複素射影空間内の等質実超曲面の特徴付け

前田 定廣 (佐賀大学理工学部)

本講演では, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面 M^{2n-1} (即ち, $SU(n+1)$ の部分群の軌道で表される実超曲面 M) を主な考察の対象とする。

高木亮一先生によって $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面は, 完全に分類された ([6]):

定理 1. $\mathbb{C}P^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内の等質実超曲面 M は, 次の 6 つのホップ超曲面のどれかと局所的に ($\mathbb{C}P^n(c)$ の等長変換に関して) 合同である。

(A_1) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c}\,)$ の測地球面,

(A_2) 全測地的 $\mathbb{C}P^k(c)\,(1 \leqq k \leqq n-2)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c}\,)$ のチューブ,

(B) 複素 2 次超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}\,))$ のチューブ,

(C) $\mathbb{C}P^1(c) \times \mathbb{C}P^{(n-1)/2}(c)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}\,))$ のチューブ, ここで $n(\geqq 5)$ は奇数,

(D) 複素グラスマン $\mathbb{C}G_{2,5}$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}\,))$ のチューブ, ここで $n = 9$,

(E) エルミート対称空間 $SO(10)/U(5)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}\,))$ のチューブ, ここで $n = 15$.

この分類定理は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面は, 階数 1 または 2 の適当なコンパクトエルミート対称空間を芯とするチューブになることを我々に教えてくれる。

Kimura ([4]) は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面に次のような幾何学的特徴付けを与えた。

定理 2. $\mathbb{C}P^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内の連結実超曲面 M に関する次の 2 条件は同値である。

(1) M は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面である。

(2) M は, すべての主曲率がそれぞれ一定な $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のホップ超曲面である。

定理 2 は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のすべての等質実超曲面を特徴付けた最初の結果である。本講演では, 定理 2 を足がかりにして別な特徴付けを与えることにする。

定理 1 より $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のすべての等質実超曲面は, ホップ超曲面であることが分かる。しかし, 逆は成立しない。実際, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の任意のケーラー部分多様体を取り, それを芯とする半径が十分小さいチューブを考えると, そのチューブは (focal map が constant rank になっている所で,) ホップ超曲面になることが知られている ([3])。

すべてのホップ超曲面に共通な性質として次の事が知られている。

命題 1. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の任意のホップ超曲面 M の正則分布 $T^0M(:= \{X \in TM \mid X \perp \xi\})$ は, 可積分ではない。

命題 1 の観点から $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のすべての等質実超曲面に対して, 特徴付けを与えることができる ([2])。

定理 3. $\mathbb{C}P^n(c)$, $n \geqq 2$ 内の連結実超曲面 M に関する次の２条件は同値である。

(1) M は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面である。

(2) M の正則分布 T^0M が T^0M に制限された主分布 $V^0_{\lambda_i} = \{X \in T^0M | \, AX = \lambda_i X\}$ の直和に分解され, しかも各 $V^0_{\lambda_i}$ は, 次の２条件のどちらかを満たす。

(2_a) $V^0_{\lambda_i} \oplus \{\xi\}_{\mathbb{R}}$ は可積分である。

(2_b) $V^0_{\lambda_i}$ は可積分であり, 任意の葉体 (*leaf*) は実超曲面 M 内の全測地的部分多様体である。

定理３の statement にある２条件 (2_a) と (2_b) を比較すると, (2_b) の後半部分 "任意の葉体 (leaf) は実超曲面 M 内の全測地的部分多様体である" が気になる。実はこの部分を取ると, 定理３は成り立たないのである ([2])。

命題 2. $\mathbb{C}P^n(c)$ $(n \geqq 3)$ 内の実超曲面 M で次の４条件を満たすものが存在する。

(1) M の正則分布 $T^0M = \{X \in TM | \, X \perp \xi\}$ は, T^0M に制限された主分布 $V^0_{\lambda_i} = \{X \in T^0M | \, AX = \lambda_i X\}$ の直和に分解される。

(2) M の各制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}$ は可積分である。

(3) M のある制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}$ のある葉体で M において全測地的でないものが存在する。

