北海道大学集中講義

数学特別講義II、幾何学特別講義

コンパクト対称空間の極大対蹠集合

田崎博之

(東京都立大学、筑波大学)

2024 年度後期

10 月 7 日 (月)〜11 日 (金)

北海道大学集中講義

数学特別講義 II、幾何学特別講義

コンパクト対称空間の極大対蹠集合

授業の目標

Lie 群と対称空間の基本事項を解説し、それを基にコンパクト Lie 群の極大対蹠部分群とコンパクト対称空間の極大対蹠集合に関する研究結果を紹介する。

はしがき

Riemann 多様体の中で特によい性質を持つものに Riemann 対称空間がある。名前のとおり高い対称性を持つ空間である。この講義では、Lie 群と対称空間の基本事項を解説し、それを基にコンパクト Lie 群の極大対蹠部分群とコンパクト対称空間の極大対蹠集合に関する研究結果を紹介する。

Riemann 対称空間とは、Riemann 多様体であって各点に点対称変換が存在するものである。Riemann 対称空間は Cartan の導入した概念である。Riemann 対称空間の一点の点対称の固定点集合の各連結成分は極地と呼ばれる全測地的部分多様体になり、これは Chen-Nagano が導入した概念である。彼らは極地が Riemann 対称空間の全体像を把握する上で重要であることを示している。Riemann 対称空間においてどの二点も互いの点対称の固定点になっている点の集りを対蹠集合と呼ぶ。これも Chen-Nagano が導入した概念である。対蹠集合は有限集合になることがわかる。Riemann 対称空間の中でも特に高い対称性を持つ空間に対称 R 空間がある。対称 R 空間においては、$\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の総和が対蹠集合の最大濃度に一致するという Takeuchi の結果が知られている。他の対称空間の対蹠集合も同様な性質を持っているのかどうか興味が持たれる。現在、すべての対称空間の対蹠集合が明らかになっているわけではないが、多くの対称空間の対蹠集合について研究が進んでいる。この講義では、いくつかのコンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類結果について解説する。これらの分類結果は田中真紀子さんとの共同研究の成果である。

この講義ノートは、コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類結果までを目標にした東京都立大学の 2024 年度前期の集中講義の講義ノートにコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類結果を付け加え、そのために必要になる Lie 環などの事項の解説も追加したものである。

北海道大学でのこの 2024 年度の集中講義の機会を与えていただいた世話人の小林真平さんや井ノ口順一さん、古畑仁さんに感謝する。対称空間や極地の基本事項を振り返り、対蹠集合に関する研究成果を見直すことで、より簡明な議論の道筋に気付くことができた。また、この講義の内容を組み立てながら講義ノートを作成する際に、講義全体の内容を聞いていただきその内容や講義ノートに多くの意見や修正案などを提示していただいた井川治さんにも感謝したい。彼のアイデアにより、極大対蹠部分群に関する性質の以前よりも直接的で簡明な証明方法が見つかった。他にもこの講義ノートのもとになった都立大学の講義ノート作成の機会を与えていただいた酒井高司さんや都立大学および今回の講義ノートに意見や修正案を提示していただいた入江博さん、佐々木優さん、田中真紀子さん、さらに東京都立大学、北海道大学で集中講義を聞いていただいた方々に感謝したい。これらの方々のおかげで当初計画していた講義ノートの内容を改善することができた。

目 次

第1章　準備

この章では今後必要になる Lie 群やその等質空間、Riemann 多様体などの基本事項をまとめておく。$\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする。

1.1　Lie 群と Lie 環

この節では Lie 群と Lie 環の基本事項をまとめている。証明のない主張について、その証明を知りたい方は Lie 群と Lie 環の教科書や [15] の講義ノートなどを参考にしてほしい。

定義 1.1.1. 多様体 G が群構造を持ち、群の演算から定まる写像

$$G \times G \to G\ ;\ (g, h) \mapsto gh, \quad G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

が C^∞ 級写像になるとき、G を **Lie 群**という。Lie 群の単位元を含む連結成分は Lie 群になる。これを**単位連結成分**と呼ぶ。Lie 群の部分群が部分多様体でもあるとき、**Lie 部分群**と呼ぶ。Lie 群から Lie 群への群の準同型写像が C^∞ 級写像であるとき、Lie 群の**準同型写像**という。Lie 群の準同型写像が逆写像を持ち、逆写像も Lie 群の準同型写像になるとき、Lie 群の**同型写像**という。二つの Lie 群の間に Lie 群の同型写像が存在するとき、その二つの Lie 群は**同型**であるという。

命題 1.1.2. Lie 群の準同型写像の合成は Lie 群の準同型写像になる。

例 1.1.3. 有限次元実ベクトル空間は和に関して Lie 群になる。特に、$\mathbb{R}^n$ は Lie 群である。

例 1.1.4. n 次元実ベクトル空間 V に対して V の線形変換の全体を $\mathrm{End}(V)$ で表す。$\mathrm{End}(V)$ は n^2 次元の実ベクトル空間になる。

$$GL(V) = \{g \in \mathrm{End}(V) \mid \det g \neq 0\}$$

とおくと、$GL(V)$ は V の線形同型変換の全体になる。条件 $\det g \neq 0$ より $GL(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の開集合になり、n^2 次元の多様体になる。変換の合成に関して $GL(V)$ は群になり、さらに Lie 群になることもわかる。$GL(\mathbb{R}^n)$ は $GL(n, \mathbb{R})$ とも書く。$GL(V)$ を**一般線形群**と呼ぶ。

定義 1.1.5. G を Lie 群とする。G の**左移動** L_g と**右移動** R_g を

$$L_g(x) = gx, \quad R_g(x) = xg^{-1} \qquad (g, x \in G)$$

によって定める。G 上のベクトル場 X は、G の任意の元 g に対して

$$(dL_g)_x(X_x) = X_{gx} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**左不変ベクトル場**と呼ばれ、

$$(dR_g)_x(X_x) = X_{xg^{-1}} \quad (x \in G)$$

を満たすとき**右不変ベクトル場**と呼ばれる。

定義 1.1.6. 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ があり、すべての元 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

を満たすとき、$\mathfrak{g}$ を **Lie 環**と呼ぶ。Lie 環 $\mathfrak{g}$ のベクトル部分空間が、演算 $[\ ,\ ]$ に関して閉じているとき、$\mathfrak{g}$ の **Lie 部分環**と呼ぶ。Lie 環から Lie 環への線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$[f(X), f(Y)] = f([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき、f を **Lie 環の準同型写像**という。Lie 環の準同型写像が逆写像を持つとき、**Lie 環の同型写像**という。二つの Lie 環の間に Lie 環の同型写像が存在するとき、その二つの Lie 環は**同型**であるという。

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環は $\mathfrak{g}$ のブラケットを制限することで Lie 環になる。

命題 1.1.7. Lie 環の準同型写像の合成は Lie 環の準同型写像になる。

例 1.1.8. 多様体 M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ に関して Lie 環になる。

例 1.1.9. V を実ベクトル空間とする。V から V への線形写像の全体 $\mathrm{End}(V)$ の元 X, Y に対して $[X, Y] = XY - YX$ と定めると、$\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる。この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す。$\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ とも書く。

問題 1.1.10. 例 1.1.9 の主張を証明せよ。

定理 1.1.11. G を Lie 群とし、G の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表わす。すると、$\mathfrak{g}$ は G 上のベクトル場全体の成す Lie 環 $\mathfrak{X}(G)$ の Lie 部分環になり、写像

$$\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G)\ ;\ X \mapsto X_e$$

は線形同型写像になる。特に $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$ が成り立つ。

定義 1.1.12. Lie 群 G の左不変ベクトル場の全体からなる Lie 環 $\mathfrak{g}$ を **Lie 群 G の Lie 環**と呼ぶ。

今後特に断らない限り、Lie 群を表すアルファベットに対応するドイツ小文字でその Lie 群の Lie 環を表す。

命題 1.1.13. V を n 次元ベクトル空間とすると、Lie 群 $GL(V)$ と $GL(n,\mathbb{R})$ は同型になり、Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ は同型になる。

定理 1.1.14. $GL(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の開集合だから、接ベクトル空間 $T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ を $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と同一視できる。Lie 群 $GL(n,\mathbb{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、$X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ に対して $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ を $\tilde{X}_g = (dL_g)_e(X)$ $(g \in GL(n,\mathbb{R}))$ によって定めると、写像

$$\tilde{\ } : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}\ ;\ X \mapsto \tilde{X}$$

は Lie 環の同型写像である。

注意 1.1.15. 定理 1.1.14 の Lie 環の同型写像 $\tilde{\ } : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ によって Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と Lie 群 $GL(n,\mathbb{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を同一視し、今後は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ を $GL(n,\mathbb{R})$ の Lie 環とみなすことにする。命題 1.1.13 の同型より、有限次元ベクトル空間 V に対しても $\mathfrak{gl}(V)$ を $GL(V)$ の Lie 環とみなすことにする。

定理 1.1.16. G, H を Lie 群とし、$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とする。定理 1.1.11 の線形同型写像 $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_e(G),\ \alpha_H : \mathfrak{h} \to T_e(H)$ を使って、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ によって df を定めると、df は Lie 環の準同型写像になる。

定義 1.1.17. Lie 群の準同型写像 $f : G \to H$ に対して、$df = \alpha_H^{-1} \circ df_e \circ \alpha_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を f の**微分**と呼ぶ。この用語を使うと定理 1.1.16 は Lie 群の準同型写像の微分は Lie 環の準同型写像になると言い換えることができる。

命題 1.1.18. A, B, C を Lie 群とする。A の恒等写像の微分は $\mathfrak{a}$ の恒等写像である。また $f : A \to B,\ g : B \to C$ を Lie 群の準同型写像とすると、$d(g \circ f) = dg \circ df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$ が成り立つ。

問題 1.1.19. 命題 1.1.18 を証明せよ。

系 1.1.20. A, B を Lie 群とし、これらの Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とおく。$f : A \to B$ を Lie 群の同型写像とすると、$df : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は Lie 環の同型写像になる。

問題 1.1.21. 系 1.1.20 を証明せよ。

定義 1.1.22. 実数全体 $\mathbf{R}$ を加法に関して Lie 群とみなしたとき、$\mathbb{R}$ から Lie 群 G への Lie 群の準同型写像を G の**一径数部分群**と呼ぶ。

定理 1.1.23. G を Lie 群とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元全体と G の一径数部分群の全体は次の対応で 1 対 1 に対応する。$X \in \mathfrak{g}$ に対して X の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものがただ 1 つ存在し、c は G の一径数部分群になり、$X \in \mathfrak{g}$ にこの c を対応させる。逆に G の一径数部分群 c に対して、定理 1.1.11 によって $\dfrac{dc}{dt}(0)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元 X を c に対応させる。

定義 1.1.24. G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.1.23 で存在を示した X の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to G$ で $c(0) = e$ となるものをとり、$\exp X = c(1)$ とおくことによって写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を定義する。exp を Lie 群 G の**指数写像**と呼ぶ。

命題 1.1.25. G を Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して定理 1.1.23 の対応で対応する G の一径数部分群は $t \mapsto \exp tX$ になる。

命題 1.1.26. G を Lie 群とすると、G の指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級写像である。

命題 1.1.27. G, H を Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。$f : G \to H$ を Lie 群の準同型写像とすると、次の等式が成り立つ。

$$f(\exp X) = \exp(df(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

証明　$t \mapsto \exp tX$ は G の一径数部分群なので、$t \mapsto f(\exp tX)$ は H の一径数部分群になる。他方、$t \mapsto \exp(tdf(X))$ も H の一径数部分群になる。これらの単位元における速度ベクトルはどちらも $df_e(d\exp_0(X))$ に一致するので、これらの一径数部分群は一致し、$f(\exp tX) = \exp(tdf(X))$ が成り立つ。特に $t = 1$ とすると $f(\exp X) = \exp(df(X))$ が成り立つ。

定理 1.1.28. Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して、G の指数写像 exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与える。

証明　$X \in \mathfrak{g} \cong T_0(\mathfrak{g})$ に対して

$$d\exp_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)\bigg|_{t=0} = X_e = \alpha(X)$$

だから $d\exp_0 = \alpha : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ が成り立つ。定理 1.1.11 より $d\exp_0$ は線形同型写像になる。逆関数定理より、exp は $\mathfrak{g}$ における 0 のある開近傍と G における e のある開近傍の間の微分同型写像を与えることがわかる。

命題 1.1.29. G を Lie 群とする。$X, Y \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$(Xf)(g) = \frac{d}{dt}f(g\exp tX)\bigg|_{t=0}$$
$$([X,Y]f)(g) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}f(g\exp sX\exp tY(\exp sX)^{-1})\bigg|_{s=t=0}$$

が成り立つ。

系 1.1.30. Lie 群 G が可換ならば G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つ。

証明　G の可換性と命題 1.1.29 を使うと、$f \in C^\infty(G),\ g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}([X,Y]f)(g) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp sX \exp tY (\exp sX)^{-1})\Big|_{s=t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(g \exp tY)\Big|_{s=t=0} = 0\end{aligned}$$

を得る。したがって $[X, Y] = 0$ が成り立つ。

定義 1.1.31. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 X, Y に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つとき、$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという。この用語を使うと系 1.1.30 は可換 Lie 群の Lie 環は可換になると言い換えることができる。

定義 1.1.32. G を Lie 群とし、M を多様体とする。G の単位元を e で表す。C^∞ 級写像 $\rho : G \times M \to M$ が存在し

$$\rho(e, x) = x, \quad \rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x)) \qquad (g_1, g_2 \in G,\ x \in M)$$

を満たすとき、G を M の **Lie 変換群**と呼ぶ。このとき、G は M に**作用**するという。簡単に $\rho(g, x) = \rho(g)x = gx$ と書くこともある。任意の $x, y \in M$ に対してある $g \in G$ が存在し $y = gx$ が成り立つとき、G は M に**推移的**に作用するという。

定理 1.1.33. Lie 群の部分群が閉集合ならば、Lie 部分群である。

定義 1.1.34. 定理 1.1.33 の部分群を**閉 Lie 部分群**と呼ぶ。一般線形群の閉 Lie 部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ。

注意 1.1.35. Lie 群の元のいくつかの等式を満たすということで部分群を定めると、定理 1.1.33 よりそれは閉 Lie 部分群になり、一般論を展開するときには便利だが、具体的な Lie 群の具体的な閉 Lie 部分群を扱うときは、定理 1.1.33 だけでは閉 Lie 部分群の次元や詳しい性質などはわからない。次の節では、具体的な Lie 群の具体的な閉 Lie 部分群が実際に Lie 部分群になることを陰関数定理を使って示す。

1.2　直交群とユニタリ群

$\mathbb{K}$ の元を成分に持つ n 次正方行列全体を $M_n(\mathbb{K})$ で表す。$M_n(\mathbb{K})$ 内の単位行列を 1_n で表す。$X \in M_n(\mathbb{K})$ に対して X の転置行列の各成分を複素共役数に置き換えた行列を X^* で表す。$X = [x_{ij}]$ とすると $X^* = [\bar{x}_{ji}]$ である。実行列 X に対して X^* は転置行列と同じことである。

行列の積の定義より

$$(XY)^* = Y^* X^* \qquad (X, Y \in M_n(\mathbb{K}))$$

が成り立つ。

定義 1.2.1. n 次直交行列全体

$$O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^* X = 1_n\}$$

は行列の積に関して群になる。$O(n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次直交群**と呼ぶ。

$$SO(n) = \{X \in O(n) \mid \det X = 1\}$$

は $O(n)$ の部分群になる。$SO(n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次特殊直交群**と呼ぶ。$\boldsymbol{n}$ **次回転群**と呼ぶこともある。$SO(n)$ は $O(n)$ の単位連結成分であることが知られている。これを認めると $O(n)$ は二つの連結成分を持つことがわかる。

命題 1.2.2. $O(n)$ と $SO(n)$ はコンパクトである。

証明　$X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^* Y)$$

によって $\langle X, Y \rangle$ を定めると、$\langle\ ,\ \rangle$ は $M_n(\mathbb{R})$ の内積になる。$X \in O(n)$ に対して

$$\langle X, X \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(1_n) = \frac{n}{2}$$

となり、$O(n)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の有界閉集合である。特に $O(n)$ はコンパクトである。$SO(n)$ は $O(n)$ の閉集合なので、$SO(n)$ もコンパクトである。

問題 1.2.3. 命題 1.2.2 の証明中の $\langle\ ,\ \rangle$ は $M_n(\mathbb{R})$ の内積であることを確認せよ。

例 1.2.4. $M_1(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ と同一視でき、

$$SO(1) = \{1\}, \quad O(1) = \{\pm 1\}$$

となる。2 次の特殊直交群と直交群は

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$O(2) = SO(2) \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} SO(2)$$

となる。

問題 1.2.5. 例 1.2.4 の内容を確認せよ。

定義 1.2.6. n 次ユニタリ行列全体

$$U(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^* X = 1_n\}$$

は行列の積に関して群になる。$U(n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次ユニタリ群**と呼ぶ。

$$SU(n) = \{X \in U(n) \mid \det X = 1\}$$

は $U(n)$ の部分群になる。$SU(n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次特殊ユニタリ群**と呼ぶ。

問題 1.2.7. $U(n)$ と $SU(n)$ は連結であることを証明せよ。

命題 1.2.8. $U(n)$ と $SU(n)$ はコンパクトである。

証明　複素数 z の実部を $\mathrm{Re}\, z$ で表す。$X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(X^*Y)$$

によって $\langle X, Y\rangle$ を定めると、$\langle\ ,\ \rangle$ は $M_n(\mathbb{C})$ の内積になる。$X \in U(n)$ に対して

$$\langle X, X\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(1_n) = \frac{n}{2}$$

となり、$U(n)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の有界閉集合である。特に $U(n)$ はコンパクトである。$SU(n)$ は $U(n)$ の閉集合なので、$SU(n)$ もコンパクトである。

問題 1.2.9. 命題 1.2.8 の証明中の $\langle\ ,\ \rangle$ は $M_n(\mathbb{C})$ の内積であることを確認せよ。

例 1.2.10. $M_1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ と同一視でき、

$$SU(1) = \{1\}, \quad U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

となる。2 次特殊ユニタリ群は

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$

となる。

問題 1.2.11. 例 1.2.10 の内容を確認せよ。

定理 1.2.12. 直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群は Lie 群になる。

注意 1.2.13. これらが一般線形群の閉集合になることは簡単にわかるので、定理 1.1.33 から結論を導くことはできるが、ここでは直接的に Lie 部分群になることを証明する。

証明　n 次実対称行列全体を $S_n(\mathbb{R})$ で表す。$S_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であり、

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2, \quad \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

が成り立つ。

$$\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})\ ;\ X \mapsto X^*X$$

によって写像 Φ を定める。$X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$(\Phi(X))^* = (X^*X)^* = X^*X = \Phi(X)$$

となり、$\Phi(X) \in S_n(\mathbb{R})$ となることがわかる。$\Phi(X)$ は X の成分の二次式で表されるため、C^∞ 級写像であることもわかる。$O(n) = \Phi^{-1}(1_n)$ である。陰関数定理を適用するため、Φ の 1_n における微分 $d\Phi_{1_n}$ を求める。$X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} d\Phi_{1_n}(X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi(1_n + sX) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX)^*(1_n + sX) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX^*)(1_n + sX) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX + sX^* + s^2X^*X) = X + X^*. \end{aligned}$$

線形写像

$$d\Phi_{1_n} : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})\ ;\ X \mapsto X + X^*$$

は全射になる。したがって、陰関数定理より 1_n の $M_n(\mathbb{R})$ における開近傍 U が存在して、

$$O(n) \cap U = \Phi^{-1}(1_n) \cap U$$

は $M_n(\mathbb{R})$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である。$V = O(n) \cap U$ とおくと、$M_n(\mathbb{R})$ の位相から定まる $O(n)$ の部分位相に関して V は $O(n)$ の単位元を含む開近傍になる。

$$O(n) = \bigcup_{g \in O(n)} gV$$

により、$O(n)$ 全体は $M_n(\mathbb{R})$ の位相から定まる部分位相に関して $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元部分多様体であることがわかる。さらに、行列の積は $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ から $M_n(\mathbb{R})$ への C^∞ 級写像であり、行列の逆行列を対応させる写像は $M_n(\mathbb{R})$ 内の正則行列全体からそれ自身への C^∞ 級写像になるので、その $O(n)$ への制限も C^∞ 級写像になる。したがって、$O(n)$ は Lie 群である。

$g \in O(n)$ に対して

$$1 = \det 1_n = \det(g^*g) = \det(g^*) \det g = (\det g)^2$$

となるので、$\det g = \pm 1$ が成り立つ。

$g, h \in SO(n)$ に対して

$$\det(gh) = \det g \det h = 1, \quad \det(g^{-1}) = (\det g)^{-1} = 1$$

だから、$gh, g^{-1} \in SO(n)$ となり、$SO(n)$ は $O(n)$ の部分群である。$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ とおくと、$\mathbb{R}_+$ は $\mathbb{R}$ の開集合である。$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は n 次正方行列の成

分の n 次多項式になり連続関数である。これらより $O(n) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+)$ は $O(n)$ の開集合になり、特に同じ次元の部分多様体になる。他方、

$$O(n) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+) = SO(n)$$

だから $SO(n)$ も $M_n(\mathbb{R})$ の部分多様体になる。$O(n)$ と同様、$SO(n)$ も Lie 群になる。

n 次 Hermite 行列全体を $H_n(\mathbb{C})$ で表す。$H_n(\mathbb{C})$ は $M_n(\mathbb{C})$ の実部分ベクトル空間であり、

$$\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2, \quad \dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{C}) = n(n-1) + n = n^2$$

が成り立つ。

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C}) \; ; \; X \mapsto X^*X$$

によって写像 Φ を定める。$X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$(\Phi(X))^* = (X^*X)^* = X^*X = \Phi(X)$$

となり、$\Phi(X) \in H_n(\mathbb{C})$ となることがわかる。$\Phi(X)$ は X の成分の二次式で表されるため、C^∞ 級写像であることもわかる。$U(n) = \Phi^{-1}(1_n)$ である。陰関数定理を適用するため、Φ の 1_n における微分 $d\Phi_{1_n}$ を求める。$X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned} d\Phi_{1_n}(X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi(1_n + sX) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX)^*(1_n + sX) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX^*)(1_n + sX) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (1_n + sX + sX^* + s^2X^*X) = X + X^*. \end{aligned}$$

線形写像

$$d\Phi_{1_n} : M_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C}) \; ; \; X \mapsto X + X^*$$

は全射になる。したがって、陰関数定理より 1_n の $M_n(\mathbb{C})$ における開近傍 U が存在して、

$$U(n) \cap U = \Phi^{-1}(1_n) \cap U$$

は $M_n(\mathbb{C})$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は

$$2n^2 - n^2 = n^2$$

である。$V = U(n) \cap U$ とおくと、$M_n(\mathbb{C})$ の位相から定まる $U(n)$ の部分位相に関して V は $U(n)$ の単位元を含む開近傍になる。

$$U(n) = \bigcup_{g \in U(n)} gV$$

により、$U(n)$ 全体は $M_n(\mathbb{C})$ の位相から定まる部分位相に関して n^2 次元部分多様体であることがわかる。さらに、行列の積は $M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})$ から $M_n(\mathbb{C})$ への C^∞ 級写像であり、行列の逆行列を対応させる写像は $M_n(\mathbb{C})$ 内の正則行列全体からそれ自身への C^∞ 級写像になるので、その $U(n)$ への制限も C^∞ 級写像になる。したがって、$U(n)$ は Lie 群である。

$g,h\in SU(n)$ に対して

$$\det(gh)=\det g\det h=1,\quad \det(g^{-1})=(\det g)^{-1}=1$$

だから、$gh, g^{-1}\in SU(n)$ となり、$SU(n)$ は $U(n)$ の部分群である。特に、行列の積に関して $SU(n)$ は群になる。

$g\in U(n)$ に対して

$$\begin{aligned}1&=\det 1_n=\det(g^*g)=\det(g^*)\det g=\det(\bar{g})\det(g)\\&=\overline{\det(g)}\det(g)=|\det(g)|^2\end{aligned}$$

となるので、$|\det(g)|=1$ が成り立つ。したがって、$\det$ は $U(n)$ から $U(1)$ への C^∞ 級写像になる。$SU(n)$ の定義より、$SU(n)=\det^{-1}(1)$ である。陰関数定理を適用するため、$U(n)$ の 1_n における接ベクトル空間 $T_{1_n}U(n)$ と $\det: U(n)\to U(1)$ の 1_n における微分写像 $d\det_{1_n}: T_{1_n}U(n)\to T_1U(1)$ を求める。$U(n)=\Phi^{-1}(1_n)$ なので、

$$T_{1_n}U(n)=\ker d\Phi_{1_n}=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X+X^*=0\}$$

となる。すなわち、$T_{1_n}U(n)$ は n 次交代 Hermite 行列の全体である。特に $n=1$ の場合は、$T_1U(1)=\mathbb{R}\sqrt{-1}$ となる。det の微分写像はまず $\det: M_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ とみなして考えることにする。$X\in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned}d\mathrm{det}_{1_n}(X)&=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\det(1_n+sX)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(1+s\,\mathrm{tr}X+(s\text{ の二次以上の項}))\\&=\mathrm{tr}X.\end{aligned}$$

線形写像 $d\det_{1_n}: M_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ を $T_{1_n}U(n)$ から $T_1U(1)$ への線形写像に制限すると、

$$d\mathrm{det}_{1_n}: T_{1_n}U(n)\to T_1U(1)\ ;\ X\mapsto \mathrm{tr}X$$

は全射になる。陰関数定理より 1_n の $U(n)$ における開近傍 U が存在して、

$$SU(n)\cap U=\det{}^{-1}(1)\cap U$$

は $U(n)$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は n^2-1 である。$V=SU(n)\cap U$ とおくと、$U(n)$ の位相から定まる $SU(n)$ の部分位相に関して V は $SU(n)$ の単位元を含む開近傍になる。

$$SU(n)=\bigcup_{g\in SU(n)} gV$$

により、$SU(n)$ 全体は $U(n)$ の位相から定まる部分位相に関して n^2-1 次元部分多様体であることがわかる。さらに、積は $U(n)\times U(n)$ から $U(n)$ への C^∞ 級写像であり、逆元を対応させる写像は $U(n)$ から $U(n)$ への C^∞ 級写像になるので、その $SU(n)$ への制限も C^∞ 級写像になる。したがって、$SU(n)$ は Lie 群である。

次の例で球面が多様体になることを示し、直交群や特殊直交群が球面の Lie 変換群になることを示す。

例 1.2.14. $\mathbb{R}^{n+1}$ に通常の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ とノルム $|\quad|$ を定める。**n 次元単位球面** S^n を

$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$$

によって定める。

$$\Phi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto |x|^2=\langle x,x\rangle$$

によって写像 Φ を定める。$\Phi(x)$ は x の成分の二次式で表されるため、C^∞ 級写像であることもわかる。$S^n=\Phi^{-1}(1)$ である。陰関数定理を利用するため、Φ の $x\in S^n$ における微分 $d\Phi_x$ を求める。$X\in\mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} d\Phi_x(X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\Phi(x+sX)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\langle x+sX,x+sX\rangle \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\langle x,x\rangle+2s\langle x,X\rangle+s^2\langle X,X\rangle)=2\langle x,X\rangle. \end{aligned}$$

線形写像

$$d\Phi_x:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}\ ;\ X\mapsto 2\langle x,X\rangle$$

は全射になる。したがって、陰関数定理より x における開近傍 U_x が存在して、

$$S^n\cap U_x=\Phi^{-1}(1)\cap U_x$$

は $\mathbb{R}^{n+1}$ の位相から定まる部分位相に関して部分多様体の構造を持ち、その次元は $(n+1)-1=n$ である。$V_x=S^n\cap U_x$ とおくと、S^n の開被覆 $\{V_x\mid x\in S^n\}$ は S^n の n 次元多様体構造を定める。

$\mathbb{R}^{n+1}$ の元を縦ベクトルで表し、直交行列を縦ベクトルにかけることから定まる写像

$$(*)\quad O(n+1)\times S^n\to S^n\ ;\ (g,x)\mapsto gx$$

により $O(n+1)$ は S^n の Lie 変換群になることを以下で示す。この写像は、行列と縦ベクトルに対してその積を対応させる写像

$$M_{n+1}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}\ ;\ (g,x)\mapsto gx$$

