擬リーマン空間形や光錐内の超曲面の双対性とその応用

佐藤 雄一郎 (東京都立大学)*

1 超曲面の双対性

$\mathbb{R}^n$ の標準座標を $(x_1, \cdots, x_n)$ とし，指数 p の n 次元**擬ユークリッド空間**を次で定める．

$$\mathbb{E}^n_p := \left(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_p = -dx_1^2 - \cdots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \cdots + dx_n^2\right).$$

擬ユークリッド空間は平坦 (一定断面曲率 0) である．正数 $r > 0$ に対し，擬ユークリッド空間内の超曲面

$$\mathbb{S}^n_p(r) := \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}_p \;\middle|\; \langle x, x\rangle_p = r^2\right\},\ \mathbb{H}^n_p(r) := \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}_{p+1} \;\middle|\; \langle x, x\rangle_{p+1} = -r^2\right\}$$

を定める．これらはそれぞれ一定断面曲率 $r^{-2}, -r^{-2}$ であり，指数 p の n 次元**擬球面**，**擬双曲空間**という．擬ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n_p$ を含めたものを総称して，**擬リーマン空間形**と呼ぶ．光的多様体である指数 p の n 次元**光錐**は，次で定義される．

$$\Lambda^n_p := \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}_{p+1} \setminus \{0\} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = 0\right\}.$$

光錐は，擬ユークリッド空間内の全臍的光的超曲面という特徴を持ち，計量の退化した空間形というべきものである．光錐内の超曲面やその形作用素の記述については例えば [HT1, LJ] を参照せよ．

(M^m, g) を向き付けられた m 次元擬リーマン多様体とし，不定値計量 g の指数を $\mathrm{ind}g$ で表すことにする．このとき，等長はめ込み $f : (M^m, g) \to \mathbb{S}^{m+1}_p(1)$ が与えられるならば，$\mathrm{ind}g = p-1,\ p$ のどちらか一方を満たす．そこで，$\mathrm{ind}g = p$ を **universe condition (U.C.)**，$\mathrm{ind}g = p-1$ を **multiverse condition (M.C.)** と呼ぶことにする．M.C. は $p \geq 1$ のときに起こり得る．

改めて U.C. (resp. M.C.) を満たす等長はめ込み f に対し，M の向きに適合した単位法ベクトル場 ξ を用いて，一意的に滑らかな写像

$$\overline{f} : M^m \ni x \mapsto \xi_{f(x)} \in \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\ (\text{resp. } \mathbb{H}^{m+1}_{p-1}(1))$$

が定まり，M 上で $\langle f, \overline{f}\rangle_p = 0$ を満たす．この $\overline{f}$ を f の **polar** と呼ぶ ([An, BLOSW])．次に f とその polar $\overline{f}$ に対して，**medium** f_+ と **co-medium** f_- をそれぞれ複号同順として次のように定義する．

$$f_\pm : M^m \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x) \pm \overline{f}(x)\right) \in \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\ (\text{resp. } \Lambda^{m+1}_{p-1}).$$

更に，M 上で $\langle f_+, f_-\rangle_p = 0$ (resp. $=1$) を満たす．

$M^m, \bar{M}^n$ をそれぞれ m, n 次元の擬リーマン多様体とし，$C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)$ で，M^m から $\bar{M}^n$ への滑らかな写像全体の成す集合を表すことにする．以下，$\bar{M}^n$ は $\mathbb{S}^{m+1}_p(1), \mathbb{H}^{m+1}_{p-1}(1), \Lambda^{m+1}_{p-1}$ のいずれかであるとする．このとき，$f \in C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)$ に対し，$-f \in C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)$ が成り立つ．そこで $C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$f \sim f' \;:\Longleftrightarrow f' = \pm f$$

によって定める．このとき，f が等長はめ込みであるならば，次の写像

$$\begin{aligned}
\overline{\bullet} &: C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right) \to C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)\ ;\ f \mapsto \overline{f},\\
\bullet_+ &: C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right) \to C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)\ ;\ f \mapsto f_+,\\
\bullet_- &: C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right) \to C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)\ ;\ f \mapsto f_-
\end{aligned}$$

は商集合 $C^\infty\left(M^m, \bar{M}^n\right)/\sim$ 間の写像を誘導する．記号の濫用であるが，それら誘導されたものも $\overline{\bullet}, \bullet_+, \bullet_-$ で表す．

* 部分多様体論オンライン 2020 講演記録.

