複素空間型内の実超曲面について (奇宇恒氏, 栗原博之氏, 高木亮一氏との共同研究)

永井　節夫*

富山大学理学部

0　はじめに

本講演では, 正則断面曲率一定 c の n 次元非平坦複素空間型 $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の実超曲面 M について述べる. 特に M 上に自然に定義される構造ベクトル場の主曲率性に関する奇宇恒氏, 栗原博之氏, 高木亮一氏との一連の共同研究による結果と, $\mathbb{C}P_n$ 内の極小実超曲面のスカラー曲率による挟撃問題の筆者による結果について論述する. 以下において $\mathbb{C}P_n$ は複素射影空間, $\mathbb{C}H_n$ は複素双曲空間を表す. J, g を $M_n(c)$ の複素構造及びケーラー計量とし, M のリーマン計量も同じ記号 g で表す. ν を M 上の局所法ベクトル場, A を形作用素とする. M 上 $\xi = -J\nu$ で定義されるベクトル場を M の構造ベクトル場とよぶ.

M 上には次で定義される almost contact metric structure (ϕ, ξ, η, g) が入る:

$$\phi X = (JX)^T,\ \xi = -J\nu,\ \eta(X) = g(X, \xi),\ X \in TM,$$

ここに $(\ )^T$ は接方向を表す.

1　等質実超曲面とその幾何学的不変量

以下 M を複素空間型 $M_n(c)$ 内の実余次元 1 の部分多様体 (以後簡単のために実超曲面とよぶ) とする. $M_n(c)$ の等長変換群の部分群の軌道として得られる実超曲面は等質実超曲面と呼ばれ, $\mathbb{C}P_n$ 内の実超曲面の場合には, 高木亮一氏によって分類されている. それらはランク 2 のエルミート対称対 (U, K) の随伴表現の軌道からホップ・ファイブレーションを経由して得られる. 対応する (U, K) に応じて以下のように分類されている:

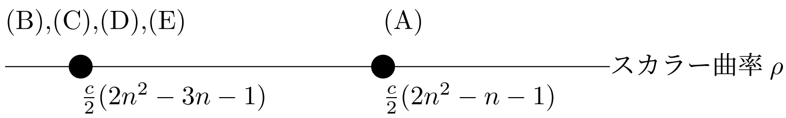
*e-mail: snagai@sci.u-toyama.ac.jp

定理 1.1 (R. Takagi 1973) $\mathbb{C}P_n(c)$ 内の等質実超曲面は, 以下の 5 種類のエルミート対称対 (U,K) から得られる.

型	(U,K)	n
(A) 型	$(\mathrm{SU}(p+1),\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(p)))\oplus(\mathrm{SU}(q+1),\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(q)))$	$p+q=n+1$
(B) 型	$(\mathrm{SO}(p+2),\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(2))$	$n=p-1$
(C) 型	$(\mathrm{SU}(p+2),\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(2)))$	$n=2p-1$
(D) 型	$(\mathrm{SO}(10),\mathrm{U}(5))$	$n=9$
(E) 型	$(\mathrm{E}_6,\mathrm{SO}(10)\cdot S^1)$	$n=15$

極小等質実超曲面のスカラー曲率 ρ と構造ベクトル場 ξ に対応する主曲率 α は, 下図の様に分布している:

- スカラー曲率 ρ (極小の場合)

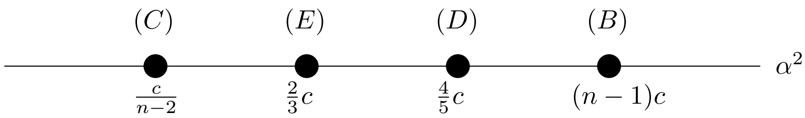


- ξ 方向の主曲率 α の平方 (極小の場合)

(A) 型

$$\alpha^2=\frac{c}{4}\Big(\sqrt{\frac{2p-1}{2q-1}}-\sqrt{\frac{2q-1}{2p-1}}\Big)^2 \quad (p+q=n+1,\ 1\le q\le n).$$