の制限である。この写像の像は行列と縦ベクトルの成分の二次式で表されるため、C^∞ 級であることがわかる。$g\in O(n+1)$, $x\in S^n$ に対して

$$\langle gx,gx\rangle=(gx)^*gx=x^*g^*gx=x^*1_{n+1}x=\langle x,x\rangle=1$$

となり、$gx \in S^n$ が成り立つ。写像 $(*)$ は g と x の成分の二次式になるので、C^∞ 級写像になる。さらに、$O(n+1)$ は S^n の Lie 変換群であることもわかる。

$O(n+1)$ は S^n に推移的に作用することを示す。第 1 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である縦ベクトルを $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で表す。任意の $x \in S^n$ に対して、x を $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ に延長する。$g_x = (x_1 \cdots x_{n+1}) \in O(n+1)$ とおくと、$g_x e_1 = x$ が成り立つ。さらに任意の $y \in S^n$ に対して $g_y e_1 = y$ となる $g_y \in O(n+1)$ をとると、$y = g_y e_1 = g_y(g_x)^{-1} x$ が成り立つ。$g_y(g_x)^{-1} \in O(n+1)$ だから、$O(n+1)$ は S^n に推移的に作用する。上の議論において、$\det g_x = 1$ ならば $g_x \in SO(n+1)$ である。$\det g_x = -1$ ならば $\tilde{g}_x = (x_1 \cdots x_n \ -x_{n+1})$ とすると、行列式の性質より

$$\det \tilde{g}_x = \det(x_1 \cdots x_n \ -x_{n+1}) = -\det(x_1 \cdots x_n \ x_{n+1}) = 1$$

となるので、$\tilde{g}_x \in SO(n+1)$ が成り立つ。さらに、$\tilde{g}_x e_1 = x_1 = x$ が成り立つ。これらより、任意の $x \in S^n$ に対して、ある $g_x \in SO(n+1)$ が存在して $g_x e_1 = x$ が成り立つ。したがって、$SO(n+1)$ も S^n に推移的に作用する。

定理 1.2.15. G を Lie 群、H を G の閉 Lie 部分群とする。H の剰余類の全体 G/H に多様体構造が存在して、G は G/H の Lie 変換群になり、その作用は推移的になる。

この定理の証明はここでは与えない。たとえば、Helgason [3] の Ch.II Theorem 4.2 には証明も書かれている。

定理 1.2.16. G を多様体 M の Lie 変換群とする。$x \in M$ に対して

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

は M の部分多様体になる。

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

とおくと、G_x は G の閉 Lie 部分群になる。写像 $G \to G(x)$; $g \mapsto gx$ は G/G_x から $G(x)$ への微分同型写像を誘導する。特に G の M への作用が推移的な場合は、任意の $x \in M$ に対して $G(x) = M$ となり、G/G_x は M に微分同型である。

この定理の証明にはいくつかの準備が必要になるので、G/G_x から $G(x)$ への全単射が定まることのみ示して他の主張の証明は省略する。たとえば、Helgason [3] の Ch.II Proposition 4.3 には証明も書かれている。

写像 $G \to G(x)$; $g \mapsto gx$ が誘導する G/G_x から $G(x)$ への写像は $gG_x \mapsto gx$ である。$g_1 G_x = g_2 G_x$ のとき、$g_2^{-1} g_1 G_x = G_x$ となり $g_2^{-1} g_1 \in G_x$ が成り立つ。よって $g_2^{-1} g_1 x = x$ となり $g_1 x = g_2 x$ を得る。これより、G/G_x から $G(x)$ への写像は well-defined である。この写像が全射でありことは定め方からわかる。最後にこの

写像が単射になることを示す。$g_1x = g_2x$ とすると $g_2^{-1}g_1x = x$ となり、$g_2^{-1}g_1 \in G_x$ が成り立つ。よって $g_2^{-1}g_1G_x = G_x$ となり $g_1G_x = g_2G_x$ である。したがって、G/G_x から $G(x)$ への写像は単射である。以上より、G/G_x から $G(x)$ への写像 $gG_x \mapsto gx$ は全単射であることがわかる。

例 1.2.17. 例 1.2.14 において、$e_{n+1} \in S^n$ をとると

$$(*) \quad O(n+1)_{e_{n+1}} = \{g \in O(n+1) \mid ge_{n+1} = e_{n+1}\} = \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| h \in O(n) \right\}$$

が成り立つ。なぜならば、$h \in O(n)$ に対して

$$\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_{n+1} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_{n+1}$$

となり、逆に $g \in O(n+1)$ が $ge_{n+1} = e_{n+1}$ を満たすと $g = [g_1 \dots g_n\, e_{n+1}]$ が成り立つ。ここで g_i は g の第 i 列を表す。$g_1, \dots, g_n, e_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底になるので、$g_1, \dots, g_n$ の第 $n+1$ 成分は 0 になる。したがって、

$$g = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (h \in O(n))$$

となる。以上で $(*)$ が成り立つことがわかる。$(*)$ より、$O(n+1)_{e_{n+1}} = O(n) \times \{1\} = O(n)$ と書くことにする。すると、上で述べたことより、S^n は $O(n+1)/O(n)$ と微分同型になる。

上の結果を使うと

$$\begin{aligned} SO(n+1)_{e_{n+1}} &= \{g \in SO(n+1) \mid ge_{n+1} = e_{n+1}\} \\ &= \{g \in O(n+1) \mid ge_{n+1} = e_{n+1}\} \cap SO(n+1) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| h \in O(n) \right\} \cap SO(n+1) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| h \in SO(n) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。$SO(n+1)_{e_{n+1}} = SO(n) \times \{1\} = SO(n)$ と書くことにすると、S^n は $SO(n+1)/SO(n)$ とも微分同型になる。

1.3 Riemann 多様体

定義 1.3.1. 多様体 M の各点 x の接ベクトル空間 T_xM に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定まっていて、M 上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して $\langle X, Y\rangle$ が M 上の C^∞ 級関数になるとき、

$\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **Riemann 計量**といい、Riemann 計量を持つ多様体を **Riemann 多様体**と呼ぶ。Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の微分同型写像 ϕ が

$$\langle d\phi_x(X), d\phi_x(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \quad (x \in M,\ X, Y \in T_xM)$$

を満たすとき、ϕ を M の**等長変換**と呼ぶ。

例 1.3.2. $\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体であり、各点の接ベクトル空間は自然に $\mathbb{R}^n$ 自身と同一視できる。これにより、$\mathbb{R}^n$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の Riemann 計量を定め、$\mathbb{R}^n$ は Riemann 多様体になる。

例 1.3.3. Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の部分多様体 N は、各点 $x \in N$ の接ベクトル空間 T_xN を T_xM の部分ベクトル空間とみなすと、M の Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を T_xN に制限することにより N も Riemann 多様体になる。この N を **Riemann 部分多様体**という。特に $\mathbb{R}^n$ の部分多様体は Riemann 部分多様体になる。$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ 内の曲線や曲面は、$\mathbb{R}^n$ の Riemann 部分多様体の例である。

例 1.3.4. $\mathbb{R}^{n+1}$ の通常の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の Riemann 計量とみなす。例 1.2.14 において、S^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体であることを示した。例 1.2.14 で定めた $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ によって $S^n = \Phi^{-1}(1)$ となり、$x \in S^n$ に対して

$$T_xS^n = \ker d\Phi_x = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, X\rangle = 0\}$$

が成り立つ。$\mathbb{R}^{n+1}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を T_xS^n に制限することにより、S^n に Riemann 計量が定まる。これが S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の Riemann 部分多様体とみなした Riemann 計量である。今後、S^n の Riemann 計量は常にこの計量を考える。

$O(n+1)$ の元の $\mathbb{R}^{n+1}$ への作用は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つので、S^n の Riemann 計量も保つ。したがって、$O(n+1)$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ への作用と S^n への作用はどちらも等長変換である。

定義 1.3.5. M を Riemann 多様体とし、$c : [a, b] \to M$ を C^∞ 級曲線とする。$c'(t) \neq 0$ が任意の $a \leq t \leq b$ について成り立つことを仮定する。

$$L(c) = \int_a^b \left|\frac{dc}{dt}(t)\right| dt$$

によって c の**長さ** $L(c)$ を定める。ただし、被積分関数の絶対値の記号は Riemann 計量から定まるノルムである。

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{dc}{dt}(t)\right| dt$$

によって t の関数 $s(t)$ を定めると、$s(t)$ の t による微分は

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left|\frac{dc}{dt}(t)\right| > 0$$

となり、逆関数定理より $s(t)$ の逆関数が存在する。それを $t(s)$ で表すと、$c(t(s))$ によって s を c のパラメータとみなせる。s を c の**弧長パラメータ**と呼ぶ。区間 $[a,b]$ で弧長パラメータによって定義された C^∞ 級曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ が、局所的に二点を結ぶ最短曲線になっているとき、γ を**測地線**と呼ぶ。M の任意の点 x と $X \in T_xM$ に対してある $\epsilon > 0$ と

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : [0,\epsilon] \to M$ が一意的に存在することが知られている。さらに γ の定義域が 1 を含むとき、$\mathrm{Exp}_x(X) = \gamma(1)$ によって Exp_x を定めると、Exp_x は T_xM の原点 0 を含む開集合 O_x で定義された C^∞ 級写像 $\mathrm{Exp}_x : O_x \to M$ が定まる。Exp_x を M の x における**指数写像**と呼ぶ。上記の測地線 $\gamma(t)$ は $\mathrm{Exp}_x(tX)$ と表せる。

定義 1.3.6. Riemann 多様体の部分多様体の任意の測地線が、外の Riemann 多様体の測地線にもなる部分多様体を**全測地的部分多様体**という。

定義 1.3.7. 集合 X と写像 $f : X \to X$ に対して、$f(x) = x$ を満たす X の点 x を f の**固定点**と呼び、f の X における**固定点集合** $F(f,X)$ を

$$F(f,X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

によって定める。

命題 1.3.8 ([6] Ch.VII Ex 8.1)**.** M を連結 Riemann 多様体とし、$f : M \to M$ を M の等長変換とする。このとき、$F(f,M)$ の各連結成分は M の全測地的部分多様体になる。

証明の概略 $F(f,M)$ の点 x をとる。T_xM における 0 のある開近傍 O_x が存在して、$\mathrm{Exp}_x(O_x)$ は M における x の開近傍になり、任意の $y \in \mathrm{Exp}_x(O_x)$ に対して $\mathrm{Exp}_x(O_x)$ 内に x と y を結ぶ測地線がただ一つ存在することが知られている。df_x は T_xM の線形変換になり、f は M の等長変換なので、

$$t \mapsto f(\mathrm{Exp}_x(tX)), \quad t \mapsto \mathrm{Exp}_x(t df_x(X))$$

はどちらも $t = 0$ で x を通り速度ベクトルが $df_x(X)$ になる測地線である。測地線の一意性より $f(\mathrm{Exp}_x(tX)) = \mathrm{Exp}_x(t df_x(X))$ となり、特に

$$f(\mathrm{Exp}_x(X)) = \mathrm{Exp}_x(df_x(X)) \quad (X \in O_x)$$

が成り立つ。さらに、$\mathrm{Exp}_x(\{X \in O_x \mid df_x(X) = X\}) \subset F(f,M)$ が成り立つ。$y \in \mathrm{Exp}_x(O_x) \cap F(f,M)$ に対して $y = \mathrm{Exp}_x(Y)$ となる $Y \in O_x$ が存在する。$\mathrm{Exp}_x(tY)(0 \leq t \leq 1)$ は x と y を結ぶ測地線である。$\mathrm{Exp}_x(t df_x(Y))(0 \leq t \leq 1)$ は

x と $\mathrm{Exp}_x(df_x(Y)) = f(\mathrm{Exp}_x(Y)) = f(y) = y$ を結ぶ測地線になる。測地線の一意性より $\mathrm{Exp}_x(tdf_x(Y)) = \mathrm{Exp}_x(tY)$ が $0 \leq t \leq 1$ において成り立ち、$df_x(Y) = Y$ を得る。以上より

$$\mathrm{Exp}_x(O_x) \cap F(f, M) = \mathrm{Exp}_x(\{X \in O_x \mid df_x(X) = X\})$$

を得る。特に、$\mathrm{Exp}_x(O_x) \cap F(f, M)$ は M の部分多様体になる。さらに、上の等式は $F(f, M)$ の任意の点 x について成り立つので、$F(f, M)$ の各連結成分は全測地的部分多様体になる。

区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ と写像 $c : [a, b] \to M$ があり、各 i について $c|_{[x_{i-1}, x_i]} : [x_{i-1}, x_i] \to M$ が C^∞ 級曲線であるとき、c を**区分的に滑らかな曲線**と呼ぶ。区分的に滑らかな曲線に対しても

$$L(c) = \sum_{i=1}^{k} L(c|_{[x_{i-1}, x_i]})$$

によって c の長さ $L(c)$ が定まる。

定理 1.3.9. M を連結 Riemann 多様体とする。$x, y \in M$ に対して

$$d(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ は } x, y \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線}\}$$

によって $d : M \times M \to \mathbb{R}$ を定めると、(M, d) は距離空間になる。さらに、距離 d が定める M の位相は M の多様体構造を定める位相と一致する。

定義 1.3.10. 連結 Riemann 多様体 M の任意の点 x と $X \in T_xM$ に対して、

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ が存在するとき、M を**測地的完備**という。

測地的完備 Riemann 多様体 M の各点 $x \in M$ における指数写像 Exp_x の定義域は T_xM 全体になる。

以下は Riemann 多様体の基本事項の紹介である。

定理 1.3.11. 連結 Riemann 多様体 M に対して次は同値になる。

(1) M は測地的完備である。

(2) M は定理 1.3.9 の距離に関して距離空間として完備である。

(3) M の有界閉集合はコンパクトである。

定義 1.3.12. 定理 1.3.11 の条件を満たす連結 Riemann 多様体を**完備 Riemann 多様体**という。

定理 1.3.13 (Hopf-Rinow)**.** 完備 Riemann 多様体の任意の二点は最短測地線で結べる。

定理 1.3.14. 完備 Riemann 多様体 M 内の一点 x と閉部分多様体 N に対して

$$d(x, N) = \inf\{d(x, y) \mid y \in N\}$$

によって x と N の距離 $d(x, N)$ を定める。このとき、$\gamma(0) = x$ と $\gamma(1) \in N$ を満たし、長さが $L(\gamma) = d(x, N)$ である測地線 $\gamma : [0, 1] \to M$ が存在する。さらに γ の $\gamma(1)$ における速度ベクトル $\gamma'(1)$ は $T_{\gamma(1)}N$ に直交する。

1.4 Riemann 等質空間

多様体のある構造を保つ変換の全体は、一般には有限次元の多様体構造を持つとは限らないが、Riemann 計量を保つ変換の全体は有限次元の Lie 群の構造を持つことが知られている。

定理 1.4.1. Riemann 多様体 M の等長変換の全体の成す群を $I(M)$ で表すと、$I(M)$ は M の Lie 変換群になる。

定義 1.4.2. Riemann 多様体 M の等長変換の全体 $I(M)$ が M に推移的に作用するとき、M を **Riemann 等質空間**という。

G を Lie 群とし、その単位元を e で表す。定義 1.1.5 で定めた左移動 L_g と右移動 R_g $(g \in G)$ について

$$\begin{aligned}
&L_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = L_g \circ L_h(x) \quad \text{すなわち} \quad L_{gh} = L_g \circ L_h, \\
&R_{gh}(x) = x(gh)^{-1} = x(h^{-1}g^{-1}) = (xh^{-1})g^{-1} = R_g \circ R_h(x) \\
&\text{すなわち} \quad R_{gh} = R_g \circ R_h
\end{aligned}$$

が成り立ち、これらは G の G への作用になる。さらに、どちらの作用に関しても G は G に推移的に作用する。すべての左移動が等長変換になるような G の Riemann 計量を**左不変 Riemann 計量**といい、すべての右移動が等長変換になるような G の Riemann 計量を**右不変 Riemann 計量**という。G 上の左不変 Riemann 計量と右不変 Riemann 計量はそれぞれ G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積と一対一に対応することが次のようにわかる。まず、G 上の左不変 Riemann 計量と右不変 Riemann 計量はそれぞれ左 (右) 移動の微分写像によって T_eG の内積と一対一に対応することがわかる。T_eG の内積と $\mathfrak{g}$ の内積との一対一対応は、定理 1.1.11 の $\alpha_G : \mathfrak{g} \to T_eG$ を通して得られる。$\mathfrak{g}$ には内積が存在するので、G は左不変 Riemann 計量も右不変 Riemann 計量も持つことがわかる。いずれにしても、Lie 群は Riemann 等質空間になる。

さらに、

$$L_g \circ R_h(x) = gxh^{-1} \qquad ((g, h) \in G \times G,\ x \in G)$$

によって、$G \times G$ も G に推移的に作用する。この作用がすべて等長変換になるような G の Riemann 計量を**両側不変 Riemann 計量**という。左不変 Riemann 計量や右不変 Riemann 計量と異なり、両側不変 Riemann 計量はいつでも存在するとは限らない。そこで、両側不変 Riemann 計量が存在するための条件を考えてみよう。そのために若干の準備をしておく。一般に群 G の元 g に対して

$$I_g(x) = gxg^{-1} \quad (g, x \in G)$$

によって G の自己同型写像 I_g を定める。これは g による**共役作用**であり、**内部自己同型写像**ともいう。さらに G が Lie 群のとき、I_g の微分 $dI_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は、系 1.1.20 より、Lie 環の自己同型写像になる。特に、$dI_g \in GL(\mathfrak{g})$ である。

$$\mathrm{Ad}_G(g) = dI_g \quad (g \in G)$$

によって $\mathrm{Ad}_G(g) \in GL(\mathfrak{g})$ を定める。任意の $g, h, x \in G$ に対して、

$$I_{gh}(x) = ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = I_g \circ I_h(x)$$

が成り立つので、$I_{gh} = I_g \circ I_h$ である。命題 1.1.18 より

$$\mathrm{Ad}_G(gh) = dI_{gh} = d(I_g \circ I_h) = dI_g \circ dI_h = \mathrm{Ad}_G(g)\mathrm{Ad}_G(h)$$

となる。よって、写像 $\mathrm{Ad}_G : G \to GL(\mathfrak{g})$ は群の準同型写像である。さらにこの写像は C^∞ 級写像であることが知られている。したがって、$\mathrm{Ad}_G : G \to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の準同型写像である。Lie 群から一般線形群への Lie 群の準同型写像は、その Lie 群の**表現**と呼ばれる。$\mathrm{Ad}_G : G \to GL(\mathfrak{g})$ は G の**随伴表現**と呼ばれている。

問題 1.4.3. $GL(n, \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$ の随伴表現を具体的に記述せよ。

随伴表現を使って Lie 群に両側不変 Riemann 計量が存在するための条件を記述する。

Lie 群 G に両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在すると仮定する。$\langle\ ,\ \rangle$ が左不変 Riemann 計量であることから、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の内積を定める。随伴表現の定め方より、$\mathfrak{g}$ のこの内積は随伴表現の作用で不変になる。$GL(\mathfrak{g})$ の部分群 $O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を

$$O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle) = \{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid \langle g(X), g(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle\ (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

によって定めると、$\mathrm{Ad}_G(G) \subset O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ が成り立つ。$\mathfrak{g}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底を使って $O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ を行列表現すると、$O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ は $O(\dim \mathfrak{g})$ と Lie 群として同型になることがわかる。命題 1.2.2 より直交群はコンパクトである。したがって、$O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ もコンパクトである。$\mathrm{Ad}_G(G) \subset O(\mathfrak{g}; \langle\ ,\ \rangle)$ より、$\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の位相に関する $\mathrm{Ad}_G(G)$ の閉包 $\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ もコンパクトになる。

逆に $\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ がコンパクトであると仮定する。このとき、$\mathfrak{g}$ には $\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ の作用で不変な内積が存在することが知られている。これはコンパクト位相群における

Haar 測度の存在から導かれるが、ここではその詳細は省略する。その代わりに有限群の場合に作用について不変な内積が存在することを説明しておく。H を有限群とし、$\rho : H \to GL(V)$ を群の準同型写像とする。$\langle\ ,\ \rangle$ を V の任意の内積とする。

$$(X, Y) = \sum_{h \in H} \langle \rho(h)X, \rho(h)Y \rangle \qquad (X, Y \in V)$$

によって $(\ ,\ )$ を定めると、$(\ ,\ )$ も V の内積になる。$h' \in H$ に対して

$$\begin{aligned}(\rho(h')X, \rho(h')Y) &= \sum_{h \in H} \langle \rho(h)\rho(h')X, \rho(h)\rho(h')Y \rangle \\ &= \sum_{h \in H} \langle \rho(hh')X, \rho(hh')Y \rangle = \sum_{h \in H} \langle \rho(h)X, \rho(h)Y \rangle \\ &= (X, Y).\end{aligned}$$

これより、$(\ ,\ )$ は H の作用に関して不変になる。有限群の場合の和 $\displaystyle\sum_{h \in H}$ をコンパクト Lie 群の場合には積分 $\displaystyle\int_G$ にして G の作用に関して不変な内積を定める。この積分操作を可能にするのが Haar 測度の存在である。$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{g}$ 上の $\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ の作用で不変な内積とする。もちろん、$\mathrm{Ad}_G(G)$ の作用でも不変になる。この内積は G の左不変 Riemann 計量を定める。この左不変 Riemann 計量が右不変 Riemann 計量にもなることを以下で示す。$g, h \in G$ と $X, Y \in T_gG$ をとる。

$$\begin{aligned}&\langle (dR_h)_g X, (dR_h)_g Y \rangle_{gh^{-1}} \\ &= \langle d(L_{gh^{-1}}^{-1})_{gh^{-1}} \circ (dR_h)_g X, d(L_{gh^{-1}}^{-1})_{gh^{-1}} \circ (dR_h)_g Y \rangle \\ &= \langle d(L_{gh^{-1}}^{-1} \circ R_h)_g X, d(L_{gh^{-1}}^{-1} \circ R_h)_g Y \rangle \\ &= \langle d((L_g \circ L_{h^{-1}})^{-1} \circ R_h)_g X, d((L_g \circ L_{h^{-1}})^{-1} \circ R_h)_g Y \rangle \\ &= \langle d(L_h \circ L_g^{-1} \circ R_h)_g X, d(L_h \circ L_g^{-1} \circ R_h)_g Y \rangle \\ &= \langle d(L_h \circ R_h \circ L_g^{-1})_g X, d(L_h \circ R_h \circ L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle d(L_h \circ R_h)_e \circ d(L_g^{-1})_g X, d(L_h \circ R_h)_e \circ d(L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle (dI_h)_e \circ d(L_g^{-1})_g X, (dI_h)_e \circ d(L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle \alpha_G \circ \mathrm{Ad}_G(h) \circ \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g X, \alpha_G \circ \mathrm{Ad}_G(h) \circ \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}_G(h) \circ \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g X, \mathrm{Ad}_G(h) \circ \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g X, \alpha_G^{-1} \circ d(L_g^{-1})_g Y \rangle = \langle d(L_g^{-1})_g X, d(L_g^{-1})_g Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle_g\end{aligned}$$

となり、この左不変 Riemann 計量は右不変 Riemann 計量にもなる。したがって、両側不変 Riemann 計量である。以上で Lie 群 G が両側不変 Riemann 計量を持つための必要十分条件は、$\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ がコンパクトになることがわかった。特に Lie 群

G がコンパクトならば、$\mathrm{Ad}_G(G)$ はコンパクトなので、G は両側不変 Riemann 計量を持つ。これらを定理としてまとめておく。

定理 1.4.4. Lie 群 G が両側不変 Riemann 計量を持つための必要十分条件は、$\overline{\mathrm{Ad}_G(G)}$ がコンパクトになることである。特に Lie 群 G がコンパクトならば、G は両側不変 Riemann 計量を持つ。

注意 1.4.5. 定理 1.4.4 の条件は、さらに、$\mathrm{Ad}_G(G)$ がコンパクトになることが必要十分である。これはコンパクト Lie 群の構造のある性質からわかるが、ここでは深入りしないことにする。

定理 1.2.12 で Lie 群になることを示した直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群の両側不変 Riemann 計量を次の例で具体的に記述する。これらの Lie 群はコンパクトなので、定理 1.4.4 より両側不変 Riemann 計量を持つことはすでにわかっているが、具体的な表示が役に立つこともある。

例 1.4.6. 直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群はいずれもコンパクトである。定理 1.4.4 より、直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群は両側不変 Riemann 計量を持つ。この Riemann 計量は随伴表現の作用で不変な Lie 環の内積によって一意的に定まる。以下で、直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群それぞれの場合に、Lie 環、随伴表現の作用、随伴表現の作用で不変な内積を具体的に記述する。定理 1.1.14 より、一般線形群の閉 Lie 部分群の Lie 環は、単位元における接ベクトル空間とみなすことができる。

直交群 $O(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{o}(n)$ で表す。$O(n)$ は定理 1.2.12 の証明で示したことより、C^∞ 級写像

$$\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})\ ;\ X \mapsto X^*X$$

による 1_n の逆像 $\Phi^{-1}(1_n)$ に一致している。定理 1.2.12 の証明で示した等式

$$d\Phi_{1_n}(X) = X + X^* \qquad (X \in M_n(\mathbb{R}))$$

に注意しておく。これらより、$O(n)$ の 1_n における接ベクトル空間は

$$\mathfrak{o}(n) = \ker d\Phi_{1_n} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + X^* = 0\}$$

となり、n 次交代行列全体になる。次に $O(n)$ の随伴表現による $\mathfrak{o}(n)$ への作用を記述する。$g, x \in O(n)$ と $X \in T_xO(n)$ に対して 0 の近傍で定義された $O(n)$ の曲線 $c(t)$ で $c(0) = x$ と $c'(0) = X$ を満たすものをとると、

$$(dL_g)_x(X) = \frac{d}{dt}L_g(c(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}gc(t)\bigg|_{t=0} = g\,\frac{d}{dt}c(t)\bigg|_{t=0} = gX$$

が成り立つ。同様に

$$(dR_g)_x(X) = \frac{d}{dt}R_g(c(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}c(t)g^{-1}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}c(t)\bigg|_{t=0} g^{-1} = Xg^{-1}$$

が成り立つ。したがって、

$$\mathrm{Ad}_{O(n)}(g)(X) = d(L_g \circ R_g)_e(X) = d(L_g)_{g^{-1}} \circ d(R_g)_e(X) = gXg^{-1}$$

となる。命題 1.2.2 の証明中に定めた $M_n(\mathbb{R})$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{o}(n)$ に制限したものを考える。$g \in O(n)$ と $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}_{O(n)}(g)X, \mathrm{Ad}_{O(n)}(g)Y\rangle &= \langle gXg^{-1}, gYg^{-1}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}((gXg^{-1})^*gYg^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(gX^*g^{-1}gYg^{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^*Y) \\ &= \langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ。これより、$\mathrm{Ad}_{O(n)}(O(n)) \subset O(\mathfrak{o}(n); \langle\ ,\ \rangle)$ がわかる。$O(\mathfrak{o}(n); \langle\ ,\ \rangle)$ はコンパクトなので、定理 1.4.4 より $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる $O(n)$ 上の左不変 Riemann 計量は両側不変 Riemann 計量である。

上で定めた $O(n)$ の両側不変 Riemann 計量を $SO(n)$ に制限すると、$SO(n)$ の両側不変 Riemann 計量になる。

特殊直交群 $SO(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{so}(n)$ で表す。$O(n)$ の元の行列式は ± 1 である。$O(n)$ の 1_n の連結な近傍における行列式の値は 1 になり、1_n の連結な近傍は $SO(n)$ に含まれる。よって、$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ が成り立つ。

ユニタリ群 $U(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{u}(n)$ で表す。$U(n)$ は定理 1.2.12 の証明で示したことより、C^∞ 級写像

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C})\ ;\ X \mapsto X^*X$$

による 1_n の逆像 $\Phi^{-1}(1_n)$ に一致している。定理 1.2.12 の証明で示した等式

$$d\Phi_{1_n}(X) = X + X^* \qquad (X \in M_n(\mathbb{C}))$$

に注意しておく。これらより、$U(n)$ の 1_n における接ベクトル空間は

$$\mathfrak{u}(n) = \ker d\Phi_{1_n} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