以上の設定の下，次の可換図式を得る．簡単の為 $f, \overline{f}, f_+, f_-$ は全てはめ込みとする．

Universe (単一宇宙)

$$
\begin{tikzcd}
{[f] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\right)/\sim} \arrow[r, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[d, shift right, "\bullet_+"'] \arrow[dr, shift left, "\bullet_-"] & {[\overline{f}] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\right)/\sim} \arrow[l, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[d, shift right, "\bullet_+"'] \arrow[dl, shift right, "\bullet_-"'] \\
{[f_+] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\right)/\sim} \arrow[r, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[u, shift right, "\bullet_-"'] \arrow[ur, shift right, "\bullet_+"'] & {[f_-] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\right)/\sim} \arrow[l, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[u, shift right, "\bullet_-"'] \arrow[ul, shift left, "\bullet_+"]
\end{tikzcd}
$$

Multiverse (多重宇宙)

$$
\begin{tikzcd}
{[f] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{S}^{m+1}_p(1)\right)/\sim} \arrow[r, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[d, shift right, "\bullet_+"'] \arrow[dr, shift left, "\bullet_-"] & {[\overline{f}] \in C^\infty\left(M^m, \mathbb{H}^{m+1}_{p-1}(1)\right)/\sim} \arrow[l, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[d, shift right, "\bullet_+"'] \arrow[dl, shift right, "\bullet_-"'] \\
{[f_+] \in C^\infty\left(M^m, \Lambda^{m+1}_{p-1}\right)/\sim} \arrow[r, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[u, shift right, "\bullet_-"'] \arrow[ur, shift right, "\bullet_+"'] & {[f_-] \in C^\infty\left(M^m, \Lambda^{m+1}_{p-1}\right)/\sim} \arrow[l, shift left, "\bar{\bullet}"] \arrow[u, shift right, "\bullet_-"'] \arrow[ul, shift left, "\bullet_+"]
\end{tikzcd}
$$

この可換図式が擬リーマン空間形と光錐内の**超曲面の双対性**である．

等長はめ込み f の形作用素 A に対し，固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を考える．すなわち，

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda Id - A) = \sigma_0(A)\lambda^m + \sigma_1(A)\lambda^{m-1} + \cdots + \sigma_{m-1}(A)\lambda + \sigma_m(A).$$

このとき，**第 i 平均曲率** H_i $(0 \leq i \leq m)$ を次で定める．

$$\binom{m}{i} H_i := (-1)^i \sigma_i(A).$$

第 1，第 m 平均曲率 H_1, H_m は，それぞれ平均曲率 $H = (1/m)\,\mathrm{tr}A$ と Gauss–Kronecker 曲率 $K = \det A$ に一致する．

f が**等径**であるとは，任意の $i = 0, 1, \cdots, m$ に対し，第 i 平均曲率 H_i が M 上で定数関数となることである．

f が **austere** であるとは，

$$H_{2k+1} = 0 \qquad \left(k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{m-1}{2}\right]\right)$$

を満たすことである．特に，$H_1 = H = 0$ を満たす．すなわち，austere ならば極小である．

f が **palindromic** であるとは，

$$H_i = H_{m-i}H_m \quad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

を満たすことである．特に，$H_m = K = \pm 1$ を満たす．すなわち，M の向きを適当に選べば，palindromic ならば定 Gauss–Kronecker 曲率 1 であることが成立する．

上述した超曲面の双対性に関して，次の結果を得た．

定理 1 ([An, BLOSW], S.)**.** U.C. または M.C. を満たす f に対し，$\det A = K \neq 0$ を満たすとする．このとき，

(1) f : 等径 $\Longrightarrow \overline{f}$: 等径．更に，相異なる主曲率の個数も保つ．

(2) f : austere $\Longrightarrow \overline{f}$: austere.

(3) f : palindromic $\Longrightarrow \overline{f}$: palindromic.

また，以下複号同順とし，$\det(Id \mp A) \neq 0$ を満たすとする．このとき，

(4) f : 等径 $\Longrightarrow f_\pm$: 等径．更に，相異なる主曲率の個数も保つ．

(5) f : austere $\Longrightarrow f_\pm$: palindromic.

(6) f : palindromic $\Longrightarrow f_\pm$: austere.

