{4}(t+2) \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと、これから $(c * c') * c''$ と $c * (c' * c'')$ がホモトープになることがわかる。

(3)

$$H(s, t) = \begin{cases} c(2s) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}t), \\ c(t) & (\frac{1}{2}t \leq s \leq 1 - \frac{1}{2}t), \\ c(2 - 2s) & (1 - \frac{1}{2}t \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと、これから 0_{x_0} と $c * \bar{c}$ がホモトープになることがわかる。したがって、 $[c][\bar{c}] = [0_{x_0}]$ が成り立つ。 $\bar{c} = c$ なので、上で得た結果を $\bar{c}$ に適用すると、 $[\bar{c}][c] = [0_{x_1}]$ もわかる。

(4)

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & (0 \leq s \leq \frac{-t+1}{2}), \\ c\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & (\frac{-t+1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと、これから $0_{x_0} * c$ と c がホモトープになることがわかる。

$$H(s, t) = \begin{cases} c\left(\frac{2s}{t+1}\right) & (0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}), \\ x_1 & (\frac{t+1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと、これから $c * 0_{x_1}$ と c がホモトープになることがわかる。

(5) 上で示した (1) から (4) より $\pi_1(X, x_0)$ は群になることがわかる。

$\pi_1(X, x_0)$ を X の x_0 に関する **基本群** という。

補題 1.1.3 以下が成り立つ。

- (1) $c \simeq c' : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ と $f \simeq g : (X, x_0, x_1) \rightarrow (Y, y_0, y_1)$ に対して、 $f \circ c \simeq g \circ c' : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (Y, y_0, y_1)$ が成り立つ。これより、写像

$$f_* : \pi_1(X, x_0, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0, y_1) ; [c] \mapsto f_*([c]) = [f \circ c]$$

が定まり、 $f_* = g_*$ が成り立つ。さらに、 $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X, x_0, x_1)}$ が成り立つ。

- (2) $f : (X, x_0, x_1) \rightarrow (Y, y_0, y_1)$, $f' : (Y, y_0, y_1) \rightarrow (Z, z_0, z_1)$ と $[c] \in \pi_1(X, x_0, x_1)$, $[c'] \in \pi_1(X, x_1, x_2)$ に対して、

$$f_*([c][c']) = f_*([c])f_*([c']), \quad (f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$$

が成り立つ。

(3) $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ に対して、 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ は群の準同型写像になる。 $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$ が成り立つ。 $f \simeq g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ならば、 $f_* = g_*$ が成り立つ。さらに $f' : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ について、 $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$ が成り立つ。

(4) 道 $c_0 : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ が存在すれば、

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) ; [c] \mapsto [\bar{c}_0][c][c_0]$$

は群の同型写像になる。

証明 (1) 最初の主張は補題 1.1.1 の (2) の特別な場合である。残りの主張は同様または定義から従う。

(2) 定義から従う。

(3) すでに示したことよりわかる。

(4) 今までに示したことより、問題の写像は群の準同型写像になる。

$$\pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0) ; [c] \mapsto [c_0][c][\bar{c}_0]$$

は逆写像になり、問題の写像は群の同型写像である。

任意の点 $x_0, x_1 \in X$ について、道 $c : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ が存在するとき、 X を**弧状連結**という。 X が弧状連結のときは、補題 1.1.3 の (4) より任意の x_0, x_1 に対して、 $\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(X, x_1)$ は群として同型になる。そこで、これを $\pi_1(X)$ とも書く。

例 1.1.4 X を可縮な位相空間とすると、 $x_0 \in X$ に対して基本群 $\pi_1(X, x_0)$ は単位元のみからなる。

補題 1.1.5 $p_X : X \times Y \rightarrow X ; (x, y) \mapsto x, p_Y : X \times Y \rightarrow Y ; (x, y) \mapsto y$ によって自然な射影を定めると、

$$\begin{aligned} (p_X)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(X, x_0), \\ (p_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \end{aligned}$$

が定まり、

$$((p_X)_*, (p_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

は群の同型写像になる。すなわち、位相空間の積の基本群はそれぞれの位相空間の基本群の積とみなせる。

1.2 被覆空間

X を位相空間とする。 X の任意の点の任意の近傍内に弧状連結な近傍が存在するとき、 X を**局所弧状連結**という。今後、考察の主な対象になる多様体は局所弧状連結である。弧状連結な位相空間 X のある点 $x_0 \in X$ に関する基本群 $\pi_1(X, x_0)$ が単位元のみからなるとき、 X を**単連結**または**1連結**という。例 1.1.4 で示したことより、可縮な位相空間は 1 連結である。

弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 $\tilde{X}, X$ と連続写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が次の条件を満たすとき、 $(\tilde{X}, p, X)$ を**被覆空間**という。条件：任意の $x \in X$ に対して x の弧状連結な近傍 U が存在し、 $p^{-1}(U)$ の各弧状連結成分は $p^{-1}(U)$ 内で開集合になり、 p によって U と位相同型になる。ここで、 U を**基本近傍**、 X を**底空間**、 p を**被覆写像**、 $\tilde{X}$ を**被覆空間**、 $p^{-1}(x)$ を x 上の**ファイバー**という。

被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と $x \in X$ に対して $p^{-1}(x)$ は離散位相を持つ。 U を x を含む基本近傍とすると、 $p^{-1}(U)$ は $U \times p^{-1}(x)$ と位相同型になる。

例 1.2.1 絶対値 1 の複素数全体を $U(1)$ で表す。 $p: \mathbb{R} \rightarrow U(1); x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ によって写像 p を定めると、 $(\mathbb{R}, p, U(1))$ は被覆空間になる。

被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と $(\tilde{Y}, q, Y)$ が**同値**であるとは、位相同型写像 $\tilde{h}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ と $h: X \rightarrow Y$ が存在し、 $q \circ \tilde{h} = h \circ p$ が成り立つことである。

被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と位相空間 Y から X への連続写像 $f: Y \rightarrow X$ に対して、 $p \circ \tilde{f} = f$ を満たす連続写像 $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ を f の**持ち上げ**という。

補題 1.2.2 $(\tilde{X}, p, X)$ を被覆空間とする。 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ をとり、 $x = p(\tilde{x}) \in X$ とする。道 $c: ([0, 1], 0) \rightarrow (X, x)$ に対して c の持ち上げ $\tilde{c}: ([0, 1], 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ が一意に存在する。 $x_1 \in X$ 、 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ と $c \simeq c': ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ となる c, c' の持ち上げ $\tilde{c}, \tilde{c}': ([0, 1], 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ に対して、 $\tilde{c}(1) = \tilde{c}'(1)$ かつ $\tilde{c} \simeq \tilde{c}': ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ が成り立つ。ただし、 $\tilde{x}_1 = \tilde{c}(1)$ である。

証明の概要 $[0, 1]$ はコンパクトなので、 $c([0, 1])$ もコンパクトになる。 $c([0, 1])$ の各点は基本近傍に含まれ、 $c([0, 1])$ がコンパクトであることから、 $c([0, 1])$ は有限個の基本近傍で覆われる。各基本近傍において c は持ち上げを持つので、それらをつなぎ合わせることで c の持ち上げ $\tilde{c}$ であって、 $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ を満たすものが一意に存在することがわかる。

$c \simeq c'$ を与えるホモトピーとその定義域 $[0, 1] \times [0, 1]$ に、上と同様の議論を適用することにより、ホモトピーの持ち上げが存在し結論を得る。

定理 1.2.3 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ に対して、以下が成り立つ。

- (1) X の任意の二点 x_0, x_1 について $p^{-1}(x_0), p^{-1}(x_1)$ の間の全単射が存在する。

(2) $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ に対して $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ とすると、準同型写像 $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ は単射である。

(3) $\pi_1(X, x_0)$ は $p^{-1}(x_0)$ に右から作用し、 $\tilde{x}_0$ を固定する部分群は Imp_* に一致し、

$$\text{Imp}_* \backslash \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) ; \text{Imp}_*[c] \mapsto \tilde{x}_0[c]$$

は全単射になる。

証明の概略 (1) X は弧状連結なので、道 $c : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ が存在する。 $x \in p^{-1}(x_0)$ に対して $\tilde{c}(0) = x$ を満たす $c : [0, 1] \rightarrow X$ の持ち上げ $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ をとり、 $x = \tilde{c}(0)$ に $\tilde{c}(1) \in p^{-1}(x_1)$ を対応させると、 $p^{-1}(x_0)$ から $p^{-1}(x_1)$ への全単射になる。

(2) $[\tilde{c}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が $p_*[\tilde{c}] = [0_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$ を満たすとする。 $p \circ \tilde{c} \simeq 0_{x_0}$ を与えるホモトピーを持ち上げると、 $\tilde{c} \simeq 0_{\tilde{x}_0}$ を与えるホモトピーになり、 $[\tilde{c}] = [0_{\tilde{x}_0}]$ が成り立つ。したがって、 p_* は単射である。

(3) $\pi_1(X, x_0)$ は $p^{-1}(x_0)$ に次のように右から作用する。 $[c] \in \pi_1(X, x_0)$ と $x \in p^{-1}(x_0)$ に対して、 $\tilde{c}(0) = x$ を満たす c の持ち上げ $\tilde{c}$ をとり

$$x[c] = \tilde{c}(1)$$

によって作用を定める。ホモトピーの持ち上げの存在より、 $\pi_1(X, x_0)$ の $p^{-1}(x_0)$ への作用が基本群の元の代表元のとり方に依存しないことを確認できる。 $\tilde{X}$ は弧状連結なので、 $\pi_1(X, x_0)$ は $p^{-1}(x_0)$ に推移的に作用することがわかる。

$$\{[c] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{c}(1) = \tilde{x}_0\} = \{[p \circ \tilde{c}] \mid [\tilde{c}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\} = \text{Imp}_*$$