となり、n 次交代 Hermite 行列全体になる。次に $U(n)$ の随伴表現による $\mathfrak{u}(n)$ への作用を記述する。$g, x \in U(n)$ と $X \in T_xU(n)$ に対して $O(n)$ の場合と同様の計算によって

$$(dL_g)_x(X) = gX, \quad (dR_g)_x(X) = Xg^{-1}, \quad \mathrm{Ad}_{U(n)}(g)(X) = gXg^{-1}$$

が成り立つことがわかる。命題 1.2.8 の証明中に定めた $M_n(\mathbb{C})$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{u}(n)$ に制限したものを考える。$g \in U(n)$ と $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}_{U(n)}(g)X, \mathrm{Ad}_{U(n)}(g)Y\rangle = \langle gXg^{-1}, gYg^{-1}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Retr}((gXg^{-1})^*gYg^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(gX^*g^{-1}gYg^{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(X^*Y) \\
&= \langle X, Y\rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これより、$\mathrm{Ad}_{U(n)}(U(n)) \subset O(\mathfrak{u}(n); \langle\ ,\ \rangle)$ がわかる。$O(\mathfrak{u}(n); \langle\ ,\ \rangle)$ はコンパクトなので、定理 1.4.4 より $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる $U(n)$ 上の左不変 Riemann 計量は両側不変 Riemann 計量である。

特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の Lie 環を $\mathfrak{su}(n)$ で表す。$SU(n)$ は定理 1.2.12 の証明で示したことより、C^∞ 級写像

$$
\det : U(n) \to U(1)\ ;\ g \mapsto \det(g)
$$

による 1 の逆像 $\det^{-1}(1)$ に一致している。定理 1.2.12 の証明で示した等式

$$
d\det_{1_n}(X) = \mathrm{tr}X \qquad (X \in \mathfrak{u}(n))
$$

に注意しておく。これらより、$SU(n)$ の 1_n における接ベクトル空間は

$$
\mathfrak{su}(n) = \ker d\det_{1_n} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0,\ \mathrm{tr}X = 0\}
$$

となり、トレースが 0 の n 次交代 Hermite 行列全体になる。$SU(n)$ の随伴表現による $\mathfrak{su}(n)$ への作用は $U(n)$ の随伴表現による $\mathfrak{u}(n)$ への作用の制限に一致する。これより、上で定めた $U(n)$ の両側不変 Riemann 計量を $SU(n)$ に制限すると、$SU(n)$ 上の両側不変 Riemann 計量になる。

定義 1.4.7. G/H を Riemann 計量を持つ等質空間とする。G の G/H への自然な作用が等長的になっているとき、その Riemann 計量を ***G* 不変**という。

命題 1.4.8. G を Lie 群とし、H を G の閉 Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。

系 1.4.9. G を Lie 群とし、H を G のコンパクト Lie 部分群とする。G と H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ で表す。このとき、$\mathfrak{g}$ の直和分解

$$
\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}
$$

が存在し、

$$
\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \quad \mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},
$$

を満たす。等質空間 G/H の G 不変 Riemann 計量の全体と、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積の全体は、一対一に対応する。さらに、$\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(H)$ 不変な内積は存在し、したがって、G/H の G 不変 Riemann 計量も存在する。

1.5　実射影空間

定義 1.5.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の 1 次元部分空間全体を $\mathbb{R}P^n$ で表し、n 次元実射影空間と呼ぶ。

命題 1.5.2. $\mathbb{R}P^n$ は n 次元多様体になる。

証明　$x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ に対して x の生成する $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の 1 次元部分空間を $p(x) \in \mathbb{R}P^n$ で表すと、写像 $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ が定まる。p は全射になることがわかる。この写像 p により $\mathbb{R}P^n$ に $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ からの商位相を定める。すなわち、

$$\{O \subset \mathbb{R}P^n \mid p^{-1}(O) \text{ は } \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ の開集合 }\}$$

を $\mathbb{R}P^n$ の開集合系として定める。すると、この位相は Hausdorff の条件を満たすことがわかる。$1 \leq i \leq n+1$ に対して

$$U_i = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}, \quad V_i = p(U_i)$$

と定めると、$\{V_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ は $\mathbb{R}P^n$ の開被覆になる。

$$\phi_i : V_i \to \mathbb{R}^n \ ; \ p(x) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

によって写像 ϕ_i を定めると、ϕ_i は well-defined になる。ただし、$\hat{}$ は $\cdot$ を除くことを意味する。さらに $\{(V_i, \phi_i)\}_i$ は $\mathbb{R}P^n$ の n 次元多様体構造を定める。

別証明　写像 p の S^n への制限は 2 対 1 の写像であり、S^n の開半球面

$$S^n_x = \{y \in S^n \mid \langle y, x \rangle > 0\} \quad (x \in S^n)$$

に制限すると $p : S^n_x \to p(S^n_x)$ は全単射である。これにより、S^n の n 次元多様体構造から $\mathbb{R}P^n$ の n 次元多様体構造が定まり、$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ は二重被覆写像になる。

定理 1.5.3. n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ には二重被覆写像 $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ から Riemann 計量が定まり、$\mathbb{R}P^n$ は Riemann 等質空間になる。

証明　二重被覆写像 $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ の被覆変換は

$$a : S^n \to S^n \ ; \ x \mapsto -x$$

であり、これは S^n の等長変換である。$p \circ a = p$ だから、各 $x \in S^n$ について

$$dp_x : T_x S^n \mapsto T_{p(x)} \mathbb{R}P^n$$

が等長的線形写像になるように $T_{p(x)}\mathbb{R}P^n$ に内積を定めることができる。これにより、$\mathbb{R}P^n$ は Riemann 多様体になる。

$O(n+1)$ の S^n への作用は $\mathbb{R}^{n+1}$ への線形作用の制限だから、a の作用と可換になる。したがって、$O(n+1)$ の S^n への作用は、$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ を通して $O(n+1)$ の $\mathbb{R}P^n$ への作用を定め、その作用は等長的になる。さらに、例 1.2.14 より $O(n+1)$ は S^n に推移的に作用するので、$O(n+1)$ は $\mathbb{R}P^n$ にも推移的に作用し、$\mathbb{R}P^n$ は Riemann 等質空間であることがわかる。

1.6　複素射影空間

定義 1.6.1. $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素1次元部分空間全体を $\mathbb{C}P^n$ で表し、n 次元複素射影空間と呼ぶ。

命題 1.6.2. $\mathbb{C}P^n$ は n 次元複素多様体になる。

証明　$x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ に対して x の生成する $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の1次元複素部分空間を $p(x) \in \mathbb{C}P^n$ で表すと、写像 $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ が定まる。p は全射になることがわかる。この写像 p により $\mathbb{C}P^n$ に $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ からの商位相を定める。すると、この位相は Hausdorff の条件を満たすことがわかる。$1 \le i \le n+1$ に対して

$$U_i = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}, \quad V_i = p(U_i)$$

と定めると、$\{V_i \mid 1 \le i \le n+1\}$ は $\mathbb{C}P^n$ の開被覆になる。

$$\phi_i : V_i \to \mathbb{C}^n \ ; \ p(x) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

によって写像 ϕ_i を定めると、ϕ_i は well-defined になる。さらに $\{(V_i, \phi_i)\}_i$ は $\mathbb{C}P^n$ の n 次元複素多様体構造を定める。

補題 1.6.3. ユニタリ群 $U(n+1)$ は

$$S^{2n+1} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

に推移的かつ等長的に作用する。ただし、$x = (x_i) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

である。これは $\mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbb{R}^{2n+2}$ と同一視したときの $\mathbb{R}^{2n+2}$ の長さに一致している。

証明　$U(n+1)$ が S^{2n+1} に推移的に作用することは、例1.2.14で示した $O(n+1)$ が S^n に推移的に作用することの証明と同様に以下のようにできる。任意の $x \in S^{2n+1}$ に対して、x を $\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底 $x = x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ に延長する。$g_x = (x_1 \cdots x_{n+1}) \in U(n+1)$ とおくと、$g_x e_1 = x$ が成り立つ。さらに任意の $y \in S^{2n+1}$ に対して $g_y e_1 = y$ となる $g_y \in U(n+1)$ をとると、$y = g_y e_1 = g_y (g_x)^{-1} x$ が成り立つ。$g_y (g_x)^{-1} \in U(n+1)$ だから、$U(n+1)$ は S^{2n+1} に推移的に作用する。

$U(n+1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用は、$\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 内積を不変に保ち、標準的 Hermite 内積の実部は $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ の標準的実内積に一致する。よって、$U(n+1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用は、$\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的実内積も不変に保つ。すなわち、$U(n+1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用は等長変換になり、$U(n+1)$ の S^{2n+1} への作用も等長変換になる。

定理 1.6.4. 写像 $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ は複素正則写像になり、C^∞ 級写像になる。その S^{2n+1} への制限も C^∞ 級写像になる。これにより $\mathbb{C}P^n$ に Riemann 計量が定まり、$\mathbb{C}P^n$ は Riemann 等質空間になる。

証明 $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ が複素正則写像になることは、p の定め方と $\mathbb{C}P^n$ の座標系の定め方からわかる。特に、C^∞ 級写像になる。$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ の部分多様体 S^{2n+1} に p を制限しても C^∞ 級写像である。$\mathbb{C}P^n$ の元は S^{2n+1} のある元によって生成されるので、$p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ は全射である。$x \in S^{2n+1}$ に対して

$$p^{-1}(p(x)) = S^{2n+1} \cap \mathbb{C}x = U(1)x$$

が成り立つ。さらに $T_x S^{2n+1} = (\mathbb{C}x)^\perp \oplus \mathbb{R}\sqrt{-1}x$ が成り立ち、$\ker dp_x = \mathbb{R}\sqrt{-1}x$ となる。$dp_x : (\mathbb{C}x)^\perp \to T_{p(x)}\mathbb{C}P^n$ は線形同型写像になり、これによって $(\mathbb{C}x)^\perp$ の内積を $T_{p(x)}\mathbb{C}P^n$ に導入する。任意の $y \in p^{-1}(p(x))$ に対してある $z \in U(1)$ が存在し $y = zx$ となる。z によるスカラー倍は等長的になるため、線形同型写像 $dp_y : (\mathbb{C}y)^\perp \to T_{p(y)}\mathbb{C}P^n = T_{p(x)}\mathbb{C}P^n$ によって導入する内積も x に対して定めた内積と同じになる。したがって、$\mathbb{C}P^n$ の各点の接ベクトル空間に内積が定まり、$\mathbb{C}P^n$ は Riemann 多様体になる。S^{2n+1} の Riemann 計量から $\mathbb{C}P^n$ の Riemann 計量が定まっているので、$U(n+1)$ の $\mathbb{C}P^n$ への自然な作用は等長変換になる。したがって、$\mathbb{C}P^n$ は Riemann 等質空間である。

1.7 Grassmann 多様体

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかに等しいものとする。

定義 1.7.1. r, n を自然数とする。$r+n$ 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{r+n}$ 内の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ で表し、$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合に**実 Grassmann 多様体**、$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合に**複素 Grassmann 多様体**と呼ぶ。特に $r = 1$ の場合、$G_1(\mathbb{K}^{1+n}) = \mathbb{K}P^n$ である。

命題 1.7.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に応じて $d = 1, 2$ とすると、$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は drn 次元多様体になる。

証明 $\mathbb{K}^{r+n}$ に $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合、標準的内積を入れ、$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合、標準的 Hermite 内積を入れる。これによって $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の元 V に対して $V^\perp$ を考えることができ、

$$\phi_V : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to G_r(\mathbb{K}^{r+n})\ ;\ f \mapsto \mathrm{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\}$$

とおくと、$\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定めることを以下で示す。これがわかれば、Grassmann 多様体の次元は

$$\dim G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) = drn$$

となる。

$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$O_V = \{U \in G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \mid U \cap V^\perp = \{0\}\}$$

とおくと $\phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) = O_V$ が成り立つことを示す。$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ に対して $\phi_V(f) \cap V^\perp$ の任意の元は $v \in V$ によって $v + f(v)$ と表すことができ、$v + f(v) \in V^\perp$ である。$f(v) \in V^\perp$ なので $v \in V^\perp$ となり、$v = 0$ が成り立つ。これより、$f(v) = 0$ すなわち $v + f(v) = 0$ が成り立つ。以上より $\phi_V(f) \cap V^\perp = \{0\}$ となり、

$$\phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \subset O_V$$

を得る。逆に $U \cap V^\perp = \{0\}$ を満たす $U \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ をとる。$\mathbb{K}^{r+n}$ から V への直交射影 P_V は $\mathbb{K}$ 線形写像であり、その核は $V^\perp$ だから、P_V の U への制限 $P_V|_U : U \to V$ の核は $U \cap V^\perp = \{0\}$ となって $P_V|_U$ は単射になる。U と V は次元が等しいので $P_V|_U$ は $\mathbb{K}$ 線形同型写像になる。そこでその逆写像を $g : V \to U$ で表す。v に対して $g(v) \in U$ の V への直交射影が v になるので、$g(v) - v \in V^\perp$ が成り立つ。そこで $f(v) = g(v) - v$ とおくと、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ となり、

$$\phi_V(f) = \mathrm{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\} = \{g(v) \mid v \in V\} = U.$$

したがって、

$$\phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)) \supset O_V$$

となり、$O_V = \phi_V(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp))$ が成り立つことがわかる。

上で示したことより、

$$\phi_V : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to O_V$$

は全射になる。さらに ϕ_V が単射になることを以下で示す。$f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ に対して

$$\phi_V(f_1) = \phi_V(f_2)$$

と仮定する。定義より

$$\{v + f_1(v) \mid v \in V\} = \{v + f_2(v) \mid v \in V\}$$

が成り立つ。任意の $v \in V$ について、ある $v' \in V$ が存在して

$$v + f_1(v) = v' + f_2(v')$$

が成り立つ。直交直和による分解の一意性より、

$$v = v', \quad f_1(v) = f_2(v')$$

が成り立つ。特に $f_1(v) = f_2(v)$ となり、これが任意の $v \in V$ について成り立つので、$f_1 = f_2$ を得る。したがって、

$$\phi_V : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to O_V$$

は単射になり、この写像は全単射である。

多様体構造の座標変換が微分同型になることを示すために、$V, W \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \to \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

が微分同型写像になることを示す。まず

$$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp), \quad \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, W^\perp)$$

が開集合になることを示しておく。ϕ_V とグラフの定義より

$$\begin{aligned}\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid \phi_V(f) \cap W^\perp = \{0\}\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W(\mathrm{graph} f) = W\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \mid P_W \circ (1_V + f)|_V : \mathbb{K}\text{ 線形同型写像 }\}\end{aligned}$$

となり、$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ は連続写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\ ;\ f \mapsto P_W \circ (1_V + f)|_V$$

による $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ 内の $\mathbb{K}$ 線形同型写像全体の逆像に一致する。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ において $\mathbb{K}$ 線形同型写像全体は開集合になり、$\phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^\perp)$ の開集合になる。V と W を入れ換えると、$\phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, W^\perp)$ の開集合になることもわかる。

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \to \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

をより具体的に表示し、これが微分同型写像になることを示す。$f \in \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W)$ に対して $\phi_V(f) \in O_W$ であり、

$$P_W|_{\phi_V(f)} : \phi_V(f) \to W$$

は $\mathbb{K}$ 線形同型写像である。$\phi_W^{-1} \circ \phi_V(f) = g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, W^\perp)$ とすると、

$$\phi_V(f) = \phi_W(g)$$

が成り立つ。$\phi_W(g)$ の任意の元は

$$w + g(w) \quad (w \in W)$$

と表せる。これに $P_W|_{\phi_V(f)}$ を作用させると

$$(P_W|_{\phi_V(f)})(w+g(w)) = w$$

となる。$P_W|_{\phi_V(f)}$ は $\mathbb{K}$ 線形同型写像なので、

$$w+g(w) = (P_W|_{\phi_V(f)})^{-1}(w), \quad g(w) = \left((P_W|_{\phi_V(f)})^{-1} - 1_W\right)(w).$$

よって、$g = (P_W|_{\phi_V(f)})^{-1} - 1_W$ となり、

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V(f) = (P_W|_{\phi_V(f)})^{-1} - 1_W.$$

これより

$$\phi_W^{-1} \circ \phi_V : \phi_V^{-1}(O_V \cap O_W) \to \phi_W^{-1}(O_V \cap O_W)$$

が微分同型写像になることがわかる。$\{O_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ の各 O_V に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{\perp})$ の位相を定め、これによって $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の位相を定めると、Hausdorff の条件を満たすことがわかる。以上で $\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の多様体構造を定めることがわかる。

定理 1.7.3. Grassmann 多様体は Riemann 等質空間になる。

証明　Grassmann 多様体はコンパクト線形 Lie 群の商空間による表示を持つことを示し、その表示によって Riemann 等質空間になることを示す。

$$U_{\mathbb{K}}(m) = \begin{cases} O(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ U(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \end{cases} \qquad SU_{\mathbb{K}}(m) = \begin{cases} SO(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ SU(m) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \end{cases}$$

とおく。これらはすべて線形 Lie 群になる。まず、$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。$\mathbb{K}^{r+n}$ の標準的正規直交基底を $e_1, \ldots, e_{r+n}$ で表す。すなわち、e_i は i 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である縦ベクトルである。$o = \mathbb{K}^r$ を $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の原点とする。任意の $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して、V の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_r$ をとる。これを $\mathbb{K}^{r+n}$ の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_{r+n}$ に延長する。$u = (v_1\ \ldots, v_{r+n})$ によって $r+n$ 次正方行列を定めると、$u \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ である。さらに $u(e_i) = v_i$ となり $uo = V$ が成り立つ。したがって、$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は推移的になる。$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ を $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の商空間として表すために

$$K = \{k \in U_{\mathbb{K}}(r+n) \mid ko = o\}$$

を求める。$k_{11} \in M_{r,r}(\mathbb{K}), k_{12} \in M_{r,n}(\mathbb{K}), k_{21} \in M_{n,r}(\mathbb{K}), k_{22} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \in K$$

とすると、$1 \leq i \leq r$ に対して $ke_i \in o$ となるので、$k_{21} = 0$ を得る。$ko = o$ より $ko^{\perp} = o^{\perp}$ となり、$r+1 \leq j \leq r+n$ に対して $ke_j \in o^{\perp}$ となる。よって $k_{12} = 0$ を得る。これより

$$K \subset \left\{ \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \in U_{\mathbb{K}}(r+n) \middle| k_{11} \in M_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in M_{\mathbb{K}}(n) \right\}.$$

ここで右辺において $k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ となることがわかる。そこで、

$$U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \middle| k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n) \right\}$$

とおくと、上で示したことは $K \subset U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ である。逆に $U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ の元が o を固定することは形からわかるので、$K = U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ が成り立つ。以上り $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ と微分同型になる。

$SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用することを示す。すでに $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の作用は推移的であることを示したので、任意の $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対してある $u \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ が存在して $V = uo$ が成り立つ。$u_z = \mathrm{diag}(z, 1_n), z \in U_{\mathbb{K}}(1)$ とすると $u_z \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$ となり $\det u_z = z$ が成り立つ。$\det u \in U_{\mathbb{K}}(1)$ となるので、$z = \det u^{-1}$ とすると $uu_z \in SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ を得る。よって、$V = uo = uu_z o$ となり、$SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ も $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に推移的に作用する。o を固定する $SU_{\mathbb{K}}(r+n)$ の部分群は

$$S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) = (U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)) \cap SU(r+n)$$

になる。よって $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は $SU_{\mathbb{K}}(r+n)/S(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ と微分同型になる。

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変 Riemann 計量を定めるために系 1.4.9 を利用する。$U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n)$ の直和分解 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{m}$ を

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{array} \right] \middle| X_{11} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r), X_{22} \in \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) \right\},$$
$$\mathfrak{m} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \middle| X \in M_{r,n}(\mathbb{K}) \right\}$$

によって定める。$\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ が成り立つことが次の計算からわかる。

$$k = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \in U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$$

に対して

$$\mathrm{Ad}(k) \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{array} \right]^*$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & k_{11}Xk_{22}^* \\ -k_{22}X^*k_{11}^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{11}Xk_{22}^* \\ -(k_{11}Xk_{22}^*)^* & 0 \end{bmatrix}.$$

そこで、

$$\mathfrak{m} \ni \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow X \in M_{r,n}(\mathbb{K})$$

によって $\mathfrak{m}$ と $M_{r,n}(\mathbb{K})$ を同一視すると、$\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は、

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \cdot X = k_{11}Xk_{22}^*$$

による $M_{r,n}(\mathbb{K})$ への作用と同値になる。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Retr}(X^*Y) \qquad (X, Y \in M_{r,n}(\mathbb{K}))$$

によって $M_{r,n}(\mathbb{K})$ 上の二次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Retr}(X^*Y) = \mathrm{Retr}((X^*Y)^*) = \mathrm{Retr}(Y^*X) = \langle Y, X \rangle$$

だから、$\langle\ ,\ \rangle$ は対称になっている。さらに、$X = (X_{ab}), Y = (Y_{ab}) \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \mathrm{Retr}(X^*Y) = \mathrm{Re}\sum_{a,b} \bar{X}_{ab}Y_{ab} = \sum_{a,b} \mathrm{Re}(\bar{X}_{ab}Y_{ab}) \\ &= \sum_{a,b} (\mathrm{Re}X_{ab}\mathrm{Re}Y_{ab} + \mathrm{Im}X_{ab}\mathrm{Im}Y_{ab}) \end{aligned}$$

より $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値になる。この等式からでも $\langle\ ,\ \rangle$ が対称になることがわかる。$k_{11} \in U_{\mathbb{K}}(r), k_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ と $X, Y \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle k_{11}Xk_{22}^*, k_{11}Yk_{22}^* \rangle &= \mathrm{Retr}((k_{11}Xk_{22}^*)^*k_{11}Yk_{22}^*) = \mathrm{Retr}(k_{22}X^*k_{11}^*k_{11}Yk_{22}^*) \\ &= \mathrm{Retr}(k_{22}X^*Yk_{22}^*) = \mathrm{Retr}(X^*Y) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

したがって、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{Ad}(U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n))$ 不変になり、系 1.4.9 より、対応する $G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = U_{\mathbb{K}}(r+n)/U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)$ 上の Riemann 計量は $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ 不変になる。

以上より、Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は Riemann 等質空間になることがわかる。

第2章 Riemann対称空間

2.1 Riemann対称空間

Riemann 多様体のなかにはその各点に点対称と呼べる固定点集合が特別な性質を持つものが存在することがある。以下にそのような例をいくつか挙げる。

例 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ に通常の内積を入れることにより、Riemann 多様体とみなす。各点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$s_x(y) = 2x - y \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

によって s_x を定めると、s_x は通常の意味の x における点対称になる。s_x は $s_x^2 = 1_{\mathbb{R}^n}$ と

$$F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{x\}$$

を満たす。

例 2.1.2. n 次元球面 S^n の各点 x について

$$s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x \quad (y \in \mathbb{R}^{n+1})$$

によって $\mathbb{R}^{n+1}$ の線形変換 s_x を定める。$s_x(x) = x$ であり、x と直交する $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ について $s_x(y) = -y$ が成り立つ。これより

$$s_x = 1_{\mathbb{R}x} - 1_{(\mathbb{R}x)^\perp}$$

と記述できる。よって、s_x は ± 1 を固有値に持ち、$+1$ の固有空間は $\mathbb{R}x$ であり、-1 の固有空間は $(\mathbb{R}x)^\perp$ である。特に、$s_x \in O(n+1)$ であり、$\det s_x = (-1)^n$ がわかる。さらに $s_x^2 = 1_{n+1}$ もわかる。s_x は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内のベクトルの長さを保つので、s_x の作用は $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を保つ。さらに次が成り立つ。

$$F(s_x, S^n) = \{\pm x\}.$$

上記の状況を一般化して次の定義を得る。

定義 2.1.3. 連結 Riemann 多様体 M の各点 $x \in M$ に対して M の等長変換 s_x が定まり、次の条件を満たすとき M を **Riemann 対称空間**という。

(1) $s_x^2 = 1_M$.