ここで，$K \neq 0,\ \det(Id \mp A) \neq 0$ はそれぞれ $\overline{f}, f_\pm$ がはめ込みになる為の条件である．

palindromic 超曲面の導入により，次の無限小の対称性が見える．

$$\begin{array}{ccc}
\text{全測地的 } (A=0) & \longleftrightarrow & \text{全臍的 } (A=\kappa Id) \\
\Downarrow & & \Downarrow (+\alpha_1) \\
\text{austere } (-\mathrm{Spec}A=\mathrm{Spec}A) & \longleftrightarrow & \text{palindromic } ((\mathrm{Spec}A)^{-1}=\mathrm{Spec}A) \\
\Downarrow & & \Downarrow (+\alpha_2) \\
\text{極小 } (\mathrm{tr}A=0) & \longleftrightarrow & \text{定 Gauss–Kronecker 曲率 } 1 \ (\det A=1) \\
 & & \\
\text{“加法的世界”} & \text{v.s} & \text{“乗法的世界”}
\end{array}$$

ここで，$\mathrm{Spec}A$ は主曲率の成す集合である．条件 α_1 について，外空間の計量をスケーリングすることで，$\kappa=\pm 1$ とすることが出来る．また，条件 α_2 について，超曲面が偶数次元の場合，無条件になるが，奇数次元の場合は，$K=-1$ となり得る．しかしながら，超曲面の向きを変えることで $K=1$ と出来る．このような対比がある中，超曲面の双対性と定理 1 により，加法的性質と乗法的性質が移り変わる様子が見て取れる．因みに，palindromic と命名した出自は，第 i 平均曲率を考えたとき，$K=H_m=1$ を満たすようにすれば，番号順 $H_0, H_1, H_2, \cdots, H_{m-2}, H_{m-1}, H_m$ に並べると，palindromic の条件 $H_i=H_{m-i}$ より，

$$1, H_1, H_2, \cdots, H_2, H_1, 1$$

が従う．すなわち，回文構造になっていることから来ている．完備だが等質でない例は [PW] に見られる．

部分多様体の合同性とは違って，写像の合同性は少し注意を要する．$(\hat{M}^{m+n}, \hat{g})$, (M_i^m, g_i) $(i=1,2)$ は全て擬リーマン多様体とし，二つの等長はめ込み $f_i : (M_i^m, g_i) \to (\hat{M}^{m+n}, \hat{g})$ $(i=1,2)$ が与えられているとする．このとき，f_1 と f_2 が**合同**であるとは，ある微分同相写像 $\tau : M_1^m \to M_2^m$ と等長変換 $\varphi \in \mathrm{Isom}(\hat{M}^{m+n}, \hat{g})$ が存在して，$f_2 \circ \tau = \varphi \circ f_1$ を満たすことをいう．すなわち，

$$\begin{tikzcd}
(M_1^m, g_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\hat{M}^{m+n}, \hat{g}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(M_2^m, g_2) \arrow[r, "f_2"] & (\hat{M}^{m+n}, \hat{g})
\end{tikzcd}$$

が成立することである．このとき，(M_1^m, g_1) は (M_2^m, g_2) に等長同型である．

2 応用

U.C. を満たす場合を考える．

命題 2 (S.)**.** U.C. を満たす等長はめ込み $f : M^m \to \mathbb{S}_p^{m+1}(1)$ に対し，$K \neq 0$ を満たすとする．このとき，$\overline{f}$ が f と合同であることの必要十分条件は，$A^2 = Id$ を満たすことである．

系 3 (S.)**.** $p=0$ のとき，すなわち，外空間が単位球面 $\mathbb{S}^{m+1}(1)$ のときを考える．$\overline{f}$ が f と合同である為の必要十分条件は，それらの像が，次のいずれかの開部分に一致することである．

- 全臍的超曲面 $\mathbb{S}^m\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}(1)$,
- Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^r\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^{m-r}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (1 \leq r \leq m-1)$.

