Some critical almost Kähler structures

関川　浩永（新潟大理）

$M=(M,J,g)$ をコンパクト概ケーラー多様体とし,Ω をそのケーラー形式（$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$）とする。$\mathcal{AK}(M)$, $\mathcal{AK}(M,[\Omega])$,$\mathcal{AK}(M,\Omega)$ をそれぞれ,M 上の概ケーラー構造全体, 概ケーラー構造でそのケーラー類が $[\Omega]$ と一致するもの全体, 概ケーラー構造でそのケーラー形式が Ω に等しいもの全体からなる集合とする。また,$\mathcal{AH}(M)$ を M 上の概エルミート構造全体からなる集合とする。このとき, これらの集合はすべて Frécet 空間となり, 次の包含関係を満たしている。

$$\mathcal{AK}(M,\Omega)\subset\mathcal{AK}(M,[\Omega])\subset\mathcal{AK}(M)\subset\mathcal{AH}(M) \tag{1}$$

とくに,$\mathcal{AK}(M,\Omega)$ は可縮であることが知られている。本講演では,Blair-Ianus([2]) によって導入された $\mathcal{AH}(M)$ 上の汎関数 $\mathcal{F}(J,g)=\int_M(\tau^*-\tau)\,dv$（$\tau,\tau^*$ はそれぞれ M のスカラー曲率,$*$-スカラー曲率）の一般化であるところの汎関数 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(J,g)=\int_M(\lambda\tau+\mu\tau^*)\,dv$, λ,μ は定数で $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$([5]) の臨界点について, 小黒氏と山田氏との共同研究 ([7],[8]) によって得られた結果を紹介する。

「定理 A」([8]) $M=(M,\Omega)$ をコンパクト・シンプレクティック多様体とする。このとき,(J,g) が汎関数 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ の $\mathcal{AK}(M,\Omega)$ における臨界点であるための必要十分条件は $(0,2)$ テンソル場 $(\mu-\lambda)\rho$ (ρ は g のリッチテンソル）が J-不変であることである。さらに,(J,g) が汎関数 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ の $\mathcal{AK}(M,\Omega)$ における臨界点であるならば, それは同時に $\mathcal{AK}(M,[\Omega])$ における臨界点でもある。

上の定理は Blair-Ianus ([2]) の結果の拡張になっている。尚, 上の定理の後半は,Moser ([6]) のシンプレクティック構造に関する *Stability Theorem* を用いて容易に示すことができるが, 直接的に示すこともできる。

「系 A」([8]) $M=(M,\Omega)$ をコンパクト・シンプレクティック多様体とする。このとき, 汎関数 $\mathcal{F}_{\lambda,\lambda}$ は $(\lambda\neq0)$ は $\mathcal{AK}(M,[\Omega])$ の各連結成分で一定値をとる。

上記「系 A」に関して, 例えば,$2n$-次元コンパクト, シンプレクティック多様体 $M=(M,\Omega)$ において, 次の等式

$$(2) \qquad \int_M (\tau+\tau^*)\,dv = \mathcal{F}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(J,g) = \frac{4\pi}{(n-1)!}(c_1 \cup [\Omega]^{(n-1)})$$

$\forall (J,g)\epsilon\mathcal{AK}(M,[\Omega])$, ただし,$c_1$ は (M,J) の第 1 チャーン類である（[1]）。「系 A」と (2) より,$(c_1\cup[\Omega]^{n-1})([M])$ は $\mathcal{AK}(M,[\Omega])$ の各連結成分上で一定値をとることがわかる。

「定理 B」([7]) M を $2n(\geqq 4)$-次元コンパクト, 可符号多様体とし, $\mathcal{AK}(M)\neq\varnothing$ とする。このとき, (J,g) が汎関数 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ の $\mathcal{AK}(M)$ における臨界点であるならば,$(\mu-\lambda)$ が J-不変であり, かつ $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(J,g)=0$ となる。従って，特に $(\lambda,\mu)=(-1,1)$ のとき,(J,g) が汎関数 $\mathcal{F}_{-1,1}$ の $\mathcal{AK}(M)$ における臨界点であるための必要十分条件は,(J,g) が M 上のケーラー構造となることである, ということがわかる。

Remark 1. 汎関数 $\mathcal{F}_{-1,1}$ を $\mathcal{AK}(M,\Omega)$ 上に制限して考えたとき,$(J,g)\epsilon\mathcal{AK}(M,\Omega)$ がその臨界点となるための必要十分条件は g のリッチテンソル ρ が J-不変であることが知られている *([2])*。特にコンパクト多様体 M が概ケーラー, アインシュタイン構造 (J,g) を許容すれば, それは定義域を $\mathcal{AK}(M,\Omega)$ 上に制限した汎関数 $\mathcal{F}_{-1,1}$ の臨界点になっている。従って, 概ケーラー, アインシュタイン構造がその定義域を $\mathcal{AK}(M)$ に拡げたときの汎関数 $\mathcal{F}_{-1,1}$ の臨界点にもなっていれば,「定理 *B*」よりそれは, ケーラー, アインシュタイン構造であることがわかる。すなわち,「*Goldberg* 予想」*([3])* は正しいという結論になる。しかし, このことは現段階では不明である。

参考文献

[1] V.Apostolov and T.Draghici,The curvature and the integrability of almost Kähler manifold: a survey, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives. Tronto,ON/Montreal,QC,2001,25-53,Fields Inst. Commun.,35 Amer.Math.Soc.,Providence, RI,2003(arXive:math.DG/0302152).

[2] D.E.Blair and S.Ianus, Critical associated metrics on symplectic manifolds, Contemporary Math.51(1986),23-29.

[3] S.I.Goldberg, Integrability of almost Kähler manifolds, Proc.Amer.Math.Soc., 21(1969),96-100.

[4] T.Koda, Critical almost Hermitian structures, Indian J. Pure Appl. Math.,26(1995),679-690.

[5] T.Koda, Almost Kähler structures with a fixed Kähler class, Math.J.Toyama Univ.,

27(2004),125-131.
[6] J.Moser, On the volume elements on a manifold, Trans. Amer. Math. Soc.,120(1965), 286-294.
[7] T.Oguro and K.Sekigawa, Some critical almost Kähler structures, to appear in Colloq. Math.
[8] T.Oguro,K.Sekigawa and A.Yamada, Some critical almost Kähler structures with a fixed Kähler class,Topics in Contemporary Differential Geometry,Complex Analysis and Mathematical Physics, Proc.the 8th Int. Workshop on Complex Structures and Vector Fields,World Scietific Pub.Co.Pte.Ltd.,(2007),269-277.