(2) x は s_x の孤立固定点である。

s_x を x における**点対称**と呼ぶ。

連結 Riemann 多様体の等長変換は次の性質を持つことが知られている。

補題 2.1.4 ([3] Ch.I Lemma 11.2)**.** M を連結 Riemann 多様体とし、ϕ と ψ を M の等長変換とする。ある点 $p \in M$ において $\phi(p) = \psi(p)$ と $d\phi_p = d\psi_p$ が成り立つならば、$\phi = \psi$ が成り立つ。

命題 2.1.5. Riemann 対称空間 M の点 p における点対称は、$f(p) = p$ と $df_p = -1_{T_pM}$ を満たす等長変換 f として一意的に定まる。

証明　p における点対称 s_p は $s_p(p) = p$ を満たす。p を通る測地線 γ は s_p によって測地線に写る。もし $s_p\gamma = \gamma$ が成り立つとすると、s_p は γ 上の点をすべて固定することになり、p が s_p の孤立固定点であることに反する。よって、$s_p(\gamma)$ は γ を逆向きにした測地線になる。これが p を通る任意の測地線について成り立つので、$(ds_p)_p = -1_{T_pM}$ を得る。

M の等長変換 f が $f(p) = p$ と $df_p = -1_{T_pM}$ を満たせば、補題 2.1.4 より $f = s_p$ が成り立つ。したがって、このような性質を持つ等長変換は一意的であり、s_p のみである。

例 2.1.6. 例 2.1.1 より $\mathbb{R}^n$ は Riemann 対称空間である。例 2.1.2 より球面はコンパクト Riemann 対称空間である。

2.2　実射影空間その 2

命題 2.2.1. $p(x) \in \mathbb{R}P^n$ $(x \in S^n)$ に対して

$$s_{p(x)}(p(y)) = p(s_x(y)) \quad (x \in S^n)$$

によって $p(x) \in \mathbb{R}P^n$ における点対称 $s_{p(x)}$ を定めると、$s_{p(x)}$ は well-defined になり、$\mathbb{R}P^n$ は Riemann 対称空間になる。

証明　$x, y \in S^n$ を任意にとる。

$$s_{-x}(y) = -y + 2\langle -x, y\rangle(-x) = -y + 2\langle x, y\rangle x = s_x(y)$$

が成り立つ。さらに $s_x(-y) = -s_x(y)$ より $p(s_x(-y)) = p(s_x(y))$ となり、$\epsilon_0 = \pm 1, \epsilon_1 = \pm 1$ に対して

$$p(s_{\epsilon_0 x}(\epsilon_1 y)) = p(s_x(y)).$$

したがって、$s_{p(x)}$ は well-defined である。

$$\begin{tikzcd} T_yS^n \arrow[r, "(ds_x)_y"] \arrow[d, "dp_y"'] & T_{s_x(y)}S^n \arrow[d, "dp_{s_x(y)}"] \\ T_{p(y)}\mathbb{R}P^n \arrow[r, "(ds_{p(x)})_{p(y)}"'] & T_{s_{p(x)}(p(y))}\mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

は可換図式になり、$(ds_x)_y, dp_y, dp_{s_x(y)}$ は等長線形写像だから、$(ds_{p(x)})_{p(y)}$ も等長線形写像になる。よって、$s_{p(x)}$ は等長変換である。

定義より

$$s_{p(x)}^2(p(y)) = s_{p(x)}(p(s_x(y))) = p(s_x^2(y)) = p(y)$$

だから、$s_{p(x)}^2 = 1_{\mathbb{R}P^n}$ が成り立つ。

$S_x^n = \{u \in S^n \mid \langle u, x\rangle > 0\}$ は S^n における x の開近傍であり、$p(S_x^n)$ は $\mathbb{R}P^n$ における $p(x)$ の開近傍である。$p(S_x^n)$ において $s_{p(x)}$ の固定点は $p(x)$ だけであることを示す。$u \in S_x^n$ とする。

$$p(u) = s_{p(x)}(p(u)) = p(s_x(u))$$

の必要十分条件は $s_x(u) = \pm u$ である。これは u が s_x の ± 1 固有ベクトルであることを言っている。s_x の $+1$ 固有ベクトルは $\pm x$ なので、S_x^n 内では x のみである。s_x の -1 固有ベクトルは x と直交するので、S_x^n には存在しない。したがって、$p(S_x^n)$ 内の $s_{p(x)}$ の固定点は $p(x)$ のみである。これより、$p(x)$ は $s_{p(x)}$ の孤立固定点である。

以上により $\mathbb{R}P^n$ は Riemann 対称空間である。

2.3 複素射影空間その 2

命題 2.3.1. $p(x) \in \mathbb{C}P^n$ $(x \in S^{2n+1})$ に対して

$$s_x^{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}x} - 1_{(\mathbb{C}x)^\perp} \in U(n+1)$$
$$s_{p(x)}(p(y)) = p(s_x^{\mathbb{C}}(y)) \quad (y \in S^{2n+1})$$

によって $p(x) \in \mathbb{C}P^n$ における点対称 $s_{p(x)}$ を定めると、$s_{p(x)}$ は well-defined になり、$\mathbb{C}P^n$ は Riemann 対称空間になる。ただし、$(\mathbb{C}x)^\perp$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 内積に関する直交補空間である。さらに、$\mathbb{C}P^n$ の複素構造に関して $s_{p(x)}$ は正則変換である。

証明 $x, y \in S^{2n+1}$ を任意にとる。

$u, v \in U(1)$ に対して、$\mathbb{C}ux = \mathbb{C}x$ だから $s_{ux}^{\mathbb{C}} = s_x^{\mathbb{C}}$ である。さらに $s_x^{\mathbb{C}}(vy) = vs_x^{\mathbb{C}}(y)$ より $p(s_x^{\mathbb{C}}(vy)) = p(s_x^{\mathbb{C}}(y))$ となり、

$$p(s_{ux}^{\mathbb{C}}(vy)) = p(s_x^{\mathbb{C}}(y)).$$

したがって、$s_{p(x)}$ は well-defined である。

$$
\begin{tikzcd}
T_yS^{2n+1} \arrow[r, "(ds_x^{\mathbb{C}})_y"] & T_{s_x^{\mathbb{C}}(y)}S^{2n+1} \\
(\mathbb{C}y)^{\perp} \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "(ds_x^{\mathbb{C}})_y"] \arrow[d, "dp_y"'] & (\mathbb{C}s_x^{\mathbb{C}}(y))^{\perp} \arrow[u, "\cup"'] \arrow[d, "dp_{s_x^{\mathbb{C}}(y)}"] \\
T_{p(y)}\mathbb{C}P^n \arrow[r, "(ds_{p(x)})_{p(y)}"'] & T_{s_{p(x)}(p(y))}\mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}
$$

は可換図式になり、$(ds_x^{\mathbb{C}})_y, dp_y, dp_{s_x^{\mathbb{C}}(y)}$ は等長線形写像だから、$(ds_{p(x)})_{p(y)}$ も等長線形写像になる。よって、$s_{p(x)}$ は等長変換である。

定義より

$$s_{p(x)}^2(p(y)) = s_{p(x)}(p(s_x^{\mathbb{C}}(y))) = p((s_x^{\mathbb{C}})^2(y)) = p(y)$$

だから、$s_{p(x)}^2 = 1_{\mathbb{C}P^n}$ が成り立つ。

$\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 内積の実部を $\langle\ ,\ \rangle$ で表すと、これは $\mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbb{R}^{2n+2}$ と同一視すると $\mathbb{R}^{2n+2}$ の標準的内積に一致する。$S_x^{2n+1} = \{z \in S^{2n+1} \mid \langle u, x\rangle > 0\}$ は S^{2n+1} における x の開近傍であり、$p(S_x^{2n+1})$ は $\mathbb{C}P^n$ における $p(x)$ の開近傍である。$p(S_x^{2n+1})$ において $s_{p(x)}$ の固定点は $p(x)$ だけであることを示す。$z \in S_x^{2n+1}$ とする。$p(z)$ が $s_{p(x)}$ の固定点であること、すなわち

$$p(z) = s_{p(x)}(p(z)) = p(s_x^{\mathbb{C}}(z))$$

の必要十分条件はある $u \in U(1)$ が存在して $s_x^{\mathbb{C}}(z) = uz$ が成り立つことである。これは z が $s_x^{\mathbb{C}}$ の u 固有ベクトルであることを言っている。$s_x^{\mathbb{C}}$ の固有値は ± 1 であり、$u = \pm 1$ となる。$s_x^{\mathbb{C}}$ の長さ 1 の $+1$ 固有ベクトルの全体は $U(1)x$ であり、これらの p による像はすべて $p(x)$ に一致する。$s_x^{\mathbb{C}}$ の -1 固有ベクトルは $\mathbb{C}x$ と直交するので、S_x^{2n+1} には存在しない。したがって、S_x^{2n+1} 内の $s_x^{\mathbb{C}}$ の固定点の全体は $U(1)x$ である。これより、$p(x)$ は $s_{p(x)}$ の孤立固定点である。

以上により $\mathbb{C}P^n$ は Riemann 対称空間である。

定理 1.6.4 の証明で示した $U(n+1)$ の $\mathbb{C}P^n$ への推移的な作用は、$\mathbb{C}P^n$ に正則変換として作用することを示す。$U(n+1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用は、複素座標の一次関数で表せるので、正則変換である。正則写像 $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ を通して $U(n+1)$ の $\mathbb{C}P^n$ への作用が定まるので、これは $\mathbb{C}P^n$ の正則変換になる。$x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ に対して

$$s_x^{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}x} - 1_{(\mathbb{C}x)^{\perp}}$$

はユニタリ変換になり、その行列表示は $U(n+1)$ の元である。したがって、$\mathbb{C}P^n$ の各点の点対称は $\mathbb{C}P^n$ の正則写像になる。

2.4 Grassmann 多様体その 2

命題 2.4.1. $V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$s_V = 1_V - 1_{V^\perp} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

によって V における点対称 s_V を定めると、$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は Riemann 対称空間になる。

証明 1.7 節で示したように $U_{\mathbb{K}}(r+n)$ の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換になるので、特に s_V の作用も等長変換になる。s_V の定め方より $s_V^2 = 1$ が成り立つこともわかる。O_V における s_V の固定点は V だけであることを証明する。O_V の元 x をとりその基底を直交直和分解 $\mathbb{K}^{r+n} = V + V^\perp$ に従って $v_1 + v_1^\perp, \dots, v_r + v_r^\perp$ と表示する。ここで、$v_i \in V, v_i^\perp \in V^\perp$ である。$P_V|_x : x \to V$ は $\mathbb{K}$ 線形同型になるので、$v_1, \dots, v_r$ は V の基底になる。$s_V(x) = x$ と仮定すると

$$v_i = \frac{1}{2}(v_i + v_i^\perp + s_V(v_i + v_i^\perp)) \in x$$

となり、$x = \{v_1, \dots, v_r\}_{\mathbb{K}} = V$ が成り立つ。したがって、O_V における s_V の固定点は V だけになり、特に V は s_V の孤立固定点になる。以上で $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間になることがわかった。

2.5 コンパクト Riemann 対称対

定理 2.5.1. M を Riemann 対称空間とすると、M は測地的完備になり、$I(M)$ は M に推移的に作用する。$I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ も M に推移的に作用する。特に Riemann 対称空間は Riemann 等質空間である。

証明 命題 2.1.5 より、$(ds_x)_x = -1_{T_xM}$ が成り立つことに注意しておく。

任意の $x \in M$ と $X \in T_xM$ に対してある $\epsilon > 0$ と

$$\gamma(0) = x, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X$$

を満たす測地線 $\gamma : [0, \epsilon] \to M$ が存在する。s_x を $\gamma([0, \epsilon])$ に作用させることにより、γ の定義域を $[-\epsilon, \epsilon]$ に拡張できる。このとき、$(ds_x)_x(X) = -X$ だから、x においても $\gamma([-\epsilon, \epsilon])$ は滑らかになっている。$s_{\gamma(\epsilon)}$ を $\gamma([-\epsilon, \epsilon])$ に作用させることにより、γ の定義域を $[-\epsilon, 3\epsilon]$ に拡張できる。この操作を繰り返すことにより、γ の定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張できる。したがって、M は測地的完備である。

定理 1.3.13 より、任意の二点 $x, y \in M$ を結ぶ測地線 γ が存在する。

$$\gamma : [0, 1] \to M, \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

としておく。このとき、$s_{\gamma(1/2)}(x) = y$ が成り立つ。したがって、$I(M)$ は M に推移的に作用する。

次の命題より、$I_0(M)$ は M に推移的に作用することがわかる。

命題 2.5.2. Lie 群が連結多様体に推移的に作用しているとき、その単位連結成分も推移的に作用する。

問題 2.5.3. 命題 2.5.2 を証明せよ。

定理 2.5.4. Riemann 対称空間 M の点 x に対して

$$\sigma_x : I(M) \to I(M)\ ;\ g \mapsto s_x g s_x$$

によって写像 σ_x を定めると、σ_x は $I(M)$ の対合的 ($\sigma_x^2 = 1_M$) 自己同型写像になる。さらに $\sigma_x(I_0(M)) = I_0(M)$ となる。

$$K_x = \{g \in I_0(M) \mid gx = x\}$$

とおくと、K_x は $I_0(M)$ の閉 Lie 部分群になり、

$$M \cong I_0(M)/K_x, \qquad F_0(\sigma_x, I_0(M)) \subset K_x \subset F(\sigma_x, I_0(M))$$

が成り立つ。ここで

$$F(\sigma_x, I_0(M)) = \{g \in I_0(M) \mid \sigma_x(g) = g\}$$

であり、$F_0(\sigma_x, I_0(M))$ はその単位連結成分である。

この定理の証明には準備が必要になるので、ここでは証明は省略する。（Helgason [3] Chapter IV Theorem 3.3）その代わりに n 次元球面の場合に定理の主張が成り立つことをみておく。

例 2.5.5. n 次元球面 S^n の場合、$I(S^n) = O(n+1)$ になり、$I_0(S^n) = SO(n+1)$ が成り立つ。第 1 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である縦ベクトルを $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で表す。

$$s_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

となり、

$$\sigma_{e_1}(g) = s_{e_1} g s_{e_1} \qquad (g \in O(n+1)).$$

さらに

$$K_{e_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & g \end{bmatrix} \middle| g \in SO(n) \right\} = 1 \times SO(n)$$

がわかる。σ_{e_1} の記述より

$$F(\sigma_{e_1}, SO(n+1)) = S(O(1) \times O(n)), \quad F_0(\sigma_{e_1}, SO(n+1)) = 1 \times SO(n)$$

である。ただし、

$$S(O(1)\times O(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix} \middle| g_1 \in O(1),\ g_2 \in O(n),\ \det g_1 \det g_2 = 1 \right\}$$

である。さらに

$$F_0(s_{e_1}, SO(n+1)) = K_{e_1} \subset F(s_{e_1}, SO(n+1))$$

が成り立つこともわかる。

定理 2.5.4 およびその後の例 2.5.5 を踏まえて次の定義を与える。

定義 2.5.6. 連結コンパクト Lie 群 G、G の対合的自己同型写像 σ と G の閉 Lie 部分群 K が

$$F_0(\sigma, G) \subset K \subset F(\sigma, G)$$

を満たすとき、(G, K) を**コンパクト Riemann 対称対**と呼ぶ。

定理 2.5.7. (G, K) をコンパクト Riemann 対称対とし、その対合的自己同型写像を σ とする。このとき、G の作用が等長的になる Riemann 計量が G/K に存在し、原点 $o = K \in G/K$ の点対称 s_o を

$$s_o(gK) = \sigma(g)K \qquad (g \in G)$$

によって定めることにより、G/K はコンパクト Riemann 対称空間になる。

Helgason [3] Chapter IV Proposition 3.4 参照。
$U(1)$ のいくつかの積と同型になる Lie 群を**トーラス**と呼ぶ。

定理 2.5.8. (G, K) をコンパクト Riemann 対称対とする。その対合的自己同型写像を σ で表す。$d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の固有値は ± 1 であり、± 1 固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}, \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = -X\}$$

とする。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を**標準分解**という。自然な射影 $\pi : G \to G/K$ の単位元における微分写像 $d\pi_e : \mathfrak{g} \to T_o(G/K)$ を $\mathfrak{m}$ に制限すると、$\mathfrak{m}$ から $T_o(G/K)$ への線形同型写像になる。さらに

$$\mathrm{Exp}_o(d\pi_e(X)) = \exp X \cdot o$$

が成り立つ。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に対して $A = \exp \mathfrak{a}$ はトーラスになり、$A \cdot o$ は G/K の全測地的部分多様体になる。さらに

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}, \quad G/K = \bigcup_{k \in K} k(A \cdot o)$$

が成り立つ。上の等式から $G = KAK$ が成り立つ。

Helgason [3] Chapter V Theorem 6.7 参照。上記の定理の最後の等式は、次の定義の記述に基づく。

定義 2.5.9. 群 G の部分集合 X, Y, Z に対して

$$XY = \{xy \mid x \in X,\, y \in Y\}, \quad XYZ = \{xyz \mid x \in X,\, y \in Y,\, z \in Z\}$$

によって部分集合 XY, XYZ を定める。4 個以上の部分集合の積も同様に定義する。

例 2.5.10. 例 2.5.5 より $(SO(n+1), 1 \times SO(n))$ はコンパクト Riemann 対称対である。対応する Lie 環の標準分解は

$$\mathfrak{o}(n+1) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{o}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \\ & X \end{bmatrix} \middle| X \in \mathfrak{o}(n) \right\}, \ \ \mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} & -{}^t\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

となる。

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間になる。$A = \exp \mathfrak{a}$ とおくと、

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} = SO(2) \times 1_{n-1}$$

となり、A はトーラスになる。

$$SO(n+1)/1 \times SO(n) \to S^n \ ; \ g(1 \times SO(n)) \mapsto ge_1$$

によって両者を同一視できる。

$$Ae_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset S^n$$

は S^n の e_1 を通る大円になる。これに $1 \times SO(n)$ を作用させると e_1 を通るすべての大円が得られ、

$$S^n = \bigcup_{k \in 1 \times SO(n)} kAe_1$$

が成り立つことがわかる。

例 2.5.11. 例 2.5.5 の記号を流用すると、

$$F(\sigma_{e_1}, SO(n+1)) = S(O(1) \times O(n))$$

だから、$(SO(n+1), S(O(1) \times O(n)))$ はコンパクト Riemann 対称対である。命題 1.5.2 で定めた写像 $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ を使うと

$$SO(n+1)/S(O(1) \times O(n)) \to \mathbb{R}P^n \ ; \ gS(O(1) \times O(n)) \mapsto p(ge_1)$$

によって両者を同一視できる。例 2.5.10 の A により

$$\mathbb{R}P^n = \bigcup_{k \in S(O(1) \times O(n))} kp(Ae_1) = \bigcup_{k \in 1 \times SO(n)} kp(Ae_1)$$

が成り立つことがわかる。

例 2.5.12. 例 2.5.5 の記号を流用すると、

$$\sigma_{e_1}(g) = s_{e_1} g s_{e_1} \qquad (g \in U(n+1))$$

によって、対合的自己同型写像 $\sigma_{e_1} : U(n+1) \to U(n+1)$ が定まり、

$$F(\sigma_{e_1}, U(n+1)) = U(1) \times U(n) = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & g \end{bmatrix} \middle| u \in U(1),\ g \in U(n) \right\}$$

が成り立つことがわかる。これより

$$F(\sigma_{e_1}, SU(n+1)) = S(U(1) \times U(n)) = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & g \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} u \in U(1),\ g \in U(n) \\ u \det g = 1 \end{matrix} \right\}$$

もわかる。したがって、

$$(U(n+1), U(1) \times U(n)), \quad (SU(n+1), S(U(1) \times U(n)))$$

はどちらもコンパクト Riemann 対称対である。対応する Lie 環の標準分解は

$$\mathfrak{u}(n+1) = \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} z & \\ & X \end{bmatrix} \middle| z \in \mathfrak{u}(1),\ X \in \mathfrak{u}(n) \right\},$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} & -{}^t\bar{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x} & \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

となる。$\mathfrak{su}(n+1)$ についても同様に記述できる。どちらも $d\sigma$ の -1 固有空間は同じ $\mathfrak{m}$ になる。例 2.5.10 で定めた $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{u}(n+1)$ や $\mathfrak{su}(n+1)$ においても $\mathfrak{m}$ 内の極大

可換部分空間になる。対応する A は例 2.5.10 と同じ形に記述され、トーラスになる。命題 1.6.2 で定めた写像 $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ を使うと

$$SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)) \to \mathbb{C}P^n \ ; \ gS(U(1) \times U(n)) \mapsto p(ge_1)$$

によって両者を同一視できる。

$$\mathbb{C}P^n = \bigcup_{k \in S(U(1) \times U(n))} kp(Ae_1)$$

が成り立つことがわかる。

例 2.5.13. $U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(g) = \bar{g} \qquad (g \in U(n))$$

によって定める。$F(\sigma, U(n)) = O(n)$ が成り立ち、$F_0(\sigma, U(n)) = SO(n)$ である。よって、$(U(n), SO(n))$ はコンパクト Riemann 対称対である。

$$U(1)^n = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \middle| z_i \in U(1) \right\}$$

とおくと、$U(1)^n$ はトーラスになり

$$U(n)/SO(n) = \bigcup_{k \in SO(n)} kU(1)^n o$$

が成り立つことが知られている。これより $U(n) = SO(n)U(1)^n SO(n)$ が成り立つ。

第3章　極地と対蹠集合

3.1　極地

定義 3.1.1. M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の点 x における点対称 s_x の固定点集合 $F(s_x, M)$ の各連結成分を M の**極地**と呼ぶ。極地が一点からなるとき**極**と呼ぶ。その点自身を極と呼ぶこともある。x は s_x の孤立固定点であることから $\{x\}$ は必ず $F(s_x, M)$ の連結成分になるため、$\{x\}$ は**自明な極**と呼ぶ。命題 1.3.8 より、極地は全測地的部分多様体になる。よって、極地もコンパクト Riemann 対称空間になることがわかる。これらの概念は Chen-Nagano [1] が導入した。

例 3.1.2. n 次元球面 S^n の点 x における点対称 s_x の固定点集合は $F(s_x, S^n) = \{\pm x\}$ である。よって、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、ともに極になる。

証明　例 2.1.2 でみたように

$$s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x \quad (y \in \mathbb{R}^{n+1})$$

によって定まる $\mathbb{R}^{n+1}$ の線形変換 s_x は S^n の x における点対称を定める。例 2.1.2 でみたように $F(s_x, S^n) = \{\pm x\}$ が成り立つので、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、ともに極になる。

$\mathbb{R}^{n+1}$ の m 次元部分ベクトル空間 V に対して

$$\mathbb{R}P^n \supset P(V) = \{\mathbb{R}x \mid x \in V - \{0\}\} \cong \mathbb{R}P^{m-1}$$

とおく。

例 3.1.3. n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の点 $p(x) = \mathbb{R}x$ $(x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ における点対称 $s_{p(x)}$ の固定点集合は

$$F(s_{p(x)}, \mathbb{R}P^n) = \{p(x)\} \cup P((\mathbb{R}x)^\perp)$$

である。よって、$\mathbb{R}P^n$ の $p(x)$ に関する極地は $\{p(x)\}$ と $P((\mathbb{R}x)^\perp)$ である。

証明　$x, y \in S^n$ について

$$p(s_x(y)) = s_{p(x)}(p(y)) = p(y)$$

が成り立つための必要十分条件は $s_x(y) = \pm y$ である。すなわち、y が s_x の $+1$ 固有ベクトルまたは -1 固有ベクトルになることである。これは $y \in \mathbb{R}x$ または $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ と同値であり、

$$F(s_{p(x)}, \mathbb{R}P^n) = \{p(x)\} \cup P((\mathbb{R}x)^\perp)$$

が成り立つ。

$\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 m 次元複素部分ベクトル空間 V に対して

$$\mathbb{C}P^n \supset P^{\mathbb{C}}(V) = \{\mathbb{C}x \mid x \in V - \{0\}\} \cong \mathbb{C}P^{m-1}$$

とおく。

例 3.1.4. n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の点 $p(x) = \mathbb{C}x$ $(x \in S^{2n+1})$ における点対称 $s_{p(x)}$ の固定点集合は

$$F(s_{p(x)}, \mathbb{C}P^n) = \{p(x)\} \cup P^{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x)^\perp)$$

である。よって、$\mathbb{C}P^n$ の $p(x)$ に関する極地は $\{p(x)\}$ と $P^{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x)^\perp)$ である。

証明　$x, y \in S^{2n+1}$ について

$$p(s_x^{\mathbb{C}}(y)) = s_{p(x)}(p(y)) = p(y)$$

が成り立つための必要十分条件は $s_x(y) = \pm y$ である。すなわち、y が s_x の $+1$ 固有ベクトルまたは -1 固有ベクトルになることである。これは $y \in \mathbb{C}x$ または $y \in (\mathbb{C}x)^\perp$ と同値であり、

$$F(s_{p(x)}, \mathbb{C}P^n) = \{p(x)\} \cup P^{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x)^\perp)$$

が成り立つ。ただし、$(\mathbb{C}x)^\perp$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的 Hermite 計量に関する直交補空間である。

3.2　対蹠集合

定義 3.2.1. M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。これは有限であることが知られている。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-Nagano [2] が導入した。包含関係に関して極大な対蹠集合を**極大対蹠集合**と呼ぶことにする。

注意 3.2.2. コンパクト Riemann 対称空間の点 x, y について $s_x(y) = y$ が成り立つと仮定する。x, y を結ぶ測地線 γ をとる。$s_x(\gamma)$ は x を通る逆向きの測地線になる。したがって、γ は y で自己交叉することになり、これは閉測地線になることが知られている。よって、x, y は閉測地線 γ の対蹠点になる。特に $s_y(x) = x$ が成り立つ。すなわち、$s_x(y) = y$ が成り立つならば、$s_y(x) = x$ が成り立つ。

注意 3.2.3. 対蹠集合の各点 x は s_x の孤立固定点になるので、対蹠集合において各点は孤立し、対蹠集合は離散的になる。特に有限集合になる。さらに 2-number の定義のところでも述べたが、対蹠集合の元の個数の上限は有限になることが知られている。

例 3.2.4. n 次元球面 S^n の点 x における点対称 s_x の固定点集合は $F(s_x, S^n) = \{\pm x\}$ である。したがって、$\{\pm x\}$ は大対蹠集合になり、$\#_2 S^n = 2$ を得る。

定理 3.2.5. n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の包含関係に関して極大な対蹠集合 A に対して、$\mathbb{R}^{n+1}$ のある正規直交基底 $x_1, \ldots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A = \{\mathbb{R}x_1, \ldots, \mathbb{R}x_{n+1}\}.$$

これは大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{R}P^n = n + 1$ である。

証明 n に関する帰納法で証明する。A を $\mathbb{R}P^n$ の極大な対蹠集合とする。

$n = 1$ のとき、$\mathbb{R}P^1$ は円であり、$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 x_1, x_2 が存在し、$A = \{\mathbb{R}x_1, \mathbb{R}x_2\}$. これは大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{R}P^1 = 2$ である。

一般の n について考える。$n-1$ 以下の次元の実射影空間に対して定理の主張が成り立っていると仮定する。A の点 $\mathbb{R}x_1$ $(x_1 \in S^n)$ をとると、

$$A \subset F(s_{\mathbb{R}x_1}, \mathbb{R}P^n) = \{\mathbb{R}x_1\} \cup P((\mathbb{R}x_1)^\perp)$$

が成り立つ。これより

$$A - \{\mathbb{R}x_1\} \subset P((\mathbb{R}x_1)^\perp) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$$

となる。極地 $P((\mathbb{R}x_1)^\perp)$ は $\mathbb{R}P^n$ の全測地的部分多様体であり、さらに、$P((\mathbb{R}x_1)^\perp)$ における点対称は $\mathbb{R}P^n$ の点対称の制限に一致する。よって、$A - \{\mathbb{R}x_1\}$ は $\mathbb{R}P^{n-1}$ の極大な対蹠集合になる。帰納法の仮定より、$(\mathbb{R}x_1)^\perp$ のある正規直交基底 $x_2, \ldots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A - \{\mathbb{R}x_1\} = \{\mathbb{R}x_2, \ldots, \mathbb{R}x_{n+1}\}.$$

したがって、

$$A = \{\mathbb{R}x_1, \ldots, \mathbb{R}x_{n+1}\}$$

を得る。ここで、$x_1, \ldots, x_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底である。A は大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{R}P^n = n + 1$ である。

定理 3.2.6. n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の包含関係に関して極大な対蹠集合 A に対して、$\mathbb{C}^{n+1}$ のあるユニタリ基底 $x_1, \dots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A = \{\mathbb{C}x_1, \dots, \mathbb{C}x_{n+1}\}.$$

これは大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{C}P^n = n + 1$ である。

証明　n に関する帰納法で証明する。A を $\mathbb{C}P^n$ の極大な対蹠集合とする。

$n = 1$ のとき、$\mathbb{C}P^1$ は 2 次元球面であり、$\mathbb{C}^2$ のユニタリ基底 x_1, x_2 が存在し、$A = \{\mathbb{C}x_1, \mathbb{C}x_2\}$. これは大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{C}P^1 = 2$ である。

一般の n について考える。$n-1$ 以下の次元の複素射影空間に対して定理の主張が成り立っていると仮定する。A の点 $\mathbb{C}x_1$ $(x_1 \in S^{2n+1})$ をとると、

$$A \subset F(s_{\mathbb{C}x_1}, \mathbb{C}P^n) = \{\mathbb{C}x_1\} \cup P^{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x_1)^\perp)$$

が成り立つ。これより

$$A - \{\mathbb{C}x_1\} \subset P^{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x_1)^\perp) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

となる。極地 $P((\mathbb{C}x_1)^\perp)$ は $\mathbb{C}P^n$ の全測地的部分多様体であり、さらに、$P((\mathbb{C}x_1)^\perp)$ における点対称は $\mathbb{C}P^n$ の点対称の制限に一致する。よって、$A-\{\mathbb{C}x_1\}$ は $\mathbb{C}P^{n-1}$ の極大な対蹠集合になる。帰納法の仮定より、$(\mathbb{C}x_1)^\perp$ のあるユニタリ基底 $x_2, \dots, x_{n+1}$ が存在し、

$$A - \{\mathbb{C}x_1\} = \{\mathbb{C}x_2, \dots, \mathbb{C}x_{n+1}\}.$$

したがって、

$$A = \{\mathbb{C}x_1, \dots, \mathbb{C}x_{n+1}\}$$

を得る。ここで、$x_1, \dots, x_{n+1}$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底である。A は大対蹠集合になり、$\#_2\mathbb{C}P^n = n + 1$ である。

3.3　対称 R 空間

定義 3.3.1. (G, K) をコンパクト Riemann 対称対とし、その対合的自己同型写像を σ とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

に対して、$\mathrm{Ad}_G(K)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ が成り立つことが知られている。$X \in \mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(K)$ 軌道 $\mathrm{Ad}_G(K)X$ が $\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}_G(K)$ 不変内積から誘導される Riemann 計量に関して Riemann 対称空間になるとき、$\mathrm{Ad}_G(K)X$ を**対称 $\boldsymbol{R}$ 空間**と呼ぶ。自然な埋め込み $\mathrm{Ad}_G(K)X \subset \mathfrak{m}$ を対称 R 空間の**標準埋め込み**という。K の単位連結成分 K_0 について $\mathrm{Ad}_G(K_0)X = \mathrm{Ad}_G(K)X$ が成り立つことが知られている (Hirohashi-Kanno-T.[5] Proposition 2.1 の証明中にある。G/K 内の K の軌道に関する同様の結果は Tanaka-T.[12] Theorem 1)。特に、$\mathrm{Ad}_G(K)X$ は連結である。

例 3.3.2. 例 2.5.5 で述べたように、$(SO(n+1), 1 \times SO(n))$ はコンパクト Riemann 対称対であり、その対合的自己同型写像は

$$\sigma(g) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1_n \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1_n \end{bmatrix} \quad (g \in SO(n+1))$$

である。$d\sigma$ による $\mathfrak{o}(n+1)$ の ± 1 固有空間分解は

$$\mathfrak{o}(n+1) = \mathfrak{o}(n) + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} & -{}^t x \\ x & \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