となり、

$$\text{Imp}_* \backslash \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) ; \text{Imp}_*[c] \mapsto \tilde{x}_0[c]$$

は全単射になることがわかる。

被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ の $x_0 \in X$ に対する $p^{-1}(x_0)$ の濃度を**被覆度**という。

補題 1.2.4 $(\tilde{X}, p, X)$ を被覆空間とし、 Y を弧状連結な位相空間とする。 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ と連続写像 $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ に対して、以下が成り立つ。

(1) $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{X}$ を f の持ち上げとする。 $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$ ならば、 $\tilde{f} = \tilde{g}$ が成り立つ。

(2) Y はさらに局所弧状連結であると仮定し、 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ とする。 f の持ち上げ $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が存在するための必要十分条件は、 $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ が成り立つことである。このとき、 f の持ち上げ $\tilde{f}$ は一意的である。

証明の概略 (1) Y は弧状連結なので、任意の $y \in Y$ に対して道 $u : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (Y, y_0, y)$ が存在する。 $f \circ u$ の持ち上げの一意性より、 $\tilde{f} = \tilde{g}$ がわかる。

(2) f の持ち上げ $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が存在するとき、

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_* \circ \tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

が成り立つ。

逆に $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ が成り立つと仮定する。 Y は弧状連結なので、任意の $y \in Y$ に対して道 $u : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (Y, y_0, y)$ が存在する。 $f \circ u$ の持ち上げ $\tilde{u}$ で $\tilde{u}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものをとる。 $\tilde{f}(y) = \tilde{u}(1)$ によって写像 $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ を定める。条件 $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ より、この $\tilde{f}$ の定め方が well-defined になり、 $\tilde{f}$ は f の持ち上げになる。

持ち上げの一意性は (1) より従う。

1.3 被覆変換群

$(\tilde{X}, p, X)$ を被覆空間とする。位相同型写像 $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ が $p \circ \tilde{f} = p$ を満たすとき、 $\tilde{f}$ を**被覆変換**という。被覆変換の全体は合成に関して群になることがわかる。これを**被覆変換群**と呼び、 $\Gamma(\tilde{X}, p, X)$ で表す。

補題 1.3.1 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と $x_0 \in X$ に対して以下が成り立つ。

- (1) $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ に対して、 $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ を満たす p の持ち上げ $\tilde{f}$ が存在するための必要十分条件は、道 $c : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ に対して $[p \circ c] \in \pi_1(X, x_0)$ が Imp_* の正規化部分群 $N(\text{Imp}_*)$ に含まれることである。
- (2) 連続写像 $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ が $p \circ \tilde{f} = p$ を満たせば、被覆変換である。

系 1.3.2 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と $x_0 \in X$ に対して次が成り立つ。 $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ に対して、 $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ を満たす被覆変換 $\tilde{f}$ が存在するための必要十分条件は、道 $c : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ に対して $[p \circ c] \in \pi_1(X, x_0)$ が Imp_* の正規化部分群 $N(\text{Imp}_*)$ に含まれることである。

定理 1.3.3 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ の被覆変換 $\tilde{f}$ に系 1.3.2 の $[p \circ c] \in \pi_1(X, x_0)$ が定める $\text{Imp}_* \setminus N(\text{Imp}_*)$ の剰余類を対応させると被覆変換群 $\Gamma(\tilde{X}, p, X)$ から剰余群 $\text{Imp}_* \setminus N(\text{Imp}_*)$ への群の同型対応を与える。

定義 1.3.4 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ の任意の $x_0 \in X$ および $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ に対して $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ を満たす被覆変換 $\tilde{f}$ が存在するとき、 $(\tilde{X}, p, X)$ を**正則被覆空間**という。

定理 1.3.5 $(\tilde{X}, p, X)$ を被覆空間とし、 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}, x_0 = p(\tilde{x}_0)$ とする。 $(\tilde{X}, p, X)$ が正則被覆空間であるための必要十分条件は、 $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ が $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群になることである。さらに、 $(\tilde{X}, p, X)$ が正則被覆空間であるとき、剰余群 $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ は $\tilde{X}$ に不動点なしに作用し、この作用に関する商空間への自然な射影 $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ に関して $(\tilde{X}, \pi, \tilde{X}/G)$ は被覆空間になり、もとの被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と同値である。

1.4 普遍被覆空間

定義 1.4.1 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ の $\tilde{X}$ が 1 連結であるとき、 $(\tilde{X}, p, X)$ を **普遍被覆空間** という。

群 G が多様体構造を持ち、群の演算が C^∞ 級写像になるとき、 G を **Lie 群** という。

例 1.4.2 以下は普遍被覆空間である。

- (1) 例 1.2.1 の $(\mathbb{R}, p, U(1))$ 。
- (2) 自然な射影 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ による $(\mathbb{R}^n, p, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ 。
- (3) G を単連結 Lie 群とする。 G の離散部分群 H と自然な射影 $p: G \rightarrow G/H$ による $(G, p, G/H)$ 。

定理 1.4.3 $(\tilde{X}, p, X)$ を普遍被覆空間とする。

- (1) $(\tilde{X}, p, X)$ は正則被覆空間であり、 $x_0 \in X$ に対して $\pi_1(X, x_0)$ は $\tilde{X}$ に不動点なしで作用し、自然な射影 $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$ に関して $(\tilde{X}, \pi, \tilde{X}/\pi_1(X, x_0))$ は被覆空間になり、 $(\tilde{X}, p, X)$ と同値である。
- (2) 任意の被覆空間 $(\tilde{X}', p', X)$ に対して普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p'', \tilde{X}')$ が存在して $p = p' \circ p''$ が成り立つ。
- (3) X を底空間とする任意の普遍被覆空間は互いに同値になる。

定義 1.4.4 X を位相空間とする。任意の $x \in X$ の任意の近傍 V に対して、 V に含まれる x の近傍 U が存在して包含写像 $i: U \rightarrow X$ が誘導する基本群の準同型写像 $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ が自明になるとき、 X を **局所半単連結** という。

定理 1.4.5 X を弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とする。 X を底空間とする普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ が存在するための必要十分条件は、 X が局所半単連結になることである。

系 1.4.6 弧状連結な位相多様体に対して、それを底空間とする普遍被覆空間が存在する。

第2章 ファイバー束

2.1 ファイバー束の定義

定義 2.1.1 E, B, F を位相空間とし、 $p : E \rightarrow B$ を連続写像とする。 B の任意の点 x に対して、その点のある開近傍 U_x と位相同型写像 $\phi_x : U_x \times F \rightarrow p^{-1}(U_x)$ が存在して

$$p \circ \phi_x(b, y) = b \quad ((b, y) \in U_x \times F)$$

が成り立つとき、 (E, p, B, F) を**ファイバー束**という。このとき、 E を**全空間**、 p を**射影**、 B を**底空間**、 F を**ファイバー**、 $b \in B$ に対して $p^{-1}(b)$ を b 上の**ファイバー**、 U_x を**局所自明化近傍**、 ϕ_x を**局所自明化写像**という。

定義 2.1.2 ファイバー束 (E, p, B, F) の E が $E = B \times F$ を満たし、 p は第1成分への射影であるとき、 (E, p, B, F) を**自明ファイバー束**という。

例 2.1.3 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ に対して、 $x_0 \in X$ をとると $(\tilde{X}, p, X, p^{-1}(x_0))$ はファイバー束になる。ファイバー $p^{-1}(x_0)$ は離散的な位相を持っている。被覆空間の基本近傍は、ファイバー束としての局所自明化近傍に他ならない。

この講義では単に多様体というと C^∞ 級多様体を指すことにする。

例 2.1.4 n 次元多様体 M の接ベクトル束

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

の自然な射影 $p : TM \rightarrow M$ に関して $(TM, p, M, \mathbb{R}^n)$ はファイバー束になる。

証明の概略 各 $x \in M$ に対して局所座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ をとる。 U の各元 y に対して

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_y, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_y$$

は接ベクトル空間 $T_y M$ の基底になる。そこで、

$$\phi_x : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U) ; (y, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_y$$

によって写像 ϕ_x を定めると、 ϕ_x によって TM に多様体構造を定めることができ、さらに ϕ_x が局所自明化写像になり $(TM, p, M, \mathbb{R}^n)$ はファイバー束になる。

Lie 群の部分群が部分多様体にもなっているとき、その部分群を **Lie 部分群** という。lie 群の閉部分群は Lie 部分群になることが知られている。そこで、閉部分群を閉 Lie 部分群と呼ぶ。

例 2.1.5 G を Lie 群とし、 H をその閉 Lie 部分群とする。 H による剰余類全体の集合 G/H に商位相を入れると G/H は多様体構造を持ち、自然な射影 $p: G \rightarrow G/H$ に関して $(G, p, G/H, H)$ はファイバー束になる。

行列の指数関数 $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ の一般化である Lie 群の指数写像を使って G/H の多様体構造を構成できるが、ここではその詳細は省略する。

定義 2.1.6 (E, p, B, F) と (E', p', B', F) をファイバーが等しいファイバー束とする。連続写像 $\bar{f}: E \rightarrow E'$ と $f: B \rightarrow B'$ の組 $(\bar{f}, f)$ が**束写像**であるとは、任意の $x \in B$ に対して $\bar{f}(p^{-1}(x)) \subset (p')^{-1}(f(x))$ となり、 $\bar{f}|_{p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \rightarrow (p')^{-1}(f(x))$ が位相同型写像になることである。さらに $B = B'$ であり、 $f = 1_B$ が成り立つとき、 $(\bar{f}, f)$ を**束同型写像**といい、 (E, p, B, F) と (E', p', B, F) は**同値**であるという。 (E, p, B, F) をファイバー束とし、 $g: B' \rightarrow B$ を位相空間の間の連続写像とする。

$$\begin{aligned} g^\# E &= \{(x, b') \in E \times B' \mid p(x) = g(b')\}, \\ \tilde{g}: g^\# E &\rightarrow E; (x, b') \mapsto x, \\ p': g^\# E &\rightarrow B'; (x, b') \mapsto b' \end{aligned}$$