注意 4. 系 3 で分類された超曲面は全て現在知られている単位球面 $\mathbb{S}^{m+1}(1)$ 内の二重調和超曲面であり，外空間の単位球面が奇数次元のとき，唯一の極小超曲面

$$\mathbb{S}^m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m+1}(1)$$

を含む．ここで，単位球面内のプロパーな二重調和超曲面が

- 全臍的超曲面 $\mathbb{S}^m\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}(1)$,
- Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^r\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^{m-r}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (1 \leq r \leq m-1,\ m \neq 2r)$

の開部分に限られるかどうかは未解決で，今日 Balmuş-Montaldo-Oniciuc 予想と呼ばれている ([BMO])．

また，余次元が一般の場合，単位球面内のプロパーな二重調和部分多様体は，平均曲率一定であるという予想もBalmuş-Montaldo-Oniciuc 予想と呼ばれていることに留意する．これはある種，Chen 予想の単位球面版と言えるだろう．ところで，Chen 予想とは，ユークリッド空間内の二重調和部分多様体は，極小部分多様体であるという予想である ([Ch])．現時点では，どちらの予想も超曲面の場合ですら，未解決である．

最後に，写像や部分多様体がプロパーな二重調和であるとは，調和ではないが二重調和であるという意味に注意する．更に，等長はめ込みに対しては，調和であることと極小であることは同値である．

応用 1 (単位球面内の二重調和超曲面)

命題 5 (S.)**.** $f : M^m \to \mathbb{S}^{m+1}(1)$ を等長はめ込みとする．このとき，f がプロパーな二重調和であるならば，次は互いに同値である．

(a) Balmuş-Montaldo-Oniciuc 予想は真である．

(b) $K \neq 0$ であり，かつ f とその polar $\overline{f}$ は合同である．

(c) $A^2 = Id$ が成立する．

定理 6 (S.)**.** $f : M^m \to \mathbb{S}^{m+1}(1)$ をプロパーな二重調和等長はめ込みであり，平均曲率一定であるとする．このとき，M^m 上で，

$$\begin{aligned}(\mathrm{C}) \ : \ 6m^3H^4 - 12m^2(m-1)H_2H^2 + 4m(m-1)(m-2)H_3H + 3m(m-1)^2H_2^2 \\ - (m-1)(m-2)(m-3)H_4 - 6 = 0,\end{aligned}$$

または，$K \neq 0$ かつ

$$(\overline{\mathrm{C}}) \ : \ \{1 + (m-1)H_{m-2}\}K^2 - mH_{m-1}^2 = 0$$

を満たすならば，f の像は注意 4 で述べた全臍的超曲面または Clifford 超曲面のいずれかの開部分である．

注意 7. 定理 6 は，Balmuş-Montaldo-Oniciuc 予想の部分的解決を与えている．条件 (C) は，$||A^2||^2 = m$ を満たすことと同値であり，$K \neq 0$ のとき，条件 $(\overline{\mathrm{C}})$ は，$||A^{-1}||^2 = m$ を満たすことと同値になる．このように，平方ノルムを用いた方が記述は単純になるが，幾何学的な意味が見えにくい．すなわち，形作用素 A のどこまでの情報を必要とするのかが一目では分からない．従って，これを明白化する為，条件 (C), $(\overline{\mathrm{C}})$ のように述べることにした．

M.C. を満たす場合を考える．

応用 2 (擬リーマン空間形内の等径超曲面)

リーマン幾何の場合は Takagi によって，擬リーマン幾何の場合は Honda–Tsukada によって次が示された．

定理 8 ([HT2, Ta])**.** $m \geq 3$ とし，M_p^m は指数 p の共形平坦な等質擬リーマン多様体とする．このとき，M_p^m の Schouten 作用素が対角化可能であるならば，M_p^m は，擬リーマン空間形

$$\mathbb{E}_p^m,\ \mathbb{S}_p^m(r),\ \mathbb{H}_p^m(r)$$

または，擬リーマン直積多様体

$$\widetilde{\mathbb{S}_s^k(r)} \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r)\ (2 \leq k \leq m-2),\ \widetilde{\mathbb{S}_p^{m-1}(r)} \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,\ \widetilde{\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r)} \times \mathbb{L}^1,\ \mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{L}^1$$

のいずれかに擬リーマン多様体として，局所等長同型である．ここで，$\widetilde{M_p^m}$ は M_p^m の普遍被覆空間を表す．

指数 p の擬リーマン多様体 $M_p^m = (M^m, g)$ に対し，Schouten 作用素は

$$L(X) := \frac{1}{m-2}\left(Q_g(X) - \frac{S_g}{2(m-1)}X\right) \quad (X \in \Gamma(TM))$$