となる。$1 \times SO(n)$ の $\mathfrak{m}$ への作用は

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -{}^t x \\ x & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & g \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & -{}^t(gx) \\ gx & \end{bmatrix} \quad (g \in SO(n),\ x \in \mathbb{R}^n)$$

となり、$SO(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への通常の作用と自然に同一視できる。$\mathfrak{m}$ 内の長さ 1 の元の $SO(n)$ による軌道は、$\mathfrak{m}$ と $\mathbb{R}^n$ の同一視により、$n-1$ 次元球面になる。これは、例 2.1.2 より Riemann 対称空間になるので、対称 R 空間になる。

対称 R 空間について以下のような結果が知られている。

定理 3.3.3 (Takeuchi [9])**.** M が対称 R 空間ならば次の等式が成り立つ。

$$\#_2 M = \dim H_*(M; \mathbb{Z}_2).$$

ただし、$H_*(M; \mathbb{Z}_2)$ は M の $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群である。

定理 3.3.4 (Takeuchi [8])**.** 対称 R 空間 M の極地のすべてを $M_0, M_1, \ldots, M_s$ で表すと、次が成り立つ。

(1) 各 M_i は対称 R 空間である。

(2) $\dim H_*(M; \mathbb{Z}_2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} \dim H_*(M_i; \mathbb{Z}_2).$

系 3.3.5. 対称 R 空間 M の極地のすべてが $M_0, M_1, \ldots, M_s$ ならば、次が成り立つ。

$$\#_2 M = \sum_{i=0}^{s} \#_2 M_i.$$

連結 Riemann 多様体 M の部分集合 A, B に対して、ある $g \in I_0(M)$ が存在して $B = gA$ が成り立つとき、A, B は**合同**であるという。

定理 3.3.6 (Tanaka-T.[10])**.** 対称 R 空間 M において次が成り立つ。

(1) M の任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる。特に極大対蹠集合は大対蹠集合になる。

(2) 任意の二つの大対蹠集合は合同になる。

定義 3.3.7. 多様体で定義された関数のすべての臨界点において、その関数の Hessian が非退化であるとき、その関数を **Morse 関数**という。

詳細はここでは述べないが、Morse 関数の臨界点集合の生成する加群と Morse 関数の勾配ベクトル場の情報から **Morse 複体**と呼ばれる複体を定めることができる。この複体から定まるホモロジーを **Morse ホモロジー**という。これは通常のホモロジーと同型になることが知られている。

定理 3.3.8 (Kocherlakota [7])**.** $M \subset \mathbb{R}^n$ を対称 R 空間 M の標準埋め込みとする。このとき、ほとんどすべての $X \in \mathbb{R}^n$ について

$$h_X : M \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto h_X(x) = \langle x, X \rangle$$

は Morse 関数である。さらにそのとき、h_X の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Morse 複体の境界作用素は 0 になり、$\mathbb{Z}_2$ 係数 Morse ホモロジーは

$$\bigoplus_{p \in C(h_X)} \mathbb{Z}_2 p$$

に一致する。

上記の定理において h_X の臨界点集合 $C(h_X)$ は M の大対蹠集合になることがわかる。よって、この定理からも定理 3.3.3 の等式

$$\#_2 M = \dim H_*(M; \mathbb{Z}_2).$$

を導くことができる。

第4章　極大対蹠部分群

4.1　群に関する準備

この節では後で必要になる群や位相群の基本事項について復習しておく。定義2.5.9で定めた積について、部分群に関しては次の性質が成り立つ。

補題 4.1.1. 群 G の部分群 H, K に対して次の三条件は同値である。

(1) HK の元は $hk\,(h \in H,\, k \in K)$ の形に一意的に表せる。

(2) $hk = e\,(h \in H,\, k \in K)$ ならば、$h = k = e$ が成り立つ。

(3) $H \cap K = \{e\}$ が成り立つ。

証明　(1) $\Rightarrow$ (2) $hk = e\,(h \in H,\, k \in K)$ とすると、$hk = e = ee$ なので、(1) の一意性より $h = e,\, k = e$ が成り立つ。

(2) $\Rightarrow$ (3) $H \cap K$ の任意の元 l をとる。$ll^{-1} = e$ であり、$l \in H \cap K \subset H$, $l^{-1} \in H \cap K \subset K$ なので、(2) より $l = l^{-1} = e$ が成り立つ。したがって、$H \cap K = \{e\}$ を得る。

(3) $\Rightarrow$ (1) HK の元が $hk = h_1k_1,\, h, h_1 \in H,\, k, k_1 \in K$ と表されるとする。この等式より、$h_1^{-1}h = k_1k^{-1}$ が成り立つ。この等式の左辺は H の元であり、右辺は K の元である。よって、この元は $H \cap K$ の元であり、(3) より、単位元になる。すなわち、$h_1^{-1}h = e$ と $k_1k^{-1} = e$ が成り立ち、$h = h_1$ と $k_1 = k$ となり、HK の元の表し方 hk は一意的である。

コンパクト Lie 群の間の奇数次数の被覆準同型写像の性質を調べる際に Sylow の定理を利用するので、Sylow の定理とその関連事項について復習しておく。

定義 4.1.2. 群 G の部分集合 S に対して、S を含む最小の部分群を $\langle S \rangle$ で表し、S の**生成する部分群**という。$\langle S \rangle$ は S を含むすべての部分群の共通部分になる。$S = \{s\}$ のとき $\langle S \rangle = \langle s \rangle$ とも書き、$\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つ。

有限群の性質を調べる際に次の定理は基本的である。

定理 4.1.3 (Lagrange)**.** 有限群 G の部分群の位数は $|G|$ の約数である。

証明　G を部分群の剰余類の和に分解すると、互いに素な分解になるので、その部分群の位数と剰余類の個数の積が $|G|$ になる。特に部分群の位数は $|G|$ の約数になる。

系 4.1.4. 有限群 G の元の位数は $|G|$ の約数である。

証明　G の元 g に対して、g が生成する部分群 $\langle g\rangle$ は G の部分群になるので、定理 4.1.3 より $\langle g\rangle$ の位数は $|G|$ の約数になる。g の位数は $\langle g\rangle$ の位数に一致し、$|G|$ の約数になる。

Lagrange の定理の逆は必ずしも成り立たないが、特別な形の $|G|$ の約数については逆が成り立つことを示しているのが、次の Sylow の定理である。

定理 4.1.5 (Sylow)**.** 有限群 G の位数 $|G|$ が素数 p によって $|G| = p^n m$ と表されていて p と m は互いに素であるとする。このとき、G は位数 p^n の部分群を含む。この部分群を G の ***p*-Sylow 部分群**という。G の任意の二つの p-Sylow 部分群は互いに共役になる。位数が p の冪になる部分群はある p-Sylow 部分群に含まれる。

Sylow の定理は有限群を扱っている書籍やサイトなら証明付きで解説されているはずなので、証明や関連事項について知りたい方は適切な書籍やサイトを見つけて参考にしていただきたい。

次の命題はコンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の構造を記述するときに利用する。

命題 4.1.6. 群 G の単位元を e で表す。任意の $g \in G$ が $g^2 = e$ を満たすならば、G は Abel 群になる。さらに G が有限群ならば、G は $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積に同型になる。

証明　任意の $g \in G$ について $g^2 = e$ が成り立つので、$g = g^{-1}$ が成り立つことに注意しておく。任意の $x, y \in G$ に対して

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

となり、G は Abel 群である。

次に G の部分群の列 $A_1, A_2, \dots$ を構成する。G が単位元以外の元を持たなければ $\mathbb{Z}_2$ の 0 個の積とみなす。$G\backslash\{e\} \neq \emptyset$ ならば、$a_1 \in G\backslash\{e\}$ をとり、$A_1 = \langle a_1\rangle$ とする。$G\backslash A_1 = \emptyset$ ならば、$G = A_1 \cong \mathbb{Z}_2$ が成り立つ。$G\backslash A_1 \neq \emptyset$ ならば、$a_2 \in G\backslash A_1$ をとり、$A_2 = A_1\langle a_2\rangle$ とする。補題 4.1.1 より $A_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ が成り立つ。$G\backslash A_2 = \emptyset$ ならば、$G = A_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ が成り立つ。$G\backslash A_2 \neq \emptyset$ ならば、$a_3 \in G\backslash A_2$ をとり、$A_3 = A_2\langle a_3\rangle$ とする。補題 4.1.1 より $A_3 \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ が成り立つ。この操作を続けると、G が有限群のときは、ある自然数 k が存在して $G = A_k \cong (\mathbb{Z}_2)^k$ が成り立つ。

定義 4.1.7. 群 G が位相空間でもあり、群構造から定まる写像

$$G \times G \to G\ ;\ (g, h) \mapsto gh, \quad G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$$

が連続になるとき、G を**位相群**という。

補題 4.1.8. 連結位相群 G の離散正規部分群は G の中心に含まれる。

証明 A を G の離散正規部分群とする。$a \in A$ を任意にとる。

$$f_a : G \to G\ ;\ g \mapsto gag^{-1}$$

によって f_a を定める。f_a は連続写像になる。A が G の正規部分群であることより、$f_a(G) \subset A$ が成り立つ。$f_a(G)$ は連結であり、A は離散的なので、$f_a(G)$ は一点になり、$f_a(e) = a$ に一致する。すなわち、任意の $g \in G$ に対して $gag^{-1} = a$ が成り立つ。これより、a は G の中心に含まれ、A は G の中心に含まれる。

系 4.1.9. 連結位相群 G から位相群 G' への被覆準同型写像 $\pi : G \to G'$ に対して、π の核 $\ker \pi$ は G の中心に含まれる離散部分群になる。

証明 準同型写像 π の核 $\ker \pi$ は G の正規部分群になる。さらに π は被覆写像なので、$\ker \pi$ の位相は離散的になる。つまり、$\ker \pi$ は連結位相群の離散正規部分群である。したがって、補題 4.1.8 より、$\ker \pi$ は G の中心に含まれる。

系 4.1.10. 連結位相群 G を定義域にする位相群の被覆準同型写像と G の中心の離散部分群は、被覆準同型写像の核を対応させることにより一対一に対応する。さらに、G が連結 Lie 群の場合、G を定義域にする Lie 群の被覆準同型写像と G の中心の離散部分群は、被覆準同型写像の核を対応させることにより一対一に対応する。

証明 系 4.1.9 より、G を定義域にする被覆準同型写像の核は G の中心に含まれる離散部分群になる。逆に G の中心に含まれる離散部分群 Z に対して、Z は G の正規部分群になり、$G \to G/Z$ は位相群の被覆準同型写像になる。さらに、この被覆準同型写像の核は Z である。

G が連結 Lie 群の場合、G の中心に含まれる離散部分群 Z に対して、$G \to G/Z$ は Lie 群の被覆準同型写像になることから主張が成り立つことがわかる。

4.2 コンパクト Lie 群

この節ではコンパクト Lie 群はコンパクト Riemann 対称空間になることを示し、その基本的な性質を解説する。

後で必要になる一般の Lie 群の逆元を対応させる写像の性質を示しておく。

補題 4.2.1. G を Lie 群とし

$$\mu : G \times G \to G\ ;\ (x, y) \mapsto xy,$$
$$\iota : G \to G\ ;\ x \mapsto x^{-1}$$

によって G の積から定まる写像 μ と逆元を対応させる写像 ι を定める。G の単位元を e で表し、$\mathfrak{g} = T_eG$ とすると、μ と ι の微分写像は次の等式を満たす。

$$d\mu_{(e,e)}(X, Y) = X + Y, \quad d\iota_e(X) = -X \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

証明　G の曲線 c_X, c_Y を

$$c_X(0) = e, \quad \left.\frac{d}{dt}c_X(t)\right|_{t=0} = X, \quad c_Y(0) = e, \quad \left.\frac{d}{dt}c_Y(t)\right|_{t=0} = Y$$

を満たすようにとる。微分写像の線形性より

$$\begin{aligned} d\mu_{(e,e)}(X,Y) &= d\mu_{(e,e)}(X,0) + d\mu_{(e,e)}(0,Y) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\mu(c_X(t), e)\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt}\mu(e, c_Y(t))\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}c_X(t)\right|_{t=0} + \left.\frac{d}{dt}c_Y(t)\right|_{t=0} = X + Y \end{aligned}$$

が成り立つ。次に $c_X(t)\iota(c_X(t)) = c_X(t)c_X(t)^{-1} = e$ を $t = 0$ で微分すると

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\mu(c_X(t), \iota(c_X(t)))\right|_{t=0} = d\mu_{(e,e)}(X, d\iota_e(X)) = X + d\iota_e(X)$$

となるので、$d\iota_e(X) = -X$ が成り立つ。

定理 1.4.4 よりコンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在する。さらに、連結コンパクト Lie 群は両側不変 Riemann 計量に関してコンパクト Riemann 対称空間になることを次で示す。

定理 4.2.2. 連結コンパクト Lie 群は両側不変 Riemann 計量に関してコンパクト Riemann 対称空間になり、点対称は次の等式で定まる。

$$s_g(x) = gx^{-1}g \quad (g, x \in G).$$

証明　G を連結コンパクト Lie 群とし、G の単位元を e で表す。$\mathfrak{g} = T_eG$ とおく。まず、補題 4.2.1 で定めた ι が G の両側不変 Riemann 計量に関して等長変換であること示す。任意の $g, x \in G$ に対して

$$\iota \circ L_g(x) = (gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1} = R_g \circ \iota(x)$$

となるので、$\iota \circ L_g = R_g \circ \iota$ が成り立つ。任意の $X \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned} d\iota_g((dL_g)_e(X)) &= d(\iota \circ L_g)_e(X) = d(R_g \circ \iota)_e(X) = (dR_g)_e(d\iota_e(X)) \\ &= -(dR_g)_e(X) \end{aligned}$$

となり、

$$d\iota_g(X) = -(dR_g)_e \circ (dL_g)_e^{-1}(X) \quad (X \in T_gG)$$

が成り立つ。よって、$\iota : G \to G$ は微分同型写像であり、各点の微分写像は等長的線形同型写像になるので、ι は G の両側不変 Riemann 計量に関して等長変換になる。

ι は単位元 e を固定し、e を通る測地線の向きを逆向きにするので、e は ι の孤立固定点になる。また、$\iota^2 = 1_G$ が成り立つ。これらより、ι は e における点対称の候補になる。$g \in G$ における点対称の候補は $L_g \circ \iota \circ L_g^{-1}$ である。$L_g \circ \iota \circ L_g^{-1}(g) = g$ が成り立ち、g は $L_g \circ \iota \circ L_g^{-1}$ の孤立固定点になる。さらに、$(L_g \circ \iota \circ L_g^{-1})^2 = L_g \circ \iota^2 \circ L_g^{-1} = 1_G$ となるので、G は両側不変 Riemann 計量に関して $L_g \circ \iota \circ L_g^{-1}$ を g における点対称とする Riemann 対称空間になる。$x \in G$ に対して

$$L_g \circ \iota \circ L_g^{-1}(x) = L_g((g^{-1}x)^{-1}) = gx^{-1}g$$

が成り立つので、$s_g(x) = gx^{-1}g$ である。

注意 4.2.3. コンパクト Lie 群が連結ではなくても

$$s_g(x) = gx^{-1}g \quad (g, x \in G)$$

によって点対称 s_g を定めると、Riemann 対称空間の定義の連結性以外の条件をすべて満たすので、コンパクト Lie 群に限って連結ではない場合でも Riemann 対称空間として扱う。ただし、連結性を使って導かれている Riemann 対称空間の性質を扱うときには注意が必要である。

たとえば、注意 3.2.2 で述べた $s_x(y) = y$ が成り立つならば $s_y(x) = x$ が成り立つという主張の証明には、コンパクト Riemann 対称空間が連結であることを使っている。連結とは限らないコンパクト Lie 群の場合は、上で述べたように $s_x(y) = xy^{-1}x$ によって点対称を定めるので、$s_x(y) = y$ が成り立つならば $xy^{-1}x = y$ となる。両辺に左から yx^{-1} をかけると $x = yx^{-1}y$ となり $s_y(x) = x$ が成り立つことがわかる。したがって、連結とは限らないコンパクト Lie 群の場合でも、$s_x(y) = y$ が成り立つならば $s_y(x) = x$ が成り立つ。

定理 4.2.2 の別証明の概略 $G \times G$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma : G \times G \to G \times G \ ; \ (g_1, g_2) \to (g_2, g_1)$$

によって定める。

$$F(\sigma, G \times G) = \{(g, g) \mid g \in G\}$$

が成り立ち、これは G と Lie 群として同型である。特に連結になる。これを ΔG と書くことにする。すると、$(G \times G, \Delta G)$ はコンパクト Riemann 対称対になる。よって定理 2.5.7 より $(G \times G)/\Delta G$ には $G \times G$ の作用が等長的になる Riemann 計量が存在し、点 $(g_1, g_2)\Delta G \in (G \times G)/\Delta G$ の点対称を

$$s_{(g_1,g_2)}((x_1, x_2)\Delta G) = (g_1, g_2)\sigma((g_1, g_2)^{-1}(x_1, x_2))\Delta G$$

によって定めると、$(G \times G)/\Delta G$ は Riemann 対称空間になる。ここで、

$$\Phi : (G \times G)/\Delta G \to G \ ; \ (g_1, g_2)\Delta G \to G \ ; \ (g_1, g_2)\Delta \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

によって写像 Φ を定める。Φ は well-defined であることがわかる。さらに、Φ は微分同型写像である。$G \times G$ は G に

$$(g_1, g_2)x = g_1 x g_2^{-1} \qquad (g_1, g_2, x \in G)$$

によって Lie 変換群として推移的に作用する。G の単位元 e について

$$(G \times G)_e = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1 e g_2^{-1} = e\} = \Delta G$$

が成り立つ。$G \times G$ の作用が等長的になる $(G \times G)/\Delta G$ の Riemann 計量は Φ によって G の両側不変 Riemann 計量に対応する。$(G \times G)/\Delta G$ の点対称を Φ によって G に写すと

$$s_g(x) = g x^{-1} g \quad (g, x \in G)$$

となることがわかる。

注意 4.2.4. 定理 2.5.8 の指数写像の記述と定理 4.2.2 の別証明の概略より、連結コンパクト Lie 群において単位元の接ベクトル空間をその Lie 環と同一視すると、$\exp = \mathrm{Exp}$ が成り立つことがわかる。特に、一径数部分群と単位元を始点とする測地線は同じものになる。

連結コンパクト Lie 群内で包含関係に関して極大なトーラスを**極大トーラス**と呼ぶ。定理 2.5.8 より次の定理を導くことができる。

定理 4.2.5. G を連結コンパクト Lie 群とする。T を G の極大トーラスとすると、次が成り立つ。

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}.$$

例 4.2.6. $U(n)$ において

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \middle| z_j \in U(1)\ (1 \leq j \leq n) \right\}$$

は極大トーラスになり、定理 4.2.5 より

$$U(n) = \bigcup_{g \in U(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ。これはユニタリ行列がユニタリ行列によって対角化可能であることに他ならない。

T は $U(n)$ において可換部分群としても極大であることを以下で示す。$z \in U(n)$ が T のすべての元と可換であると仮定する。このとき、$\{z\} \cup T$ の任意の元は互い

に可換になる。したがって、これらはユニタリ行列によって同時対角化可能である。すなわち、ある元 $g \in U(n)$ が存在して、

$$g(\{z\} \cup T)g^{-1} \subset T$$

が成り立つ。$gTg^{-1} \subset T$ より $gTg^{-1} = T$ が成り立ち、$gzg^{-1} \in T = gTg^{-1}$ を得る。よって、$z \in T$ となり、T の可換部分群としての極大性がわかる。

例 4.2.7. コンパクト Lie 群 G の単位元 e に関する極地は

$$F(s_e, G) = \{g \in G \mid s_e(g) = g\} = \{g \in G \mid g^2 = e\}$$

の各連結成分である。さらに、G が連結ならば、G の極大トーラス T をとると、G の任意の元は gtg^{-1} $(g \in G,\, t \in T)$ と表せる。

$$(gtg^{-1})^2 = gtg^{-1}gtg^{-1} = gt^2g^{-1}$$

となるので、$(gtg^{-1})^2 = e$ の必要十分条件は $t^2 = e$ である。したがって、

$$\{g \in G \mid g^2 = e\} = \bigcup_{g \in G} g\{t \in T \mid t^2 = e\}g^{-1}$$

が成り立つ。すなわち、G の任意の極地は $t^2 = e$ を満たす T の元 t によって

$$\{gtg^{-1} \mid g \in G\}$$

と表せる。一般にトーラスは

$$U(1)^n = U(1) \times \cdots \times U(1)$$

に Lie 群として同型なので、

$$\{(z_1, \ldots, z_n) \in U(1)^n \mid (z_1, \ldots, z_n)^2 = e\}$$

を求めておく。

$$(z_1, \ldots, z_n)^2 = (z_1^2, \ldots, z_n^2)$$

より、上の集合は

$$\{\pm 1\}^n = \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\}$$

に一致する。$G = U(n)$ の場合は、これは

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} \middle| \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = \pm 1 \right\}$$

に一致する。

補題 4.2.8. G をコンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量を導入して Riemann 対称空間とみなす。G の単位元を e で表す。$x, y \in G$ について以下が成り立つ。

(1) $s_e(x) = x$ の必要十分条件は $x^2 = e$ である。

(2) $x^2 = y^2 = e$ が成り立つとき、$s_x(y) = y$ の必要十分条件は $xy = yx$ である。

証明　(1) $s_e(x) = x^{-1}$ よりわかる。

(2) $s_x(y) = xy^{-1}x$ より $s_x(y) = y$ は $xy^{-1}x = y$ と同値であり、さらに $xy^{-1} = yx^{-1}$ と同値である。最後の等式は $xy = yx$ と同値である。

補題 4.2.9. G をコンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量を導入して Riemann 対称空間とみなす。G の単位元を e で表す。A は G の極大対蹠集合であり、e を含むとすると、A は G の部分群になり $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型になる。

証明　A は e を含むので、任意の $x \in A$ について

$$x^{-1} = s_e(x) = x$$

となり、$x^2 = e$ が成り立つ。さらに任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ が成り立つので、補題 4.2.8 より $xy = yx$ が成り立つ。任意の $z \in A$ について

$$s_z(xy) = z(xy)^{-1}z = zy^{-1}x^{-1}z = zyxz = yxz^2 = yx = xy$$

となるので、$A \cup \{xy\}$ は対蹠集合になる。A の極大性より $xy \in A$ が成り立つ。よって $xy \in A$ となり、A は G の部分群である。A は有限 Abel 群になり、A の各元の位数は 2 以下なので、命題 4.1.6 より $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型になる。

定義 4.2.10. 補題 4.2.9 の部分群を**極大対蹠部分群**と呼ぶ。大対蹠集合の場合は**大対蹠部分群**と呼ぶ。

コンパクト Lie 群の場合には左移動や右移動により、極大対蹠集合は単位元を含むようにできるので、極大対蹠部分群に写る。よって、極大対蹠部分群のみ考察の対象にする。

注意 4.2.11. コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群が $\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積に同型になるという補題 4.2.9 の以前の証明は、有限 Abel 群の基本定理 (有限 Abel 群は巡回群のいくつかの積に同型) を利用していたが、井川治さんのアイデアで命題 4.1.6 を利用する証明に変更した。

1.7 節で定めた記号をそのまま使うことにする。

例 4.2.12. $U_{\mathbb{K}}(n)$ の極大対蹠部分群を求める。A を $U_{\mathbb{K}}(n)$ の極大対蹠部分群とする。A の各元は 2 乗すると単位行列になるので、固有値は ± 1 のみである。さらに A は可換なので、$U_{\mathbb{K}}(n)$ の元による同時対角化可能であり、対角成分は ± 1 のみで

ある。つまり、ある $g \in U_{\mathbb{K}}(n)$ が存在して $gAg^{-1} \subset \Delta_n$ が成り立つ。Δ_n は対蹠部分群になるので、A の極大性より

$$gAg^{-1} = \Delta_n$$

を得る。つまり、$U_{\mathbb{K}}(n)$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役になる。よって、極大対蹠部分群は大対蹠部分群にもなっている。これより、$\#_2 U_{\mathbb{K}}(n) = 2^n$ が成り立つ。言い換えると、Δ_n は $O(n), U(n)$ の極大対蹠部分群であり、大対蹠部分群にもなっている。さらに $\#_2 O(n) = \#_2 U(n) = 2^n$ が成り立つ。

例 4.2.13. $U_{\mathbb{K}}(n)$ の極地を明らかにするために、単位元における点対称の固定点集合を求める。$F(s_{1_n}, U_{\mathbb{K}}(n))$ の任意の元の 2 乗は単位行列であり、その固有値は ± 1 のみなので、

$$F(s_{1_n}, U_{\mathbb{K}}(n)) = \bigcup_{g \in U_{\mathbb{K}}(n)} g\Delta_n g^{-1}$$

が成り立つ。この右辺を具体的に記述するために記号を準備しておく。$1 \leq i, j \leq n$ が $i \neq j$ を満たすとき、1_n の (i,i) 成分と (j,j) 成分を 0 に置き換え、(i,j) 成分と (j,i) 成分を 1 に置き換えた行列を $E_{ij} \in U_{\mathbb{K}}(n)$ で表すと $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ が成り立ち、

$$E_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix} E_{ij}^{-1}$$

は ϵ_i と ϵ_j を入れ換えたものになる。$0 \leq i \leq n$ について

$$x_i = \begin{bmatrix} -1_i & \\ & 1_{n-i} \end{bmatrix} \in \Delta_n$$

とおいて

$$M_i = \{ g x_i g^{-1} \mid g \in U_{\mathbb{K}}(n) \}$$

によって M_i を定める。M_i が連結であることを $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ のそれぞれの場合に示す。$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合、$U(n)$ の連結性から M_i は連結になる。$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合、$\det(x_1) = -1$ なので、$O(n) = SO(n) \cup x_1 SO(n)$ は連結成分への分解になる。さらに、$x_1 x_i x_1^{-1} = x_i$ が成り立つので、

$$M_i = \{ g x_i g^{-1} \mid g \in O(n) \} = \{ g x_i g^{-1} \mid g \in SO(n) \}$$

を得る。特に、M_i は連結であることがわかる。

$\Delta_n \cap M_i$ は -1 の個数が i である Δ_n の元の全体になり、E_{ij} による共役によってそれらは写り合う。したがって、

$$F(s_{1_n}, U_{\mathbb{K}}(n)) = \bigcup_{i=0}^{n} M_i$$

が成り立つ。M_i は固有値 -1 の重複度が i で固有値 $+1$ の重複度が $n-i$ の行列の全体になるので、i と j が異なれば $M_i \cap M_j = \emptyset$ が成り立つ。つまり、上の M_i の和は互いに素な和である。以上より、各 M_i は $U(n)$ の極地である。$M_0 = \{1_n\}, M_n = \{-1_n\}$ となり、これらは極である。$1 \leq i \leq n-1$ に対する M_i を調べる。

$$U_{\mathbb{K}}(n)_{x_i} = \{g \in U_{\mathbb{K}}(n) \mid g x_i g^{-1} = x_i\} = \{g \in U_{\mathbb{K}}(n) \mid g = x_i g x_i^{-1}\}.$$

そこで、

$$\sigma_i : U_{\mathbb{K}}(n) \to U_{\mathbb{K}}(n)\ ;\ g \mapsto x_i g x_i^{-1}$$

によって σ_i を定めると、$i = 0, n$ 以外の場合に σ_i は $U_{\mathbb{K}}(n)$ の対合的自己同型写像になる。さらに $U_{\mathbb{K}}(n)$ の元 g を i 行、i 列までとそれ以降のブロックに分けて

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

と表示すると

$$\sigma_i(g) = \begin{bmatrix} -1_i & \\ & 1_{n-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1_i & \\ & 1_{n-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。したがって、

$$U_{\mathbb{K}}(n)_{x_i} = \left\{ \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} g_{11} \in U_{\mathbb{K}}(i) \\ g_{22} \in U_{\mathbb{K}}(n-i) \end{array} \right\}$$