とおくと、 $(g^\# E, p', B', F)$ はファイバー束になり、 $(\tilde{g}, g)$ は $(g^\# E, p', B', F)$ から (E, p, B, F) への束写像になる。 $(g^\# E, p', B', F)$ を g によって (E, p, B, F) から**誘導されたファイバー束**といい、 $g^\#(E, p, B, F)$ で表す。

ファイバー束の定義を書き換え、ファイバー束の構造群の概念を導入するために、位相空間の間の連続写像の集合に定まる位相について簡単に触れておく。位相空間 X, Y に対して、 X から Y への連続写像の全体を $C(X, Y)$ で表す。 $K \subset X, U \subset Y$ に対して

$$W(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

によって $C(X, Y)$ の部分集合 $W(K, U)$ を定める。

$$\{W(K, U) \mid K: X \text{ のコンパクト部分集合}, U: Y \text{ の開集合}\}$$

の生成する $C(X, Y)$ の位相を**コンパクト開位相**という。今後、連続写像の集合を位相空間として扱う際はコンパクト開位相を考える。

X, Y, Z を位相空間とする。連続写像 $\phi : X \times Y \rightarrow Z$ に対して $x \in X$ をとると $\phi(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$ となりこれも連続写像になる。よって、 $\phi : X \rightarrow C(Y, Z)$ とみなすことができる。さらにこの写像は $C(Y, Z)$ のコンパクト開位相に関して連続になることが知られている。また、

$$C(Y, Z) \times C(X, Y) \rightarrow C(X, Z); (f, g) \mapsto f \circ g$$

はこれらのコンパクト開位相に関して連続写像になることも知られている。

ファイバー束の定義は次のように書き換えることができる。 B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と位相同型写像 $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ が存在して

$$p \circ \phi_\alpha(b, y) = b \quad ((b, y) \in U_\alpha \times F)$$

が成り立つ。

上の設定において $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立つとき、 $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ は位相同型写像になり、 $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(x, y)$ の第1成分は x に一致する。一般に位相空間 X の位相同型写像全体の成す群を $\text{Homeo}(X)$ で表すと、

$$\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(x, y) = (x, \Phi_{\alpha\beta}(x)y) \quad ((x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F)$$

となる写像 $\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$ が存在する。コンパクト開位相の性質より、 $\text{Homeo}(F)$ のコンパクト開位相に関して $\Phi_{\alpha\beta}$ は連続である。 $\Phi_{\alpha\beta}$ をファイバー束の**座標変換**という。 $\{U_\alpha \times F\}$ を座標変換 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ によって貼り合わせてファイバー束ができているとみなせる。 G を $\text{Homeo}(F)$ の部分群とする。座標変換の値がすべて G に含まれるとき、 G をファイバー束の**構造群**という。このとき、ファイバー束は構造群 G を持つともいい、 (E, p, B, F, G) で表す。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。 $\mathbb{K}$ を成分に持つ n 次正方行列全体の成す群を $GL(n, \mathbb{K})$ で表し、 $\mathbb{K}$ **一般線形群**と呼ぶ。 $GL(n, \mathbb{K}) \subset \text{Homeo}(\mathbb{K})$ となるので、 $GL(n, \mathbb{K})$ にはコンパクト開位相が入る。他方、 $GL(n, \mathbb{K})$ は n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ の部分集合なので、その部分位相も持つが、この位相は上記のコンパクト開位相と一致することがわかる。位相空間 B を底空間とするファイバー束 $(E, p, B, \mathbb{K}^n)$ が構造群 $GL(n, \mathbb{K})$ を持つとき、 $(E, p, X, \mathbb{K}^n, GL(n, \mathbb{K}))$ を $\mathbb{K}$ **ベクトル束**という。ただし、 $GL(n, \mathbb{K})$ の $\mathbb{K}^n$ への自然な作用により $GL(n, \mathbb{K}) \subset \text{Homeo}(\mathbb{K}^n)$ とみなす。例 2.1.4 で示した多様体の接ベクトル束はベクトル束の例になっている。

定義 2.1.7 (E, p, B, F, G) と (E', p', B', F, G) をファイバーと構造群が等しく、構造群のファイバーへの作用も等しいファイバー束とする。 (E, p, B, F) から (E', p', B', F) への束写像 $(\bar{f}, f)$ が次の条件を満たすとき、構造群を持つファイバー束の**束写像**という。 (E, p, B, F, G) の局所自明化近傍の族を $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ とし、 (E', p', B', F, G) の局所自明化近傍の族を $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ とする。 $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$ となる $\alpha \in A$ と $\beta \in B$ に対して、 $x \in U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ をとると、

$$F \rightarrow F; y \mapsto \text{pr}_2 \circ \psi_\beta^{-1} \circ \bar{f} \circ \phi_\alpha(x, y)$$

は G の元になる。さらに $B = B'$ であり、 $f = 1_B$ が成り立つとき、 $(\bar{f}, f)$ を構造群を持つファイバー束の**束同型写像**といい、 (E, p, B, F, G) と (E', p', B, F, G) は構造群を持つファイバー束として**同値**であるという。

2.2 主束

群 G が位相構造を持ち、群の演算が連続写像になるとき、 G を**位相群**という。Lie 群は位相群である。

G を位相群とする。 G の G 自身への右からの積によって定まる右からの作用に関して G をファイバーとして構造群を G とするファイバー束 (E, p, B, G, G) を G **主束** または G が明らかな場合は単に**主束**といい、 (E, p, B, G) で表す。

例 2.2.1 $(E, p, B, \mathbb{K}^n, GL(n, \mathbb{K}))$ をベクトル束とする。 E の n 個の積 E^n と B の積の部分集合 $F(E)$ を

$$F(E) = \{(f_1, \dots, f_n, b) \in E^n \times B \mid p(f_1) = \dots = p(f_n) = b, \\ f_1, \dots, f_n \text{ は } p^{-1}(b) \text{ の基底}\}$$

によって定める。 n 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の基底の全体は、 $\mathbb{K}^n$ から V への $\mathbb{K}$ 線形同型写像の全体と自然に一対一対応を持つ。 $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底としたとき、 V の基底 $f_1, \dots, f_n$ と $u(e_i) = f_i$ を満たす $\mathbb{K}$ 線形同型写像 $u: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ を対応させればよい。この対応により

$$F(E) = \bigcup_{b \in B} \{u: \mathbb{K}^n \rightarrow p^{-1}(b) \mid u \text{ は } \mathbb{K} \text{ 線形同型写像}\}$$

とみなせる。

$$p': F(E) \rightarrow B; (f_1, \dots, f_n, b) \mapsto b$$

によって p' を定めると、各 $b \in B$ に対して $(p')^{-1}(b)$ は $\mathbb{K}^n$ から $p^{-1}(b)$ への $\mathbb{K}$ 線形同型写像の全体になる。これに $GL(n, \mathbb{K})$ は次のように右から作用する。 $\mathbb{K}^n$ から $p^{-1}(b)$ への $\mathbb{K}$ 線形同型写像 u に対して、 $u \circ g$ も $\mathbb{K}^n$ から $p^{-1}(b)$ への $\mathbb{K}$ 線形同型写像になり、これにより $GL(n, \mathbb{K})$ は $F(E)$ に右から作用する。 n 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間の基底の全体は $GL(n, \mathbb{K})$ との間の一対一対応があるので、以上の設定の元で $(F(E), p', B, GL(n, \mathbb{K}), GL(n, \mathbb{K}))$ は主束になる。これをベクトル束 $(E, p, B, \mathbb{K}^n, GL(n, \mathbb{K}))$ の**フレーム束**という。

位相群 G が位相空間 X に右から作用し、 G が位相空間 Y に左から作用するとき、 $x \in X, y \in Y$ と $g \in G$ に対して

$$(x, y) \sim (x \cdot g, g^{-1} \cdot y)$$

によって、 $X \times Y$ における二項関係 $\sim$ を定めると、 $\sim$ は同値関係になる。この同値関係による商空間を

$$X \times_G Y = X \times Y / \sim$$

で表す。商空間には商位相を導入しておく。 $(x, y) \in X \times Y$ の定める同値類を $[x, y]$ で表す。

上記の二項関係が同値関係になることを証明しておく。 G の単位元を e で表すと

$$(x, y) \sim (x \cdot e, e^{-1} \cdot y) = (x, y)$$

となる。 $(x, y) \sim (x_1, y_1)$ とすると、ある $g \in G$ が存在して $x_1 = x \cdot g$, $y_1 = g^{-1} \cdot y$ が成り立つ。これより、 $x = x_1 \cdot g^{-1}$, $y = g \cdot y_1$ となり、 $(x_1, y_1) \sim (x, y)$ が成り立つ。さらに $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ が成り立つとすると、ある $h \in G$ が存在して $x_2 = x_1 \cdot h$, $y_2 = h^{-1} \cdot y_1$ が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cdot h = (x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh), \\ y_2 &= h^{-1} \cdot y_1 = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot y) = (h^{-1}g^{-1}) \cdot y = (gh)^{-1} \cdot y \end{aligned}$$

となり、 $(x, y) \sim (x_2, y_2)$ が成り立つ。以上より、 $\sim$ が $X \times Y$ の同値関係であることがわかる。

例 2.2.2 G を $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群とする。 G は G 自身に右から作用し、 G は $\mathbb{R}^n$ に左から作用する。このとき、 $G \times_G \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ が成り立つ。

