Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体の幾何学

田崎博之　筑波大学数理物質科学研究科

Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体の集まりが対称空間の構造を持つことを利用して、鏡映部分多様体による Crofton の公式を定式化する。

定義 1 微分多様体 M の各点 $x \in M$ に対して微分同型写像 $s_x : M \to M$ が定まっていて次の (1) から (4) を満たすとき、M を**対称空間**と呼ぶ。

(1) $s_x(x) = x$,

(2) $s_x(s_x(y)) = y$,

(3) $s_x(s_y(z)) = s_{s_x(y)}(s_x(z))$,

(4) 任意の $x \in M$ はある近傍 U を持ち、$y \in U$ が $s_x(y) = y$ を満たすならば $y = x$ が成り立つ。

さらに M が (擬)Riemann 多様体であり各 s_x が等長変換のとき、M を **(擬)Riemann 対称空間**と呼ぶ。

Leung は Riemann 多様体内の鏡映部分多様体を次のように定義した。

定義 2 完備 Riemann 多様体の対合的等長変換の固定点の連結成分を**鏡映部分多様体**と呼ぶ。

定理 3 Riemann 対称空間 M の等長変換全体の成す Lie 変換群の単位連結成分を G で表わす。M の鏡映部分多様体 B に対して

$$\mathcal{R}(B) = \{gB \mid g \in G\}$$

とおくと、$\mathcal{R}(B)$ は対称空間の構造を持つ。M がコンパクト型 Riemann 対称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ もコンパクト型 Riemann 対称空間になる。M が非コンパクト型 Riemann 対称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ は半単純型擬 Riemann 対称空間になる。

M が Euclid 空間のとき、任意のアフィン部分空間は鏡映部分多様体になる。そこでアフィン部分空間 B をとる。$\mathcal{R}(B)$ には G 不変測度 μ が存在する。$k + \dim B \geq \dim M$ を満たす k に対してある定数 σ_k が存在し、M の k 次元部分多様体 N に対して

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \sigma_k \mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。これが古典的な Crofton の公式である。

ここでは M がコンパクト型 Riemann 対称空間の場合と非コンパクト型 Riemann 対称空間の場合に、$\mathcal{R}(B)$ による Crofton の公式を考えたい。コンパクト型の場合は $\mathcal{R}(B)$ の Riemann 計量から定まる G 不変測度を使って Crofton の公式を定式化できる。非コンパクト型の場合も $\mathcal{R}(B)$ の擬 Riemann 計量から定まる G 不変測度を使って Crofton の公式を定式化できる。ただし、その証明には次の擬 Riemann 計量に関する余面積公式が必要になる。

定理 4 $f : M \to N$ を擬 Riemann 多様体間の C^∞ 級写像とし、ϕ を M 上の μ_M 可測関数とする。さらにほとんどすべての $y \in N$ について $f^{-1}(y)$ は M の擬 Riemann 部分多様体になると仮定する。このとき、N の元 y に対して $\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x)$ を対応させる関数は N 上の μ_N 可測関数になる。さらに、ϕJf が M 上 μ_M 可積分であるか、または $\phi \geq 0$ のとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)}(x) \right) d\mu_N(y) = \int_M \phi(x) Jf(x) d\mu_M(x).$$

(Jf は Jacobian の一般化であり Riemann 多様体の場合と同様に定義できる。)

上の余面積公式を利用して次の Crofton の公式を証明できる。

定理 5 M を (非) コンパクト型 Riemann 対称空間とし、B を M の鏡映部分多様体とする。$\dim N + \dim B \geq \dim M$ を満たす M の部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \sigma_B(T_x N) d\mu(x).$$

(ただし、$\sigma_B(T_x N)$ は B と $T_x N$ に対して定まる積分量である。)