を得る。これを $U_{\mathbb{K}}(i) \times U_{\mathbb{K}}(n-i)$ と書く。これは連結になる。さらに $(U_{\mathbb{K}}(n), U_{\mathbb{K}}(i) \times U_{\mathbb{K}}(n-i))$ はコンパクト Riemann 対称対になり、M_i は $U_{\mathbb{K}}(n)/U_{\mathbb{K}}(i) \times U_{\mathbb{K}}(n-i)$ に微分同型になる。

M_i の幾何学的な意味を与えておく。M_i の各元は固有値 -1 の重複度が i で固有値 1 の重複度が $n-i$ の直交 (ユニタリ) 行列なので、-1 の固有空間を対応させることで、M_i は $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ 内の i 次元実 (複素) 部分空間、すなわち、実 (複素)Grassmann 多様体の元に対応する。

例 4.2.14. $U(n)$ による対称 R 空間の例を挙げておく。

$$\sigma : U(n) \times U(n) \to U(n) \times U(n)\ ;\ (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$$

によって $U(n) \times U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を定める。

$$F(\sigma, U(n) \times U(n)) = \Delta U(n) := \{(g, g) \mid g \in U(n)\}$$

が成り立つ。これより、$(U(n) \times U(n), \Delta U(n))$ はコンパクト Riemann 対称対である。σ の単位元における微分写像は

$$d\sigma_{(1_n, 1_n)}(X_1, X_2) = (X_2, X_1) \quad (X_1, X_2 \in \mathfrak{u}(n))$$

となる。$d\sigma_{(1_n,1_n)}$ の ± 1 固有空間は

$$\Delta\mathfrak{u}(n) = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{u}(n)\}, \quad \mathfrak{m} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{u}(n)\}$$

である。$\mathrm{Ad}_{U(n)\times U(n)}(\Delta U(n))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は

$$\mathrm{Ad}_{U(n)\times U(n)}(g, g)(X, -X) = (\mathrm{Ad}_{U(n)}(g)X, -\mathrm{Ad}_{U(n)}(g)X) \quad (X \in \mathfrak{u}(n))$$

と記述できる。

$$\mathfrak{u}(n) \to \mathfrak{m}\ ;\ X \mapsto (X, -X)$$

により、$\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{m}$ を同一視すると、$\mathrm{Ad}_{U(n)\times U(n)}(\Delta U(n))$ の $\mathfrak{m}$ への作用は $U(n)$ の $\mathfrak{u}(n)$ への随伴作用に他ならない。そこで、以下では $U(n)$ の随伴作用について考える。

$$y_i = \sqrt{-1}x_i \quad (0 \le i \le n)$$

とおくと、$y_i \in \mathfrak{u}(n)$ が成り立つ。さらに

$$N_i = \mathrm{Ad}_{U(n)}(U(n))y_i \subset \mathfrak{u}(n)$$

とおくと

$$N_i \cong M_i \cong U(n)/U(i) \times U(n-i)$$

が成り立ち、これらは対称 R 空間である。つまり、複素 Grassmann 多様体は対称 R 空間である。

4.3 奇数次数の被覆準同型写像

この節では奇数次数の被覆準同型写像を通して、極大対蹠部分群の全体は変化しないことを示す。この節の内容はほぼ Tanaka-T.[13] に従っている。

補題 4.3.1. G, G' をコンパクト Lie 群とし、$\pi : G \to G'$ を奇数次数の被覆準同型写像とする。A' を G' の対蹠部分群とすると、G の対蹠部分群 A が存在して次の条件を満たす。

(1) A は $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群であり、$\pi^{-1}(A') = A\ker\pi$ かつ $|A| = |A'|$ を満たす。

(2) π の A への制限は A から A' への同型写像になる。

証明 π は被覆準同型写像なので、$\ker\pi$ は G の離散的な部分群になる。G はコンパクトなので、$\ker\pi$ は有限部分群である。さらに、$|\ker\pi|$ は π の次数に一致し奇数である。$|\pi^{-1}(A')| = |A'|\cdot|\ker\pi|$ が成り立つ。$|A'|$ は 2 の冪であり、$|\ker\pi|$ は奇数である。Sylow の定理 (定理 4.1.5) より $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 A が存在し

て $|A| = |A'|$ が成り立つ。G の単位元を e で表す。系 4.1.4 より、A の元の位数は 2 の冪になり、$\ker\pi$ の元の位数は奇数なので、$A \cap \ker\pi = \{e\}$ が成り立つ。したがって、補題 4.1.1 より $A\ker\pi$ の元は A の元と $\ker\pi$ の元の積に一意的に表され、

$$|A\ker\pi| = |A| \cdot |\ker\pi| = |A'| \cdot |\ker\pi| = |\pi^{-1}(A')|$$

が成り立つ。$A\ker\pi \subset \pi^{-1}(A')$ なので、$A\ker\pi = \pi^{-1}(A')$ となる。$A \cap \ker\pi = \{e\}$ より、π の A への制限 $\pi|_A : A \to G'$ は単射になる。$A \subset \pi^{-1}(A')$ であり π は全射だから、$\pi(A) \subset \pi(\pi^{-1}(A')) = A'$ が成り立つ。π の A への制限は単射なので、$|\pi(A)| = |A| = |A'|$ を得る。これより、$\pi(A) = A'$ となり、$\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。A' は G' の対蹠部分群なので、A は G の対蹠部分群になる。

定理 4.3.2. G, G' をコンパクト Lie 群とし、$\pi : G \to G'$ を奇数次数の被覆準同型写像とする。G, G' の単位連結成分をそれぞれ G_0, G'_0 で表す。

(1) A が G の対蹠部分群ならば、$\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。A が G の極大対蹠部分群ならば、$\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 が共役ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は共役である。G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 が G_0 共役ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G'_0 共役である。

(2) A' が G' の対蹠部分群ならば、G の対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。A' が G' の極大対蹠部分群ならば、G の極大対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。G' の極大対蹠部分群 A'_1 と A'_2 が共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 は共役である。G の単位連結成分 G_0 が $\ker\pi$ を含むときは、G' の極大対蹠部分群 A'_1 と A'_2 が G'_0 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 は G_0 共役である。

証明　(1) A が G の対蹠部分群ならば、A の元の位数は 2 以下である。よって $\pi(A)$ の元の位数も 2 以下になり、$\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。

A が G の極大対蹠部分群ならば、すでに示したことより $\pi(A)$ は G' の対蹠部分群である。$\pi(A)$ が G' の極大対蹠部分群であることを示すために、$\pi(A) \subset B' \subset G'$ を満たす対蹠部分群 B' をとる。補題 4.3.1 より、G の対蹠部分群 B が存在して、B は $\pi^{-1}(B')$ の 2-Sylow 部分群であり、$\pi^{-1}(B') = B\ker\pi$ が成り立つ。$\pi(A) \subset B'$ より $A \subset \pi^{-1}(\pi(A)) \subset \pi^{-1}(B')$ となる。A の位数は 2 の冪なので、Sylow の定理 (定理 4.1.5) よりある $g \in \pi^{-1}(B')$ が存在して $gAg^{-1} \subset B$ が成り立つ。A は G の極大対蹠部分群なので、gAg^{-1} も G の極大対蹠部分群であり、$gAg^{-1} = B$ が成り立つ。これらより、$\pi(A) \subset B' = \pi(B) = \pi(gAg^{-1}) = \pi(g)\pi(A)\pi(g)^{-1}$ となり、これらの元の個数が等しいことから $\pi(A) = B'$ が成り立つ。したがって、$\pi(A)$ は G' の極大対蹠部分群である。

G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 が共役ならば、ある $g \in G$ が存在して $A_2 = gA_1g^{-1}$ が成り立つ。π を作用させると $\pi(A_2) = \pi(gA_1g^{-1}) = \pi(g)\pi(A_1)\pi(g)^{-1}$ となり、$\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G' の共役な極大対蹠部分群であることがわかる。

G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 が G_0 共役ならば、ある $g \in G_0$ が存在して $A_2 = gA_1g^{-1}$ が成り立つ。π を作用させると $\pi(A_2) = \pi(gA_1g^{-1}) = \pi(g)\pi(A_1)\pi(g)^{-1}$ となり、$\pi(g) \in \pi(G_0) \subset G'_0$ なので、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1)$ と $\pi(A_2)$ は G'_0 共役であることがわかる。

(2) A' が G' の対蹠部分群ならば、補題 4.3.1 より、G の対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。

さらに A' が G' の極大対蹠部分群ならば、この G の対蹠部分群 A も極大対蹠部分群になることを示す。そのために $A \subset B \subset G$ を満たす対蹠部分群 B をとる。B の位数は 2 の冪であり、$\ker\pi$ の位数は奇数なので、$B \cap \ker\pi = \{e\}$ が成り立つ。よって、π の B への制限 $\pi|_B : B \to G'$ は単射になる。これより、$\pi|_B : B \to \pi(B)$ は同型写像になる。特に $\pi(B)$ は G' の対蹠部分群である。$A' = \pi(A) \subset \pi(B)$ であり、A' の極大性より $\pi(A) = \pi(B)$ が成り立つ。π は B において単射なので、$A = B$ が成り立つ。したがって、A は G の極大対蹠部分群である。

G' の極大対蹠部分群 A'_1 と A'_2 が共役ならば、ある元 $g' \in G'$ が存在し、$A'_2 = g'A_1(g')^{-1}$ が成り立つ。さらに、G の極大対蹠部分群 A_1 と A_2 が存在して $\pi|_{A_i} : A_i \to A'_i$ $(i = 1, 2)$ は同型写像になる。$\pi(g) = g'$ を満たす $g \in G$ をとる。

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(A'_2) &= \pi^{-1}(g'A'_1(g')^{-1}) = \{x \in G \mid \pi(x) \in g'A'_1(g')^{-1}\} \\
&= \{x \in G \mid (g')^{-1}\pi(x)g' \in A'_1\} = \{x \in G \mid \pi(g^{-1}xg) \in A'_1\} \\
&= \{x \in G \mid g^{-1}xg \in \pi^{-1}(A'_1)\} = \{x \in G \mid x \in g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1}\} \\
&= g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1}
\end{aligned}$$

となり、$\pi^{-1}(A'_2) = g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1}$ を得る。A_1 は $\pi^{-1}(A'_1)$ の 2-Sylow 部分群なので、gA_1g^{-1} は $g\pi^{-1}(A'_1)g^{-1} = \pi^{-1}(A'_2)$ の 2-Sylow 部分群である。A_2 も $\pi^{-1}(A'_2)$ の 2-Sylow 部分群なので、Sylow の定理 (定理 4.1.5) より gA_1g^{-1} と A_2 は $\pi^{-1}(A'_2)$ の元により共役になり、A_1 と A_2 は G の元により共役になる。

さらに、G_0 が $\ker\pi$ を含むと仮定する。G' の極大対蹠部分群 A'_1 と A'_2 が G'_0 共役ならば、上の議論において $g' \in G'_0$ とできる。さらに $\pi(g) = g'$ を満たす g は $g \in G_0$ とできることを示す。G' の単位元と g' を結ぶ曲線をとると、この曲線は G'_0 に含まれる。この曲線の G への持ち上げを始点が G の単位元になるようにとる。するとこの持ち上げは G_0 に含まれる。そこで、この持ち上げの終点を g とすると $\pi(g) = g'$ と $g \in G_0$ が成り立つ。補題 4.3.1 より、$\pi^{-1}(A'_2) = A_2 \ker\pi$ が成り立つ。gA_1g^{-1} と A_2 は $\pi^{-1}(A'_2)$ の元により共役になるので、ある $a \in A_2$ と $z \in \ker\pi$ によって $azgA_1g^{-1}(az)^{-1} = A_2$ が成り立つ。これより、$zgA_1g^{-1}z^{-1} = a^{-1}A_2a = A_2$ となる。仮定より $z \in \ker\pi \subset G_0$ だから $zg \in G_0$ となり、A_1 と A_2 は G_0 の元で共役になる。

4.4　ユニタリ群の商群の極大対蹠部分群の分類

ユニタリ群の商群の極大対蹠部分群を分類することが、この節の目的である。この節のほとんどの部分は Tanaka-T.[11] に従っている。まずユニタリ群の基本的事項をいくつか調べておく。

命題 4.4.1. ユニタリ群 $U(n)$ の中心は $\{z1_n \mid z \in U(1)\}$ になる。

問題 4.4.2. 命題 4.4.1 を証明せよ。

μ を自然数とし、$\mathbb{Z}_\mu = \{z1_n \mid z^\mu = 1, z \in U(1)\}$ とおく。$U(n)$ の商群はある自然数 μ によって $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と記述できる。自然な射影を $\pi_n : U(n) \mapsto U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ で表す。π_n は被覆準同型写像になる。θ を 1 の原始 2μ 乗根とすると、

$$\ker \pi_n = \{\theta^{2m} 1_n \mid m \in \mathbb{Z}\} = \langle \theta^2 \rangle 1_n = \mathbb{Z}_\mu$$

が成り立つ。$\theta^\mu = -1$ が成り立つことに注意しておく。

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果を記述するために、記号を準備しておく。行列 $A = (a_{ij})$ と B のテンソル積を

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

によって定める。ここでは詳しく解説しないが、行列のテンソル積については、たとえば Zhan[14] に基本的な性質の解説がある。この講義で利用する行列のテンソル積の性質は、すべて [14] で扱われている。

問題 4.4.3. 適切な設定のもとで、行列 A, B, C, D に対して行列の積とテンソル積に関する次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

二面体群 $D[4]$ を

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$$

によって定める。$D[4]$ は $O(2)$ の部分群であり、$\mathbb{R}^2$ の座標軸と平行な辺を持ち原点を中心に持つ正方形を保つ等長変換の全体である。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s}$$

$$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4]\,(1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \subset O(n)$$

で表す。

$$(d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0)(d_1' \otimes \cdots \otimes d_s' \otimes d_0') = d_1 d_1' \otimes \cdots \otimes d_s d_s' \otimes d_0 d_0'$$

が成り立つことから、$D(s,n)$ は $O(n)$ の部分群であることがわかる。

問題 4.4.4. $D(2,4)$ を 4 次正方行列で具体的に記述せよ。

以上の準備のもと、$U(n)$ の商群の極大対蹠部分群の分類は次の定理のように記述できる。

定理 4.4.5. μ を自然数、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n).$$

特に $\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の共役を除いて唯一の極大かつ大対蹠部分群である。

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 4.4.6. 包含関係 $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より、

$$D(k-1,2^k) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes D[4] = D(k,2^k)$$

が成り立つので、$D(k-1,2^k)$ は極大ではない。よって、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は除かれる。

証明 A を $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群とし、$B = \pi_n^{-1}(A)$ とおく。

補題 4.4.7. $\theta B = B$ が成り立つ。

証明 $\theta^2 1_n \in \ker \pi_n$ なので、$\pi_n(\theta 1_n)$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対合的な元であり、中心に含まれる。よって、$A\langle \pi_n(\theta 1_n)\rangle$ は A を含む対蹠部分群になる。A の極大性より $A = A\langle \pi_n(\theta 1_n)\rangle$ となり、$\pi_n(\theta 1_n) \in A$ が成り立つ。したがって、$\theta 1_n \in B$ となり、$\theta B = B$ を得る。

補題 4.4.8. A の元は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ において $\pi(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ の元と共役である。さらに B が可換ならば、A は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ において $\pi(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ と共役である。

証明　$c \in B$ とすると $\pi_n(c) \in A$ より $\pi_n(c)^2$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の単位元になるので、ある $\phi \in \mathbb{Z}_\mu$ が存在して $c^2 = \phi$ となる。これより、ある整数 k に対して $\phi = \theta^{2k} 1_n$ である。c を対角化する行列を u とすると、$ucu^{-1} = d$ は対角行列になる。よって

$$d^2 = uc^2u^{-1} = u\phi u^{-1} = \phi = \theta^{2k} 1_n$$

となる。これより d の対角成分は $\pm\theta^k$ である。k が偶数のときにはある $I \in \Delta_n$ に対して $\pi_n(d) = \pi_n(I)$、k が奇数のときにはある $I \in \Delta_n$ に対して $\pi_n(d) = \pi_n(\theta I)$ が成り立つ。したがって $\pi_n(c) \in A$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の元 $\pi_n(u)$ により $\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ の元と共役である。

B が可換ならば B のすべての元は同時対角化可能である。すなわち、ある $u \in U(n)$ が存在して A は $\pi_n(u)$ により $\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ の部分集合と共役である。したがって、はじめから $A \subset \pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ と仮定してよい。$\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ は対蹠集合であるから A の極大性より $A = \pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ が成立する。

補題 4.4.9. B の元 a, b に対して $ab = ba$ または $ab = -ba$ が成り立つ。

証明　$a, b \in B$ より $\pi_n(a), \pi_n(b) \in A$ だから $\pi_n(a)\pi_n(b) = \pi_n(b)\pi_n(a)$、すなわち $\pi_n(ab) = \pi_n(ba)$ となる。よってある $\phi \in \mathbb{Z}_\mu$ が存在して $ab = \phi ba$ が成り立つ。これより

$$b^2 = (a^{-1}\phi ba)^2 = a^{-1}\phi baa^{-1}\phi ba = \phi^2 a^{-1} b^2 a = \phi^2 b^2$$

となる。ここで ϕ および b^2 が $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の中心の元であることを用いた。したがって $\phi^2 = 1_n$ で $\phi = \pm 1_n$ となる。

補題 4.4.10. a, b, c が B の元で $ab = -ba$ を満たすならば、c, ac, bc, abc のうちどれか 1 つは a とも b とも可換である。

証明　補題 4.4.9 より $ac = \pm ca, bc = \pm cb$ である。$ac = ca$ かつ $bc = cb$ のときには c が a, b と可換である。$ac = ca$ かつ $bc = -cb$ のときには

$$\begin{aligned}
(ac)a &= a(ca) = a(ac), \\
(ac)b &= a(cb) = a(-bc) = (-ab)c = (ba)c = b(ac)
\end{aligned}$$

より ac が a, b と可換である。$ac = -ca$ かつ $bc = cb$ のときには

$$\begin{aligned}
(bc)a &= b(ca) = b(-ac) = (-ba)c = (ab)c = a(bc), \\
(bc)b &= b(cb) = b(bc)
\end{aligned}$$

より bc が a, b と可換である。$ac = -ca$ かつ $bc = -cb$ のときには

$$\begin{aligned}
(abc)a &= (ab)(ca) = (ab)(-ac) = a(-ba)c = a(ab)c = a(abc), \\
(abc)b &= (ab)(cb) = (ab)(-bc) = (-ab)(bc) = (ba)(bc) = b(abc)
\end{aligned}$$

より abc が a, b と可換である。

補題 4.4.11. B の元 a, b に対して $ab = -ba$ ならば次の (i) から (iv) が成り立つ。

(i) $\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(b) = 0$.

(ii) n は偶数である。($n = 2n'$ とおく)

(iii) a と b は $U(n)$ において、それぞれ $\{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{2\mu-1}\}I_{n'}$ の元に共役である。ただし、$I_{n'} = I_1 \otimes 1_{n'}$ である。

(iv) μ も偶数である。

証明 $ab = -ba$ より $a = -bab^{-1}$ だから $\mathrm{Tr}(a) = -\mathrm{Tr}(bab^{-1}) = -\mathrm{Tr}(a)$ となり、したがって $\mathrm{Tr}(a) = 0$ である。同様にして $\mathrm{Tr}(b) = 0$ となるので (i) が成立。補題 4.4.8 より、ある $I \in \Delta_n$ に対して $\pi_n(a)$ は $\pi_n(I)$ または $\pi_n(\theta I)$ に共役である。前者の場合、ある $\phi \in \mathbb{Z}_\mu$ に対して a は ϕI と共役で $\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(\phi I)$ となるが、左辺は 0 で右辺は $\phi\mathrm{Tr}(I)$ に等しいので $\mathrm{Tr}(I) = 0$ を得る。I は対角成分が $+1$ か -1 の対角行列であり、$\mathrm{Tr}(I) = 0$ より対角成分の $+1$ と -1 の個数は等しい。したがって、n は偶数であり $n = 2n'$ とおくと、I は $I_{n'}$ に共役になる。よって、a と $\phi I_{n'}$ は共役になる。これらより、a は $\mathbb{Z}_\mu I_{n'}$ の元と共役になる。後者の場合も同様に $\mathrm{Tr}(I) = 0$ を得、a と $\phi\theta I_{n'}$ は共役になる。これらより a は $\mathbb{Z}_\mu \theta I_{n'}$ の元と共役になる。いずれの場合も a は $\{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{2\mu-1}\}I_{n'}$ の元と共役になる。よって (ii) および (iii) が成立する。補題 4.4.9 の証明で見たように $a, b \in B$ ならばある $\phi \in \mathbb{Z}_\mu$ に対して $ab = \phi ba$ となる。いま $ab = -ba$ なので $\phi = -1 \in \mathbb{Z}_\mu$ より μ は偶数となる。よって (iv) が成立する。

補題 4.4.12. B が可換でないときには、B は $D[4] \otimes U(n')$ の部分群と共役であり、A は $\pi_n(D[4] \otimes U(n'))$ の部分群と共役である。

証明 仮定より $a, b \in B$ で $ab \neq ba$ となるものが存在する。このとき補題 4.4.9 より $ab = -ba$ であり、さらに補題 4.4.11 の (iii) より a, b はそれぞれ $\{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{2\mu-1}\}I_{n'}$ の元と共役である。a はある ν について $\theta^\nu I_{n'}$ と共役であり、$a' = \theta^{2\mu-\nu}a$ は $I_{n'}$ と共役である。補題 4.4.7 より $a' \in B$ が成り立つ。

$$a'b = \theta^{2\mu-\nu}ab = -\theta^{2\mu-\nu}ba = -b\theta^{2\mu-\nu}a = -ba'.$$

b についても同様の議論により $b' \in B$ をとり、$a'b' = -b'a'$ が成り立ち、b' は $I_{n'}$ と共役になるようにできる。したがって、最初から a, b は $I_{n'}$ と共役であるとしてよい。さらに $a = I_{n'}$ としてよい。$ab = -ba$ より $aba^{-1} = -b$ となる。

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$I_{n'} b I_{n'}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

となるので、$b_{11} = b_{22} = 0$ が成り立つ。さらに b は $I_{n'}$ と共役だから $b^2 = 1_n$ となり、

$$b^2 = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} b_{12}b_{21} & 0 \\ 0 & b_{21}b_{12} \end{bmatrix}$$

より $b_{12}b_{21} = b_{21}b_{12} = 1_{n'}$、すなわち $b_{21} = b_{12}^{-1}$ が成り立つ。以上より

$$b = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \in U(n') \times U(n')$$

に対して

$$\begin{aligned} uI_{n'}u^{-1} &= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1_{n'} & 0 \\ 0 & 1_{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & u_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{11}1_{n'}u_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & u_{22}1_{n'}u_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1_{n'} & 0 \\ 0 & 1_{n'} \end{bmatrix} = I_{n'} \end{aligned}$$

より、$U(n') \times U(n')$ の元による共役作用は $I_{n'}$ を固定する。$U(n') \times U(n')$ の元の b への共役作用は

$$\begin{aligned} ubu^{-1} &= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & u_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_{11}b_{12} \\ u_{22}b_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & u_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & u_{11}b_{12}u_{22}^{-1} \\ (u_{11}b_{12}u_{22}^{-1})^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。そこで、$u_{11} = 1_{n'}, u_{22} = b_{12}$ とすると、b は $U(n') \times U(n')$ の元によって

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_{n'} \\ 1_{n'} & 0 \end{bmatrix}$$

に共役になる。したがって、$U(n)$ の元による共役変換で

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes 1_{n'} = I_1 \otimes 1_{n'},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes 1_{n'} = K_1 \otimes 1_{n'}$$

としてよい。

ここで $\langle I_1, K_1\rangle = D[4]$ を示しておく。$I_1, K_1 \in D[4]$ より $\langle I_1, K_1\rangle \subset D[4]$ が成り立つ。

$$I_1K_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J_1$$

となり、$J_1^2 = -1_2$ なので、$D[4] \subset \langle I_1, K_1\rangle$ がわかる。以上より $\langle I_1, K_1\rangle = D[4]$ を得る。

上の結果を利用すると

$$\langle a, b\rangle = \langle I_1, K_1\rangle \otimes 1_{n'} = D[4] \otimes 1_{n'}$$

がわかる。補題 4.4.10 より任意の $c \in B$ について、c, ac, bc, abc のいずれかは a, b の両方と可換になる。そこで、$a = I_{n'}, b = K_{n'}$ の両方と可換な $U(n)$ の元の全体を求める。$I_{n'}$ と可換な元の全体は $U(n') \times U(n')$ である。

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} \in U(n') \times U(n')$$

について

$$uK_{n'} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{n'}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_2 \\ u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので、u が $K_{n'}$ と可換になるための必要十分条件は、$u_1 = u_2$ である。以上より

$$\{u \in U(n) \mid u \text{ は } a, b \text{ と可換}\} = 1_2 \otimes U(n')$$

が成り立つ。

補題 4.4.10 よりある $x \in D[4] \otimes U(n')$ が存在して、xc は a, b の両方と可換になる。先に示したことより $xc \in 1_2 \otimes U(n')$ が成り立つ。よって

$$c \in x^{-1}1_2 \otimes U(n') \subset D[4] \otimes U(n')$$

となる。したがって、$B \subset D[4] \otimes U(n')$ が成り立ち、A は $\pi_n(D[4] \otimes U(n'))$ の部分群である。

注意 4.4.13. 補題 4.4.12 の以前の証明では、中心体の概念とその性質を利用していたが、上の証明は直接的に行列の計算を利用したものである。

以上の補題をもとに定理を証明する。

(1) n または μ が奇数の場合

B が可換になることを示す。補題 4.4.9 より B が可換でなければ、$ab = -ba$ を満たす $a, b \in B$ が存在し、このとき補題 4.4.11 より n は偶数になる。よって n が奇数ならば B は可換である。μ が奇数のときは、定理 4.3.2 より $\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$

は極大対蹠部分群を変えないので、B は $\pi_n^{-1}(\pi_n(\Delta_n)) = \langle\theta\rangle\Delta_n$ と共役になり、特に B は可換である。B は $\langle\theta\rangle\Delta_n$ と共役になり、A は $\pi_n(\langle\theta\rangle\Delta_n) = \pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$ と共役になる。さらに μ が奇数のとき、$\theta^\mu = -1$ となる。$\mu = 2m-1$ とおくと、$\theta = -\theta^{2m}$ となり、

$$\pi_n(\theta\Delta_n) = \pi_n(-\theta^{2m}\Delta_n) = \pi_n(\Delta_n)$$

が成り立つ。したがって、$\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n) = \pi_n(\Delta_n)$ が成り立つ。

(2) n かつ μ が偶数の場合、B が可換であるときと B が非可換であるときに分けて考える。

B が可換のときは、(1) の場合と同様に B は $\{1, \theta, \dots, \theta^{2\mu-1}\}D(0,n)$ と共役になり、A は $\pi(D(0,n) \cup \theta D(0,n))$ と共役になる。

B が非可換のときは、先の結果より B は $D[4] \otimes U(n')$ の部分群と共役になり、A は $\pi_n(D[4] \otimes U(n'))$ の部分群と共役になる。共役なものと取り替えることにより、B は $D[4] \otimes U(n')$ の部分群であり、A は $\pi_n(D[4] \otimes U(n'))$ の部分群としてもよい。このとき、補題 4.4.12 の証明中に示したように $D[4] \otimes 1_{n'} \subset B$ が成り立つ。

$$B' = \{y \in U(n') \mid \exists x \in D[4]\ x \otimes y \in B\}$$

とおくと、$D[4] \otimes 1_{n'} \subset B$ より $1_{n'} \in B'$ となる。特に B' は空ではない。$y \in B'$ ならばある $x \in D[4]$ に対して $x \otimes y \in B$ が成り立つ。$x^{-1} \otimes y^{-1} = (x \otimes y)^{-1} \in B$ であり、$x^{-1} \in D[4]$ だから $y^{-1} \in B'$ である。$y_1, y_2 \in B'$ ならばある $x_1, x_2 \in D[4]$ に対して $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \in B$ が成り立つ。$x_1x_2 \otimes y_1y_2 = (x_1 \otimes y_1) \cdot (x_2 \otimes y_2) \in B$ であり、$x_1x_2 \in D[4]$ だから $y_1y_2 \in B'$ である。以上より B' は $U(n')$ の部分群である。