証明

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow G \times_G \mathbb{R}^n ; v \mapsto [1_n, v]$$

が全単射になることを示す。任意の $(g, v) \in G \times \mathbb{R}^n$ に対して、 $[g, v] = [1_n, g^{-1}v]$ となるので、 Φ は全射である。 $[1_n, v] = [1_n, v']$ とすると、 $v = v'$ となり、 Φ は単射である。したがって、 Φ は全単射である。さらに Φ は位相同型写像になることもわかる。

定理 2.2.3 G を位相群とする。 G 主束 (E, p, B, G) と G が左から作用する位相空間 F に対して、連続写像 $p' : E \times_G F \rightarrow B$ を $p'[x, y] = p(x)$ で定める。このとき、 $(E \times_G F, p', B, F)$ はファイバー束になる。 G が F に効果的に作用するときは、任意のファイバー束 $(\bar{E}, \bar{p}, B, F, G)$ に対してある G 主束 (E, p, B, G) が存在し、ファイバー束 $(E \times_G F, p', B, F, G)$ は $(\bar{E}, \bar{p}, B, F, G)$ と同値になる。さらに、この対応は B 上の G 主束の同値類と B 上の構造群 G とファイバー F を持つファイバー束の同値類の間に一対一対応を与える。

定義 2.2.4 上記の定理の設定の元で、 $(E \times_G F, p', B, F)$ を主束 (E, p, B, G) の**同伴ファイバー束**といい、 (E, p, B, G) は $(E \times_G F, p', B, F)$ の**同伴主束**という。

例 2.2.5 例 2.2.1 で構成したベクトル束のフレーム束はベクトル束の同伴主束であり、ベクトル束はフレーム束の同伴ファイバー束である。

定理 2.2.6 G を Lie 群とし、 H, K は G の閉部分群であり $H \supset K$ を満たすとする。 $(G, p, G/H, H)$ は H 主束であり、 $(G/K, p, G/H, H/K, H)$ はその同伴ファイバー束である。

2.3 ファイバー束のホモトピー

構造群 G を持つファイバー束 (E, p, B, F, G) に対して、

$$(E \times [0, 1], p \times 1_{[0, 1]}, B \times [0, 1], F, G)$$

はファイバー束になる。 $\pi : B \times [0, 1] \rightarrow B ; (x, t) \mapsto x$ を自然な射影とすると、 $(E \times [0, 1], p \times 1_{[0, 1]}, B \times [0, 1], F, G)$ は $\pi^\#(E, p, B, F, G)$ に一致する。 $t \in [0, 1]$ に対して埋め込み $i_t : B \rightarrow B \times [0, 1] ; x \mapsto (x, t)$ を定めると、 (E, p, B, F, G) は $i_t^\#(E \times [0, 1], p \times 1_{[0, 1]}, B \times [0, 1], F, G)$ に一致する。

定義 2.3.1 構造群 G を持つファイバー束 (E, p, B, F, G) と (E', p', B', F, G) に対して、 $(E \times [0, 1], p \times 1_{[0, 1]}, B \times [0, 1], F, G)$ から (E', p', B', F, G) への束写像を**ファイバー束のホモトピー**という。これが $H : E \times [0, 1] \rightarrow E'$ で与えられているとき、 $h_t = H(\cdot, t) : E \rightarrow E'$ も**ファイバー束のホモトピー**という。このとき、 h_0 と h_1 は**ホモトープ**であるといい、 $h_0 \simeq h_1 : (E, p, B, F, G) \rightarrow (E', p', B', F, G)$ と表す。

ファイバー束のホモトピーの存在を示す定理を述べるときに必要になるパラコンパクトの概念を導入し、その基本的性質について述べておく。

X を位相空間とし、 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の部分集合の族とする。 X の任意の点 x に対して x のある開近傍 V が存在して $\{\alpha \in A \mid V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ が有限集合になるとき、 $\mathcal{U}$ を**局所有限**という。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ が X の被覆であるとする。任意の $i \in I$ に対してある $\alpha \in A$ が存在して $V_i \subset U_\alpha$ を満たすとき、 $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の**細分**と呼ぶ。位相空間 X の任意の開被覆に対して、その細分でしかも局所有限な開被覆が存在するとき、 X を**パラコンパクト**という。

定理 2.3.2 X を位相多様体とすると、次の条件は同値になる。

- (1) X は第二可算公理を満たす。
- (2) X はパラコンパクトであり、 X の連結成分の個数は高々可算である。

定理 2.3.3 (E, p, B, F, G) と (E', p', B', F, G) は同じ構造群 G とファイバー F を持つファイバー束とする。さらに、 B はパラコンパクト Hausdorff 空間であると仮定する。束写像 $(\bar{h}, h) : (E, p, B, F, G) \rightarrow (E', p', B', F, G)$ とホモトピー $H : B \times [0, 1] \rightarrow B'$ に対して、 $h_t = H(\cdot, t) : B \rightarrow B'$ と表す。 $h = h_0$ であれば、ファイバー束のホモトピー $\bar{h}_t : E \rightarrow E'$ が存在し、 $p' \circ \bar{h}_t = h_t \circ p$ ($t \in [0, 1]$) を満たす。

第3章 ホモトピー群とファイバー空間

3.1 ホモトピー群

1.1 節では1次元の区間からの連続写像である道のホモトピー類によって基本群を定義した。この節ではこれを一般次元に拡張してホモトピー群を定義し、その基本的性質について述べる。

ホモトピー群の定義に必要な記号を定め、ホモトピー群を定義する。位相空間 X とその部分集合 $A_1, \dots, A_n$ および位相空間 Y とその部分集合 $B_1, \dots, B_n$ に対して連続写像 $f: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ のホモトピー類を $[f]$ で表し、

$$[X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n] = \{[f] \mid f \in C(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)\}$$

によってホモトピー類の集合を定める。単位区間を $I = [0, 1]$ と表し、 $I^0 = \{0\}$ で $n \geq 1$ のときは $I^n = I \times \dots \times I \subset \mathbb{R}^n$ によって単位 n 立方体 I^n を定める。 I^n の境界 ∂I^n は

$$\partial I^n = \{(t_i) \in I^n \mid \exists i \, t_i = 0 \text{ または } 1\}$$

と表せる。 $\partial I^0 = \emptyset$ である。 ∂I^n の部分集合 J^{n-1} を

$$J^0 = \emptyset, \quad J^{n-1} = \overline{\partial I^n - I^{n-1} \times \{0\}} \quad (n \geq 2)$$

によって定める。位相空間 X の部分集合 A およびその点 x_0 に対して、

$$\pi_n(X, A, x_0) = [I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0]$$

によって $\pi_n(X, A, x_0)$ を定める。さらに

$$\pi_n(X, x_0) = [I^n, \partial I^n; X, x_0]$$

によって $\pi_n(X, x_0)$ を定める。これは $\pi_n(X, x_0, x_0)$ に一致する。

$h_1, h_2 \in C(I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0)$ に対して

$$(h_1 * h_2)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} h_1(2t_1, t_2, \dots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq 1/2), \\ h_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & (1/2 \leq t_1 \leq 1) \end{cases}$$

によって $h_1 * h_2$ を定めると、 $h_1 * h_2 \in C(I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0)$ が成り立つことがわかる。 $h_1 * h_2$ を h_1 と h_2 の積という。ただし、積の定義は $n > 1$ のとき、または、 $n = 1$ かつ $A = x_0$ のとき意味がある。 $n = 1$ のときは、 $\pi_1(X, A, x_0) = [I, \partial I, \emptyset; X, A, x_0] = [I, \partial I; X, A]$ となり、 A が 2 点以上持つときは積が定まらない。さらに、ホモトピー類に対しても積が定まり、 $\pi_n(X, A, x_0)$ は定値写像 0_{x_0} のホモトピー類を単位元に持つ群になる。これを n 次ホモトピー群という。 $n = 1$ かつ $A = x_0$ のときは基本群に他ならない。

基本群は可換群になるとは限らないが、 $n > 2$ または $n = 2$ かつ $A = x_0$ のときホモトピー群 $\pi_n(X, A, x_0)$ は可換群になる。

連続写像 $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ は写像

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0) ; [h] \mapsto f_*[h] = [f \circ h]$$

を定める。積が定まるときは、 f_* はホモトピー群の間の準同型写像になる。

特定の元を持つ集合の系列 (X_n, x_n) およびそれらの間の写像の系列 $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ に対して、各 n について $f_{n+1}(X_{n+1}) = f_n^{-1}(x_{n-1})$ が成り立つとき、この写像の系列を完全系列という。群の系列の場合には、特定の元は単位元とし写像は準同型写像を考える。

命題 3.1.1 位相空間 X とその部分集合 A およびその点 x_0 に対して、 $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, $j : (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ を包含写像とし、

$$\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, x_0) ; [h] \mapsto \partial[h] = [h|_{I^n \times \{0\}}]$$

によって ∂ を定めると、 $n \geq 1$ のとき ∂ は群の準同型写像になり、

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) &\xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) &\xrightarrow{\partial} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \end{aligned}$$

は完全系列になる。連続写像 $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ に対して

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & \pi_{n+1}(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} \longrightarrow \\ & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & \\ \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} \longrightarrow \end{array}$$

は可換図式になる。

証明の概略 $[h] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ をとると $h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ である。 $I^n \times \{0\} \subset \partial I^{n+1}$ より、 $h(I^n \times \{0\}) \subset h(\partial I^{n+1}) \subset A$ が成り立つ。さらに $\partial I^n \times \{0\} = I^n \times \{0\} \cap J^n \subset J^n$ より、 $h(\partial I^n \times \{0\}) \subset h(J^n) = \{x_0\}$ となり、 $h(\partial I^n \times \{0\}) = \{x_0\}$ が成り立つ。したがって、 $h|_{I^n \times \{0\}} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$ となり、 $[h|_{I^n \times \{0\}}] \in \pi_n(A, x_0)$ が定まる。