として定義される．ここで，Q_g, S_g はそれぞれ M_p^m のリッチ作用素，スカラー曲率を表す．

この分類結果の応用として，光錐内の等径超曲面を分類することで，擬リーマン空間形内の M.C. を満たす等径超曲面の分類定理を得ることが出来る．

定理 9 (S.)．$m \geq 3,\ 0 \leq p \leq m$ とし，M.C. を満たす等長はめ込み $f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)$ は等径であるとする．このとき，形作用素 A が対角化可能であるならば，f は次のいずれかと局所的に合同である:

(1) $\mathbb{E}_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ; x \mapsto \left(\langle x,x\rangle_p - \dfrac{3}{4}, x, \langle x,x\rangle_p - \dfrac{5}{4}\right)$,

(2) $\mathbb{S}_p^m(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto \left(\sqrt{r^2-1}, x\right) \quad (r \geq 1)$,

(3) $\mathbb{H}_p^m(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto \left(x, \sqrt{1+r^2}\right) \quad (r > 0)$,

(4) $\widetilde{\mathbb{S}_s^k}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ (x,y) \mapsto (x,y) \quad (r > 0,\ 2 \leq k \leq m-2)$,

(5) $\widetilde{\mathbb{S}_p^{m-1}}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ (x,t) \mapsto \left(r\cosh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r\sinh\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 0)$,

(6) $\mathbb{H}_p^{m-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ (x,t) \mapsto \left(x, r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 1)$,

(7) $\widetilde{\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{L}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ (x,t) \mapsto \left(r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\dfrac{t}{r}\right), x\right) \quad (r > 0,\ p \geq 1)$,

(8) $\mathbb{H}_{p-1}^{m-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{L}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)\ ;\ (x,t) \mapsto \left(r\sinh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r\cosh\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 1,\ p \geq 1)$.

更に，M_p^m が単連結かつ測地的完備であるならば，f は上記のいずれかに大域的に合同である．

注意 10. この結果は，$m \geq 3$ で成立することに注意せよ．一方，擬リーマン空間形内の等径曲面の場合であるが，形作用素が対角化可能である場合に分類が完了している ([LZ])．また，3 次元ド・ジッター時空 $\mathbb{S}_1^3(1)$ 内の等径曲面に関して，Li–Wang [LW] によって，対角化可能でない場合を込めて，完全な分類が得られている．更に，定理 9 は，$\mathbb{S}_{m+1}^{m+1}(1)$ が $\mathbb{H}_0^{m+1}(1)$ に反等長同型であるから，双曲空間内の等径超曲面の分類結果や Li–Xie [LX] によるド・ジッター時空 $\mathbb{S}_1^{m+1}(1)$ 内の空間的等径超曲面の分類結果を包含する．

参考文献

[An] H. Anciaux, *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*, World Scientific, (2011).

[BLOSW] F. Brito, H. L. Liu, V. I. Oliker, U. Simon and C. P. Wang, *Polar hypersurfaces in spheres*, Geometry and topology of submanifolds, IX (Valenciennes/Lyon/Leuven, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1999), 33–47.

[BMO] A. Balmuş, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Classification results for biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math., **168** (2008), 201–220.

[Ch] B.-Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., **17** (1991), 169–188.

[Ha] J. Hahn, *Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms*, Math. Z., **187** (1984), 195–208.

[HT1] K. Honda and K. Tsukada, *Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry*, Ann. Global Anal. Geom., **25** (2004), 253–275.

[HT2] K. Honda and K. Tsukada, *Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds*, J. Phys. A, **40** (2007), 831–851.

[LJ] H. Liu and S. D. Jung, *Hypersurfaces in lightlike cone*, J. Geom. Phys., **58** (2008), 913–922.

[LUY] H. Liu, M. Umehara and K. Yamada, *The duality of conformally flat manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), **42** (2011), 131–152.

[LW] C. Li and J. Wang, *The classification of isoparametric surfaces in S_1^3*, Kobe J. Math., **22** (2005), 1–12.

[LX] Z.-Q. Li and X.-H. Xie, *Space-like isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space forms*, Front. Math. China, **1** (2006), 130–137.

[LZ] M. Li and Y. Zhao, *Isoparametric surfaces in 3-dimensional de Sitter space and anti-de Sitter space*, Northeast. Math. J., **19** (2003), 259–266.

[PW] O. M. Perdomo and G. Wei, *A characterization of quadric constant Gauss–Kronecker curvature hypersurfaces of spheres*, Asian J. Math., **19** (2015), 251–264.

[Ta] H. Takagi, *Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries*, Tohoku Math. J. (2), **27** (1975), 103–110.