B' の定め方より $y \in B'$ に対してある $x \in D[4]$ が存在して $x \otimes y \in B$ となる。$x^{-1} \otimes 1_{n'} \in D[4] \otimes 1_{n'} \subset B$ だから、

$$B \ni (x^{-1} \otimes 1_{n'}) \cdot (x \otimes y) = 1_2 \otimes y.$$

これより $1_2 \otimes B' \subset B$ となり、

$$D[4] \otimes B' = (D[4] \otimes 1_{n'}) \cdot (1_2 \otimes B') \subset B$$

が成り立つ。逆に B の元は $x \otimes y$ $(x \in D[4],\ y \in U(n'))$ と表すことができ、$y \in B'$ である。よって、$x \otimes y \in D[4] \otimes B'$ となり、

$$B = D[4] \otimes B'$$

を得る。

$y \in B'$ に対して $1_2 \otimes y \in B$ だから、$\pi_n(1_2 \otimes y) \in A$ である。よって、$\pi_n(1_2 \otimes B') \subset A$ となり、$\pi_n(1_2 \otimes B')$ も $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群である。$U(n')$ から $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の自然な射影を $\pi_{n'}$ と書くことにすると、$\pi_{n'}(B')$ は $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群である。$A' = \pi_{n'}(B')$ とおくと、A' は $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群になることを示す。

$A' \subset \tilde{A}'$ となる $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群 $\tilde{A}'$ が存在すると仮定する。$B' \subset \pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}')$ が成り立つ。$D[4] \otimes 1_{n'}$ の元と $1_2 \otimes \pi^{-1}(\tilde{A}')$ の元は可換になるので、

$$\pi_n(D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}')) = \pi_n(D[4] \otimes 1_{n'}) \cdot \pi_n(1_2 \otimes \pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}'))$$

は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群である。さらに、これは A を含むので、A の極大性より A に一致する。したがって、

$$D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}') \subset B = D[4] \otimes B'$$

となり、$\pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}') \subset B'$ である。よって、$\pi_{n'}^{-1}(\tilde{A}') = B'$ となり、$\tilde{A}' = A'$ を得る。これより、A' は $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群である。

逆に $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 C に対して $\tilde{C} = \pi_n(D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(C))$ が $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群であることを示す。上と同様の議論から $\tilde{C}$ が $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群であることはすぐにわかる。$\tilde{A}$ を $\tilde{C}$ を含む $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠部分群とする。

$$D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(C) = \pi_n^{-1}(\tilde{C}) \subset \pi_n^{-1}(\tilde{A})$$

となり、補題 4.4.12 で示したことより

$$\pi_n^{-1}(\tilde{A}) \subset D[4] \otimes U(n').$$

さらに、この定理の証明の前半で示したことより

$$\pi_n^{-1}(\tilde{A}) = D[4] \otimes \tilde{B}$$

を満たす $U(n')$ の部分群 $\tilde{B}$ が存在し、$\pi_{n'}(\tilde{B})$ は $U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群になる。

$$D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(C) \subset \pi_n^{-1}(\tilde{A}) = D[4] \otimes \tilde{B}$$

より、$\pi_{n'}^{-1}(C) \subset \tilde{B}$ を得る。$\pi_{n'}$ を作用させると $C \subset \pi_{n'}(\tilde{B})$ となり、C の極大性より $C = \pi_{n'}(\tilde{B})$ であり $\pi_{n'}^{-1}(C) = \tilde{B}$、さらに $\tilde{A} = \tilde{C}$ が成り立つ。以上より $\tilde{C}$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群である。

以上の結果をもとにして定理を残った場合、すなわち n, μ がともに偶数の場合に、$n = 2^k \cdot l$ の k について帰納的に証明できる。$n = 2$ の場合を示せば十分である。上で示したことと包含関係 $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より、$\pi(D(1,2) \cup \theta D(1,2))$ だけが極大対蹠部分群の共役類を代表する。

$O(n)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠部分群の分類結果は次の定理で与えられる。

定理 4.4.14. 自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。$O(n)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

第5章　極大対蹠集合

5.1　連結コンパクト Lie 群の極地の極大対蹠集合

この節では連結コンパクト Lie 群の極地として実現されるコンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類をその連結コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類から導く方法を述べる。

G を連結コンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量が備わっているとする。

$$F(s_e, G) = \bigcup_{j=0}^{k} M_j$$

を連結成分への分解とする。$M_0 = \{e\}$ とする。各 M_j は極地になる。$x_j \in M_j$ をとると、

$$M_j = \{gx_jg^{-1} \mid g \in G\}$$

が成り立つ。ここまでは例 4.2.7 ですでにわかっている。

$M_j\ (j \neq 0)$ の極大対蹠集合の分類を考える。A を M_j の極大対蹠集合とすると、$A \cup \{e\}$ は G の対蹠集合になる。$A \cup \{e\}$ を含む G の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとる。$\tilde{A}$ は e を含む極大対蹠集合になり、補題 4.2.9 より G の極大対蹠部分群になる。G の極大対蹠部分群の共役類の分類ができていて、その代表元が

$$B_1, \ldots, B_l$$

となっているとする。このとき、$\tilde{A}$ はある B_i と共役になるので、ある $g \in G$ が存在して $\tilde{A} = gB_ig^{-1}$ が成り立つ。すると

$$\tilde{A} \cap M_j = gB_ig^{-1} \cap M_j = g(B_i \cap M_j)g^{-1}$$

が成り立つ。$\tilde{A} \cap M_j$ は A を含む M_j の対蹠集合なので、A の極大性より $A = \tilde{A} \cap M_j$ が成り立つ。したがって、

$$A = g(B_i \cap M_j)g^{-1}$$

となり、M_j において A は $B_i \cap M_j$ と合同になる。以上の考察より、M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補は

$$B_1 \cap M_j, \ldots, B_l \cap M_j$$

である。これらが極大対蹠集合になるかどうか吟味することにより、M_j の極大対蹠集合の合同類の分類が得られる。

ここまでの議論の結果を次の定理にまとめる。

定理 5.1.1. G を連結コンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量が備わっているとする。

$$F(s_e, G) = \bigcup_{j=0}^{k} M_j$$

を連結成分への分解とし、$M_0 = \{e\}$ とする。各 M_j は極地になり、

$$M_j = \{gx_jg^{-1} \mid g \in G\}$$

が成り立つ。G の極大対蹠部分群の共役類の分類の代表元が

$$B_1, \dots, B_l$$

となっているとする。このとき、M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補は

$$B_1 \cap M_j, \dots, B_l \cap M_j$$

である。

上にも書いたが、

$$B_1 \cap M_j, \dots, B_l \cap M_j$$

は M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補であることがわかるので、これらが極大であるかどうか確認する必要がある。

5.2 複素 Grassmann 多様体とその商空間の極大対蹠集合

定理 5.1.1 の手法を $U(n)$ の極地に適用する。

例 4.2.13 で定めた記号を流用すると

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \bigcup_{j=0}^{n} M_j, \quad M_j = \{gx_jg^{-1} \mid g \in U(n)\},$$

となっていて、M_j $(0 \leq j \leq n)$ が極地である。$U(n)$ の極大対蹠部分群の共役類の代表元は Δ_n のみである。したがって、$M_j = G_j(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補は

$$\Delta_n \cap G_j(\mathbb{C}^n) = \{d \in \Delta_n \mid d \text{ の対角成分 } -1 \text{ の個数} = j\}$$

$$= \{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_j}\rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n\}$$

である。これがただ一つの候補なので、これは $G_j(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合の合同類の唯一の代表元になる。特にこれは大対蹠集合の合同類の唯一の代表元でもある。これより、$\#_2 G_j(\mathbb{C}^n) = \binom{n}{j}$ が成り立つ。

上記の議論の結果を次の定理にまとめる。

定理 5.2.1. 複素 Grassmann 多様体 $G_j(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合は

$$\{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_j}\rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n\}$$

に合同になる。よって、これは大対蹠集合の合同類の唯一の代表元でもある。特に、$\#_2 G_j(\mathbb{C}^n) = \binom{n}{j}$ が成り立つ。

次に $U(2m)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠部分群の分類結果から商空間 $G_m(\mathbb{C}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠集合の分類を導く。

$U(2m)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠部分群の分類結果を利用するために、$n = 2^k \cdot l$ と分解する。ただし、l は奇数である。$d \in D[4]$ に対して $d^2 = \pm 1_2$ であり、$d_0 \in \Delta_i$ に対して $d_0^2 = 1_i$ なので、$x \in D(s, n)$ $(0 \leq s \leq k)$ に対して $x^2 = \pm 1_n$ が成り立つ。

$$PD(s,n) = \{x \in D(s,n) \mid x^2 = 1_n\},$$
$$ND(s,n) = \{x \in D(s,n) \mid x^2 = -1_n\}$$

とおくと、

$$D(s,n) = PD(s,n) \cup ND(s,n)$$

は互いに素な和への分解になる。$\pi_{2m} : G_m(\mathbb{C}^{2m}) \to G_m(\mathbb{C}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ を自然な射影とする。

定理 5.2.2. $G_m(\mathbb{C}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同である。

$$\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \exists d_i (0 \leq i \leq s) \mathrm{Tr} d_i = 0\}$$
$$\cup \sqrt{-1} ND(s, 2m)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合と $m = 2$ のときの

$$\pi_4(\{d_0 \in PD(0,4) \mid \mathrm{Tr} d_0 = 0\})$$

は除外する。

証明

$$U(2m)^* = U(2m)/\mathbb{Z}_2, \quad G_m(\mathbb{C}^{2m})^* = G_m(\mathbb{C}^{2m})/\mathbb{Z}_2$$

と書くことにする。定理 4.4.5 より、$U(2m)^*$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役になる。

$$\pi_{2m}(\{1, \sqrt{-1}\} D(s, 2m)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外する。

　A を $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合とする。一般的方針より、A は次のいずれかに合同になる。

$$\pi_{2m}(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m))\cap G_m(\mathbb{C}^{2m})^*=\pi_{2m}(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m)\cap G_m(\mathbb{C}^{2m})).$$

ただし、$0\le s\le k$ であり、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外する。ここで、

$$\begin{aligned}
&D(s,2m)\cap G_m(\mathbb{C}^{2m})\\
=&\{d\in D(s,2m)\mid d\text{ は固有値 }-1\text{ 重複度 }m\text{、}1\text{ 重複度 }m\text{ を持つ }\}\\
=&\{d\in PD(s,2m)\mid \mathrm{Tr}d=0\}\\
&(\mathrm{Tr}(d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0)=\mathrm{Tr}(d_1)\cdots\mathrm{Tr}(d_s)\cdot\mathrm{Tr}(d_0)\text{ なので})\\
=&\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid \exists d_i(0\le i\le s)\mathrm{Tr}d_i=0\}
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-1}D(s,2m)\cap G_m(\mathbb{C}^{2m})\\
=&\{\sqrt{-1}d\mid d\in D(s,2m),\sqrt{-1}d\text{ は固有値 }-1\text{ 重複度 }m\text{、}1\text{ 重複度 }m\text{ を持つ }\}\\
=&\sqrt{-1}ND(s,2m)
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、A は次のいずれかに合同である。

$$\begin{aligned}
&\pi_{2m}(\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid \exists d_i(0\le i\le s)\mathrm{Tr}d_i=0\}\\
&\qquad\cup\sqrt{-1}ND(s,2m))\quad(0\le s\le k).
\end{aligned}$$

ただし、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外される。さらに $m=2$ のときは、

$$\begin{aligned}
&\{d_0\in PD(0,4)\mid \mathrm{Tr}d_0=0\}\\
=&\left\{\pm\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\pm\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&1\end{bmatrix},\pm\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}\right\}\\
=&\{\pm I_1\otimes 1_2,\pm 1_2\otimes I_1,\mp I_1\otimes I_1\}\\
\subsetneq&\{d_1\otimes d_2\in PD(2,4)\mid \mathrm{Tr}d_1=0\text{ または }\mathrm{Tr}d_2=0\}
\end{aligned}$$

という包含関係があるため、

$$\pi_4(\{d_0\in PD(0,4)\mid \mathrm{Tr}d_0=0\})$$

も除外する。

5.3 Hermann 作用と非連結コンパクト Lie 群

G を連結コンパクト Lie 群とし、σ を G の対合的自己同型写像とする。G の自己同型群内で σ の生成する部分群 $\langle\sigma\rangle$ は $\mathbb{Z}_2$ と同型になる。特に、$\langle\sigma\rangle = \{1_G, \sigma\}$ が成り立つ。今後 1_G は単に 1 と書くことにする。G と $\langle\sigma\rangle$ の半直積 $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ を次のように定める。集合 $G \times \langle\sigma\rangle$ に演算

$$(g_1, \epsilon_1)(g_2, \epsilon_2) = (g_1\epsilon_1(g_2), \epsilon_1\epsilon_2) \quad ((g_i, \epsilon_i) \in G \times \langle\sigma\rangle)$$

を定める。すると、この演算によって $G \times \langle\sigma\rangle$ は Lie 群になることがわかる。これを G と $\langle\sigma\rangle$ の**半直積**と呼び、$G \rtimes \langle\sigma\rangle$ で表す。

$$G \rtimes \langle\sigma\rangle = G \times \{1\} \cup G \times \{\sigma\}$$

は連結成分への分解になる。

問題 5.3.1. 上記の設定のもとで G の単位元を e で表すと、半直積の演算は群構造を定め、$G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の単位元は $\tilde{e} = (e, 1)$ になることを示せ。$(g, \epsilon) \in G \rtimes \langle\sigma\rangle$ に対して $(g, \epsilon)^{-1} = (\epsilon(g^{-1}), \epsilon)$ が成り立ち、$(g_i, \epsilon_i) \in G \rtimes \langle\sigma\rangle$ に対して $s_{(g_1,\epsilon_1)}(g_2, \epsilon_2) = (g_1\epsilon_1\epsilon_2(g_2^{-1}g_1), \epsilon_2)$ が成り立つことを示せ。

命題 5.3.2. G を連結コンパクト Lie 群とし、σ を G の対合的自己同型写像とする。

$$M^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$$

によって M^σ を定めると、次の等式が成り立つ。

$$F(s_{\tilde{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) = F(s_e, G) \times \{1\} \cup M^\sigma \times \{\sigma\}.$$

特に、M^σ の各連結成分は G の全測地的部分多様体になる。

証明　$g \in G$ に対して $(g, 1)^2 = (g^2, 1)$ となるので、

$$F(s_{\tilde{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) \cap G \times \{1\} = F(s_e, G) \times \{1\}$$

が成り立つ。次に $(g, \sigma)^2 = (g\sigma(g), \sigma^2) = (g\sigma(g), 1)$ となるので、

$$F(s_{\tilde{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) \cap G \times \{\sigma\} = M^\sigma \times \{\sigma\}$$

が成り立つ。以上より、問題の等式

$$F(s_{\tilde{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) = F(s_e, G) \times \{1\} \cup M^\sigma \times \{\sigma\}$$

が成り立つ。M^σ は等長変換の固定点集合であり、命題 1.3.8 より、各連結成分は全測地的部分多様体になる。

$F(s_e, G)$ は G の極大トーラスを使って詳しく調べることができ、これについては例 4.2.7 で解説済みである。ここでは、M^σ を調べる方法について解説する。まず、半直積 $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ 内で $G \times \{\sigma\}$ における $G \times \{1\}$ の共役作用は、$g, x \in G$ に対して

$$(g,1)(x,\sigma)(g,1)^{-1} = (gx,\sigma)(g^{-1},1) = (gx\sigma(g^{-1}),\sigma) \tag{3.1}$$

と記述できる。つまり、$G\times\{\sigma\}$ における g の共役作用は、G における $x \mapsto gx\sigma(g^{-1})$ という作用になる。一般に $g \in G$ による共役作用を

$$I_g(x) = gxg^{-1} \quad (g, x \in G)$$

で表し、σ による**捩れた共役作用**を

$$\rho_\sigma(g)(x) = gx\sigma(g^{-1}) \quad (g, x \in G)$$

で定める。(3.1) の関係を可換図式で記述するために、

$$1_\sigma : G \to G \times \{\sigma\}\ ;\ x \mapsto (x,\sigma)$$

によって 1_σ を定める。$g \in G$ に対して、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho_\sigma(g)"] \arrow[d, "1_\sigma"'] & G \arrow[d, "1_\sigma"] \\
G \times \{\sigma\} \arrow[r, "I_{(g,1)}"] & G \times \{\sigma\}
\end{tikzcd}$$

つまり、G の G への σ による捩れた共役作用は、1_σ を通して $G \times \{1\}$ の半直積 $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ 内の $G \times \{\sigma\}$ への共役作用に対応する。

命題 5.3.3. 命題 5.3.2 の設定において、M^σ の e を含む連結成分は $\rho_\sigma(G)(e)$ に一致する。これはコンパクト Riemann 対称対 $(G, F(\sigma, G))$ から定まるコンパクト Riemann 対称空間である。特に、コンパクト Riemann 対称空間 $G/F(\sigma,G)$ は半直積 $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地になる。

証明 まず $\rho_\sigma(G)(e) \subset M^\sigma$ を示す。$g \in G$ に対して

$$\sigma(\rho_\sigma(g)(e)) = \sigma(ge\sigma(g^{-1})) = \sigma(g)g^{-1} = (g\sigma(g^{-1}))^{-1} = (\rho_\sigma(g)(e))^{-1}$$

となるので、$\rho_\sigma(g)(e) \in M^\sigma$ が成り立つ。よって、$\rho_\sigma(G)(e) \subset M^\sigma$ を得る。$\rho_\sigma(G)(e)$ の e における接ベクトル空間は

$$\begin{aligned}
T_e(\rho_\sigma(G)(e)) &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \exp tX\sigma(\exp tX)^{-1} \right|_{t=0} \middle| X \in \mathfrak{g} \right\} \\
&= \{X - d\sigma(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}
\end{aligned}$$

$$= \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = -X\}$$

となる。最後の等号は、$d\sigma$ の固有値は ± 1 であり、固有空間分解は

$$\mathfrak{g} = \{X + d\sigma(X) \mid X \in \mathfrak{g}\} + \{X - d\sigma(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

であることからわかる。他方、$\{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = -X\}$ は M^σ の e を含む連結成分の e における接ベクトル空間に一致するので、M^σ の e を含む連結成分は $\rho_\sigma(G)(e)$ に一致する。

ρ_σ による G の作用で e を固定する元の全体を求める。$e = \rho_\sigma(g)(e) = g\sigma(g^{-1})$ は $\sigma(g) = g$ と同値になり、e を固定する元の全体は $F(\sigma, G)$ である。したがって、$\rho_\sigma(G)(e) \cong G/F(\sigma, G)$ が成り立つ。これはコンパクト Riemann 対称対 $(G, F(\sigma, G))$ から定まるコンパクト Riemann 対称空間である。

注意 5.3.4. 連結コンパクト Lie 群 G の極地として実現できるコンパクト Riemann 対称空間は、G の内部自己同型写像から定まるが、外部自己同型写像から定まるコンパクト Riemann 対称空間は、連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない。しかし、命題 5.3.3 より外部自己同型写像から定まるコンパクト Riemann 対称空間を非連結コンパクト Lie 群の極地として実現できる場合がある。

以下で $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ において連結コンパクト Lie 群の場合の極大トーラスの代わりになるものを考える。そのために Hermann 作用について振り返っておく。

U を連結コンパクト Lie 群とし、(U, K_1) と (U, K_2) をコンパクト Riemann 対称対とする。K_1 の U/K_2 への左からの自然な作用を **Hermann 作用**と呼ぶ。(U, K_1) と (U, K_2) を定める U の対合的自己同型写像を θ_1 と θ_2 で表す。U には θ_1 と θ_2 が等長的になる両側不変 Riemann 計量が定まっているとする。このとき、$d\theta_1$ と $d\theta_2$ は $\mathfrak{u}$ の等長線形変換になる。微分写像 $d\theta_1$ と $d\theta_2$ の ± 1 固有空間を

$$\mathfrak{k}_i = \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta_i(X) = X\}, \qquad \mathfrak{m}_i = \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta_i(X) = -X\}$$

とすると、標準分解

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{m}_1, \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{m}_2$$

は $\mathfrak{u}$ の $\mathrm{Ad}_U(U)$ 不変内積に関する直交直和分解になる。

定理 5.3.5 (Hermann [4] Theorem 2.2). $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとると、$\mathfrak{a}$ に対応する U の Lie 群 $A = \exp \mathfrak{a}$ はトーラスになり、次の等式が成り立つ。

$$U/K_2 = \bigcup_{k \in K_1} kAo.$$

これは K_1 の U/K_2 への Hermann 作用の標準形は Ao の元からとれることを意味している。

証明 A がトーラスになることを示し、さらに残りの主張の証明の準備のためにあるコンパクト Riemann 対称対を構成する。

$$S = \{u \in U \mid \theta_1(u) = \theta_2(u)\}$$

とおくと、S は U の閉 Lie 部分群になり、特にコンパクトである。S の単位連結成分を S_0 で表すと、S_0 は U の連結コンパクト Lie 部分群である。$s \in S$ に対して

$$\theta_1\theta_2(s) = \theta_1\theta_1(s) = s = \theta_2\theta_2(s)$$

が成り立つので、$\theta_2(s) \in S$ が成り立つ。したがって、$\theta_2(S) = S$ が成り立ち、$\theta_2(S_0) = S_0$ を得る。θ_2 は S_0 の対合的自己同型写像を誘導する。θ_1 と θ_2 を入れ換えると $\theta_1(S) = \theta_2(S)$ となり、$\theta_1(S) = S$ が成り立つ。よって、θ_1 は S_0 の対合的自己同型写像を誘導することもわかる。$\theta_0 = \theta_1|_{S_0} = \theta_2|_{s_0}$ とおく。

$$K = \{s \in S \mid \theta_0(s) = s\}$$

の単位連結成分を K_0 とすると、(S_0, K_0) はコンパクト Riemann 対称対になる。S_0 の Lie 環 $\mathfrak{s}$ は

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta_1(X) = d\theta_2(X)\}$$

を満たす。さらに微分写像 $d\theta_0$ の ± 1 固有空間を

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{s} \mid d\theta_0(X) = X\}, \qquad \mathfrak{m}_0 = \{X \in \mathfrak{s} \mid d\theta_0(X) = -X\}$$

とする。$\mathfrak{s} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{m}_0$ はコンパクト Riemann 対称対 (S_0, K_0) から定まる $\mathfrak{s}$ の標準分解である。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 &= \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta_1(X) = d\theta_2(X) = X\} \\
&= \{X \in \mathfrak{s} \mid d\theta_0(X) = X\} = \mathfrak{k}_0, \\
\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 &= \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta_1(X) = d\theta_2(X) = -X\} \\
&= \{X \in \mathfrak{s} \mid d\theta_0(X) = -X\} = \mathfrak{m}_0.
\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2, \qquad \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$$

が成り立つ。コンパクト Riemann 対称対 (S_0, K_0) に定理 2.5.8 を適用すると、$A = \exp \mathfrak{a}$ はトーラスになり、

$$\mathfrak{m}_0 = \bigcup_{k \in K_0} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} \tag{3.2}$$

が成り立つ。

次に

$$U/K_2 = \bigcup_{k \in K_1} kAo$$

を示すためには、任意の $x \in U/K_2$ に対して $K_1x \cap Ao \neq \emptyset$ が成り立つことを証明すればよい。定理 1.3.14 より、x とコンパクト部分多様体 K_1o の距離 $d(x, K_1o)$ を与える長さが $L(\gamma) = d(x, K_1o)$ となる測地線 $\gamma : [0,1] \to U/K_2$ が存在し、$\gamma(0) = x$ と $\gamma(1) \in K_1o$ を満たし、さらに γ の $\gamma(1)$ における速度ベクトル $\gamma'(1)$ は $T_{\gamma(1)}(K_1o)$ に直交する。$\gamma(1) \in K_1o$ より $k_1\gamma(1) = o$ を満たす $k_1 \in K_1$ が存在する。このとき、$k_1\gamma$ は k_1x と K_1o の距離を与える測地線であり、$k_1\gamma$ の $k_1\gamma(1) = o$ における速度ベクトル $(k_1\gamma)'(1)$ は $T_o(K_1o)$ に直交し、$(k_1\gamma)'(1) \in T_o^{\perp}(K_1o)$ が成り立つ。$T_o(U/K_2)$ と $\mathfrak{m}_2$ を同一視することにより、$(k_1\gamma)'(1) \in \mathfrak{m}_2$ とみなせる。さらに上で示したことより $(k_1\gamma)'(1) \in \mathfrak{m}_1$ であり、$(k_1\gamma)'(1) \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$ が成り立つ。(3.2) よりある $k_0 \in K_0$ が存在して $(k_1\gamma)'(1) \in \mathrm{Ad}(k_0)\mathfrak{a}$ が成り立つ。これより

$$\mathfrak{a} \ni \mathrm{Ad}(k_0)^{-1}(k_1\gamma)'(1) = (k_0^{-1}k_1\gamma)'(1)$$

を得る。$k_0 \in K_0 \subset K_1 \cap K_2 \subset K_1$ なので、$k_0^{-1}k_1 \in K_1$ である。さらに、$k_0^{-1}k_1\gamma$ は $k_0^{-1}k_1x$ と K_1o の距離を与える測地線であり、$k_0^{-1}k_1\gamma$ の $k_0^{-1}k_1\gamma(1) = k_0^{-1}o = o$ における速度ベクトル $(k_0^{-1}k_1\gamma)'(1)$ は $\mathfrak{a}$ に含まれる。したがって、測地線 $k_0^{-1}k_1\gamma$ の像は $A \cdot o$ に含まれることになり、

$$k_0^{-1}k_1\gamma(1) \in K_1x \cap Ao$$

が成り立ち、定理 5.3.5 の証明が完結する。

定理 5.3.6. G を非連結コンパクト Lie 群とし、

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

を G の連結成分への直和分解とする。$0 \in \Lambda$ であり、G_0 は単位連結成分とする。各 $\lambda \in \Lambda$ について $x_\lambda \in G_\lambda$ をとる。I_{x_λ} は G_0 の自己同型写像を誘導する。$F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の単位連結成分の極大トーラス T_λ をとると、次の等式が成り立つ。

$$G_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} gT_\lambda x_\lambda g^{-1}.$$

これは G_0 の G_λ への共役作用の標準形は $T_\lambda x_\lambda$ の元からとれることを意味している。

証明　$G_0 \times G_0$ の自己同型写像 θ_1, θ_2 を

$$\theta_1(g,h) = (I_{x_\lambda}^{-1}(h), I_{x_\lambda}(g)), \quad \theta_2(g,h) = (h,g) \qquad (g,h \in G_0)$$

によって定める。θ_1, θ_2 は対合的自己同型写像になることがわかる。これらから定まる二つのコンパクト Riemann 対称対に Hermann の定理 (定理 5.3.5) を適用する。これらの固定点部分群を求めると

$$F(\theta_1, G_0 \times G_0) = \{(g,h) \in G_0 \times G_0 \mid (I_{x_\lambda}^{-1}(h), I_{x_\lambda}(g)) = (g,h)\}$$

$$\begin{aligned} &= \{(g, I_{x_\lambda}(g)) \mid g \in G_0\}, \\ F(\theta_2, G_0 \times G_0) &= \{(g, g) \mid g \in G_0\} = \Delta G_0. \end{aligned}$$

となる。上記の θ_1, θ_2 が定めるコンパクト Riemann 対称対に対応する Lie 環 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ の標準分解は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &= \{(X, dI_{x_\lambda}(X) \mid X \in \mathfrak{g})\} + \{(X, -dI_{x_\lambda}(X) \mid X \in \mathfrak{g})\}, \\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &= \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\} + \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

となる。ここで、二つの対合的自己同型写像 $d\theta_1, d\theta_2$ の -1 固有空間の共通部分は

$$\begin{aligned} &\{(X, -dI_{x_\lambda}(X) \mid X \in \mathfrak{g})\} \cap \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g},\, dI_{x_\lambda}(X) = X\} \\ &= \{(X, -X) \mid X \in F(dI_{x_\lambda}, \mathfrak{g})\} \end{aligned}$$