$n \geq 1$ のとき、 $\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, x_0)$ が群の準同型写像になることを示す。 $h_1, h_2 \in C(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n; X, A, x_0)$ に対して、

$$\partial([h_1][h_2]) = \partial[h_1 * h_2] = [(h_1 * h_2)|_{I^n \times \{0\}}]$$

であり、積の定義と $n \geq 1$ であることより $(h_1 * h_2)|_{I^n \times \{0\}} = (h_1|_{I^n \times \{0\}}) * (h_2|_{I^n \times \{0\}})$ がわかる。よって、上のホモトピー類は次に等しくなる。

$$[(h_1|_{I^n \times \{0\}}) * (h_2|_{I^n \times \{0\}})] = [h_1|_{I^n \times \{0\}}][h_2|_{I^n \times \{0\}}] = \partial[h_1]\partial[h_2].$$

したがって、 ∂ は群の準同型写像になることがわかる。他の i_* と j_* が群の準同型写像になることは基本群の場合と同様にわかる。

問題の系列が完全系列であることを示す。

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0)$$

において、 $\text{im } \partial = \ker i_*$ が成り立つことを示す。そのためにまず $i_* \circ \partial = 0$ を示す。 I^{n+1} 内で $\partial I^n \times \{0\}$ を固定したまま、 $I^n \times \{0\}$ を J^n に連続的に変形できる。したがって、 $h|_{I^n \times \{0\}}$ を X 内で $h|_{J^n} = 0_{x_0}$ に連続的に変形できる。すなわち、

$$i \circ h|_{I^n \times \{0\}} \simeq 0_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$$

つまり、 $i_* \circ \partial[h] = 0$ となり、 $i_* \circ \partial = 0$ を得る。よって、 $\partial(\pi_{n+1}(X, A, x_0)) \subset \ker i_*$ が成り立つ。逆の包含関係を示すために $[h] \in \pi_n(A, x_0)$ が $i_*[h] = 0$ を満たすと仮定する。 $i \circ h \simeq 0_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ となるので、これを与えるホモトピーを $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ とする。

$$H(x, 0) = h(x) \in A, \quad H(x, 1) = x_0 \quad (x \in I^n)$$

が成り立つ。さらに、 $H(\partial I^n \times I) = \{x_0\}$ であり、

$$H(\partial I^{n+1}) = H(I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \cup I^n \times \{1\}) \subset A,$$

$$H(J^n) = H(\partial I^n \times I \cup I^n \times \{1\}) = \{x_0\}$$

が成り立つ。よって、 $[H] \in [I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n; X, A, x_0] = \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ であり、 $\partial[H] = [H|_{I^n \times \{0\}}] = [h]$ となる。したがって、 $\ker i_* \subset \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ となり、 $\ker i_* = \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ が成り立つ。他の部分の完全性も定義に従って証明できる。

$f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ が誘導する写像を含む図式が可換になることを示す。

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ \pi_{n+1}(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) \end{array}$$

についてまず考える。 $[h] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ に対して

$$f_* \circ \partial[h] = f_*[h|_{I^n \times \{0\}}] = [f_* \circ (h|_{I^n \times \{0\}})] = [(f \circ h)|_{I^n \times \{0\}}] = \partial[f \circ h] = \partial \circ f_*[h]$$

となり、 $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$ が成り立つ。他の部分については、連続写像の誘導する準同型写像なので、簡単に図式が可換であることがわかる。以上より、問題の図式は可換になる。

連続写像 $h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ と道 $c : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ に対してホモトピー $h_t : I^n \rightarrow X$ であって $h_1 = h$ かつ $h_t(\partial I^n) = c(t)$ を満たすものをとることができる。このときホモトピー類 $[c]$ に対して写像

$$[c]_* : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0) ; [h] \mapsto [c]_*[h] = [h_0]$$

が定まる。 $[c]_*$ はホモトピー群の同型写像になる。さらに $x_0 = x_1$ の場合を考えると、 $\pi_1(X, x_0)$ は $\pi_n(X, x_0)$ に作用する。

X が弧状連結ならば、上のことから X の任意の点 x_0 に関するホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ は同型になる。そこでそれを単に $\pi_n(X)$ とも書く。 A が弧状連結ならば、上と同様に A の任意の点 x_0 に関するホモトピー群 $\pi_n(X, A, x_0)$ は同型になる。そこでそれを単に $\pi_n(X, A)$ とも書く。

3.2 Serre ファイバー空間と道の空間

定義 3.2.1 E, B を位相空間とし、 $p : E \rightarrow B$ を連続な全射とする。次の性質が成り立つとき、 (E, p, B) を **Serre ファイバー空間** という。各 $n = 0, 1, 2, \dots$ について、連続写像 $f : I^n \rightarrow E$ と $H : I^n \times I \rightarrow B$ が

$$(p \circ f)(x) = H(x, 0) \quad (x \in I^n)$$

を満たすとき、ある連続写像 $\bar{H} : I^n \times I \rightarrow E$ が存在して次の等式を満たす。

$$H = p \circ \bar{H}, \quad \bar{H}(x, 0) = f(x) \quad (x \in I^n).$$

このとき、 E を**全空間**、 p を**射影**、 B を**底空間**、 $b \in B$ に対して $p^{-1}(b)$ を **b 上のファイバー** という。

(E, p, B) と (E', p', B') を Serre ファイバー空間とする。連続写像 $\bar{f} : E \rightarrow E'$ と $f : B \rightarrow B'$ の組 $(\bar{f}, f)$ が**ファイバー写像**であるとは、 $p' \circ \bar{f} = f \circ p$ が成り立つことである。このとき、 $b \in B$ に対して

$$p' \circ \bar{f}(p^{-1}(b)) = f \circ p(p^{-1}(b)) = f(b)$$

となるので、 $\bar{f}(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(f(b))$ が成り立ち、 $\bar{f} : E \rightarrow E'$ はファイバーを保つ。

(E, p, B) を Serre ファイバー空間とし、 $f : B' \rightarrow B$ を位相空間の間の連続写像とする。

$$\begin{aligned} f^\# E &= \{(x, b') \in E \times B' \mid p(x) = f(b')\}, \\ \bar{f} : f^\# E &\rightarrow E ; (x, b') \mapsto x, \\ p' : f^\# E &\rightarrow B' ; (x, b') \mapsto b' \end{aligned}$$

とおくと、 $(f^\# E, p', B')$ は Serre ファイバー空間になり、 $(\bar{f}, f)$ は $(f^\# E, p', B')$ から (E, p, B) へのファイバー写像になる。 $(f^\# E, p', B')$ を **f によって (E, p, B) から誘導された Serre ファイバー空間**といい、 $f^\#(E, p, B)$ で表す。

定理 3.2.2 (E, p, B, F, G) をファイバー束とすると、 (E, p, B) は Serre ファイバー空間である。特に、被覆空間は Serre ファイバー空間である。

証明の概略 連続写像 $f : I^n \rightarrow E$ と $H : I^n \times I \rightarrow B$ が

$$(p \circ f)(x) = H(x, 0) \quad (x \in I^n)$$

を満たすとする。 f によって (E, p, B, F, G) から誘導されたファイバー束 (定義 2.1.6) $(f^\# E, p', I^n, F, G)$ を考える。これに定理 2.3.3 を適用することにより、定理の主張が成り立つことがわかる。

位相空間 X とその部分集合 A, B に対して、次のように**道の空間**を定める。

$$\Omega(X, A, B) = C(I, 0, 1; X, A, B).$$

位相はコンパクト開位相を考える。

定理 3.2.3 X を弧状連結位相空間とし、 A, B を X の部分集合とする。

$$\begin{aligned} p : \Omega(X, A, B) &\rightarrow A \times B ; c \mapsto p(c) = (c(0), c(1)), \\ p_0 : \Omega(X, A, B) &\rightarrow A ; c \mapsto p_0(c) = c(0), \\ p_1 : \Omega(X, A, B) &\rightarrow B ; c \mapsto p_1(c) = c(1) \end{aligned}$$

によって写像 p, p_0, p_1 を定めると、コンパクト開位相に関してこれらは連続写像になる。さらに、 $(\Omega(X, A, B), p, A \times B)$, $(\Omega(X, A, B), p_0, A)$, $(\Omega(X, A, B), p_1, B)$ は Serre ファイバー空間である。

証明 コンパクト開位相の性質より、 p, p_0, p_1 は連続写像になる。 X が弧状連結であることから、 p, p_0, p_1 は全射になる。

$(\Omega(X, A, B), p, A \times B)$ が Serre ファイバー空間であることを示す。連続写像 $f : I^n \rightarrow \Omega(X, A, B)$ と $H : I^n \times I \rightarrow A \times B$ が

$$H(x, 0) = p(f(x)) \quad (x \in I^n)$$

を満たすと仮定する。 H の像は $A \times B$ に含まれるので、 $(x, t) \in I^n \times I$ に対して $H(x, t)$ の A 成分を $H_0(x, t)$ とし $H(x, t)$ の B 成分を $H_1(x, t)$ とすると、

$$H(x, t) = (H_0(x, t), H_1(x, t)) \quad ((x, t) \in I^n \times I)$$

となる。さらに、 $x \in I^n$ に対して

$$(H_0(x, 0), H_1(x, 0)) = H(x, 0) = p(f(x)) = (f(x)(0), f(x)(1))$$

となるので、

$$H_0(x, 0) = f(x)(0), \quad H_1(x, 0) = f(x)(1) \quad (x \in I^n)$$

が成り立つ。連続写像 $\bar{H} : I^n \times I \rightarrow \Omega(X, A, B)$ を次式で定める。

$$\bar{H}(x, t)(s) = \begin{cases} H_0(x, t - 4s) & (0 \leq s \leq t/4), \\ f(x) \left(\frac{4s-t}{4-t} \right) & (t/4 \leq s \leq (4-t)/4), \\ H_1(x, 4s + t - 4) & ((4-t)/4 \leq s \leq 1). \end{cases}$$

