積分の近似和の収束の速さ*

筑波大学数理物質科学研究科
田崎博之
tasaki@math.tsukuba.ac.jp

有界閉区間上定義された関数の Riemann 和と台形和は、その関数の Riemann 積分の近似和としてよく知られている。この Riemann 和と台形和の収束の速さを誤差項のある極限として表現する。この講演の内容は [3] をもとにしている。

有界閉区間 $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n = b$$

と $s_{i-1} \leq \xi_i \leq s_i$ を満たす ξ_i をとり、$[a,b]$ 上定義された関数 f の **Riemann 和**を

$$R(f;\Delta,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})f(\xi_i)$$

によって定める。

$$d(\Delta) = \max\{s_i - s_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

によって Δ の**幅** $d(\Delta)$ を定める。関数 f の **Riemann 積分**を

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Delta)\to 0} R(f;\Delta,\xi_i)$$

によって定める。f が連続関数のときに Riemann 積分が存在することは、ほとんどの微分積分の教科書に書かれているよく知られたことである。n が大きくなるときに 0 に近づく量による Riemann 和の誤差

$$\left|\int_a^b f(x)dx - R(f;\Delta,\xi_i)\right|$$

の上からの評価は、多くの微分積分の教科書で見かけるが、この誤差の極限に関する考察はあまりみあたらない。もちろん、n を大きくしたときに誤差は 0 に近づくが、その誤差の n 倍や n^2 倍などが極限を持つ場合がある。そのような結果の一つに次の Chui [1] の結果がある。

Chui(1971)　$[a,b]$ の n 等分割を D_n で表す。すなわち、D_n の分点は

$$s_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad (0 \leq i \leq n)$$

*高木亮一教授 退官記念研究集会 (2008 年 3 月 13, 14 日) での講演の予稿 (改訂版)

である。f'' が存在し有界であり、ほとんどすべての点で連続であるとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\int_a^b f(x)dx - R\left(f; D_n, \frac{s_{i-1}+s_i}{2}\right)\right\}\\ = \ &\frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)dx = \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a)).\end{aligned}$$

$f(\xi_i) = \min\limits_{[s_{i-1},s_i]} f$ を満たす $s_{i-1} \leq \xi_i \leq s_i$ によって下限近似 Riemann 和

$$R(f;\Delta,\min) = R(f;\Delta,\xi_i)$$

を定義する。分割に下限近似 Riemann 和を対応させる関数

$$(s_1,\ldots,s_{n-1}) \mapsto R(f;\Delta,\min)$$

は連続関数になることがわかり、n を固定すると $R(f;\Delta,\min)$ の最大値を与える Δ が存在する。そこで、この最適な分割を $\Delta_n^{\#}$ で表す。この分割は n に対して一意的に定まるとは限らないが、$R(f;\Delta,\min)$ は同じ値になるので、$R(f;\Delta_n^{\#},\min)$ は f と n に対して定まる値になる。この近似和に関して次の結果を得た。

定理 1　f は C^1 級であるとすると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_a^b f(x)dx - R(f;\Delta_n^{\#},\min)\right\} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(x)|^{1/2}dx\right)^2.$$

この定理は Gleason [2] の示した積分の近似に関する結果を利用して証明できる。

関数 f の**台形和**を

$$T(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})\frac{1}{2}(f(s_{i-1}) + f(s_i))$$

によって定める。

定理 2　f'' が存在し有界であり、ほとんどすべての点で連続であるとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\int_a^b f(x)dx - T(f;D_n)\right\}\\ = \ &-\frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a)).\end{aligned}$$

台形和に合うように変形した Chui [1] の手法を利用することで、この定理を証明できる。

台形和の最適分割について考える。

$$(s_1,\ldots,s_{n-1}) \mapsto \left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta)\right|$$

は連続関数になることがわかり、n を固定すると $\left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta)\right|$ の最小値を与える Δ が存在する。そこで、この最適な分割を $\Delta_n^{t\#}$ で表す。この分割は n に対して一意的に定まるとは限らないが、上の近似の誤差は同じ値になるので、

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta_n^{t\#})\right|$$

は f と n に対して定まる値になる。この近似和に関して次の結果を得た。

定理 3 f は C^2 級であるとし、$f'' \geq 0$ また $f'' \leq 0$ を仮定すると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta_n^{t\#})\right| = \frac{1}{12}\left(\int_a^b |f''(x)|^{1/3}dx\right)^3.$$

f が凸ではない場合は関数が近似されていなくても台形和はよい近似になっている可能性があるので、この場合は排除した。

参考文献

[1] Charles K. Chui, Concerning rates of convergence of Riemann sums, Journal of Approximation Theory, 4 (1971) 279–287.

[2] Andrew M. Gleason, A curvature formula, Amer. J. Math., 101 (1979) 86–93.

[3] H. Tasaki, Convergence rates of approximate sums of Riemann integrals, preprint.