(4) M のある主曲率で M 上局所的に一定でないものが存在する。

また, 定理３において $V^0_{\lambda_i} \oplus \{\xi\}_{\mathbb{R}}$ が可積分であれば, 任意の葉体 L_{λ_i} は "自動的に" 実超曲面 M 内の全測地的部分多様体になる。しかも $\phi V^0_{\lambda_i} = V^0_{\lambda_I}$ となるから, $\dim V^0_{\lambda_i} = 2m_i$ とおける。こういった事から, 葉体 L_{λ_i} は ($\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全測地的ケーラー部分多様体)$\mathbb{C}P^{m_i+1}(c)$ 内の測地球面であることが分かる。

次に, 定理３の (2_b) を考える。$\dim V^0_{\lambda_i} = n_i$ とおくと, この場合の葉体 L_{λ_i} は ($\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全測地的全実部分多様体)$\mathbb{R}P^{n_i+1}(c/4)$ 内の定曲率 c_1 の全せい的超曲面 $M^{n_i}(c_1)$ になる。ここで, $|\lambda_i| = \sqrt{c_1 - (c/4)}$ が, 成り立つことに注意。

今度は, 実超曲面上の測地線を $\mathbb{C}P^n(c)$ から観察してみよう。$\mathbb{C}P^n(c)$ は, 全せい的実超曲面を許容しない。よって $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の実超曲面 M を考察するとき, M 上のすべての測地線が $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の円に写るというようなケースは, あり得ない。

そこで実超曲面上の測地線の本数を減らすことにより, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のすべての等質実超曲面を特徴付ける次の定理を得た ([1])。

定理 4. $\mathbb{C}P^n(c)$, $n \geqq 2$ 内の連結完備実超曲面 M に関する次の２条件は同値である。

(1) M は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面である。

(2) M 上の任意の点 x において, 次の条件を満たす $T^0_xM (:= \{X \in T_xM \, | X \perp \xi_x\})$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{2n-2}\}$ が存在する : 初期条件 $\gamma_i(0) = x$, $\dot{\gamma}_i(0) = v_i$ $(1 \leqq i \leqq 2n-2)$ を満たす M 上の測地線 γ_i は, すべて $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の曲率が正の円に写る。

定理４の仮定で, 実超曲面 M の "完備性" を外すとこの定理は局所的な結果になる。また定理４の条件 (2) において, "曲率が正の" という語句を削除すると, この定理は成り立たないことを次の命題が教えてくれる。

命題 3. $\mathbb{C}P^n(c)$, $n \geqq 2$ 内の実超曲面 M に関する次の 2 条件は同値である。

1) M は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の線織実超曲面である。
2) M 上の任意の点 x において, 次の条件を満たす $T_x^0 M (:= \{X \in T_x M \,|\, X \perp \xi_x\})$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{2n-2}\}$ が存在する :
   2_a) 初期条件 $\gamma_i(0) = x,\ \dot{\gamma}_i(0) = v_i$ $(1 \leqq i \leqq 2n-2)$ を満たす M 上の測地線 γ_i は, すべて $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の測地線に写る。
   2_b) 初期条件 $\gamma_{ij}(0) = x,\ \dot{\gamma}_{ij}(0) = (v_i + v_j)/\sqrt{2}$ $(1 \leqq i < j \leqq 2n-2)$ を満たす M 上の測地線 γ_{ij} は, すべて $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の測地線に写る。

最後に, 定理 4 の条件 (2) に現れる円について一言。この円は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全実円 (即ち, 全測地的全実曲面 $\mathbb{R}P^2(c/4)$ 上の円) であるから, 当然閉曲線になる。$\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全ての円は単純曲線であるが, 閉曲線になるとは限らないことに注意されたい。

References

[1] T. Adachi, M. Kimura and S. Maeda, *A characterization of all homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space by observing the extrinsic shape of geodesics*, Arch. Math. (Basel) **73** (1999), 303–310.

[2] B.Y. Chen and S. Maeda, *Hopf hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective or complex hyperbolic spaces*, Tokyo J. Math. **24** (2001), 133–152.

[3] T.E, Cecil and P.J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans, Amer. Math. Soc. **269** (1982), 481–499.

[4] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 137–149.

[5] R. Niebergall and P.J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds, T.E. Cecil and S.S. Chern, eds., Cambridge University Press, 1998, pp. 233–305.

[6] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.

[7] A. Vitter, *On the curvature of complex hypersurfaces*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 813–826.

E-mail address: smaeda@ms.saga-u.ac.jp