$\bar{H}$ の定め方およびコンパクト開位相の性質より、 $\bar{H}$ は連続写像になる。定め方より $(x, t) \in I^n \times I$ に対して

$$\begin{aligned} p \circ \bar{H}(x, t) &= (\bar{H}(x, t)(0), \bar{H}(x, t)(1)) = (H_0(x, t - 4 \cdot 0), H_1(x, 4 \cdot 1 + t - 4)) \\ &= (H_0(x, t), H_1(x, t)) = H(x, t) \end{aligned}$$

となり、 $p \circ \bar{H} = H$ が成り立つ。 $x \in I^n, s \in I$ に対して

$$\bar{H}(x, 0)(s) = f(x) \left(\frac{4s}{4} \right) = f(x)(s)$$

となり、 $\bar{H}(x, 0) = f(x)$ が成り立つ。以上より、 $(\Omega(X, A, B), p, A \times B)$ は Serre ファイバー空間である。 $(\Omega(X, A, B), p_0, A), (\Omega(X, A, B), p_1, B)$ の場合も同様に証明できる。

定理 3.2.4 (E, p, B) を Serre ファイバー空間とする。 $b_0 \in B$ と $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ をとり、 $F_0 = p^{-1}(b_0)$ とおく。このとき、

$$p_* : \pi_n(E, F_0, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

は全単射になる。 $n \geq 1$ のときは、 p_* は群の同型写像になる。

系 3.2.5 定理 3.2.4 と同じ設定のもとで、 $E \supset F_0 \ni e_0$ に対して命題 3.1.1 で定めた $\partial : \pi_{n+1}(E, F_0, e_0) \rightarrow \pi_n(F_0, e_0)$ を使って

$$\Delta = \partial \circ p_*^{-1} : \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F_0, e_0)$$

とくと、

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) &\xrightarrow{\Delta} \pi_n(F_0, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\Delta} \\ \cdots \rightarrow \pi_1(B, b_0) &\xrightarrow{\Delta} \pi_0(F_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \end{aligned}$$

は完全系列になる。

証明 命題 3.1.1 の完全系列を (E, F_0, e_0) に適用すると

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(E, F_0, e_0) &\xrightarrow{\partial} \pi_n(F_0, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, F_0, e_0) \xrightarrow{\partial} \\ \cdots \rightarrow \pi_1(E, F_0, e_0) &\xrightarrow{\partial} \pi_0(F_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \end{aligned}$$

は完全系列になる。 $\pi_{n+1}(E, F_0, e_0)$ を定理 3.2.4 の全単射対応を使って $\pi_{n+1}(B, b_0)$ に置き換えると、 $\Delta = \partial \circ p_*^{-1}$ と $p_* \circ j_* = p_*$ より、系の完全系列を得る。

系 3.2.6 $(\tilde{X}, p, X)$ を被覆空間とする。 $x_0 \in X$ と $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ をとる。このとき、 $n > 1$ について $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ は群の同型写像になる。

証明 $(\tilde{X}, p, X)$ が被覆空間であることから、 $F_0 = p^{-1}(x_0)$ は離散的である。よって、 $n > 0$ に対して $\pi_n(F_0, \tilde{x}_0) = \{0\}$ が成り立つ。定理 3.2.2 より $(\tilde{X}, p, X)$ は Serre ファイバー空間になり、定理 3.2.4 を適用すると、 $n > 1$ のとき

$$\{0\} \xrightarrow{i_*} \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\Delta} \{0\}$$

は完全系列になる。よって、 $\ker p_* = \text{Im } i_* = \{0\}$ となり p_* は単射であり、 $\text{Im } p_* = \ker \Delta = \pi_n(X, x_0)$ となり p_* は全射である。したがって、 p_* は群の同型写像である。

3.3 n 連結性

定義 3.3.1 位相空間 X と $x_0 \in X$ に対して、 $0 \leq i \leq n$ について $\pi_i(X, x_0) = \{0\}$ が成り立つとき、 X を n 連結という。さらに $x_0 \in A \subset X$ となる部分集合 A に対して、 $\pi_0(A) = \pi_0(X) = \{0\}$ かつ $0 \leq i \leq n$ について $\pi_i(X, A, x_0) = \{0\}$ が成り立つとき、 (X, A) を n 連結という。

3.1 節の最後に述べたことより、上の n 連結の定義は点 x_0 のとり方に依存しない。

補題 3.3.2 位相空間 X とその部分集合 A および $x_0 \in A$ について $\pi_0(A, x_0) = \pi_0(X, x_0) = \{0\}$ が成り立つとする。このとき、 (X, A) が n 連結であるための必要十分条件は、 $i_* : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0)$ が $i < n$ のとき同型写像であり、かつ $i = n$ のとき全射になることである。

証明 命題 3.1.1 の完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{i+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_i(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \end{aligned}$$

を利用する。 (X, A) が n 連結であると仮定する。

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) = \{0\}$$

は完全系列なので $\text{im } i_* = \ker j_* = \pi_n(X, x_0)$ となり、 $i_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ は全射である。 $i < n$ のとき

$$\{0\} = \pi_{i+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_i(X, A, x_0) = \{0\}$$

は完全系列なので $\{0\} = \text{im } \partial = \ker i_*$ かつ $\text{im } i_* = \ker j_* = \pi_i(X, x_0)$ となり、 $i_* : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0)$ は同型写像である。

逆に $i_* : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0)$ が $i < n$ のとき同型写像であり、かつ $i = n$ のとき全射になると仮定する。 $i \leq n$ のとき、

$$\pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_i(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{i-1}(X, x_0)$$

は完全系列なので $\pi_i(X, x_0) = \text{im } i_* = \ker j_*$ となり、 $j_* = 0$ が成り立つ。さらに、 $\{0\} = \ker i_* = \text{im } \partial$ となり、 $\pi_i(X, A, x_0) = \ker \partial = \text{im } j_* = \{0\}$ が成り立つ。したがって、 (X, A) は n 連結である。

補題 3.3.3 Serre ファイバー空間 (E, p, B) と $b_0 \in B$ および $F_0 = p^{-1}(b_0) \ni e_0$ について、 B が n 連結であるための必要十分条件は、 $i_* : \pi_i(F_0, e_0) \rightarrow \pi_i(E, e_0)$ が $i < n$ のとき同型写像であり、かつ $i = n$ のとき全射になることである。

証明 系 3.2.5 を使って補題 3.3.2 と同様に証明できる。

定理 3.3.4 n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ は $(n-1)$ 連結である。

証明 $x_0 \in S^n$ をとる。 $i \leq n-1$ とする。連続写像 $f : (I^i, \partial I^i) \rightarrow (S^n, x_0)$ を任意にとる。 f を滑らかな写像 g で近似すると、 g は f とホモトープになる。 $i \leq n-1$ より g の像は i 次元の広がりを持つことになり、 g は S^n において一点にホモトープになる。したがって、 f は一点にホモトープになり、 $\pi_i(S^n, x_0) = \{0\}$ が成り立つ。したがって、 S^n は $(n-1)$ 連結である。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする。 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列の全体を $M(n, \mathbb{K})$ で表す。 $X = (X_{ij}) \in M(n, \mathbb{K})$ に対して $X^* = (\bar{X}_{ji})$ とする。

$$U(n, \mathbb{K}) = \{g \in M(n, \mathbb{K}) \mid gg^* = 1_n\}$$

によって $U(n, \mathbb{K})$ を定める。ここで、 1_n は n 次単位行列である。 $U(n, \mathbb{K})$ は $GL(n, \mathbb{K})$ の閉部分群になり、閉 Lie 部分群になる。通常は

$$U(n, \mathbb{R}) = O(n), \quad U(n, \mathbb{C}) = U(n), \quad U(n, \mathbb{H}) = Sp(n)$$

と記述するが、これらを統一的に扱うときには $U(n, \mathbb{K})$ という記号を使う。さらに

$$SO(n) = \{g \in O(n) \mid \det g = 1\}, \quad SU(n) = \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}$$

によって $SO(n)$, $SU(n)$ を定める。これらも閉 Lie 部分群になる。

定理 3.3.5 $d_{\mathbb{K}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ によって $d_{\mathbb{K}}$ を定める。 $U(n+m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$ は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結である。 $SU(n+m)/\{1_n\} \times SU(m)$ は $2m$ 連結である。

証明 $\mathbb{K}^{m+1} \cong \mathbb{R}^{d_{\mathbb{K}}(m+1)}$ であり、

$$S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1} = \{x \in \mathbb{K}^{m+1} \mid |x| = 1\}$$

に $U(m+1, \mathbb{K})$ は推移的作用することがわかる。 $e_1 = (\delta_{i1}) \in S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1}$ とすると、

$$\{g \in U(m+1, \mathbb{K}) \mid ge_1 = e_1\} = \{1\} \times U(m, \mathbb{K})$$

が成り立つ。よって、 $S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1} \cong U(m+1, \mathbb{K})/\{1\} \times U(m, \mathbb{K})$ が成り立つ。自然な射影 $U(m+1, \mathbb{K}) \rightarrow S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1}$ を p で表すと、例 2.1.5 より

$$(U(m+1, \mathbb{K}), p, S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1}, U(m, \mathbb{K}))$$

はファイバー束になる。定理 3.2.2 より Serre ファイバー空間になり、定理 3.3.4 より $S^{d_{\mathbb{K}}(m+1)-1}$ は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結である。したがって、補題 3.3.3 を適用することができ、

$$i_* : \pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+1, \mathbb{K}))$$

