

楔型領域内の非等方的 capillary 超曲面の安定性

岡 元基 (Oka Motoki)

九州大学数理学府修士課程 2 年

December 26, 2020

S^n を \mathbb{R}^{n+1} 内の n 次元単位球面とする. M を向き付け可能, 連結なコンパクト n 次元 C^∞ 級多様体とし, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をはめ込みとする. また $\nu : M \rightarrow S^n$ を X の Gauss 写像とする.

Definition 1 (非等方的エネルギー)

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を正值連続関数とする. このとき X の γ による非等方的エネルギー $\mathcal{F}_\gamma(X)$ を

$$\mathcal{F}_\gamma(X) = \int_M \gamma(\nu) dA$$

で定義する. ただし dA は M の X によって誘導された体積要素とする. 特に $\gamma \equiv 1$ としたとき $\mathcal{F}_\gamma(X)$ は M の面積になる.

Definition 2 (Wulff 図形)

体積が $V_0(= (n+1)^{-1} \int_{S^n} \gamma(\nu) dS^n)$ であるような n 次元閉曲面のうち, 非等方エネルギーの最小値となる曲面 W_γ を γ の Wulff 図形という ($\gamma \equiv 1$ のとき $W_\gamma = S^n$ になる).

Remark 1

γ が C^2 級, strictly convex $\Leftrightarrow \gamma$ の Wulff 図形が滑らかな狭義閉凸曲面になる
となることが知られている. 以下では γ は C^2 級, strictly convex とする.

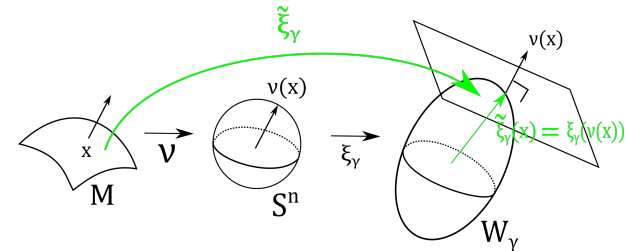
非等方的エネルギーを用いた曲面の変分問題に関する研究は以前から行われており, 例えば次のような先行研究がある:

Fact 1 (B.Palmer, 1998 [3])

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級, strictly convex とする. M を向き付け可能, 連結な閉 n 次元可微分多様体とし, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を C^∞ はめ込みとする. このとき M が非等方的エネルギーに関する極小解であることと, M が平行移動と相似の差を除いて W_γ になることは同値である.

本研究では M が境界を持つ場合について, 非等方的エネルギーの極小解の存在と一意性について研究を行った.

M 上の Cahn-Hoffman 場 (または非等方的 Gauss map) $\tilde{\xi}_\gamma = \xi_\gamma \circ \nu$ を次の図のように定義する (正式な定義は次で紹介する).



Definition 3

X の γ による Cahn-Hoffman 場 $\tilde{\xi}_\gamma$ に対して

$$S^\gamma = -d\tilde{\xi}_\gamma : T_p M \rightarrow T_p M \quad (p \in M)$$

を X の γ による非等方的型作用素と呼ぶ. さらに S^γ の固有値 $k_1^\gamma, \dots, k_n^\gamma \in \mathbb{R}$ を非等方的主曲率と呼ぶ. さらに $\Lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^\gamma$ を非等方的平均曲率と呼ぶ.

Definition 4 (Cahn-Hoffman 写像)

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^1 とする. γ による Cahn-Hoffman 写像 $\xi_\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$\xi_\gamma(\tilde{\nu}) = D\gamma|_{\tilde{\nu}} + \gamma(\tilde{\nu})\tilde{\nu}, \quad (\tilde{\nu} \in S^n)$$

で定義する. さらに γ が C^2 かつ strictly convex ($d\xi_\gamma$ が S^n の各点で正定値) のとき

$$\xi_\gamma(S^n) = W_\gamma$$

が成立する.

Wulff 図形の例

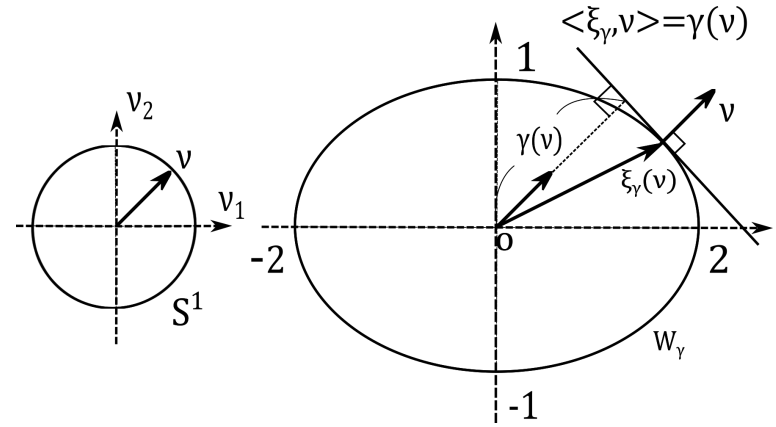
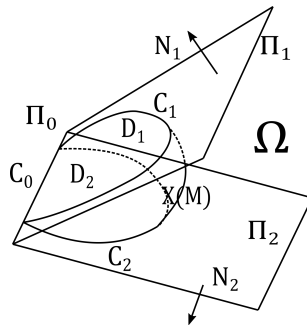