である。$F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の単位連結成分の極大トーラス T_λ の Lie 環 $\mathfrak{t}_\lambda$ は $F(dI_{x_\lambda}, \mathfrak{g})$ の極大可換部分環になる。よって、$\{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{t}_\lambda\}$ は $d\theta_1, d\theta_2$ の -1 固有空間の共通部分内の極大可換部分空間になる。対応する $G_0 \times G_0$ 内のトーラスは $\{(t, t^{-1}) \mid t \in T_\lambda\}$ である。Hermann の定理 (定理 5.3.5) より

$$\begin{aligned} (G_0 \times G_0)/\Delta G_0 &= \bigcup_{g \in G_0} (g, I_{x_\lambda}(g))\{(t, t^{-1}) \mid t \in T_\lambda)\}\Delta G_0 \\ &= \bigcup_{g \in G_0} \{(gt, I_{x_\lambda}(g)t^{-1}) \mid t \in T_\lambda\}\Delta G_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。$(G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ と G_0 の対応より

$$\begin{aligned} G_0 &= \bigcup_{g \in G_0} \{(gt)(I_{x_\lambda}(g)t^{-1})^{-1} \mid t \in T_\lambda\} = \bigcup_{g \in G_0} \{gt^2 I_{x_\lambda}(g)^{-1} \mid t \in T_\lambda\} \\ &= \bigcup_{g \in G_0} gT_\lambda I_{x_\lambda}(g)^{-1} \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$gT_\lambda I_{x_\lambda}(g)^{-1} = gT_\lambda (x_\lambda g x_\lambda^{-1})^{-1} = gT_\lambda x_\lambda g^{-1} x_\lambda^{-1}$$

なので、

$$G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gT_\lambda x_\lambda g^{-1} x_\lambda^{-1}$$

が成り立つ。両辺の右から x_λ をかけると

$$G_\lambda = G_0 x_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} gT_\lambda x_\lambda g^{-1}$$

が成り立つ。以上で定理の主張が完了する。

系 5.3.7. 定理 5.3.6 の設定のもとで、連結成分 G_λ 内の対合的な元の全体は

$$\bigcup_{g\in G_0} g\{x \in T_\lambda x_\lambda \mid x^2 = e\}g^{-1}$$

となる。特に、G_λ に含まれる G の極地は $\{x \in T_\lambda x_\lambda \mid x^2 = e\}$ の元の G_0 による共役軌道のすべてである。

5.4　非連結コンパクト Lie 群の極地の極大対蹠集合

この節では非連結コンパクト Lie 群の極地として実現されるコンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類をその非連結コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類から導く方法を述べる。

G を非連結コンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量が備わっているとする。定理 5.3.6 の設定のもとで考える。$F(s_e, G) \cap G_\lambda = \emptyset$ となる連結成分 G_λ にはもちろん G の極地は存在しないので、$F(s_e, G) \cap G_\lambda$ が空ではない G_λ について考えればよい。そのような G_λ に対して $x_\lambda \in F(s_e, G) \cap G_\lambda$ をとると、$x_\lambda^2 = e$ となり $G_\lambda G_\lambda \subset G_0$ が成り立つ。したがって、$\tilde{G}_\lambda = G_0 \cup G_\lambda$ は G の部分群になる。

$$F(s_e, G) \cap G_\lambda = \bigcup_{j=0}^{k} M_j$$

を連結成分への分解とする。各 M_j は G の極地になる。$x_j \in M_j$ をとると、

$$M_j = \{g x_j g^{-1} \mid g \in G_0\}$$

が成り立つ。ここまでは系 5.3.7 ですでにわかっている。

M_j の極大対蹠集合の分類を考える。A を M_j の極大対蹠集合とすると、$A \cup \{e\}$ は G の対蹠集合になる。$A \cup \{e\}$ を含む G の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとる。$\tilde{A}$ は e を含む極大対蹠集合になり、補題 4.2.9 より G の極大対蹠部分群になる。G の極大対蹠部分群の G_0 共役類の分類ができていて、その代表元が

$$B_1, \ldots, B_l$$

となっているとする。このとき、$\tilde{A}$ はある B_i と G_0 共役になるので、ある $g \in G_0$ が存在して $\tilde{A} = gB_i g^{-1}$ が成り立つ。すると

$$\tilde{A} \cap M_j = gB_i g^{-1} \cap M_j = g(B_i \cap M_j)g^{-1}$$

が成り立つ。$\tilde{A} \cap M_j$ は A を含む M_j の対蹠集合なので、A の極大性より $A = \tilde{A} \cap M_j$ が成り立つ。したがって、

$$A = g(B_i \cap M_j)g^{-1}$$

となり、M_j において A は $B_i \cap M_j$ と合同になる。以上の考察より、M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補は

$$B_1 \cap M_j, \dots, B_l \cap M_j$$

である。これらが極大対蹠集合になるかどうか吟味することにより、M_j の極大対蹠集合の合同類の分類が得られる。

ここまでの議論の結果を次の定理にまとめる。

定理 5.4.1. G を非連結コンパクト Lie 群とし、両側不変 Riemann 計量が備わっているとする。

$$F(s_e, G) = \bigcup_{j=0}^{k} M_j$$

を連結成分への分解とし、$M_0 = \{e\}$ とする。各 M_j は極地になり、

$$M_j = \{g x_j g^{-1} \mid g \in G\}$$

が成り立つ。G の極大対蹠部分群の共役類の分類の代表元が

$$B_1, \dots, B_l$$

となっているとする。このとき、M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補は

$$B_1 \cap M_j, \dots, B_l \cap M_j$$

である。

上にも書いたが、

$$B_1 \cap M_j, \dots, B_l \cap M_j$$

は M_j の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補であることがわかるので、これらが極大であるかどうか確認する必要がある。

5.5 $U(n)/O(n)$ とその商空間の極大対蹠集合

$U(n)$ の対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(g) = \bar{g} \quad (g \in U(n))$$

によって定める。命題 5.3.2 の記号等を流用する。

$$M^\sigma = \{g \in U(n) \mid \sigma(g) = g^{-1}\} = \{g \in U(n) \mid {}^t g = g\}$$

となり、M^σ は $U(n)$ 内の対称行列の全体になる。半直積 $U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ において、

$$F(s_{\tilde{e}}, U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle) = F(1_n, U(n)) \times \{1\} \cup M^\sigma \times \{\sigma\}$$

が成り立つ。$g, x \in U(n)$ に対して

$$(g,1)(x,\sigma)(g,1)^{-1} = (\rho_\sigma(g)(x), \sigma)$$

となり、$M^\sigma = \rho_\sigma(U(n))1_n$ が成り立つ。これより等質空間表示 $M^\sigma \cong U(n)/O(n)$ を得る。M^σ は対称空間の分類の記号を使って $UI(n)$ で表す。この記号を使って改めて上記の結果を記述しておく。

$$F(s_{\tilde{e}}, U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle) = F(s_{1_n}, U(n)) \times \{1\} \cup UI(n) \times \{\sigma\}, \quad UI(n) \cong U(n)/O(n).$$

前節の手法を利用して $UI(n)$ の極大対蹠集合を求めるために、$U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群を分類する。A を $U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群とする。まず $A \cap (U(n) \times \{\sigma\}) \neq \emptyset$ を示す。そのためにそうではないと仮定する。すると $A \subset U(n) \times \{1\}$ が成り立つ。このとき、$U(n)$ の極大対蹠部分群の分類結果よりある $g \in U(n)$ が存在して

$$A = (g\Delta_n g^{-1}) \times \{1\} = (g,1)(\Delta_n \times \{1\})(g,1)^{-1}$$

が成り立つ。ところが、

$$\Delta_n \times \{1\} \subsetneq \Delta_n \rtimes \langle\sigma\rangle$$

であり、$\Delta_n \rtimes \langle\sigma\rangle$ は対蹠部分群になるので、A の極大性に矛盾する。したがって、$A \cap (U(n) \times \{\sigma\}) \neq \emptyset$ が成り立つ。

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad T = \left\{ \left[\begin{matrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_k) & \\ & & & (1) \end{matrix}\right] \middle| \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと、T は $O(n) = F(\sigma, U(n))$ の極大トーラスになる。さらに

$$U(n) \times \{\sigma\} = \bigcup_{g \in U(n)} (g,1)(T \times \{\sigma\})(g,1)^{-1}$$

が成り立つ。必要なら A を $U(n) \times \{1\}$ 共役なものに取り換えて、$t \in T$ によって $(t, \sigma) \in A$ とできる。A の元は対合的なので、

$$(1_n, 1) = (t, \sigma)^2 = (t\sigma(t), 1) = (t^2, 1)$$

となり、$t^2 = 1_n$ が成り立つ。これより t は対角行列であり、対角成分は $\pm 1_2$ と n が奇数のとき 1 になる。さらに必要なら A を $U(n) \times \{1\}$ 共役なものに取り換えて、$(1_n, \sigma) \in A$ とできる。これは $n = 2$ の場合の

$$(\sqrt{-1}1_2, 1)(-1_2, \sigma)(\sqrt{-1}1_2, 1)^{-1} = (1_2, \sigma)$$

を利用するとわかる。このとき、$(g,\sigma^\epsilon)\in A$ ならば、$g\in O(n)$ が成り立つことを以下で示す。$(1_n,\sigma)\in A$ であり、A は可換なので、

$$(g,\sigma^\epsilon)=(1_n,\sigma)(g,\sigma^\epsilon)(1_n,\sigma)^{-1}=(\sigma(g),\sigma^{\epsilon+1})(1_n,\sigma^{-1})=(\sigma(g),\sigma^\epsilon)$$

が成り立つ。よって、$\sigma(g)=g$ となり、$g\in O(n)$ を得る。

$A\cap(U(n)\times\{1\})=A'\times\{1\}$ とおくと、上で示したことから $A'\subset O(n)$ が成り立つ。$a'\in A'$ をとると $(a',1)\in A$ であり、$(1_n,\sigma)\in A$ なので、$A\ni(a',1)(1_n,\sigma)=(a',\sigma)$ が成り立つ。よって、$A'\times\{\sigma\}\subset A$ を得る。次に $(b,\sigma)\in A$ とすると、$A\ni(b,\sigma)(1_n,\sigma)=(b,1)$ となり、$b\in A'$ を得る。以上より $A=A'\rtimes\langle\sigma\rangle$ が成り立つことがわかる。$(a',\sigma^\epsilon)\in A$ をとると、$(1_n,1)=(a',\sigma^\epsilon)^2=((a')^2,1)$ となり、A' は $O(n)$ の対蹠部分群になる。例 4.2.12 の結果よりある $g\in O(n)$ が存在して $A'\subset g\Delta_n g^{-1}$ が成り立つ。すると

$$A\subset(g\Delta_n g^{-1})\rtimes\langle\sigma\rangle=(g,1)(\Delta_n\rtimes\langle\sigma\rangle)(g,1)^{-1}$$

となる。A は極大なので、

$$A=(g,1)(\Delta_n\rtimes\langle\sigma\rangle)(g,1)^{-1}$$

が成り立つ。以上より、$U(n)\rtimes\langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n\rtimes\langle\sigma\rangle$ に $U(n)\times\{1\}$ 共役であることがわかる。

前節の手法を使うと $U(n)\rtimes\langle\sigma\rangle$ の極地 $UI(n)\times\{\sigma\}$ の極大対蹠集合は

$$(*)\quad (UI(n)\times\{\sigma\})\cap(\Delta_n\rtimes\langle\sigma\rangle)$$

に合同になることがわかる。ここで、

$$UI(n)=\{g\in U(n)\mid {}^t g=g\}\supset\Delta_n$$

より $(*)$ は $\Delta_n\times\{\sigma\}$ に一致し、$UI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n に合同であることがわかる。

$UI(n)$ の商空間の極大対蹠集合の分類を考える。$U(n)$ の商群を考えたときと同様に、自然数 μ に対して

$$\mathbb{Z}_\mu=\{z1_n\mid z\in U(1),\ z^\mu=1\}$$

による商を扱う。命題 4.4.1 より $\mathbb{Z}_\mu$ は $U(n)$ の中心なので、$\mathbb{Z}_\mu$ の元を $U(n)$ の左からかけても右からかけても同じ作用になる。$UI(n)$ は $U(n)$ の対称な元の全体なので、$\mathbb{Z}_\mu$ の作用は $UI(n)$ を不変に保つ。$UI(n)$ は $U(n)$ 内の全測地的部分多様体なので、$UI(n)$ の $\mathbb{Z}_\mu$ による商空間 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は商群 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の全測地的部分多様体になる。$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合を分類するために、前節の手法を利用する。

$z1_n\in\mathbb{Z}_\mu$ に対して $\sigma(z1_n)=\bar{z}1_n\in\mathbb{Z}_\mu$ が成り立つので、$\sigma(\mathbb{Z}_\mu)=\mathbb{Z}_\mu$ が成り立つ。これより、σ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対合的自己同型写像を誘導する。これも同じ記号

σ で表すことにする。この対合的自己同型写像を使って半直積 $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$ を考えることができる。これは半直積を先にとってから商群を考えたものと同型になることを示しておく。$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とする。

$$\Phi : U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle \to (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle \ ; \ (g, \epsilon) \mapsto (\pi_n(g), \epsilon)$$

によって Φ を定める。$(g_i, \epsilon_i) \in U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi(g_1, \epsilon_1)\Phi(g_2, \epsilon_2) &= (\pi_n(g_1), \epsilon_1)(\pi_n(g_2), \epsilon_2) = (\pi_n(g_1)\pi_n(\epsilon_1(g_2)), \epsilon_1\epsilon_2) \\ &= (\pi_n(g_1\epsilon_1(g_2)), \epsilon_1\epsilon_2) = \Phi(g_1\epsilon_1(g_2), \epsilon_1\epsilon_2) \\ &= \Phi((g_1, \epsilon_1)(g_2, \epsilon_2))\end{aligned}$$

となり、Φ は Lie 群の準同型写像であることがわかる。さらに Φ は全射である。

$$\ker\Phi = \ker\pi_n \times \{1\} = \mathbb{Z}_\mu \times \{1\}$$

となるので、Φ は Lie 群の同型

$$U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle/\mathbb{Z}_\mu \times \{1\} \cong (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$$

を誘導する。この同型対応によって、$U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle/\mathbb{Z}_\mu \times \{1\}$ と $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$ を同一視する。

定理 5.5.1. μ を自然数、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \times \{1\}$ 共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n) \rtimes \langle\sigma\rangle$. 特に $\pi_n(\Delta_n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ は $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の共役を除いて唯一の極大かつ大対蹠部分群である。

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \rtimes \langle\sigma\rangle \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理の証明の前に補題を準備しておく。

補題 5.5.2. A が $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群ならば、$A \cap (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \times \{\sigma\} \neq \emptyset$ が成り立つ。

証明　もし、$A \subset (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \times \{1\}$ ならば、定理 4.4.5 よりある $g \in U(n)$ と $0 \leq s \leq k$ が存在して

$$\begin{aligned}A &\subset \pi_n(g)\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n))\pi_n(g)^{-1} \times \{1\} \\ &= (\pi_n(g), 1)(\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)), 1)(\pi_n(g), 1)^{-1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$(\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)),1) \subsetneq \pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$$

が成り立つことに注意しておく。$(\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)),1)$ と $(\pi_n(1_n),\sigma)$ は可換になることを以下で示す。$d \in D(s,n)$ に対して $\sigma(d)=d$ なので、

$$(\pi_n(1_n),\sigma)(\pi_n(d),1) = (\pi_n(d),1)(\pi_n(1_n),\sigma)(\pi_n(d),1)$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned}(\pi_n(1_n),\sigma)(\pi_n(\theta d),1) &= (\pi_n(1_n)\pi_n(\sigma(\theta d)),\sigma) = (\pi_n(\bar\theta d),\sigma) = (\pi_n(\theta^2\bar\theta d),\sigma)\\ &= (\pi_n(\theta d),\sigma) = (\pi_n(\theta d),1)(\pi_n(1_n),\sigma)\end{aligned}$$

となる。これらの可換性より $\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の対蹠部分群になり、A の極大性に反する。したがって、$A \cap (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \times \{\sigma\} \neq \emptyset$ が成り立つ。

補題 5.5.3. A が $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群ならば、$(\pi_n(\theta 1_n),1) \in A$ が成り立つ。

証明 まず、$(\pi_n(\theta 1_n),1)$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の中心に含まれることを示す。$\pi_n(\theta 1_n)$ は $\pi_n(U(n))$ の中心に含まれる。$g \in U(n)$ に対して

$$\begin{aligned}(\pi_n(g),\sigma)(\pi_n(\theta 1_n),1) &= (\pi_n(g)\pi_n(\bar\theta 1_n),\sigma) = (\pi_n(g)\pi_n(\theta^2\bar\theta 1_n),\sigma)\\ &= (\pi_n(g)\pi_n(\theta 1_n),\sigma) = (\pi_n(\theta g),\sigma)\\ &= (\pi_n(\theta 1_n),1)(\pi_n(g),\sigma)\end{aligned}$$

となるので、$(\pi_n(\theta 1_n),1)$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の中心に含まれる。次に

$$(\pi_n(\theta 1_n),1)^2 = (\pi_n(\theta 1_n)^2,1) = (\pi_n(\theta^2 1_n),1) = (\pi_n(1_n),1)$$

となり、$(\pi_n(\theta 1_n),1)$ は対合的である。よって、$A \cup A(\pi_n(\theta 1_n),1)$ は対蹠部分群になり、A の極大性より $A \cup A(\pi_n(\theta 1_n),1) = A$ であり、特に $(\pi_n(\theta 1_n),1) \in A$ が成り立つ。

定理 5.5.1 の証明 $\mu = 1$ の場合はすでにわかっているので、$\mu > 1$ の場合を考える。A を $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群とする。自然な射影

$$U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle \to \pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$$

も π_n で表す。$B = \pi_n^{-1}(A)$ とおく。補題 5.5.2 より $A \cap \pi_n(U(n)) \times \{\sigma\} \neq \emptyset$ なので、$B \cap U(n) \times \{\sigma\} \neq \emptyset$ が成り立つ。A を $\pi_n(U(n)) \times \{1\}$ 共役なものに取り換えて、$(t_0,\sigma) \in B$, $(t_0 \in T)$ とできる。さらに A を $\pi_n(U(n)) \times \{1\}$ 共役なものに取り

換えて、$(1_n, \sigma) \in B$ とできる。補題5.5.3より $(\theta 1_n, 1) \in B$ が成り立つ。$(1_n, \sigma)$ と $(\theta 1_n, 1)$ が可換であるかどうか調べる。

$$(1_n, \sigma)(\theta 1_n, 1) = (\sigma(\theta 1_n), \sigma) = (\bar{\theta} 1_n, \sigma) = (\bar{\theta} 1_n, 1)(1_n, \sigma)$$

であり、これは $(\theta 1_n, 1)(1_n, \sigma)$ と一致するための必要十分条件は、$\bar{\theta} = \theta$ である。さらにこれは $\theta = \pm 1$ と同値であり、$\mu = 1$ と同値である。$\mu > 1$ の場合を考えているので、$(1_n, \sigma)$ と $(\theta 1_n, 1)$ は可換ではない。

$\pi_n(1_n, \sigma) \in A$ より

$$\begin{aligned} A &= (A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\}) \cup (A \cap \pi_n(U(n)) \times \{\sigma\}) \\ &= (A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\}) \cup \pi_n(1_n, \sigma)(A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\}) \end{aligned}$$

が成り立つ。$A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\})$ は $\pi_n(1_n, \sigma)$ と可換なので

$$\begin{aligned} A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\}) &\subset \{\pi_n(u) \mid u \in U(n),\ (\pi_n(u), 1) \text{ と } \pi_n(1_n, \sigma) \text{ は可換 }\} \times \{1\} \\ &= \{\pi_n(u) \mid u \in U(n),\ \pi_n(\bar{u}) = \pi_n(u)\} \times \{1\} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、右辺の条件 $, \pi_n(\bar{u}) = \pi_n(u)$ について考える。$u \in U(n)$ について $\pi_n(\bar{u}) = \pi_n(u)$ が成り立つための必要十分条件は、ある自然数 m が存在して $\bar{u} = \theta^{2m} u$ が成り立つことである。さらに

$$\bar{u} = \theta^{2m} u \Leftrightarrow \theta^{-m} \bar{u} = \theta^m u \Leftrightarrow \overline{\theta^m u} = \theta^m u \Leftrightarrow \theta^m u \in O(n)$$

となる。以上より、

$$A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\} \subset \pi_n(\{1, \theta\} O(n)) \times \{1\}$$

を得る。μ が奇数の場合、結果はすでにわかっているので、μ が偶数の場合を考えればよい。

$$O(\{1, \theta\} O(n)) = \pi_n(O(n)) \cup \pi_n(\theta O(n))$$

は互いに素な和集合であることを示しておく。もし $g_1, g_2 \in O(n)$ が $\pi_n(g_1) = \pi_n(\theta g_2)$ を満たすとすると、ある自然数 m が存在して $g_1 = \theta^{2m+1} g_2$ が成り立つ。よって、$\theta^{2m+1} \in \{\pm 1\}$ となる。ところが $\theta^k = 1$ を満たす整数は4の倍数になるので、矛盾が起こる。したがって、上記の和集合は互いに素な和集合である。

$$A \cap \pi_n(O(n)) \times \{1\} = A' \times \{1\}$$

を満たす $A' \subset \pi_n(O(n))$ をとる。以下で A' が $\pi_n(O(n))$ の極大対蹠部分群であることを示す。そのために、$A' \subset \tilde{A} \subset \pi_n(O(n))$ となる対蹠部分群 $\tilde{A}$ があるとする。$\pi_n(\{1, \theta\} 1_n) \tilde{A} \rtimes \langle \sigma \rangle$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle \sigma \rangle$ の対蹠部分群になる。

$$A = \pi_n(\{1, \theta\} 1_n) \times \{1\}(A \cap \pi_n(U(n)) \times \{1\}) \rtimes \langle \sigma \rangle \subset \pi_n(\{1, \theta\} 1_n) \tilde{A} \rtimes \langle \sigma \rangle$$

が成り立つ。A の極大性より $A = \pi_n(\{1,\theta\}1_n)\tilde{A} \rtimes \langle\sigma\rangle$ を得る。よって、途中の包含関係も等号になり、$A' = \tilde{A}$ が成り立つ。したがって、A' は $\pi_n(O(n))$ の極大対蹠部分群になる。μ は偶数であり、

$$\pi_n(O(n)) \cong O(n)/\{\pm 1_n\}$$

が成り立つ。定理 4.4.14 より、$O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに $\pi_n(O(n))$ 共役である。

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。したがって、A は $\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ に $\pi_n(U(n)) \times \{1\}$ 共役である。

70 ページで定めた

$$PD(s,n) = \{x \in D(s,n) \mid x^2 = 1_n\}$$

を使って、$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類結果を記述する。

定理 5.5.4. $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同になる。

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数のとき、

$$\pi_n(\{1,\theta\}PD(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

証明 A を $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合とする。$UI(n) \times \{1\}$ は $U(n) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地であり、$\pi_n(UI(n)) \times \{1\}$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地である。よって、$A \times \{\sigma\}$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の対蹠集合である。$\{(\pi_n(1_n), 1)\} \cup (A \times \{\sigma\})$ を含む $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとると、$\tilde{A}$ は $\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群になる。そこで、$\pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極大対蹠部分群の分類結果 (定理 5.5.1) を利用する。

(1) μ が奇数のとき、ある $g \in U(n)$ が存在して

$$\tilde{A} = (\pi_n(g), 1)(\pi_n(\Delta_n) \rtimes \langle\sigma\rangle)(\pi_n(g), 1)^{-1}$$

が成り立つ。$d \in \Delta_n$ に対して

$$(g,1)(d,1)(g,1)^{-1} = (gdg^{-1}, 1),$$
$$(g,1)(d,\sigma)(g,1)^{-1} = (\rho_\sigma(g)(d), 1)$$

が成り立つ。したがって、

$$\tilde{A} \cap \pi_n(U(n)) \times \{\sigma\} = \pi_n(\rho_\sigma(g)\Delta_n) \times \{\sigma\}$$

を得る。よって、$A \subset \pi_n(\rho_\sigma(g)\Delta_n)$ が成り立つ。A の極大性より、$A = \pi_n(\rho_\sigma(g)\Delta_n)$ となり、A は $\pi_n(\Delta_n)$ に合同になる。

(2) μ が偶数のとき、ある $0 \le s \le k$ と $g \in U(n)$ が存在して

$$\tilde{A} = (\pi_n(g), 1)(\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \rtimes \langle\sigma\rangle)(\pi_n(g), 1)^{-1}$$

が成り立つ。$d \in D(s, n)$ に対して

$$\begin{aligned}(g, 1)(d, 1)(g, 1)^{-1} &= (gdg^{-1}, 1),\\ (g, 1)(d, \sigma)(g, 1)^{-1} &= (\rho_\sigma(g)(d), 1),\\ (g, 1)(\theta d, 1)(g, 1)^{-1} &= (\theta gdg^{-1}, 1),\\ (g, 1)(\theta d, \sigma)(g, 1)^{-1} &= (\theta\rho_\sigma(g)(d), 1)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\tilde{A} \cap \pi_n(UI(n)) \times \{\sigma\} = (\pi_n(\{1, \theta\}\rho_\sigma(g)D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n))) \times \{\sigma\}$$

を得る。よって、$A \subset \pi_n(\{1, \theta\}\rho_\sigma(g)D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n))$ が成り立つ。A の極大性より、$A = \pi_n(\{1, \theta\}\rho_\sigma(g)D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n))$ となり、A は $\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n))$ に合同になる。ここで、

$$\begin{aligned}&\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n))\\ &= (\pi_n(D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n)) \cap (\pi_n(\theta D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n)))\end{aligned}$$

である。これらをよりわかりやすい記述に書き換える。$\epsilon = 1, \theta$ とする。$d \in D(s, n)$, $\pi_n(\epsilon d) \in \pi_n(UI(n))$ とすると、ある $x \in UI(n)$ が存在して $\pi_n(\epsilon d) = \pi_n(x)$ が成り立つ。これより、ある整数 a が存在して $x = \theta^{2a}\epsilon d$ が成り立つ。よって、$x \in UI(n)$ に注意すると

$$\theta^{-2a}\bar{\epsilon}d = \bar{x} = \sigma(x) = x^{-1} = \theta^{-2a}\epsilon^{-1}d^{-1}$$

となる。$\bar{\epsilon} = \epsilon^{-1}$ なので、$d = d^{-1}$ となり $d^2 = 1_n$ が成り立つ。したがって、$d \in PD(s, n)$ である。逆に $d \in PD(s, n)$ ならば、

$$\sigma(\epsilon d) = \bar{\epsilon}d = \epsilon^{-1}d^{-1} = (\epsilon d)^{-1}$$

となり、$\epsilon d \in UI(n)$ である。以上より

$$\pi_n(\epsilon D(s, n)) \cap \pi_n(UI(n)) = \pi_n(\epsilon PD(s, n))$$

が成り立つ。結局、A は $\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$ に合同になり、定理 5.5.4 の証明は完結する。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces I, Duke Math. J., **44** (1977), 745–755.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[4] R. Hermann, Totally Geodesic Orbits of Groups of Isometries, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **65** = Indag. Math. **24** (1962) 291–298.

[5] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces, Tsukuba J. Math. Vol.24 No.1 (2000), 171–188.

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry II, Interscience Publishers, 1969.

[7] R. R. Kocherlakota, Integral homology of real flag manifolds and loop spaces of symmetric spaces, Advances in Mathematics, **110** (1995), 1–46.

[8] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **12** (1965), 81–192.

[9] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115** (1989), 43–46.

[10] Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** no.1 (2013), 161–169.

[11] Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, Journal of Lie Theory, **27** (2017), No. 3, 801–829.

[12] Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Addendum to: "Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I", Differential Geometry and its Applications, **80** (2022) 101815.

[13] Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Maximal antipodal subgroups and covering homomorphisms with odd degree, International Electronic Journal of Geometry **17** Issue 1 (2024), 153-156.

[14] X. Zhan, Matrix Theory, Graduate Studies in Mathematics Volume 147, American Mathematical Society, 2013.

[15] 田崎博之、Lie 群入門 (微分幾何学 II)、
https://home.hiroshima-u.ac.jp/tasakih/lecture/ln2010/tsukuba.html