は $i = d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2$ のとき全射になり、 $i < d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2$ のとき同型写像になる。これより、 $i = d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2$ のとき、

$$i = d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2 < d_{\mathbb{K}}(m+2) - 2 < \cdots < d_{\mathbb{K}}(m+n) - 2$$

となるので、

$$\pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+1, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+2, \mathbb{K})) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_i(U(m+n, \mathbb{K}))$$

の最初の写像は全射であり、残りは同型写像になる。特にすべてを合成した

$$\pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+n, \mathbb{K}))$$

は $i = d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2$ のとき全射になる。 $i < d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2$ のとき、上の準同型写像の系列はすべて同型写像になりすべてを合成した

$$\pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+n, \mathbb{K}))$$

は同型写像になる。以上より

$$i = d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2 \Rightarrow \pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+n, \mathbb{K})) : \text{全射}$$

$$i < d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2 \Rightarrow \pi_i(U(m, \mathbb{K})) \rightarrow \pi_i(U(m+n, \mathbb{K})) : \text{同型写像}$$

が成り立つ。これを利用して、補題 3.3.3 をファイバー束

$$(U(m+n, \mathbb{K}), p, U(m+n, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}), U(m, \mathbb{K}))$$

に適用すると、 $U(m+n, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$ は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結であることがわかる。

$SU(n+m)/\{1_n\} \times SU(m) \cong U(n+m)/\{1_n\} \times U(m)$ なので、上で得た結果よりこれは $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結である。ここで $d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2 = 2(m+1) - 2 = 2m$ なので、 $2m$ 連結である。

上記定理の $n = 1$ の場合は球面の幾何学的な議論から出てくるホモトピー群の性質であり、 $n \geq 2$ の場合は球面のホモトピー群の性質とファイバー束のホモトピー群の完全系列から代数的な議論から出てくる性質である。

系 3.3.6 次のホモトピー群の同型が成り立つ。

$$i < n - 1 \Rightarrow \pi_i(SO(n)) \cong \pi_i(SO(n+1))$$

$$i < 2n \Rightarrow \pi_i(U(n)) \cong \pi_i(U(n+1)), \quad \pi_i(SU(n)) \cong \pi_i(SU(n+1))$$

$$i < 4n + 2 \Rightarrow \pi_i(Sp(n)) \cong \pi_i(Sp(n+1))$$

証明 ファイバー束 $(SO(n+1), p, S^n, SO(n))$ に補題 3.3.3 を適用する。定理 3.3.4 より S^n は $(n-1)$ 連結なので、 $i < n-1$ のとき $\pi_i(SO(n)) \cong \pi_i(SO(n+1))$ が成り立つ。

ファイバー束 $(U(n+1), p, S^{2n+1}, U(n))$ に補題 3.3.3 を適用する。定理 3.3.4 より S^{2n+1} は $2n$ 連結なので、 $i < 2n$ のとき $\pi_i(U(n)) \cong \pi_i(U(n+1))$ が成り立つ。

同様にファイバー束 $(SU(n+1), p, S^{2n+1}, SU(n))$ に補題 3.3.3 を適用する。 $i < 2n$ のとき $\pi_i(SU(n)) \cong \pi_i(SU(n+1))$ が成り立つ。

ファイバー束 $(Sp(n+1), p, S^{4n+3}, Sp(n))$ に補題 3.3.3 を適用する。定理 3.3.4 より S^{4n+3} は $(4n+2)$ 連結なので、 $i < 4n+2$ のとき $\pi_i(Sp(n)) \cong \pi_i(Sp(n+1))$ が成り立つ。

第4章 分類空間

4.1 CW 複体

単位胞体 D^n を

$$D^n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq 1 \right\}$$

によって定める。 D^n の境界 ∂D^n は単位球面 S^{n-1} に一致する。

位相空間 X の部分集合 e^n が n 胞体であるとは、 D^n から e^n の閉包 $\bar{e}^n$ への連続写像 $\chi: D^n \rightarrow \bar{e}^n$ が存在して、 χ の D^n の内部への制限が e^n への位相同型写像になることである。 χ を e^n の**特性写像**といい、 n を胞体 e^n の**次元**、 $\partial e^n = \bar{e}^n - e^n$ を e^n の**境界**という。

定義 4.1.1 位相空間 X とその胞体の族 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の組 $(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$ が**胞複体**であるとは、これらが次の条件を満たすことである。

- (1) X は Hausdorff 空間であり、 $X = \bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha$ は共通部分のない合併である。
- (2) k 次元以下の胞体の合併を X^k で表すと、各胞体 e_α について $\partial e_\alpha \subset X^{\dim e_\alpha - 1}$ が成り立つ。

胞複体 $(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$ の**次元**を

$$\dim(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \max\{\dim e_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

で定める。胞体の個数が有限の胞複体を**有限胞複体**という。胞複体 $(X, \{e_\alpha\})$ に対して、部分集合 $Y \subset X$ が

$$Y = \bigcup \{e_\alpha \mid e_\alpha \subset Y\}$$

を満たし、 $e_\alpha \subset Y$ ならば $\bar{e}_\alpha \subset Y$ が成り立つとき、 $(Y, \{e_\alpha \mid e_\alpha \subset Y\})$ を $(X, \{e_\alpha\})$ の**部分複体**という。 Y も**部分複体**という。

胞複体の部分複体は胞複体になる。

定義 4.1.2 X を位相空間、 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の位相空間の部分空間の族とする。 X の任意の部分集合 Y について、 Y が閉集合になるための必要十分条件が各 $\alpha \in A$ について $X_\alpha \cap Y$ が X_α の閉集合になることであるとき、 X の位相を $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に関する**弱位相**という。

定義 4.1.3 胞複体 $(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$ が次の条件を満たすとき、**CW 複体**という。

- (1) 各 $\alpha \in A$ について $\{\beta \in A \mid \bar{e}_\alpha \cap e_\beta \neq \emptyset\}$ は有限集合である。
- (2) X の位相は $\{\bar{e}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に関する弱位相である。

有限胞複体は定義 4.1.3 の二つの条件を満たすので、特に CW 複体になる。

例 4.1.4 D^n において

$$e_0 = \{(1, 0, \dots, 0)\}, \quad e_{n-1} = S^{n-1} - e_0, \quad e_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

によって e_0, e_{n-1}, e_n を定めると、 $(D^n, \{e_0, e_{n-1}, e_n\})$ は胞複体になり CW 複体になる。さらに $(S^{n-1}, \{e_0, e_{n-1}\})$ は $(D^n, \{e_0, e_{n-1}, e_n\})$ の部分複体になる。

命題 4.1.5 $(X, \{e_\alpha\})$ を CW 複体とする。

- (1) $(X, \{e_\alpha\})$ の部分複体 Y は閉部分集合になり、 Y も CW 複体になる。
- (2) X から位相空間 Z への写像 $f: X \rightarrow Z$ について、 f が連続であるための必要十分条件は各 e_α について $f|_{\bar{e}_\alpha}: \bar{e}_\alpha \rightarrow Z$ が連続になることである。
- (3) X の各点は可縮な近傍を持つ。特に、 X は局所弧状連結かつ局所半単連結である。
- (4) X はパラコンパクトである。

定理 1.4.5 と命題 4.1.5 の (3) より、CW 複体の連結成分は普遍被覆空間を持つ。

命題 4.1.6 (X, Y) を CW 複体とその部分複体の組とする。

- (1) X と Y は連結であり、 $X - Y$ の胞体の次元は n より大きいとすると、 (X, Y) は n 連結になる。特に Y が一点 (0 次元胞体) のみのときは、 X は n 連結になる。
- (2) $X - Y$ の各胞体の次元が n 以下であると仮定する。位相空間 Z が $(n-1)$ 連結ならば、連続写像 $f: Y \rightarrow Z$ は X に拡張できる。 Z の部分集合 A に対して (Z, A) が n ならば、連続写像 $f: (X, Y) \rightarrow (Z, A)$ に対してホモトピー $f_t: (X, Y) \rightarrow (Z, A)$ が存在して $f_0 = f$, $f_1(X) \subset A$, $f_1|_Y = f|_Y$ を満たす。
- (3) 位相空間 Z と連続写像 $f: X \rightarrow Z$ およびホモトピー $g_t: Y \rightarrow Z$ が $f|_Y = g_0$ を満たすならば、ホモトピー $f_t: X \rightarrow Z$ が存在して $f_0 = f$, $f_t|_Y = g_t$ を満たす。

定義 4.1.7 位相空間 X, Y とその間の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が X の弧状連結成分 X_α を Y の弧状連結成分 Y_α に写し、 $Y = \cup_\alpha X_\alpha$ と $Y = \cup_\alpha Y_\alpha$ が成り立つとする。各 α および i について f_* が $\pi_i(X_\alpha)$ と $\pi_i(Y_\alpha)$ の間の同型を誘導するとき、 X と Y は**弱ホモトピー同値**であるという。

二つの位相空間 X, Y がホモトピー同値であるならば、ホモトピー同値を与える連続写像はホモトピー群の同型写像を誘導し、 X, Y は弱ホモトピー同値になる。CW 複体に対してはこの逆の主張が成り立つことを示すのが次の定理である。

定理 4.1.8 (J. H. C. Whitehead) X, Y を CW 複体とする。 X, Y がホモトピー同値になるための必要十分条件は、 X, Y が弱ホモトピー同値になることである。

補題 4.1.9 $\{M_i\}$ をコンパクト多様体の列とし、 M_i は M_{i+1} の部分多様体であると仮定する。このとき、 $\cup_i M_i$ の $\{M_i\}$ に関する弱位相に関して $\cup_i M_i$ は CW 複体になる。