Figure: $\gamma(\nu) = \sqrt{4\nu_1^2 + \nu_2^2}$, $(\nu = (\nu_1, \nu_2) \in S^1)$

2枚の n 次元超平面 $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ からなる楔型の図形を考え, $\Pi_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2$ を楔型の辺と呼ぶ. さらに楔型内の領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする. また N_i を Π_i の Ω に対して外向きの法線ベクトルとする. $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を Ω 内にある楔型を支持曲面とする超曲面で境界への制限が埋め込みであるものとする. $X(M)$ の境界を $\partial X(M) = C_1 \cup C_2$ と書いたとき $C_i \subset \Pi_i$ と仮定し, $C_1 \cap C_2$ が囲む Π_0 内の $n-1$ 次元領域を C_0 とする. また C_i と C_0 で囲まれた Π_i 内の n 次元領域を D_i とする ($i = 1, 2$). さらに X, Π_1, Π_2 で囲まれる体積を $V(X)$ と書くことにする.



本研究ではこの条件を持つ超曲面のうち, 次で定義される全エネルギーの極小解となる超曲面がどのような図形になるかを調べた.

Definition 5 (エネルギー)

濡れ定数と呼ばれる実定数 $\omega_i \in \mathbb{R}$ に対し,

$$W_\gamma(X) = \omega_1 \mathcal{H}^n(D_1) + \omega_2 \mathcal{H}^n(D_2)$$

を X の濡れエネルギーと呼ぶ. ただし $\mathcal{H}^n(D_i)$ は D_i の n 次元面積とする. さらに $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級, strictly convex として

$$E(X) = \mathcal{F}_\gamma(X) + W_\gamma(X)$$

を X の全エネルギーと呼ぶ.

Definition 6 (非等方的 capillary 超曲面)

前で定義した超曲面 $X : (M, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\bar{\Omega}, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2)$ が非等方的 capillary 超曲面であるとは, X が囲む体積を保存し, さらに境界が楔型から出ないような任意の変分 \tilde{X} に対して, $\frac{d}{dt} E(X_t)|_{t=0} = 0$ が成り立つものを言う.

Proposition 1 (Eular-Lagrange 方程式)

前で定義した超曲面 $X : (M, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\bar{\Omega}, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2)$ が非等方的 capillary 超曲面であるための必要十分条件は

- (i) $\Lambda = \text{const}$
- (ii) $\langle \tilde{\xi}_\gamma, N_i \rangle = \omega_i$ on C_i ($i = 1, 2$)

である。ただし Λ は X の非等方的平均曲率である。

Definition 7 (曲面の安定性)

非等方的 capillary 超曲面 $X : (M, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\bar{\Omega}, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2)$ が安定とは、 X が囲む体積を保存し、さらに境界が楔型から出ないような任意の変分 \tilde{X} に対して

$$\frac{d^2}{dt^2} E(X_t)|_{t=0} \geq 0$$

が成立することである。

今回の主定理を紹介する:

Theorem 1 (M. Oka, 2020)

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級, strictly convex とする.

$X : (M, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\bar{\Omega}, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2)$ を前で定義した非等方的 capillary 超曲面とする。ただし濡れ定数は $\omega_i > 0$ とする。さらに $n \geq 3$ のときは D_i が凸であると仮定する。このとき X が安定であることと、 M が平行移動と相似の差を除いて W_γ の部分集合と一致することは同値である。

先行研究

- $\gamma \equiv 1$ の場合 (つまり非等方的エネルギーが曲面の面積の場合). (H. Mitsuo, 2015 [4])
- 楔の辺と曲面が接触していない場合. (M. Koiso, 2019 [1])

安定な非等方的 capillary 超曲面が Wulff 図形の部分集合に限ることの証明の概略のみ紹介する。

証明の概略

変分 $Y_t = \mu(t)(X + t(\tilde{\xi}_\gamma + b))$ を用いると次のような第二変分公式が得られる:

$$E''(Y_t)|_{t=0} = -\frac{1}{n} \int_M \gamma(\nu) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_i^\gamma - k_j^\gamma)^2 dA - (n-1) \sum_{i=1}^2 \omega_i \left(\int_{\sigma_i} \hat{\gamma}_i \hat{\Lambda} ds + \frac{(\hat{\mathcal{F}}_i(D_i))^2}{n\mathcal{H}^n(D_i)} - \frac{1}{n-1} \hat{\mathcal{F}}_0(\chi_0) \hat{\gamma}_i(\rho_i) \right)$$

このとき $E''(Y_t)|_{t=0} \leq 0$ となるので

$$M \text{ が安定} \Rightarrow E''(Y_t)|_{t=0} \geq 0 \Leftrightarrow k_1^\gamma = \dots = k_n^\gamma$$

となるので M は平行移動と相似の差を除いて W_γ の部分集合と一致する。

参考文献

- [1] M. Koiso : Uniqueness of Closed Equilibrium Hypersurfaces for Anisotropic Surface Energy and Application to a Capillary Problem. Math. Comput. Appl. **24** (2019), 88-103.
- [2] A. Honda, M. Koiso, Y. Tanaka; Non-convex anisotropic surface energy and zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space. Journal-for-Industry, **5** (2013), 73-82.
- [3] B. Palmer; Stability of the Wulff shape, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), 3661-3667.
- [4] 光尾洋祐; 楔内の安定 capillary 超曲面, 九州大学院数理学府修士学位論文, 2015.