(B)–(E) 型



2 構造ベクトル場の主曲率性

複素次元 3 以上の非平坦複素空間型はリッチテンソル S が平行な実超曲面を許容しない (奇宇恒氏の結果). 特に局所対称な実超曲面は存在せず, アインシュタイン実超曲面も存在しない. リッチテンソル S に関して種々の条件を満たす実超曲面の分類は大変興味深い問題である. これについては多くの微分幾何学者による研究がある. 最近我々は次の定理を得た:

定理 2.1 (U-H. Ki, Chunji Li and N) 実超曲面 M に対して, $\nabla_\xi S=0$ で $R_\xi A=AR_\xi$ を満たすならば, M は次のいずれかの *Kähler* 部分多様体上の半径 r の管に局所合同である:

(A_1) *hyperplane* $\mathbb{C}P_{n-1},\ 0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{c}},$
(A_2) *totally geodesic* $\mathbb{C}P_k,\ 1 \leq k \leq n-2,\ 0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{c}},$
(B) *complex quadric* $Q_{n-1},\ 0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}},\ \cot^2\sqrt{c}r = n-2,$
(C) $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_{\frac{n-1}{2}},\ 0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}},\ \cot^2\sqrt{c}r = \frac{1}{(n-2)},\ n \geq 5,\ n : odd,$
(D) *complex Grassmann* $G_{2,5},\ 0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}},\ \cot^2\sqrt{c}r = \frac{3}{5},\ n = 9,$
(E) *Hermitian symmetric space* $SO(10)/U(5),\ 0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}},$
$\cot^2\sqrt{c}r = \frac{5}{9},\ n = 15.$
(F) *any Kähler submanifold* $\widetilde{N}$ *with nonzero principal curvatures* $\neq \pm\frac{\sqrt{c}}{2},$
$r = \frac{\pi}{2\sqrt{c}},$
(G) *k-dimensional Kähler submanifold* $\widetilde{N}$ *on which the rank of each shape operator is not greater than* 2 *with nonzero principal curvatures* $\neq \pm\frac{\sqrt{c}}{2}\sqrt{\frac{2k-1}{2n-2k-1}},$
$\cot^2\frac{\sqrt{c}}{2}r = \frac{2k-1}{2n-2k-1},\ k = 1,\ldots,n-1.$

構造ヤコビ作用素 R_ξ $(R_\xi X = R(X,\xi)\xi)$ との関係について, 我々は最近次の結果を証明した:

定理 2.2 (U-H. Ki, H. Kurihara, N and R. Takagi 2008) 複素空間型 $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の実超曲面が, $\nabla_\xi R_\xi = 0$, $R_\xi S = SR_\xi$ を満たすならば, 構造ベクトル場 ξ は主曲率ベクトルであり, M は (A) 型の等質実超曲面または ξ に対応する主曲率 $\alpha = 0$ である実超曲面に合同である.

3 挟撃問題

複素射影空間内の実超曲面の挟撃問題については Lowson による次の結果が有名である.

定理 3.1 (Lowson 1970) M を $\mathbb{C}P_n(c)$ 内のコンパクト極小実超曲面とする. M のスカラー曲率 ρ が次の不等式をみたすとする.

$$\rho \geq \frac{c}{2}(2n^2 - n - 1).$$

そのとき, $\rho = \frac{c}{2}(2n^2 - n - 1)$ で M は (A) 型の等質実超曲面である.

今回我々は次の特徴付け定理を得た:

定理 3.2 (N) M を $\mathbb{C}P_n(c)$ 内のコンパクト極小実超曲面とする. M の構造ベクトル場 ξ が主方向で, スカラー曲率 ρ および ξ に対応する主曲率 α が次の不等式をみたすとする:

$$\rho \geq \tfrac{c}{2}(2n^2 - 3n - 1),$$
$$\alpha^2 \geq (n-1)c.$$

そのとき, $\rho = \frac{c}{2}(2n^2 - 3n - 1)$, $\alpha^2 = (n-1)c$ で M は (B) 型の極小等質実超曲面である.