4.2 n 普遍束

定義 4.2.1 G を位相群とする。 G 主束 (E, p, B, G) が n 普遍であるとは、以下が成り立つことである。次元が n 以下の任意の CW 複体 X とその部分複体 Y に対して、 $i : Y \rightarrow X$ を包含写像とし、 (E, p, X, G) を X 上の G 主束とする。 i によって (E, p, X, G) から誘導された G 主束 $i^\#(E, p, X, G)$ から (E_0, p_0, B_0, G) への束写像 $h_Y : i^\#(E, p, X, G) \rightarrow (E_0, p_0, B_0, G)$ に対して束写像 $h : (E, p, X, G) \rightarrow (E_0, p_0, B_0, G)$ であって $h|_{i^\#E} = h_Y$ を満たすものが存在する。

系 4.2.2 (定理 2.3.2 の系) パラコンパクト Hausdorff 空間 B に対して以下が成り立つ。

- (1) $i_0 : B \rightarrow B \times I ; x \mapsto (x, 0)$ によって i_0 を定める。 $B \times I$ 上のファイバー束 $(E, p, B \times I, F, G)$ に対して、 $i_0^\#(E, p, B \times I, F, G) \times I$ は $(E, p, B \times I, F, G)$ と同値である。
- (2) ファイバー束 (E, p, B, F, G) と位相空間 B' から B への連続写像 f, g について、 $f^\#(E, p, B, F, G)$ と $g^\#(E, p, B, F, G)$ が同値であるための必要十分条件は f と g がホモトープになることである。
- (3) B が可縮ならば、 B 上のファイバー束は自明なファイバー束と同値になる。

補題 4.2.3 G 主束 (E_0, p_0, B_0, G) が n 普遍であるための必要十分条件は、 E_0 が $(n-1)$ 連結になることである。

定理 4.2.4 (分類定理) (E_0, p_0, B_0, G) を n 普遍 G 主束とし、 X を次元が n より小さい CW 複体とする。任意の G 主束 (E, p, X, G) に対して、ある連続写像 $f : X \rightarrow B_0$ が存在して $f^\#(E_0, p_0, B_0, G)$ は (E, p, X, G) と同値になる。連続写像 $g, h : X \rightarrow B_0$ に対して、 $g \simeq h$ の必要十分条件は $g^\#(E_0, p_0, B_0, G)$ と $h^\#(E_0, p_0, B_0, G)$ が同値になることである。

上の定理より、 X を底空間とする G 主束の同値類全体と X から B_0 への連続写像のホモトピー類全体は一対一に対する。

定義 4.2.5 (E, p, B, G) を n 普遍 G 主束とし、 G が位相空間 F に効果的に作用しているとする。 (E, p, B, G) の同伴ファイバー束 (定義 2.2.4) $(E \times_G F, p', B, F, G)$ を n 普遍ファイバー束という。

系 4.2.6 (E_0, p_0, B_0, F) を n 普遍ファイバー束とし、 X を次元が n より小さい CW 複体とする。任意のファイバー束 (E, p, X, F) に対して、ある連続写像 $f : X \rightarrow B_0$ が存在して $f^\#(E_0, p_0, B_0, F)$ は (E, p, X, F) と同値になる。連続写像 $g, h : X \rightarrow B_0$ に対して、 $g \simeq h$ の必要十分条件は $g^\#(E_0, p_0, B_0, F)$ と $h^\#(E_0, p_0, B_0, F)$ が同値になることである。

補題 4.2.7 G を $U(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群とする。このとき、

$$(U(n+m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}), p, U(n+m, \mathbb{K})/G \times U(m, \mathbb{K}), G)$$

は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 1)$ 普遍 G 主束である。

証明 定理 3.3.5 より、 $U(n+m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$ は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結である。補題 4.2.3 より、問題の G 主束は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 1)$ 普遍である。

$GL(n, \mathbb{K})$ の元は Gram-Schmidt の直交化法により $U(n, \mathbb{K})$ の元と対角成分が正の実数の上三角行列の積に一意的に分解される。対角成分が正の実数の上三角行列の全体は $\mathbb{R}^{d_{\mathbb{K}}(n-1)n/2+n}$ に位相同型になる。これより、 $GL(n, \mathbb{K})$ は $U(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{R}^{d_{\mathbb{K}}(n-1)n/2+n}$ と位相同型になり、包含写像 $U(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ はホモトピー同値を与える。定理 3.3.5 の証明の議論の $U(n, \mathbb{K})$ を $GL(n, \mathbb{K})$ に置き換えることができ、 $GL(n+m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times GL(m, \mathbb{K})$ は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 2)$ 連結である。よって、補題 4.2.8 と同様に次の補題を得る。

補題 4.2.8 G を $GL(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群とする。このとき、

$$(GL(n+m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times GL(m, \mathbb{K}), p, GL(n+m, \mathbb{K})/G \times GL(m, \mathbb{K}), G)$$

は $(d_{\mathbb{K}}(m+1) - 1)$ 普遍 G 主束である。

4.3 分類空間

定義 4.3.1 任意の自然数 n について n 連結である位相空間を ∞ **連結** という。 G 主束 (EG, p, BG, G) の全空間 EG が ∞ 連結であるとき、 **普遍 G 主束** という。 普遍 G 主束の底空間 BG を G の **分類空間** という。 G が位相空間 F に効果的に作用しているとき、 (EG, p, BG, G) の同伴ファイバー束 (E, p, BG, F, G) を **普遍ファイバー束** という。

例 4.3.2 $\mathbb{R}$ から $U(1)$ への準同型写像 $p: \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ を $p(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ によって定める。 $(\mathbb{R}, p, U(1))$ は被覆空間になり、 $\ker p = \mathbb{Z}$ である。 よって、 $(\mathbb{R}, p, U(1), \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$ 主束になる。 $\mathbb{R}$ は可縮なので ∞ 連結である。 したがって、 $(\mathbb{R}, p, U(1), \mathbb{Z})$ は普遍 $\mathbb{Z}$ 主束であり、 $U(1)$ は $\mathbb{Z}$ の分類空間である。

定理 4.3.3 G が位相空間 F に効果的に作用しているとし、 (E, p, BG, F, G) を普遍ファイバー束とする。 CW 複体 X を底空間とする F をファイバーとし G を構造群とするファイバー束の同値類全体と X から BG への連続写像のホモトピー類全体は一対一に対する。

定理 4.3.4 $U(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群 G に対して、 普遍 G 主束が存在する。 同様に、 $GL(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群 G に対しても、 普遍 G 主束が存在する。

証明 自然な包含写像

$$\begin{aligned} U(n+m, \mathbb{K}) &\rightarrow U(n+m+1, \mathbb{K}), \\ \{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}) &\rightarrow \{1_n\} \times U(m+1, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

から

$$U(n+\infty, \mathbb{K}) = \bigcup_m U(n+m, \mathbb{K}), \quad \{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K}) = \bigcup_m \{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$$

を定め弱位相を導入する。 さらに上記の包含写像から単射

$$U(n+m, \mathbb{K}) / \{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}) \rightarrow U(n+m+1, \mathbb{K}) / \{1_n\} \times U(m+1, \mathbb{K})$$

が定まり、

$$\bigcup_m U(n+m, \mathbb{K}) / \{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$$

に弱位相を導入したものは、 $U(n+\infty, \mathbb{K}) / \{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K})$ と位相同型になることがわかる。 同様に、 $U(n+\infty, \mathbb{K}) / G \times U(\infty, \mathbb{K})$ も定まり、

$$\bigcup_m U(n+m, \mathbb{K}) / G \times U(m, \mathbb{K})$$

に弱位相を導入したものは、 $U(n + \infty, \mathbb{K})/G \times U(\infty, \mathbb{K})$ と位相同型になることもわかる。各 m について定まる射影

$$p : U(n + m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}) \rightarrow U(n + m, \mathbb{K})/G \times U(m, \mathbb{K})$$

は射影

$$p : U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K}) \rightarrow U(n + \infty, \mathbb{K})/G \times U(\infty, \mathbb{K})$$

を誘導し、

$$(U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K}), p, U(n + \infty, \mathbb{K})/G \times U(\infty, \mathbb{K}), G)$$

は G 主束になることがわかる。

次に $U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K})$ が ∞ 連結であることを示す。任意の非負整数 i について S^i がコンパクトであることから、連続写像

$$f : S^i \rightarrow U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K})$$

の像もコンパクトになる。よってある m_0 が存在して

$$f(S^i) \subset U(n + m_0, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m_0, \mathbb{K})$$

が成り立つ。 $U(n + m_0, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m_0, \mathbb{K})$ は $(d_{\mathbb{K}}(m_0 + 1) - 2)$ 連結なので、 $m \geq m_0$ を十分大きくとると

$$f(S^i) \subset U(n + m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K}), \quad i \leq d_{\mathbb{K}}(m + 1) - 2$$

が成り立つ。これより、

$$f : S^i \rightarrow U(n + m, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(m, \mathbb{K})$$

は定値写像にホモトープになる。よって、 $U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K})$ の i 次ホモトピー群は単位元のみになる。これが任意の $0 \leq i$ について成り立つので、 $U(n + \infty, \mathbb{K})/\{1_n\} \times U(\infty, \mathbb{K})$ は ∞ 連結である。

$GL(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群 G に対しても、上と同様に普遍 G 主束が存在することがわかる。

定理 4.3.5 $U(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群 G と G が効果的に作用する位相空間 F に対して、 F をファイバーとし G を構造群に持つ普遍ファイバー束が存在する。同様に、 $GL(n, \mathbb{K})$ の閉 Lie 部分群 G と G が効果的に作用する位相空間 F に対しても、 F をファイバーとし G を構造群に持つ普遍ファイバー束が存在する。