ケーリー代数の部分多様体

東京農工大学・数学教室　間下克哉

1　準備

$\mathcal{C}$ をケイリー代数とする．e_0 を $\mathcal{C}$ の単位元とし，正規直交規定 $e_0, \cdots, e_7$ を

$$e_1e_2 = e_3,\ e_1e_4 = e_5, e_1e_6 = e_7,\ e_2e_4 = e_7 \quad \text{etc.}$$

を満たすものとする．$\mathcal{C}_0 = \sum_{i=1}^{7} \mathbf{R}e_i$ とおく．

補題　(３対原理) $g \in SO(\mathcal{C})$ に対して

$$g(x)g_1(y) = g_2(xy), \quad x, y \in \mathcal{C}. \tag{1}$$

を満たす $g_1,\ g_2 \in SO(\mathcal{C})$ が定まる．g に対して (1) を満たす (g_1, g_2) は，(g_1, g_2) と $(-g_1, -g_2)$ に限る．

において $g_1 = g_2$ となる元 $g \in SO(\mathcal{C})$ は $SO(\mathcal{C}_0)$ の元であることが容易にわかるが，実は

$$\{g_1 \in SO(\mathcal{C}) \ : \ \exists g \in SO(\mathcal{C}_0) \text{ s.t. } g(x)g_1(y) = g_1(xy), \quad x, y \in \mathcal{C}\}$$

は $Spin(7)$ に同型で $g_1 \mapsto g$ が被覆写像になっている．以下では $SO(\mathcal{C})$ の自己同型

$$\kappa : SO(\mathcal{C}) \to SO(\mathcal{C}); \alpha \mapsto [x \mapsto (\kappa\alpha)(x) = \overline{\alpha(\overline{x})}],$$

による像

$$Spin(7) = \{g \in SO(\mathcal{C}) \ : \ \exists g' \in SO(\mathcal{C}_0)\text{s.t.}g(x)g'(y) = g(xy),\ x, y \in \mathcal{C}\}$$

は

(i) $\mathcal{C}$ 内の向き付けられた 6 次元部分多様体 M 上に定義される概複素構造

$$J_p(X) = X(\bar{\xi}\eta) \quad X \in T_xM$$

ただし ξ, η は M の法束の向き付けられた正規直交規定

(ii) ケーリー・キャリブレーション

$$\varphi(x, y, z, w) = \frac{1}{2}\langle x, (y(\bar{z}w) - w(\bar{z}y))\rangle \quad x, y, z, w \in \mathcal{C}$$

を不変にする．

(i) および (ii) に係わる問題として

(1) $\mathcal{C}$ 内の 6 次元部分多様体で $\mathcal{C} \rtimes Spin(7)$ の部分群の軌道として得られるものの分類

(2) S^7 の 3 次元部分多様体でその上の錐がケーリーキャリブレーションでキャリブレートされるもの構成

を考える．

(1) はすでに完成して出版されている ([2])．以下で述べる方法による $Spin(7)$ の部分群を分類と Di Scala の定理 ([1]) により [2] の結果を示すことができる．

講演では (1) についても若干触れたが，以下では (2) の話題についてのみ述べる．

2 $Spin(7)$ の部分群

$\tilde{\mathfrak{k}}$ を複素単純リー環とし，$(,)_{\tilde{\mathfrak{k}}}$ を $\tilde{\mathfrak{k}}$ の $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{k}}}$-不変双線形形式で長い根の長さの 2 乗が 2 であるものとするとする．複素線形表現 $\rho : \tilde{\mathfrak{k}} \to \mathfrak{sl}(N, \mathbf{C})$ に対して

$$\mathrm{trace}\ \rho(X) \circ \rho(Y) = l_\rho\, (X, Y)_{\tilde{\mathfrak{k}}}, \quad X, Y \in \tilde{\mathfrak{k}},$$

で定まる定数 l_ρ を ρ の指数という．ρ が，λ を最高ウェイトとする複素既約表現のときは

$$l_\lambda = \frac{N}{\dim \tilde{\mathfrak{k}}} \langle \lambda + 2\delta, \lambda \rangle$$

ただし 2δ は正の根の総和 $2\delta = \sum_{\alpha > 0} \alpha$ である．

K を $Spin(7)(\subset SO(\mathcal{C}))$ の閉部分群とするとき

$$\begin{aligned} \rho_1 &: Spin(7) \to SO(\mathcal{C}_0)\ (\text{cov. proj.}) \\ \rho_2 &: Spin(7) \to SO(\mathcal{C})\ \ (\text{inclusion}) \end{aligned}$$

により K の $\mathcal{C}_0$ および $\mathcal{C}$ への表現が得られるがこれらの指数は一致する．また，対応するリー環の表現は $d\rho_1 = id$ とするとき $d\rho_2$

$$G_{ij} \mapsto [x \mapsto \frac{1}{2} e_j(e_i x)]$$

で与えられる．ここに G_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq 7)$ は $G_{ij}(e_l) = \delta_{jl} e_i - \delta_{il} e_j$ $(0 \leq l \leq 7)$．このふたつの事実を用いて $Spin(7)$ の部分群を分類することができる．

3 ケーリー・キャリブレーション

$SU(2)$ の $\mathcal{C}_0$ への表現で既約分解が $\mathcal{C}_0 = \mathbf{R}^5 \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ となるもののスピン表現 $Spin(7) \to SO(\mathcal{C})$ への像は，$\mathfrak{so}(\mathcal{C})$ の

$$\begin{cases} -3G_{10} - G_{23} + G_{45} + 3G_{76}, \\ \sqrt{3}(-G_{50} - G_{14} + G_{72} + G_{36}) - 2G_{24} + 2G_{53}, \\ \sqrt{3}(G_{40} + G_{51} - G_{62} - G_{73}) - 2G_{34} + 2G_{25}. \end{cases}$$

で張られるリー部分環が生成する部分群 (G_1 と書く) となる．この部分群の軌道について考察して次を得た．

命題 G_1 の軌道で S^7 の極小部分多様体になるものは *2* つ;

- e_0 を通る軌道
- e_2 を通る軌道

で，どちらもその上の錐は *Cayley calibration* で *calibrate* された部分多様体である．

References

[1] J. Berndt, S. Console and C. Olmos, *Submanifolds and Holonomy*, Research Notes in Mathematics Series Vol. 434, Chapman & Hall / CRC, (2003).

[2] H. Hashimoto, T. Koda, K. Mashimo and K. Sekigawa, *Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-dimensional submanifolds in the octonions*, Kodai Math. J., 30(2007), 297-321.