部分多様体オンライン2020　講演記録

佐々木優 (筑波大学)

リーマン多様体 M が対称空間であるとは，M の各点 x に等長変換 s_x で，（1）x は s_x の孤立固定点，（2）$s_x^2 = \mathrm{id}_M$，の 2 つを満たすものが対応付いていることをいう．M の 2 点 x, y が対蹠的であるとは，$s_x(y) = y$ ($\Leftrightarrow s_y(x) = x$) を満たすことをいう．$M$ の部分集合 S は，任意の 2 点が対蹠的であるとき対蹠集合と呼び，対蹠集合間の包含関係で極大であるものを極大対蹠集合という．また，濃度が最大の対蹠集合を大対蹠集合といい，その濃度を 2-number と呼んで $\#_2 M$ と記す．これら対蹠集合の概念は Chen-Nagano により導入された [1]．とくに，M が非コンパクト型と呼ばれる対称空間であるとき，対蹠集合は 1 点集合になることが知られている．以下では，M をコンパクトリーマン対称空間であるとする．

コンパクト対称空間の対蹠集合とトポロジーの関連について，次の性質が知られている．M が対称 R 空間と呼ばれるコンパクト対称空間の特別なクラスの対称空間であるとき，

$$\#_2 M = \sum_i \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(M; \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ [5]．この背景には，Morse 関数の存在がある．対称 R 空間は，標準埋め込みと呼ばれるユークリッド空間への埋め込みを持つことが知られている．この標準埋め込みに関する高さ関数はほとんどが Morse 関数になることが Morse 関数の一般論から知られているが，その高さ関数の中で，臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$-perfect Morse 関数が存在する．以下，$\beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ で $\sum_i \dim H_i(M\ ;\ \mathbb{Z}_2)$ を表すとする．

対称 R 空間でないコンパクトリーマン対称空間 M についても，$\#_2 M = \beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ が成り立つものが存在する．例えば，特殊ユニタリ群 $SU(n)$ は対称 R 空間ではないが，$\#_2 SU(n) = \beta_{\mathbb{Z}_2}(SU(n)) = 2^{n-1}$ となり，同様に例外型コンパクトリー群 G_2 についても $\#_2 G_2 = \beta_{\mathbb{Z}_2}(G_2) = 7$ となる．これらの対称 R 空間でない場合でも，やはり，臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$-perfect Morse 関数が存在することが知られている [3]．

これらの事実から自然な疑問として次のような問題を考えられる．

問題． $\#_2 M = \beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ をみたすコンパクト対称空間 M について，臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$-perfect Morse 関数が存在するのか？

そこで本講演では，G 型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ を取り上げた．$G_2/SO(4)$ においては，$\#_2 G_2/SO(4) = \beta_{\mathbb{Z}_2}(G_2/SO(4)) = 7$ が成り立っている．

研究方法としては，$G_2/SO(4)$ を G_2 の極地として実現し，G_2 の $SO(7)$ の部分群としての実現を用いて，埋め込み $G_2/SO(4) \subset G_2 \subset SO(7) \subset M(7, \mathbb{R})$ を考える．ただし，$M(7, \mathbb{R})$ で実数を成分に持つ 7 次正方行列全体を表す．この埋め込みに関する高さ関数の中で，臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$-perfect Morse 関数となるようなものを探し，具体的に構成することができた．

参考文献

[1] B.Y.Chen, T.Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308**(1988), 273-297

[2] K.Ishitoya, H.Toda, On the cohomology of irreducible symmetric spaces of exceptional type, J.Math. Kyoto Univ, 17-2(1977), 225-243

[3] H.Kamiya, Weighted tarce functions as examples of Morse functions, J.Fac.Sci.Shinshu Univ, vol.7(1971), 85-96

[4] Y.Sasaki, Morse functions of $G_2/SO(4)$, preprint

[5] M.Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115**(1989),43-46

[6] M.S.Tanaka, H.Tasaki, O.Yasukura, Maximal antipodal sets related to G_2, preprint